中国科学:信息科学 2026 年 第 56 卷 第 11 期: 3010–3029
SCIENTIA SINICA Informationis
评述

复杂目标电磁数值计算方法综述: 从可算到可信

胡俊*, 赵冉, 曹灏杰, 杨雄, 林培灵, 江明

电子科技大学电子科学与工程学院, 成都 611731
* 通信作者. E-mail: hujun@uestc.edu.cn

收稿日期: 2026–06–07; 修回日期: 2026–07–30; 接受日期: 2026–08–14; 网络出版日期: 2026–10–28

国家自然科学基金 (批准号: 62231007) 资助项目

摘要 电磁数值计算方法是连接电磁理论与现代工程应用的重要桥梁, 在天线与射频系统设计、电磁散射、无线通信等领域发挥着关键作用. 本文围绕电磁数值计算 "从可算到可信" 的发展主线, 对相关关键技术的发展进行了系统综述. 首先, 回顾了电磁求解方法从解析方法、近似方法到全波数值计算方法与快速求解方法的发展历程, 重点总结了多层快速多极子算法在突破大规模电磁问题计算瓶颈中的关键作用. 尽管多层快速多极子算法显著提升了电大尺寸问题的求解能力, 但对于复杂多尺度、多材质目标, 传统单一区域算法仍难以兼顾计算效率与精度. 针对这一问题, 综述了区域分解方法的发展现状, 包括基于等效原理的区域分解方法、重叠型区域分解方法以及非重叠型区域分解方法, 并分析了其在复杂系统电磁分析中的显著优势. 在实现复杂电磁问题高效求解的基础上, 进一步面向工程应用中高置信度电磁仿真的需求, 重点介绍了以后验误差估计与自适应加密为核心的网格与算法融合可信计算技术. 最后, 对全文内容进行总结, 并对可信电磁计算的未来发展进行展望.

关键词 电磁数值计算, 多层快速多极子, 区域分解, 自适应加密, 可信电磁计算

1 引言

随着天线、射频及无线通信等领域的快速发展, 复杂电磁系统的分析与设计对仿真精度与效率提出了更高要求. 电磁求解方法作为连接电磁理论与工程应用的重要桥梁, 旨在利用解析方法、近似方法以及全波数值方法, 对电磁场、电磁波及其与材料、结构和系统之间的相互作用进行建模与分析, 已成为现代电磁工程不可或缺的核心支撑技术. 其中, 数值计算方法目前已能实现从直流到光学频段的电磁问题精确计算, 其应用尺度可从亚原子级延伸至星系级, 广泛应用于天线与射频系统设计、电磁散射、无线传播、雷达遥感、生物电磁学等诸多前沿领域. 因此, 深入探讨电磁数值计算领域的发展脉络、核心方法与未来趋势, 对于推动相关理论与技术的创新具有重要学术意义与工程价值.

在过去的七十多年里, 电磁计算方法经历了从解析推导到数值仿真, 从处理简单形状物体到高效求解复杂系统问题的发展过程, 其具体可划分为以下四个关键阶段 [1]. (i) 解析解阶段. 在计算机普及之前, 电磁问题的解决主要依赖于数学物理方程的解析推导. 研究者主要通过分离变量法和特殊函数 (如贝塞尔函数和勒让德多项式) 来寻求麦克斯韦方程组在简单几何边界和区域下的解析解 [2]. 其中最著名的研究工作是 1908 年提出的

引用格式: 胡俊, 赵冉, 曹灏杰, 等. 复杂目标电磁数值计算方法综述: 从可算到可信. 中国科学: 信息科学, 2026, 56: 3010–3029, doi: 10.1360/SSI-2026-0258
Hu J, Zhao R, Cao H J, et al. Review of numerical methods for electromagnetic computation of complex targets: from efficient computation to trustworthy simulation. Sci Sin Inform, 2026, 56: 3010–3029, doi: 10.1360/SSI-2026-0258

© 2026《中国科学》杂志社



图 1　(网络版彩图) 本文的逻辑结构示意图.

Figure 1　(Color online) Schematic diagram of the logical framework.

米氏散射 (Mie scattering) 理论 [3]. 这一阶段的成果虽然在几何适用性上受到极大限制, 但为后续数值算法的验证提供了标准参考解. (ii) 近似方法阶段. 随着工程电磁问题不断向电大尺寸与复杂几何结构发展, 传统依赖解析解的理论方法已难以满足实际复杂目标的分析需求. 于是, 研究者开发了一系列近似求解技术. 一类是以几何光学 (geometrical optics, GO) [4] 和物理光学 (physical optics, PO) [5,6] 为代表的高频渐近法. 然而, 这类方法在边缘、尖角等绕射区域的电磁场分析中存在明显局限. 为弥补这一不足, 研究者进一步发展出几何绕射理论 (geometrical theory of diffraction, GTD) [7] 与物理绕射理论 (physical theory of diffraction, PTD) [8]; 另一类是基于变分原理和摄动法的近似 [9], 用于处理腔体和波导中的微扰问题. 这些方法极大地扩展了可求解电磁问题的范围. (iii) 全波数值计算阶段. 20 世纪 60 年代中期至 80 年代, 计算机的出现促使电磁计算研究进入了全波数值解时代. 这一阶段的重要标志是有限元法 (the finite element method, FEM) [10]、时域有限差分法 (the finite-difference time-domain method, FDTD) [11] 和矩量法 (the method of moments, MoM) [12] 等主流数值算法的相继建立. (iv) 快速求解算法阶段. 20 世纪 90 年代, 以快速多极子算法 (fast multipole method, FMM) [13] 和多层快速多极子算法 (multilevel fast multipole algorithm, MLFMA) [14] 为代表的多种快速算法相继问世. 这些算法能够以比传统数值方法快几个数量级的速度求解麦克斯韦方程, 其时间和内存复杂度降低至 $O(N\log N)$. 这一突破标志着电磁数值计算方法具备了求解数千万甚至上亿个未知量的能力.

尽管 MLFMA 的提出突破了电大问题的计算瓶颈, 使电大目标的全波精确求解成为可能, 但随着工程应用的不断深化, 电磁数值计算方法仍面临诸多挑战. 实际工程问题往往不仅未知量规模巨大, 而且呈现出显著的多尺度特征, 即目标中不同组成部分的电尺寸跨越多个数量级, 或者不同区域的材料电磁参数差异较大. 不同尺度的结构和不同介质区域通常具有不同的离散精度要求. 传统快速算法在求解此类问题时, 往往难以同时兼顾计算效率与精度. 针对这类问题, 区域分解方法 (domain decomposition method, DDM) [15~18] 逐渐发展起来, 通过将复杂问题的求解区域划分为多个子区域并进行协同求解, 实现了复杂多尺度电磁问题的高效求解.

MLFMA 与 DDM 的发展显著提升了复杂电磁问题的求解规模与分析能力, 但如何保证复杂电磁问题仿真结果的精度与可靠性, 实现面向复杂场景的可信计算, 仍是工程应用中的迫切需求, 并已成为当前电磁数值计算方法的重要研究方向. 多极子方法与区域分解方法主要关注数值求解过程中算法误差的控制. 但实际工程中的数值结果可靠性不仅取决于求解算法本身, 还与模型的离散空间, 即网格和定义于其上的基函数空间密切相关. 若离散空间无法充分刻画目标的几何细节或电磁场变化特征, 即使求解算法本身足够精确, 所得结果仍可能偏离真实解. 因此, 如何针对复杂模型生成高质量离散网格, 以及如何准确评估数值结果是否满足预期精度要求, 已成为电磁数值计算方法进一步发展的关键. 当前, 后验误差估计与自适应优化方法为解决上述问题提供了重要途径 [19]. 该类方法通常从粗网格出发, 在求解过程中通过误差估计识别误差较大的区域, 并对这些区域进行局部优化, 随后重新进行数值求解. 上述过程不断迭代, 直至达到目标精度, 从而以较低的计算代价实现高精度的数值仿真.

基于上述背景, 本文围绕 “从可算到可信” 这一主线, 对电磁数值计算方法中的关键技术进展进行系统梳理与分析. 首先, 系统总结 MLFMA 的发展历程及其在突破大规模电磁问题计算瓶颈中的核心作用; 其次, 综述面向复杂多尺度问题的区域分解方法及其研究进展; 随后, 重点讨论误差估计与自适应加密技术; 最后, 对全文进行总结, 并结合当前研究现状, 对后续值得关注的问题进行展望. 图 1 直观呈现了本文的逻辑架构.

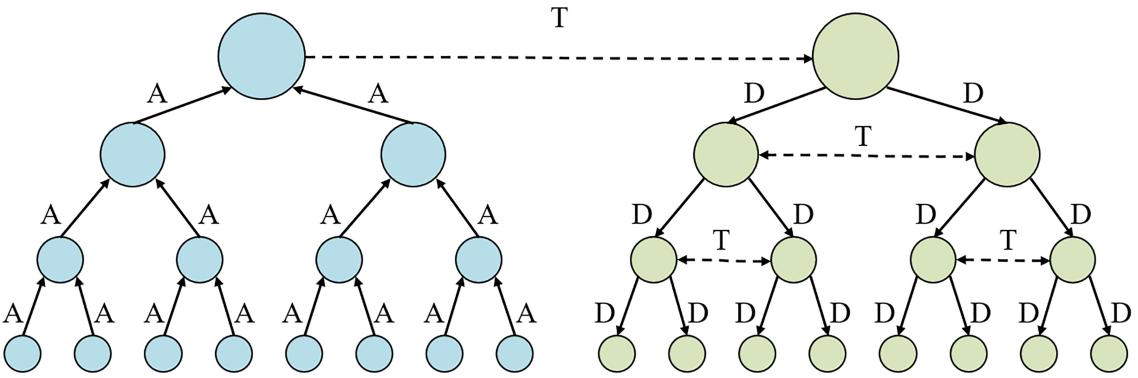

图 2　(网络版彩图) MLFMA 子散射体间互耦示意图.

Figure 2　(Color online) Schematic diagram of mutual coupling between sub-scatterers in the MLFMA.

2　多层快速多极子方法 —— 突破电大目标的计算瓶颈

20 世纪 90 年代, 积分方程方法在复杂目标电磁分析领域取得了突破性进展. 其中最具代表性的成果之一, 便是被誉为 “20 世纪十大算法” 之一的 FMM [20]. 1990 年, 耶鲁大学 Rokhlin 教授提出了适用于二维声波散射积分方程的 FMM [13], 通过多极展开突破了 Green 函数直接计算带来的复杂度瓶颈, 迅速引起了学术界的广泛关注. 在其问世不久, 包括 V. Rokhlin 在内的众多学者, Engheta 等 [21], Coifman 等 [22], Hamilton 等 [23], Song 和 Chew [24], Lu 和 Jin [25] 以及 Bindiganavale 和 Volakis [26,27] 等对其进行了理论完善与应用拓展.

快速多极子方法在电磁领域的大规模工程化应用, 则以 MLFMA 的提出为重要标志. 其中, 以伊利诺伊大学 Chew 教授课题组的工作最具里程碑意义 [14]. 1997 年, Song 等 [14] 系统性地论述了 MLFMA 的数学架构. 他们通过引入递归的树状结构, 实现了耦合场信息在不同层级之间的高效传递, 从而将大规模问题的计算复杂度降低至 $O(N\log N)$ 量级. 这一突破显著提升了积分方程方法仿真电大尺寸目标的能力, 使基于全波方法精确求解电大电磁问题成为可能. 图 2 展示了 MLFMA 中子散射体间互耦关系示意图. 在该理论基础上, Chew 课题组进一步开发了 FISC (fast Illinois solver code) 软件 [28]. 该软件展现出了卓越的计算能力, 在当时的高性能工作站上, 已能处理未知量达数百万的电磁散射问题. 电子科技大学 Hu 课题组在国内率先开展并突破了相关研究 [29,30]. 图 3 展示了采用 MLFMA 求解得到的飞机模型表面电流分布. 在 5 GHz 工作频率下, 该模型电尺寸约为 294 个波长, 离散后未知量达到 12611214. 若采用传统矩量法求解, 约需 118 万 GB 的存储内存; 而采用 MLFMA 后, 内存占用约 71 GB, 仅为前者的 1/16620, 显著降低了大规模电磁问题的计算资源消耗.

进入 21 世纪, 随着高性能计算平台向多核化、集群化以及异构化方向发展, MLFMA 的高效并行实现逐渐成为进一步扩大其可求解问题规模的关键. 由于 MLFMA 采用的是分层树结构, 不同层级在数据规模与计算模式上存在显著差异, 因此其高效并行实现面临较大挑战. 早期基于空间盒划分的并行策略在细层具有良好的并行性, 但在粗层由于计算单元数量急剧减少, 难以充分利用计算资源, 从而制约了整体性能 [31,32]. 针对这一问题, Velamparambil 和 Chew [33] 提出一种基于 MLFMA 的混合并行方案, 其在细层采用基于空间盒的并行策略, 在高层引入远场方向图的分布式处理, 从而在一定程度上改善了粗层计算中的负载均衡问题. 随后, 随着融合分布式与共享内存模型的计算架构广泛应用, 混合 MPI-OpenMP 并行策略得到了广泛研究与应用 [34,35]. 该策略通过进程与线程的协同调度, 有效提升了资源利用率, 并降低了通信与同步的开销. 北京理工大学盛新庆团队研发了高效灵活的混合 MPI-OpenMP (message passing interface-open multi-processing) 并行算法, 实现了对超过十亿未知量、上千波长超电大目标的全波求解 [35]. 这一成果表明, 在现代超算架构支持下, MLFMA 已具备处理超大规模复杂电磁问题的工程能力. 需要指出的是, 上述并行 MLFMA 实现主要建立在通用 CPU 架构之上. 尽管基于 CPU (central processing unit) 的并行技术已显著提升了 MLFMA 的计算规模, 但受限于 CPU 在吞吐率与数据并行能力方面的硬件特性, 其进一步加速仍面临较大挑战. 近二十年来, 图形处理器 (GPU) 凭借其在大规模线程并行与高吞吐率方向的优势, 为 MLFMA 的高效实现提供了新的发展方向. Cwikla 等 [36] 提出了低

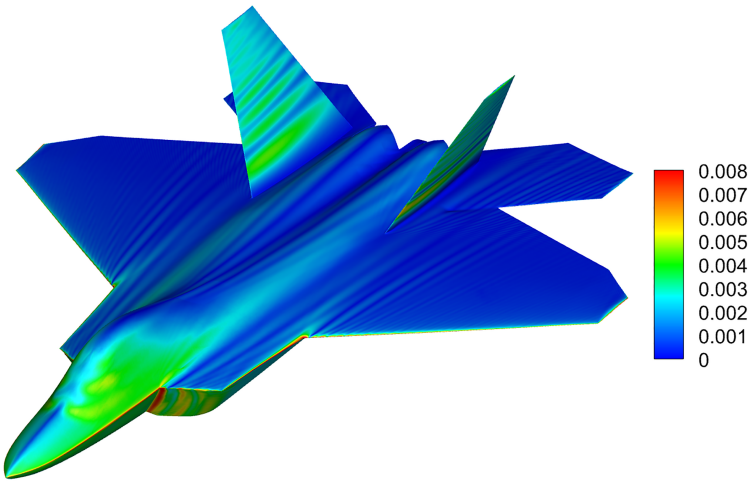

图 3　(网络版彩图) 基于 MLFMA 仿真得到的飞机表面等效电流图.

Figure 3　(Color online) Equivalent electric current distribution on the aircraft surface calculated by MLFMA.

频 MLFMA 的 GPU 并行方案. 随后, Guan 等 [37] 提出基于 OpenMP-CUDA (OpenMP-compute unified device architecture) 的并行策略, 通过对空间组及其远场方向图进行层次化并行划分, 保证了 GPU 计算的较高的吞吐率. Tran 等 [38] 和 Phan 等 [39] 也开展了相关研究. 但上述研究中 MLFMA 求解规模不超过数百万未知量, 所使用 GPU 数量也不超过数十个. 北京理工大学盛新庆团队发展了面向 GPU 异构平台的三元并行策略. 该方法结合 MLFMA 不同层级的计算特点, 采用 CPU-GPU 异步协同计算模式, 使用数千个 GPU 成功求解了超过百亿未知量、上万波长电尺寸的超大规模电磁散射问题, 进一步提升了 MLFMA 在极端规模电大电磁仿真中的并行求解能力 [40].

纵观其发展历程, 从 Rokhlin[41] 提出的静电问题快速算法雏形, 到 Chew 等 [14] 对 MLFMA 理论的完善, 再到如今面向亿级未知量的工程化应用, MLFMA 不仅突破了复杂目标精确建模的瓶颈, 更深刻地改变了电磁数值计算方法处理电大尺寸问题的技术路线.

3　区域分解方法 —— 实现复杂多尺度问题的高效求解

全波数值方法经过发展与完善逐渐成为解决工程电磁问题的核心工具, 展现出良好的精度与鲁棒性. 然而, 随着工程应用场景的复杂化, 仿真对象的多尺度特征越来越突出. 例如, 电大复杂平台上的天线辐射分析、高速集成电路中的电磁封装与信号完整性评估等系统级仿真任务, 通常同时存在电小精细结构与电大光滑结构, 几何尺度跨越显著. 这些特征对数值建模与高效求解构成了严峻挑战. 传统单域求解方法在处理此类问题时表现出明显的局限性. 一方面, 同时兼顾微小的精细结构与宏观的电大尺寸主体, 不仅使几何建模与网格剖分成本大幅增加, 高质量共形网格的生成也变得极为困难. 另一方面, 尺度差异与材料非均匀性会产生严重病态的系统矩阵, 导致迭代求解收敛缓慢甚至不收敛. 此外, 随着问题规模的持续增长, 传统单域方法不仅面临显著的内存压力, 其并行扩展性能也逐渐难以满足大规模计算需求 [42].

针对上述复杂多尺度电磁问题所带来的几何建模困难、求解效率下降以及并行受限等挑战, DDM 逐渐发展起来. 其核心思想是将复杂的原计算域划分为若干相对简单的子区域, 并在子区域交界面引入传输条件 (transmission conditions, TC) 以保证物理场的连续性, 从而将宏观复杂问题转化为一系列规模更小、结构规整的子问题. 这种 “分而治之” 的思想不仅能够有效降低复杂几何建模与高质量网格生成的难度, 还允许针对不同子区域的特征灵活选取最合适的离散方法与求解策略, 从而显著提升算法的灵活性. 此外, DDM 天然适合并行实现, 在分布式与异构计算平台上具有良好的可扩展性, 因此已广泛应用于电大尺寸目标散射分析、复杂平台电磁兼容以及大型天线系统仿真等问题 [18, 43]. 通过合理设计传输条件与预处理策略, DDM 还能在一定程度上改

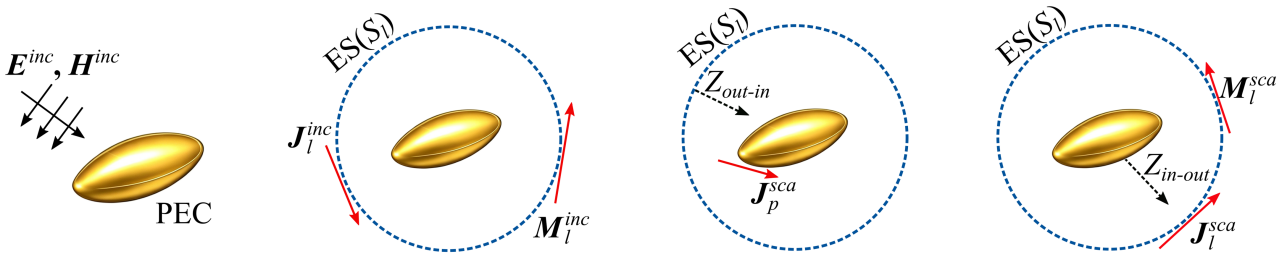

图 4　(网络版彩图) 等效原理算子构建示意图.

Figure 4　(Color online) Schematic diagram of EPA operators construction.

善离散系统的谱分布特性, 提升迭代求解的收敛效率. 因此, DDM 已逐渐发展成为解决复杂多尺度电磁问题的重要技术路线之一. 下面分别从积分方程方法与有限元方法两个角度, 对其技术演进与发展现状进行综述.

3.1　基于积分方程的区域分解方法

基于积分方程的 DDM 经过长期发展, 已逐渐演化出多种具有代表性的技术路线. 根据子区域之间的耦合方式与交界面处理策略的不同, 现有方法大体可分为三类: 基于等效原理的区域分解方法 [44~51]、重叠型区域分解方法 [52~58] 以及 非共形非重叠型区域分解方法 [16~18,59~74]. 其中, 基于等效原理的方法通过在子区域边界构造等效源实现区域间信息传递, 重叠型区域分解方法通过在相邻子区域间引入重叠区域来增强耦合稳定性, 非共形非重叠型区域分解方法则进一步放宽了对区域边界网格的要求, 在复杂结构建模与多尺度问题处理中展现出更高的灵活性与适应性. 下面围绕上述三类方法, 系统综述近二十年来的国内外研究进展.

3.1.1　基于等效原理的区域分解方法

基于等效原理的区域分解方法 由 Li 等 [44,45] 提出, 其核心思想是依据惠更斯原理, 在每个子区域外构造封闭等效面, 将区域内部电磁耦合转化为等效面上的电、磁流相互作用, 子区域间的互耦则通过这些等效面之间的相互作用来计算, 其算法示意图如图 4 所示. 由于等效面网格规则且未知量较少, 该方法通常具有较好的矩阵性态, 并且可以复用相同单元的散射矩阵以提升效率, 尤其适用于阵列结构分析. 在此基础上, Ylä-Oijala 等 [46] 提出切向等效原理算法 (tangential equivalence principle algorithm, T-EPA), 通过引入切向积分 – 微分算子提高了数值稳定性. 为进一步降低计算规模, Shao 等 [47,48] 引入特征基函数 (characteristic basis function, CBF) 以压缩等效面未知量, 并结合叠层 LU 分解 (hierarchical LU decomposition, H-LUD) 降低散射矩阵求解复杂度. 此外, Su 等 [49] 将 EPA 与旋转体基函数结合, 扩展至多旋转体目标分析.

与 EPA 思想相近的方法还包括广义传输矩阵 (generalized transition matrix, GTM) [50] 和 Green 算子线性嵌入方法 (linear embedding method of Green operator, LEGO) [51], 均基于等效原理实现子区域独立建模.

3.1.2　基于积分方程的重叠型区域分解方法

积分方程重叠型区域分解方法 (overlapping DDM, ODDM) 通过在子区域间引入重叠缓冲区, 抑制人为截断导致的虚假边缘电流, 实现正确求解. 图 5 给出了 ODDM 与非重叠型区域分解方法的示意图. 早期工作中, Brennan 等 [52] 基于前后向迭代方案, 引入单边缓冲区保证电流连续性. 随后, Li 等 [53,54] 发展了基于多边缓冲区的 ODDM, 显著改善迭代收敛性. 在此基础上, Xi 等 [55] 结合 MLFMA 提出多区域迭代算法 (multi-region iterative method with multilevel fast multipole algorithm), 采用广义前后向策略加速子区域迭代收敛. 此外, 相关工作还研究了缓冲区电尺寸规模及传输条件等对算法性能的影响 [56,57]. 然而, 传统 ODDM 通常依赖较大的缓冲区, 导致未知量增加. 针对这一问题, Han 等 [58] 提出一种简洁的重叠型区域分解方法 (simply constructed ODDM, SODDM), 将缓冲区缩减至单层网格, 并通过引入重叠区电流连续性约束, 在降低计算规模的同时保持算法收敛性.

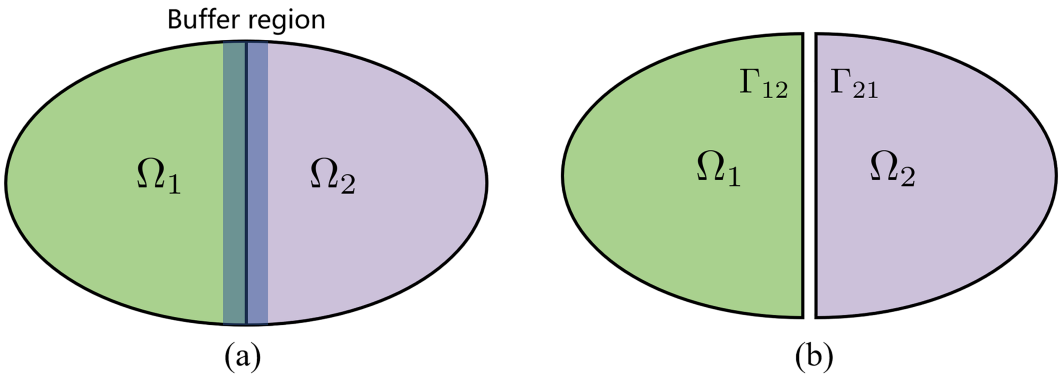

图 5　(网络版彩图) ODDM 与非重叠型区域分解方法示意图. (a) ODDM; (b) 非重叠型区域分解方法.

Figure 5　(Color online) Schematic diagrams of ODDM and the non-overlapping DDM. (a) ODDM; (b) non-overlapping DDM.

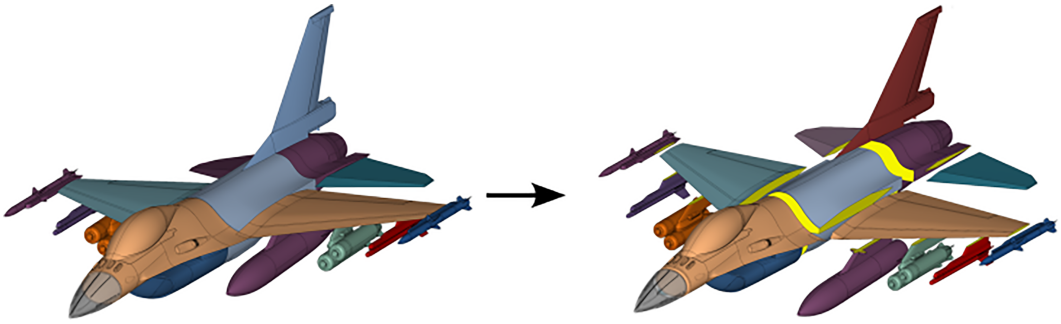

图 6　(网络版彩图) IE-DDM 示意图.

Figure 6　(Color online) Illustration of IE-DDM.

3.1.3　基于积分方程的非共形非重叠区域分解方法

尽管 ODDM 提高了计算效率, 但其通常要求子区域网格共形, 在复杂模型处理上仍存在不便. 为克服重叠型方法的局限性, Peng 等 [18] 率先提出了基于积分方程的非重叠非共形区域分解方法 (integral equation DDM, IE-DDM). 这类方法允许子区域在交界面上使用非共形网格, 极大地提升了几何建模的灵活性. 其在子区域交界面引入虚拟交界面和辅助电流 (如图 6 所示), 通过 Robin TC 确保电流连续性, 保证区域分解后问题的解与原问题等价. 同时, 使用黏连矩阵处理非共形网格. 该算法允许独立分区且在每个子区域内可以进行非共形网格划分, 减轻了复杂问题的几何建模负担. 为解决曲面网格中黏连矩阵构造困难的问题, Jiang 等 [59] 提出了逆算子自洽算法, 通过在非共形交界面上插值一组自洽平面波并反向重构传输矩阵, 从而避免了传统并集网格 (union mesh) 的复杂积分操作, 提高了算法的灵活性和稳定性. DDM 也被推广至介质问题, 例如, Peng 等 [60] 提出的广义混合场积分方程 DDM (generalized combined field integral equation DDM, GCFIE-DDM), Jiang 等 [61] 提出的电流磁流混合场积分方程 DDM (electric/magnetic current combined-field integral equation DDM, JMCIFE-DDM) 以及 Zhao 等 [62~64] 提出的 EFIE-PMCHWT-DDM (electric field integral equation-Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai-DDM) 和 IE-DDM-IBC (integral equation domain decomposition method with impedance boundary condition). 尽管 IE-DDM 通过非共形区域划分显著提高了复杂电磁问题建模的效率与灵活性, 但相邻子区域间虚拟界面的引入也会带来额外未知量.

与 IE-DDM 通过在相邻子区域边界设置虚拟界面实现子区域耦合的方法不同, Wang [65] 提出了一种无需虚拟界面的新型区域分解法. 然而, 该方法形成的系统矩阵条件数较差, 需借助有效的预处理技术以保证迭代求解的收敛性. 为改善这一问题, Peng 等 [16,17] 提出了积分方程间断伽辽金方法 (discontinuous Galerkin surface integral equation method, IEDG), 通过引入稳定因子来消除积累的不连续边缘电荷的影响, 从而有效改善矩阵性

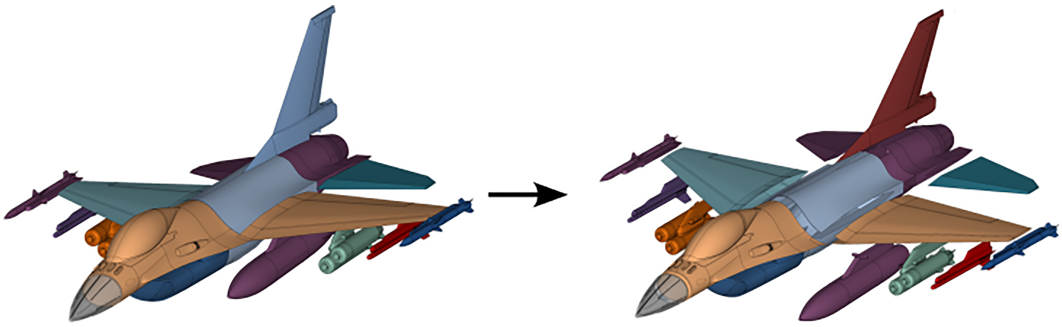

图 7　(网络版彩图) IEDG 示意图.

Figure 7　(Color online) Illustration of IEDG.

表 1　三种区域分解方法的特点比较.

Table 1　Comparison of characteristics of three domain decomposition methods.

Method	Buffer region/virtual interface required	Nonconformal mesh supported	Additional unknowns introduced
ODDM	Yes	No	Yes
IE-DDM	Yes	Yes	Yes
IE-DG	No	Yes	No

态. 如图 7 所示, IEDG 方法无需引入虚拟界面, 并允许各子区域采用独立的非共形网格剖分, 具有较高的几何建模灵活性. 表 1 直观对比了 ODDM、IE-DDM 与 IEDG 方法的特性. 在此基础上, Han 等 [66] 提出了一种改进的 IEDG 实现方案. 该方法基于电流连续性方程, 通过内罚项使非共形交界面处的电流连续性以弱形式满足, 从而避免了重合边界的计算, 简化了算法实现.

针对薄涂层目标, Huang 和 Sheng [67] 将自对偶积分方程 (self-dual integral equation, SDIE) 与 IEDG 方法结合, 提出了三种变体: 对称型 (symmetric discontinuous Galerkin, SDG)、反对称型 (antisymmetric discontinuous Galerkin, ADG) 和非对称型 (nonsymmetric discontinuous Galerkin, NDG). 通过数值实验, 他们发现面 – 线积分项与内罚项在保证边界电流连续性方面具有相似作用, 因此可以省略其中之一, 并据此构造了效率更高的 NDG-SDIE. 针对介质体散射问题, Kong 和 Sheng [68] 基于切向场方程 (combined tangential field, CTF) 推导了针对均匀介质的 IEDG 公式. 他们发现, 与理想导体目标中内罚项配合块对角预条件能够改善收敛性的情况不同, 对于介质体问题, 内罚项反而会削弱块对角预条件的效果. 这表明, 内罚项的数值作用与积分方程形式和物理模型密切相关. 对于非均匀介质, Zhang 和 Sheng [69, 70] 发展了不连续伽辽金体积分方程 (discontinuous Galerkin volume integral equation, DGVIE) 方法. 该方法不仅允许对非均匀介质体的不同区域使用非共形网格, 而且数值结果表明, 相较于采用 SWG (Schaubert-Wilton-Glisson) 基函数的传统体积分方程 (volume integral equation, VIE) 方法, 其在高介电常数情况下具有更快的迭代收敛速度. 针对包含薄介质层的复合结构, Li 等 [71] 提出了基于简化棱柱矢量 (simplified prism vector, SPV) 基函数的 VSIE-DDM. 其中, SPV 基函数能够有效缓解薄层介质结构中的过剖分问题, 而 DDM 的引入不仅允许子区域独立建模与非共形网格剖分, 还可作为一种高效预条件改善系统矩阵性态, 从而加速迭代收敛. 对于频率选择表面等周期性结构, 该方法仅需对单个子区域进行建模与网格划分, 再通过平移与重复生成整体阵列, 从而显著降低了内存消耗与计算时间.

针对多材质、多尺度结构连接的高效求解难题, Martín 等 [72] 将 DG (discontinuous Galerkin) 方法与 JMCFIE (electric magnetic current combined-field integral equation) 相结合, 提出了一种用于任意形状分段均匀物体电磁建模的方法. 该方法通过结合 JMCFIE 中隐含的边界条件与弱施加的内罚项, 在无需对多材料结点进行特殊处理的情况下, 以弱形式施加了多材料交界处法向电流连续性. 针对表面 – 导线结构, Chen 等 [73] 提出了一种适用于表面 – 导线混合结构的 IEDG 方法. 该方法允许导线与表面采用独立的非共形网格划分, 并通过在连接区域

引入半基函数保证连接处的电流连续性. 该方法摆脱了连接点必须与表面网格顶点重合的限制, 显著降低了密集过孔结构中的网格生成复杂度与计算资源消耗. 进一步地, Yan 等 [74] 将该思想推广至更为复杂的多层电路结构, 提出了一种适用于多层电路仿真的 DG- 混合势积分方程 (DG-mixed potential integral equation, DG-MPIE) 方法. 该方法结合了三角形单元、矩形单元和线单元构建混合非共形网格, 允许对印刷电路板和封装中不同尺度的结构 (如平面走线和垂直过孔) 进行独立网格剖分. 数值结果表明, 该方法在保证计算精度的同时, 可有效减少未知量并提升仿真效率.

3.2　基于有限元的区域分解方法

基于积分方程的区域分解方法 有效提升了电大尺寸目标的仿真效率, 但在面对非均匀介质与精细结构时, 有限元法凭借其对复杂几何与材料的强大建模能力表现出极高的灵活性, 而形成的稀疏矩阵结构又为其带来了显著的计算效率优势. 复杂电磁工程目标通常兼具宏观平台与微观精细结构, 这种多尺度特性使得单域有限元法面临网格生成困难与计算成本过高等问题. 为突破这一瓶颈, 区域分解方法 [75, 76] 为有限元构建了更高效的求解框架 [77]. 该方法通过 “分而治之” 的策略, 将全局问题拆解为局部子问题, 允许各子区域根据局部电磁特性或几何特征独立生成网格. 该方法在有效解决多尺度建模难题的同时, 通过预处理技术降低矩阵条件数, 改善迭代算法收敛性, 更支持分布式并行计算以高效处理超大规模电磁问题. 目前, 基于有限元的区域分解方法 (finite element method-domain decomposition method, FEM-DDM) 大致可以分为两类: 非重叠型区域分解方法 [78~92] 和重叠型 (嵌入式) 区域分解方法 [93~96].

3.2.1　非重叠区域分解方法

非重叠型 FEM-DDM 通过将复杂求解域划分为若干互不重叠的子区域, 每个子区域之间只通过交界面进行信息交换. 这种做法能够显著降低单个子区域的计算规模, 并表现出显著的并行优势. 目前, 非重叠型 FEM-DDM 通常分为两种类型: 基于 Schur 补的有限元撕裂对接法 (finite element tearing and interconnecting algorithm, FETI) [78~85] 和基于 Schwarz 算法的 FEM-DDM [86~91].

最初基于 Schur 补的 FETI 方法通过在子区域界面引入拉格朗日乘子来保证场量的连续性, 避免了在子区域内部引入额外未知量 [78]. Wolfe 等 [79] 随后将其引入到三维矢量波动方程的求解中. 在 FETI 的基础上, Farhat 等 [80, 81] 进一步提出 dual-primal FETI 方法 (dual-primal finite element tearing and interconnecting, FETI-DP), 该方法通过选取少量角点作为原始变量, 并结合拉格朗日乘子强加界面连续性. Jin 等 [82~84] 将该方法扩展至电磁学领域并进一步发展了基于双拉格朗日乘子的 FETI-DP 方法, 缓解传统 FETI-DP 方法在高频情况下子区域的谐振问题, 显著提升了算法对高频问题的计算能力. 然而早期 用于电磁仿真的 FETI 方法要求交界面网格严格共形, 限制了其在复杂模型中的应用. 为了提高复杂目标高保真建模能力, Xue 和 Jin [85] 进一步发展了支持非共形网格的 FETI-DP. 该方法通过基函数展开交界面对偶变量, 并引入主 – 从策略处理非共形角点, 消除了交界面处网格共形的约束, 支持各子区域网格独立剖分.

Després 等 [86] 于 1992 年将基于 Schwarz 思想的非重叠型 FEM-DDM 引入时谐麦克斯韦方程的求解, 并利用一阶 Robin 传输条件 (first order Robin transmission condition, FOTC) 实现子区域间的信息交换. Lee 等 [88, 92] 进一步提出非重叠非共形 FEM-DDM, 该方法通过在交界面引入表面辅助变量, 允许相邻子区域采用非匹配网格, 使各子区域能够独立剖分, 从而提高了复杂模型的网格生成与建模灵活性. 针对一阶传输条件难以处理凋落模的问题, 二阶传输条件 (second order transmission condition, SOTC) 得到进一步发展. Peng 和 Lee [89, 90] 通过内部惩罚公式引入角边惩罚项, 重塑了 SOTC 在非共形 FEM-DDM 中的优势, 使其成为复杂电磁工程问题高保真建模的成熟方法. 针对大型复杂超材料的全波仿真难题, Hu 等 [91] 提出了一种基于 DDM 与单元特征库 (unit feature database technique, UFDT) 的大规模阵列问题计算方法. 该方法通过预先提取有限种类单元的耦合矩阵构建数据库, 从而避免对全部单元重复进行高成本计算, 为可重构智能超表面的快速设计与优化提供了高效工具.

3.2.2　重叠型 (嵌入式) 区域分解方法

在某些工程应用中, 目标结构可能包含可移动或可重构组件, 如天线阵列优化、电子设备布局调整等. 若采用非重叠型区域分解方法, 每次结构变化都需要重新生成整体网格, 人工成本较高. 为解决这一问题, Lee 等 [93,94] 通过引入体等效源和端口等效源, 使重叠区域的场互相耦合, 提出了嵌入式 FEM-DDM, 该方法允许内嵌区域网格与背景区域网格重叠, 成功应用于多层印刷电路板、手机等复杂结构的电磁仿真. 电子科技大学 Hu 等 [95] 进一步提出了适用于非均匀背景介质的嵌入式 FEM-DDM, 并引入继承计算策略提高效率. 该方法在复杂系统多工况仿真场景下优势明显 [96], 当局部结构发生变化时, 仅需更新互耦矩阵信息, 而自耦合矩阵数据可以重复利用, 从而显著降低计算成本.

3.3　多区域多求解器方法

随着电磁系统复杂性的日益增加, 单一数值方法往往难以在全域范围内保证最优的计算效率. 多区域多求解器方法 [43,96~101] 通过将不同数值方法耦合在统一计算框架中, 使每个子区域能够选择最适合的求解器. 例如, 在复杂散射问题中, 可以在目标区域使用有限元法, 而在自由空间区域采用积分方程方法. 该方法既融合了有限元法在处理非均匀介质与复杂结构时的建模灵活性, 又发挥了积分方程在处理开放区域问题时的计算优势.

近年来, 多区域多求解器技术不断发展, 能够支持复杂电磁系统中不同子结构的独立建模与耦合计算, 为大规模多尺度问题的高保真仿真提供了重要技术基础. Lee 等 [43] 提出的多区域多求解器方法, 通过将复杂整机模型分解为多个有限元子区域和边界元子区域, 并利用边界条件进行耦合, 有效解决了复杂整机电磁仿真问题. Jin 等 [97,98] 分别提出基于 Robin 传输条件和 CFIE (combined-field integral equation) 的多求解器方案, 采用 Rao-Wilton-Glisson (RWG) 与 Buffa-Christiansen (BC) 函数混合测试以提高精度, 实现了复杂精细结构与电大尺寸目标的统一高效仿真. Sheng 等 [102] 提出基于几何感知的区域分解预条件技术, 改善了混合算法的迭代收敛性能. Hu 团队 [99,100] 提出的双重区域分解方法 (twofold DDM, TDDM), 创新融合了 FEM-BEM 与两级区域分解架构, 支持复杂部件的独立非共形剖分, 成功实现了千万级未知量全尺寸飞机模型的精准仿真, 验证了其解决极端多尺度工程问题的能力. 该团队进一步提出的非共形多区域多求解器算法 (multidomain and multi-solver method, MDMSM), 兼容嵌入式有限元、非重叠型区域分解与边界元区域分解, 允许不同物理特性的子区域采用各自最优的求解器, 有效解决了复杂目标辐射与散射计算问题 [96,101].

4　基于后验误差估计的可信计算

随着计算机辅助工程 (computer-aided engineering, CAE) 技术应用的不断深入, 实现可信计算的重要性日益凸显. 本文所述的可信计算, 是指针对特定物理问题采用数值方法获得计算结果, 并通过校核、验证与确认 (verification, validation and accreditation, VV&A) [103,104] 过程, 评估结果的可信度, 确保其能够满足工程应用需求的计算. 图 8 展示了电磁计算的校核、验证与确认过程示意图. 可信计算是经过校验的计算, 其核心目标是在给定工程需求下, 将计算误差控制在可接受范围内, 从而获得具有较高置信度、工程可用的仿真结果. 当结果精度未达到预期要求时, 需要对计算模型进行改进, 例如采用更密的网格剖分. 随后重新开展数值求解, 并再次执行 VV&A. 该过程循环迭代, 直至结果满足预先设定的精度指标.

目前已有理论与数值研究表明, 对于适定的电磁问题, 随着网格逐步加密, 其离散解能够收敛至真实解 [105]. 然而, 现代电磁问题日益呈现出宽带、复杂及多尺度的特点, 依赖全局网格加密的高精度求解策略往往需要付出极高的计算与存储代价. 一方面, 高频条件下电尺寸迅速增大, 导致离散未知量快速增长; 另一方面, 多尺度结构与局部奇异性使得解在空间上呈现显著的不均匀分布特征. 如果采用全局加密策略以达到目标精度, 可能会在解的平滑变化区域产生大量冗余未知量, 带来难以承受的时间与内存开销, 从而严重制约大规模问题的求解能力.

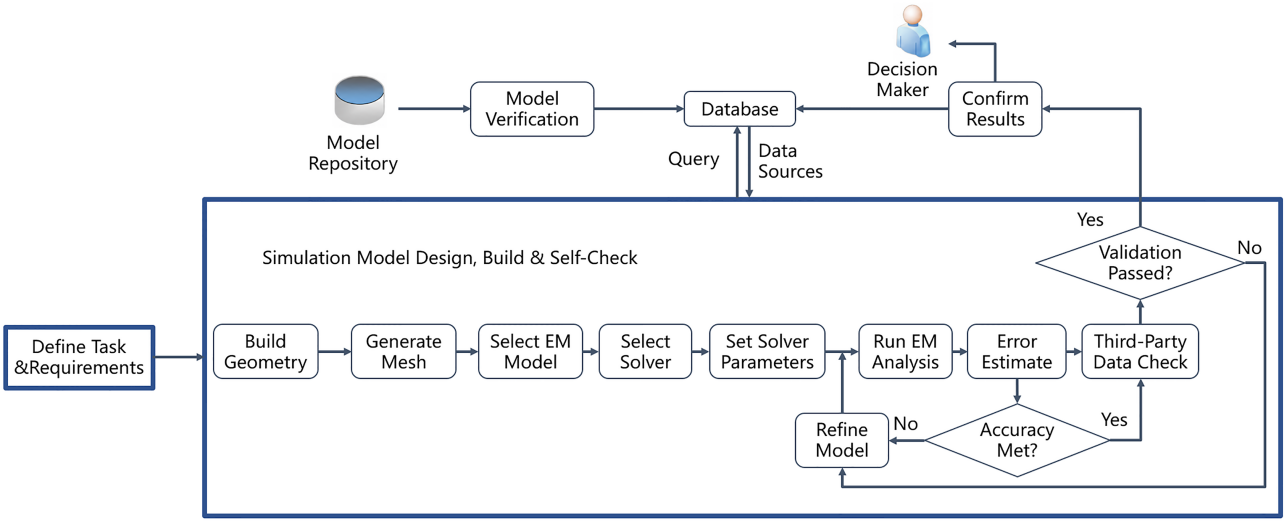

图 8　(网络版彩图) 电磁计算的校核、验证与确认过程.

Figure 8　(Color online) Process for verification, validation and accreditation of numerical electromagnetic computation.

相比之下, 自适应加密技术能够依据解的局部变化特征调整离散空间, 在场变化剧烈区域采用更高的离散分辨率, 而在变化平缓区域保持较粗离散, 从而在保证精度的前提下显著减少未知量. 因此, 得益于其高效性, 自适应加密方法受到了持续而广泛的关注. 其核心在于局部误差估计与误差控制. 其中, 误差估计用于评估各离散单元对整体误差的贡献, 从而为网格优化提供依据; 误差控制则依据误差分布, 在单元细化或粗化 (h 型优化)、基函数升阶 (p 型优化) 以及节点位置的优化 (r 型优化) 等技术间做出抉择, 并据此构建高效的自适应迭代流程, 同时设定合理的终止准则, 以避免过度加密带来的计算负担.

4.1　后验误差估计方法

根据是否依赖数值解的信息, 误差估计方法通常可分为先验 (*a priori*) 与后验 (*a posteriori*) 两类. 先验误差估计方法主要基于几何特征或经验准则 (如曲率、电尺寸等) 预测潜在强误差区域, 无需进行全波求解, 因而计算成本较低, 但难以准确反映真实解的局部分布特征, 适用性受到一定限制. 相比之下, 后验误差估计方法依赖于已获得的数值解来识别误差集中区域, 能够提供更可靠的误差指示, 是实现高效自适应优化的关键. 然而, 这类方法通常需要在精度与额外计算开销之间进行权衡, 其设计与实现仍是当前研究的重点之一.

4.1.1　积分方程后验误差估计方法

积分方程后验误差估计方法大体可分为三类: 基于场的误差估计方法 [105~111]、基于源的误差估计方法 [112~123] 以及面向目标的误差估计方法 [124,125]. 基于场的误差估计方法研究最为广泛, 其核心思想是利用边界条件残差来评估误差, 因此该类方法通常需要通过全局积分计算场强分布. 文献 [105] 在一定假设下证明了表面积分方程数值解误差的上下界可由残差刻画, 从而为基于场残差的误差估计提供了理论基础. 局部误差通过对边界条件残差进行测试得到. 然而, 由于伽辽金正交性, 当测试函数空间与求解所用函数空间一致时, 残差投影结果为零, 而实际数值误差显然不为零, 因此无法有效评估局部误差. 这表明误差评估过程不应完全依赖原有的求解空间或测试方式. 为此, Peterson [106] 采用 RWG 基函数离散和测试矩阵方程, 随后在单元中心计算残差作为误差估计, 相当于使用 delta 函数测试残差, 从而避免了与原空间相同. Bogdanov 等 [107] 及 Bibby 和 Andrew [108] 等进一步通过在单元内对残差进行积分来提高评估的稳定性. 该方法使用切向电场边界条件残差评估得到的单元误差如下:

$$\eta_n = \frac{\sqrt{\int_{S_n} |\mathbf{E}^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{s}(\mathbf{r})|^2 ds_n}}{\sqrt{\int_{S_n} |\mathbf{E}^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r})|^2 ds_n}}. \tag{1}$$

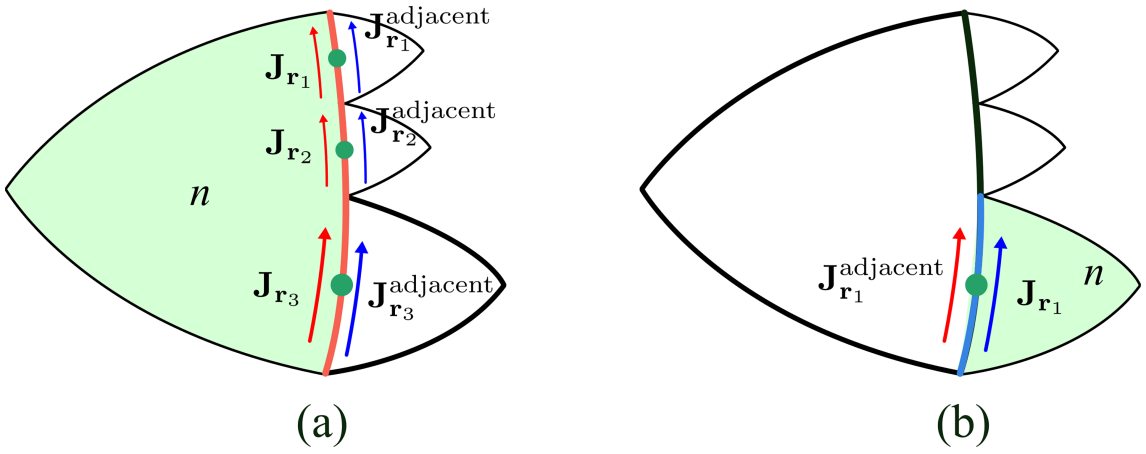

图 9　(网络版彩图) 非共形电流不连续性误差估计方法示意图. (a) 计算边对应于 MB-CRWG 的正三角形边; (b) 计算边对应于 MB-CRWG 的负三角形边.

Figure 9　(Color online) Schematic diagram of the nonconformal current discontinuity error estimator. (a) Calculation edge corresponds to a positive triangular edge of the MB-CRWG; (b) calculation edge corresponds to a negative triangular edge of the MB-CRWG.

另一方面, Tobon Vasquez 等 [109, 111] 和 Cao 等 [110] 将数值解投影至单元尺寸更小的参考网格上, 并在该参考网格上重新构造阻抗矩阵 $\left[\mathbf{Z}^{\text{ref}}\right]$ 与激励向量 $\left[\mathbf{V}^{\text{ref}}\right]$, 求得残差矩阵 $[\mathbf{R}]$ 为

$$[\mathbf{R}] = \left[\mathbf{Z}^{\text{ref}}\right]\left[\mathbf{J}^{\text{project}}\right] - \left[\mathbf{V}^{\text{ref}}\right], \tag{2}$$

其中 $\left[\mathbf{J}^{\text{project}}\right]$ 为投影电流, $[\mathbf{R}]$ 的第 n 行代表第 n 个基函数的残差误差.

尽管基于场的误差估计方法具有较强的鲁棒性, 但由于其依赖全局积分运算, 计算开销较大, 限制了其在工程中的应用. 为此, 研究者提出了多种基于源的低成本误差估计方法. 这类方法直接利用已求得的局部电流或电荷分布进行误差评估, 无需额外的全局场计算, 极大地提高了计算效率. 其中, 一类方法基于未知量及其相关物理量在单元间的不连续性 (或其导数的不连续性) 对误差进行评估 [112~119]. 例如, RWG 基函数、MB-CRWG (multibranch curvilinear Rao-Wilton-Glisson basis functions) 基函数等散度共形基函数并不强制满足单元边界处电流的切向连续性以及相邻单元间电荷的连续性, 因此这些不连续分量可作为有效的误差指示量. 基于 MB-CRWG 基函数的第 n 个单元的电流不连续性误差可定义为 [119]

$$\eta_n = \frac{\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3}\left|\mathcal{A}_{(n,l)}\right|}{\max\left|\mathbf{J}_t\right|} A_n. \tag{3}$$

如果第 n 个单元的第 l 条边对应 $f_{(n,l)}$ 的正三角形边, 则

$$\mathcal{A}_{(n,l)} = \frac{1}{M_{(n,l)}} \sum_{m=1}^{M_{(n,l)}} \hat{\mathbf{t}}_{(n,l)} \cdot \left(\mathbf{J}_{\mathbf{r}_m} - \mathbf{J}_{\mathbf{r}_m}^{\text{adjacent}}\right). \tag{4}$$

如果第 n 个单元的第 l 条边对应 $f_{(n,l)}$ 的负三角形边, 则

$$\mathcal{A}_{(n,l)} = \hat{\mathbf{t}}_{(n,l)} \cdot \left(\mathbf{J}_{\mathbf{r}_m} - \mathbf{J}_{\mathbf{r}_m}^{\text{adjacent}}\right), \tag{5}$$

其中 $|\mathbf{J}_t|$ 表示所有网格单元边中点处的最大切向表面电流密度, A_n 表示第 n 个单元的面积, $\hat{\mathbf{t}}_{(n,l)}$ 表示第 n 个单元的第 l 条边中点处的单位切向量, $M_{(n,l)}$ 表示与 MB-CRWG 基函数 $f_{(n,l)}$ 相关的负三角形的数量, $\mathbf{r}_m$ 对应于 $f_{(n,l)}$ 的第 m 个负三角形上重叠边的中点. 其示意图如图 9 所示.

Hu 等 [19] 的研究表明在相近精度要求下, 基于不连续性的自适应加密相较于残差型方法能够显著降低计算成本. 因此, 从精度与效率的综合角度来看, 该类方法更具工程实用性. 另一类基于源的误差估计方法则依赖局

部解的重构. 例如, 可通过插值技术在局部区域恢复更平滑的解, 并以插值解与原始解之间的差异作为误差度量 [120, 121]. 类似地, 也可在局部区域引入高阶基函数, 构造并求解规模较小的局部子问题 [122]. 该方法固定局部区域外的低阶基函数系数, 可低成本获得近似高阶解, 并据此评估误差.

不同于上述以提升全局解精度为目标的误差估计方法, 面向目标的误差估计方法只关注特定感兴趣物理量 (quantities of interest, QoI) [124, 125], 通过有选择地调整计算资源来提高 QoI 的计算效率与准确性. 目前, 电磁积分方程中的面向目标的误差估计主要基于伴随方法实现, 但其代价是需要额外求解一个全局伴随问题. 将 QoI 定义为

$$K(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{p} \rangle . \tag{6}$$

QoI 的误差可以表示为

$$K(\mathbf{e}) = \langle \mathbf{e}, \mathbf{p} \rangle = \left\langle \mathbf{u} - \mathbf{u}^{h,p}, \mathcal{L}^{*}\mathbf{w} \right\rangle = \left\langle \mathbf{f} - \mathcal{L}\mathbf{u}^{h,p}, \mathbf{w} \right\rangle , \tag{7}$$

其中 $\mathcal{L}$ 表示积分方程算子, $\mathcal{L}^{*}$ 表示 $\mathcal{L}$ 的伴随算子; 连续空间 $\mathbf{S}$ 中正向问题 $\mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ 的解为 $\mathbf{u}$, 伴随问题 $\mathcal{L}^{*}\mathbf{w} = \mathbf{p}$ 的解为 $\mathbf{w}$; 离散空间 $\mathbf{S}^{h,p}$ 中正向问题的解为 $\mathbf{u}^{h,p}$, 伴随问题的解为 $\mathbf{w}^{h,p}$; $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{h,p}$ 表示数值解 $\mathbf{u}^{h,p}$ 的误差. 然而, 连续空间中的 $\mathbf{w}$ 难以求得, 且由于伽辽金正交性, 若在空间 $\mathbf{S}^{h,p}$ 中求解伴随问题, 则无法通过 $\mathbf{w}^{h,p}$ 利用 (7) 求得正确的误差. 因此, 伴随方法通常需要在单元尺寸更小或基函数阶数更高的空间中求解伴随问题, 这也是其计算量大的核心原因.

4.1.2　微分方程后验误差估计方法

微分方程后验误差估计方法基于数值解对离散误差的大小和分布进行定量评估 [126]. 根据不同的估计思想, 适用于有限元的后验误差估计方法主要包括残差型方法 [127~133]、恢复型方法 [134~137] 以及面向目标的误差估计方法 [137~142].

残差型误差估计可以进一步分为显式残差型误差估计方法 [129, 130] 和隐式残差型误差估计方法 [131~133]. 显式残差型误差估计方法通过将数值解代入原始微分方程, 计算第 i 个四面体单元 K_i 内部的体残差 $\mathbf{R}_V$ 及单元边界上的面残差 $\mathbf{R}_f$, 从而构造误差指示子 η_i [129], 如

$$\eta_i = h_i^2 \|\mathbf{R}_V\|^2_{\mathrm{L}^2(K_i)} + \frac{1}{2}\sum_{f \subset \partial K_i} h_f \|\mathbf{R}_f\|^2_{\mathrm{L}^2(f)}, \tag{8}$$

其中 h_i 为四面体外接球直径, h_f 为面 f 外接圆直径. 这类方法具有明确的数学理论基础, 并能够为自适应加密提供可靠的误差上界 [127, 128]. 隐式残差型误差估计方法通过求解局部辅助残差方程获得 误差场的近似, 但其估计精度和计算成本取决于局部近似空间、边界条件及辅助问题的求解方式 [131~133].

恢复型误差估计方法利用有限元解的超收敛特性, 通过超收敛分片恢复 (superconvergent patch recovery, SPR) [134] 等后处理技术, 从数值解中重构出精度更高的恢复解, 以恢复解 $\tilde{\mathbf{E}}_h$ 与数值解 $\mathbf{E}_h$ 之差的范数作为离散误差的估计量 [136]:

$$\eta_i = \left\| \tilde{\mathbf{E}}_h - \mathbf{E}_h \right\|_{\mathrm{L}^2(K_i)} , \tag{9}$$

其中最具代表性的 Zienkiewicz-Zhu 误差估计方法, 计算简便, 估计精度高, 被广泛应用于工程仿真中 [134, 135]. Siboni 和 Shephard [136] 针对高阶矢量有限元的切向连续性特征, 改进了适用于矢量场的分片恢复方法, 成功将恢复型误差估计应用至射频器件的网格自适应加密中, 实现了场量剧烈变化区域的精准误差定位; Zhan 等 [137] 进一步提出基于网格骨架的场恢复技术, 提升了复杂电磁问题中误差估计的精度与效率.

残量型与恢复型方法均以场量的误差为估计目标, 而工程实际更关注 RCS (radar cross section)、S 参数、辐射方向图等目标参数的精度. 面向目标的误差估计方法直接量化局部误差对目标参数的影响, 能够实现 “目标参数精度最优” 的网格优化, 是当前工程化应用的研究热点.

经典的对偶加权残值法 (dual weighted residual, DWR) 通过求解高阶伴随问题, 利用伴随解 $\mathbf{F}$ 对残差 $\mathbf{f}-\mathcal{L}\mathbf{E}_h$ 加权, 实现目标参数误差的精准量化 [138~140]:

$$J(\mathbf{e}) = \langle \mathbf{f} - \mathcal{L}\mathbf{E}_h, \mathbf{F} \rangle. \tag{10}$$

但该方法需额外求解高阶伴随问题, 可能带来较大的计算开销. 为突破这一瓶颈, 学者们发展了一系列低成本改进方法: Zhang 等 [141] 采用伴随问题近似解的模值加权单元残差, 无需引入额外自由度即可实现面向目标的网格自适应优化; Zhan 等 [142] 利用数值解在单元界面的不连续性特征, 提出了显式的面向目标误差估计方法, 无需求解高阶伴随问题即可实现高精度的误差定位与网格自适应, 为工程化可信网格的获取提供了高效的技术手段.

4.2　网格自适应加密

在复杂多尺度电磁问题中, 基于后验误差估计的自适应加密方法是控制网格误差的重要手段之一. 该方法首先对网格误差进行定量评估, 识别出电磁场剧烈变化的关键区域, 随后基于误差信息, 针对不同区域采用相应的局部加密策略. 通过 “求解 – 误差估计 – 网格优化 – 重新求解” 的自适应迭代过程, 自适应网格能够逐步贴合电磁场的局部变化特征, 从而以较低的计算代价获得满足精度要求的数值解. 在自适应加密过程中, 后验误差估计通过刻画误差分布特征与监控误差收敛行为, 为数值结果的可靠性评估提供了重要依据. 而网格误差的有效控制, 则依赖于高质量网格加密与灵活的自适应策略.

网格质量是影响插值误差的重要因素 [143]. 为此, 学界发展了大量三角形网格的生成与加密算法, 包括经典的最长边加密算法 [144]、德劳内 (Delaunay) 算法 [145] 及其诸多改进 [146,147]. 在四面体网格方面, 成熟的方法包括基于 Delaunay 准则的网格生成与加密技术 (如 TetGen [148]), 以及中国科学院三维有限元并行程序开发平台 PHG (parallel hierarchical grid) 内置的二分加密算法 [149]. 此外, 非共形网格加密也因其灵活性而成为一种高效的高质量加密策略 [110,139].

然而, 仅通过网格加密不足以突破低阶基函数的逼近瓶颈. 相比之下, 高阶基函数 [150,151] 通过在单元内构造更丰富的多项式空间, 能够实现更高的收敛阶数. 此外, 高阶基函数优势的充分发挥还依赖于精确的几何表征. 高阶曲面网格技术通过提升复杂几何的近似精度, 有效降低了几何误差, 从而保证了高阶数值算法的求解精度 [152]. 该类方法已在诸多实际问题中展现显著优势, 例如, 在深腔散射问题中, 曲面四面体网格与高阶叠层矢量基函数的结合有效提高了几何建模精度并降低色散误差 [153]; 在宽频带散射分析中, 曲面四边形网格与高阶叠层矢量基函数的结合能够在保证计算精度的同时显著减少未知量, 并降低多频点分析中的重复网格生成开销 [154]. 电子科技大学 Hu 等 [110] 结合曲面三角形网格与非共形自适应加密技术, 显著提高复杂电大目标的电磁散射分析的计算精度与效率.

尽管局部网格加密与高阶离散均能够有效提高数值精度, 但二者适用的情况并不相同. 一般而言, 场奇异的区域更适合采用网格加密, 而场分布相对光滑区域则更适合采用高阶离散. 因此, 网格自适应加密还需要合理设计加密策略, 以在减少人工干预的同时, 通过较少的迭代步骤实现误差的快速收敛与有效控制. 为此, 学界发展了诸多自适应加密策略. 其中经典的 Dörfler 标记策略 [155], 其核心思想是 选取一组误差贡献较大的局部单元, 使其误差总和达到整体误差的预设比例, 从而指导自适应网格的局部加密.

然而, Dörfler 标记策略对预设比例较为敏感, 并且通常需要多轮迭代才能实现误差收敛. 为了进一步提高自适应效率, Webb [156] 提出了一种 hp 型自适应加密策略, 建议优先进行 p 型自适应, 再进行 h 型自适应, 并给出了经验性的迭代停止准则. 但该策略在自适应初期未能针对局部奇异区域执行 h 型自适应, 制约了误差的下降速率. 近年来, 研究者进一步提出了多种自适应加速策略, Notaroš 团队 [138] 提出了适用于三维有限元分析的伴随误差估计与自适应方法, 其开发的基于局部阈值的自适应方案能依据局部误差快速调整基函数阶数, 能够以较少迭代次数将单元误差迅速降至设定阈值. Zhan 等 [142] 所提出有限元 hp 型自适应方案将加密过程划分为两个阶段: 在粗优化阶段, 通过 h 型优化来处理计算域中的奇异性; 在细优化阶段, 采用 hp 型优化以加速误差控制和提高整体收敛效率. 电子科技大学 Hu 团队 [115] 最近也提出了一种基于积分方程的 hp 型自适应方法. 该

方法设计了一种融合几何特征与电流变化信息的自适应控制策略. 其中, 电流变化指标由电流幅值差分构造, 可有效区分解的剧烈变化区域与平滑区域, 从而为局部区域选择 h 型优化或 p 型优化提供可靠依据.

5　结论与展望

本文以 “从可算到可信” 为主线, 系统梳理了电磁数值计算方法在复杂电磁工程问题求解中的关键技术发展脉络. 回顾其发展历程, 以多层快速多极子方法为代表的快速算法突破了传统全波方法在存储与计算复杂度上的瓶颈, 使电大尺寸目标的精确全波分析成为可能, 推动电磁数值计算方法迈入电大目标 “可算” 阶段. 针对实际工程中广泛存在的复杂多尺度、多材质结构, 区域分解方法通过 “分而治之” 的思想, 将复杂问题的求解区域划分为若干相对独立的子区域进行协同求解, 有效提高了复杂系统的建模与分析能力, 推动电磁数值计算方法进一步迈向复杂多尺度问题 “可算” 阶段. 在此基础上, 本文进一步围绕工程应用对计算结果 “可信” 的需求, 重点综述了基于后验误差估计的自适应加密技术及其在可信电磁计算中的重要作用.

此外, 由于现实世界中的电磁结构、材料参数及工作环境往往高度复杂, 数值仿真必须依赖一定程度的几何简化、材料等效与边界近似, 才能保证建模与计算的可行性. 然而, 这些简化处理不可避免地会引入模型误差, 并进一步影响仿真结果的可靠性. 未来, 研究可靠的模型可信度评估方法, 对现实对象与计算模型之间的偏差进行定量分析, 并发展相应的误差控制方法, 对于推动可信电磁计算的发展具有重要意义.

随着人工智能技术的快速发展, 其在可信电磁计算中的应用潜力也值得关注. 一方面, 人工智能有望为复杂电磁结构的网格生成与优化提供新的实现方式. 例如, 基于大量几何模型库、网格库与仿真数据库的学习, 实现具有电磁机理特征的智能网格生成、病态网格识别与修复, 以及智能自适应优化, 从而进一步降低人工干预成本, 并提升网格质量. 另一方面, 人工智能在电磁计算数据处理与分析方面同样具有重要价值. 无论是仿真数据还是实验测试数据, 均可借助人工智能技术实现高效的数据筛选、特征提取与规律挖掘, 从而提升复杂电磁系统分析与评估的效率. 通过人工智能技术赋能电磁工业软件, 有望进一步提升复杂工程问题处理的计算效率与可信度.

总体而言, 未来可信电磁计算的发展不仅需要进一步完善复杂电磁系统高效求解、误差控制与可信度评估等关键技术, 持续提升复杂电磁问题求解的精度、效率与可靠性, 还需要推动人工智能与计算电磁学的深度融合, 构建面向智能建模、智能网格生成、智能数据处理与智能优化分析的新型可信计算框架.

参考文献

1 Chew W C. Computational electromagnetics at the turn of the millenium. In: Proceedings of IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. Transmitting Waves of Progress to the Next Millennium. 2000 Digest. Held in conjunction with: USNC/URSI National Radio Science Meeting, 2000. 1642–1643

2 Jackson J D. Classical Electrodynamics. New York: Wiley, 1998

3 Mie G. Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen. Ann Phys, 1908, 330: 377–445

4 Born M, Wolf E. Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light. 7 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999

5 Balanis C A. Advanced Engineering Electromagnetics. Hoboken: John Wiley & Sons, 2023

6 De Adana F S, Gutiérrez O, González I, et al. Practical Applications of Asymptotic Techniques in Electromagnetics. Boston: Artech House, 2011

7 Keller J B. Geometrical Theory of Diffraction. J Opt Soc Am, 1962, 52: 116–130

8 Ufimtsev P Y. Fundamentals of the Physical Theory of Diffraction. Hoboken: John Wiley & Sons, 2014

9 Harrington R F. Time-Harmonic Electromagnetic Fields. New York: Wiley-IEEE Press, 2001

10 Jin J M. The Finite Element Method in Electromagnetics. Hoboken: John Wiley & Sons, 2014

11 Taflove A, Hagness S C, Piket-May M. Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time-Domain Method. In: The Electrical Engineering Handbook. Boston: Artech House, 2005. 629–670

12 Harrington R F. Field Computation by Moment Methods. Hoboken: Wiley-IEEE Press, 1993

13 Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions. J Comput Phys, 1990, 86: 414–439

14 Song J, Lu C C, Chew W C. Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects. IEEE Trans Antennas Propag, 1997, 45: 1488–1493

15 Jiang M, Hu J, Chen Y P, et al. Research progress of integral equation domain decomposition algorithms. Chin J Radio Sci, 2020, 35: 169–177 [江明, 胡俊, 陈涌频, 等. 基于积分方程区域分解算法的研究进展. 电波科学学报, 2020, 35: 169–177]
16 Peng Z, Lim K H, Lee J F. A discontinuous Galerkin surface integral equation method for electromagnetic wave scattering from nonpenetrable targets. IEEE Trans Antennas Propag, 2013, 61: 3617–3628
17 Peng Z, Hiptmair R, Shao Y, et al. Domain decomposition preconditioning for surface integral equations in solving challenging electromagnetic scattering problems. IEEE Trans Antennas Propag, 2016, 64: 210–223
18 Peng Z, Wang X C, Lee J F. Integral equation based domain decomposition method for solving electromagnetic wave scattering from non-penetrable objects. IEEE Trans Antennas Propag, 2011, 59: 3328–3338
19 Hu J, Cao H J, Yang X, et al. Trustworthy electromagnetic computation for non-penetrable targets using integral equations. Electromagn Sci, 2025, 3: 0120162
20 Dongarra J, Sullivan F. Guest editors introduction to the top 10 algorithms. Comput Sci Eng, 2000, 2: 22–23
21 Engheta N, Murphy W D, Rokhlin V, et al. The fast multipole method (FMM) for electromagnetic scattering problems. IEEE Trans Antennas Propag, 1992, 40: 634–641
22 Coifman R, Rokhlin V, Wandzura S. The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription. IEEE Antennas Propag Mag, 1993, 35: 7–12
23 Hamilton L R, Stalzer M A, Turley R S, et al. Scattering computation using the fast multipole method. In: Proceedings of IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 1993. 852–855
24 Song J M, Chew W C. Fast multipole method solution using parametric geometry. Microw Opt Technol Lett, 1994, 7: 760–765
25 Lu N L, Jin J M. Application of fast multipole method to finite-element boundary-integral solution of scattering problems. IEEE Trans Antennas Propag, 1996, 44: 781–786
26 Bindiganavale S S, Volakis J L. Comparison of three FMM techniques for solving hybrid FE-BI systems. IEEE Antennas Propag Mag, 1997, 39: 47–60
27 Bindiganavale S S, Volakis J L. Guidelines for using the fast multipole method to calculate the RCS of large objects. Microw Opt Technol Lett, 1996, 11: 190–194
28 Song J M, Lu C C, Chew W C, et al. Fast Illinois solver code (FISC). IEEE Antennas Propag Mag, 1998, 40: 27–34
29 Hu J. The efficient method for vector electromagnetic scattering from complex object-fast multipole method and it's application. Dissertation for Ph.D. Degree. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2000 [胡俊. 复杂目标矢量电磁散射的高效方法 —— 快速多极子方法及其应用. 博士学位论文. 成都: 电子科技大学, 2000]
30 Hu J, Nie Z, Wang J, et al. Multilevel fast multipole algorithm for solving scattering from 3-D electrically large object. Chin J Radio Sci, 2004, 5: 509–514 [胡俊, 聂在平, 王军, 等. 三维电大目标散射求解的多层快速多极子方法. 电波科学学报, 2004, 5: 509–514]
31 Havé P. A parallel implementation of the fast multipole method for Maxwell's equations. Int J Numer Methods Fluids, 2003, 43: 839–864
32 Pan X M, Sheng X Q. A highly efficient parallel approach of multi-level fast multipole algorithm. J ElectroMagn Waves Appl, 2006, 20: 1081–1092
33 Velamparambil S, Chew W C. Analysis and performance of a distributed memory multilevel fast multipole algorithm. IEEE Trans Antennas Propag, 2005, 53: 2719–2727
34 Araujo M G, Taboada J M, Obelleiro F, et al. Supercomputer aware approach for the solution of challenging electromagnetic PROBLEMS. Prog Electromagn Res, 2010, 101: 241–256
35 Pan X M, Pi W C, Yang M L, et al. Solving problems with over one billion unknowns by the MLFMA. IEEE Trans Antennas Propag, 2012, 60: 2571–2574
36 Cwikla M, Aronsson J, Okhmatovski V. Low-frequency MLFMA on graphics processors. IEEE Antennas Wirel Propag Lett, 2010, 9: 8–11
37 Guan J, Yan S, Jin J M. An OpenMP-CUDA implementation of multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic simulation on multi-GPU computing systems. IEEE Trans Antennas Propag, 2013, 61: 3607–3616
38 Tran N, Kilic O. Parallel implementations of multilevel fast multipole algorithm on graphical processing unit cluster for large-scale electromagnetics objects. Appl Comput Electromagn Soc J, 2018, 33: 180–183
39 Phan T, Tran N, Kilic O. Multi-level fast multipole algorithm for 3-D homogeneous dielectric objects using MPI-CUDA on GPU cluster. Appl Comput Electromagn Soc J, 2018, 33: 335–338
40 He W J, Huang X W, Yang M L, et al. Massively parallel multilevel fast multipole algorithm for extremely large-scale electromagnetic simulations: a review. Prog Electromagn Res, 2022, 173: 37–52
41 Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. J Comput Phys, 1985, 60: 187–207
42 Michielssen E, Jin J M. Guest editorial for the special issue on large and multiscale computational electromagnetics. IEEE Trans Antennas Propag, 2008, 56: 2146–2149

43 Wang X C, Peng Z, Lim K H, et al. Multisolver domain decomposition method for modeling EMC effects of multiple antennas on a large air platform. IEEE Trans Electromagn Compat, 2012, 54: 375–388

44 Li M K, Chew W C, Jiang L J. A domain decomposition scheme based on equivalence theorem. Microw Opt Technol Lett, 2006, 48: 1853–1857

45 Li M K, Chew W C. Multiscale simulation of complex structures using equivalence principle algorithm with high-order field point sampling scheme. IEEE Trans Antennas Propag, 2008, 56: 2389–2397

46 Ylä-Oijala P, Taskinen M. Electromagnetic scattering by large and complex structures with surface equivalence principle algorithm. Waves Random Complex Media, 2009, 19: 105–125

47 Shao H R, Hu J, Lu W C, et al. Analyzing large-scale arrays using tangential equivalence principle algorithm with characteristic basis functions. Proc IEEE, 2013, 101: 414–422

48 Shao H R, Hu J, Guo H, et al. Fast simulation of array structures using T-EPA with hierarchical LU decomposition. Antennas Wirel Propag Lett, 2012, 11: 1556–1559

49 Su T, Du L, Chen R S. Electromagnetic scattering for multiple PEC bodies of revolution using equivalence principle algorithm. IEEE Trans Antennas Propag, 2014, 62: 2736–2744

50 Xiao G B, Mao J F, Yuan B. Generalized transition matrix for arbitrarily shaped scatterers or scatterer groups. IEEE Trans Antennas Propag, 2008, 56: 3723–3732

51 van de Water A M, de Hon B P, van Beurden M C, et al. Linear embedding via Green's operators: a modeling technique for finite electromagnetic band-gap structures. Phys Rev E, 2005, 72: 056704

52 Brennan C, Cullen P, Condon M. A novel iterative solution of the three dimensional electric field integral equation. IEEE Trans Antennas Propag, 2004, 52: 2781–2784

53 Li W D, Hong W, Zhou H X. Integral equation-based overlapped domain decomposition method for the analysis of electromagnetic scattering of 3D conducting objects. Microw Opt Technol Lett, 2007, 49: 265–274

54 Li W D, Hong W, Zhou H X. An IE-ODDM-MLFMA scheme with DILU preconditioner for analysis of electromagnetic scattering from large complex objects. IEEE Trans Antennas Propag, 2008, 56: 1368–1380

55 Xi R, Hu J, Nie Z. Solving scattering from multiple conducting objects by hybrid multi-level fast multi-pole algorithm with generalized forward-and-backward method. Electromagnetics, 2008, 28: 572–581

56 Echeverri Bautista M A, Vipiana F, Francavilla M A, et al. A nonconformal domain decomposition scheme for the analysis of multiscale structures. IEEE Trans Antennas Propag, 2015, 63: 3548–3560

57 Wiedenmann O, Eibert T F. A domain decomposition method for boundary integral equations using a transmission condition based on the near-zone couplings. IEEE Trans Antennas Propag, 2014, 62: 4105–4114

58 Han K, Nie Z, Wang Y L. A simply constructed overlapped domain decomposition method for solving large scattering problems. Electromagnetics, 2016, 36: 470–484

59 Jiang M, Chen Y P, Li D W, et al. A flexible SIE-DDM for EM scattering by large and multiscale problems. IEEE Trans Antennas Propag, 2018, 66: 7466–7471

60 Peng Z, Lim K H, Lee J F. Computations of electromagnetic wave scattering from penetrable composite targets using a surface integral equation method with multiple traces. IEEE Trans Antennas Propag, 2013, 61: 256–270

61 Jiang M, Hu J, Tian M, et al. Solving scattering by multilayer dielectric objects using JMCFIE-DDM-MLFMA. Antennas Wirel Propag Lett, 2014, 13: 1132–1135

62 Zhao R. Research on integral equation domain decomposition method for engineering applications. Dissertation for Ph.D. Degree. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2016 [赵冉. 面向工程应用的积分方程区域分解方法研究. 博士学位论文. 成都: 电子科技大学, 2016]

63 Zhao R, Hu J, Zhao H P, et al. Fast solution of electromagnetic scattering from homogeneous dielectric objects with multiple-traces EF/MFIE Method. Antennas Wirel Propag Lett, 2017, 16: 2211–2215

64 Zhao R, Hu J, Zhao H P, et al. Solving EM scattering from multiscale coated objects with integral equation domain decomposition method. Antennas Wirel Propag Lett, 2016, 15: 742–745

65 Wang X C. A domain decomposition method for analysis of three-dimensional large-scale electromagnetic compatibility problems. Dissertation for Ph.D. Degree. Columbus: The Ohio State University, 2012

66 Han K, Nie Z, Jiang M, et al. A novel implementation of IEDG-based DDM for solving electromagnetic scattering from large and complex PEC objects. Electromagnetics, 2018, 38: 1–19

67 Huang X W, Sheng X Q. A discontinuous Galerkin self-dual integral equation method for scattering from IBC objects. IEEE Trans Antennas Propag, 2019, 67: 4708–4717

68 Kong B B, Sheng X Q. A discontinuous Galerkin surface integral equation method for scattering from multiscale homogeneous objects. IEEE Trans Antennas Propag, 2018, 66: 1937–1946

69 Zhang L M, Sheng X Q. A discontinuous Galerkin volume integral equation method for scattering from inhomogeneous objects.

IEEE Trans Antennas Propag, 2015, 63: 5661–5667
70 Zhang L M, Sheng X Q. Discontinuous Galerkin volume integral equation solution of scattering from inhomogeneous dielectric objects by using the SWG basis function. IEEE Trans Antennas Propagat, 2017, 65: 1500–1504
71 Li X J, Lei L, Chen Y P, et al. VSIE-based domain decomposition method with simplified prism vector basis functions for planar thin dielectric-conductor composite objects. Antennas Wirel Propag Lett, 2018, 17: 1608–1612
72 Martín V F, Landesa L, Obelleiro F, et al. A discontinuous Galerkin combined field integral equation formulation for electromagnetic modeling of piecewise homogeneous objects of arbitrary shape. IEEE Trans Antennas Propag, 2022, 70: 487–498
73 Chen Y H, Wu B Y, Yan C Z, et al. A discontinuous Galerkin integral equation method for multiscale surface-wire structures. IEEE Trans Antennas Propag, 2024, 72: 7883–7892
74 Yan C Z, Wu B Y, Sheng X Q. On the discontinuous Galerkin Integral equation method for multilayered circuits using nonconformal hybrid mesh. IEEE Trans Microw Theory Techn, 2025, 73: 3748–3761
75 Lü T, Shi J M, Lin Z B. Domain Decomposition Methods: New Numerical Techniques for Solving PDE. Beijing: Science Press, 1992 [吕涛, 石济民, 林振宝. 区域分解算法: 偏微分方程数值解新技术. 北京: 科学出版社, 1992]
76 Toselli A, Widlund O. Domain Decomposition Methods-Algorithms and Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2005
77 Stupfel B, Mognot M. A domain decomposition method for the vector wave equation. IEEE Trans Antennas Propag, 2000, 48: 653–660
78 Farhat C, Roux F X. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. Internat J Numer Methods Engrg, 1991, 32: 1205–1227
79 Wolfe C T, Navsariwala U, Gedney S D. A parallel finite-element tearing and interconnecting algorithm for solution of the vector wave equation with PML absorbing medium. IEEE Trans Antennas Propag, 2000, 48: 278–284
80 Farhat C, Lesoinne M, Pierson K H. A scalable dual-primal domain decomposition method. Numer Linear Algebra Appl, 2000, 7: 687–714
81 Farhat C, Lesoinne M, LeTallec P, et al. FETI-DP: a dual-primal unified FETI method—part I: a faster alternative to the two-level FETI method. Internat J Numer Methods Engrg, 2001, 50: 1523–1544
82 Li Y, Jin J M. A vector dual-primal finite element tearing and interconnecting method for solving 3-D large-scale electromagnetic problems. IEEE Trans Antennas Propag, 2006, 54: 3000–3009
83 Yao W, Jin J M, Krein P T. A dual-primal finite-element tearing and interconnecting method combined with tree-cotree splitting for modeling electromechanical devices. Int J Numer Model, 2013, 26: 151–163
84 Li Y J, Jin J M. A new dual-primal domain decomposition approach for finite element simulation of 3-D large-scale electromagnetic problems. IEEE Trans Antennas Propag, 2007, 55: 2803–2810
85 Xue M F, Jin J M. Nonconformal FETI-DP Methods for large-scale electromagnetic simulation. IEEE Trans Antennas Propag, 2012, 60: 4291–4305
86 Després B, Joly P, Roberts J E. A domain decomposition method for the harmonic Maxwell equations. In: Proceedings of the IMACS International Symposium on Iterative Methods in Linear Algebra. Amsterdam: North-Holland, 1992. 475-484
87 Magoulès F, Iványi P, Topping B H V. Convergence analysis of Schwarz methods without overlap for the Helmholtz equation. Comput & Struct, 2004, 82: 1835–1847
88 Lee S C, Vouvakis M N, Lee J F. A non-overlapping domain decomposition method with non-matching grids for modeling large finite antenna arrays. J Comput Phys, 2005, 203: 1–21
89 Peng Z, Lee J F. Non-conformal domain decomposition method with second-order transmission conditions for time-harmonic electromagnetics. J Comput Phys, 2010, 229: 5615–5629
90 Peng Z, Lee J F. Non-conformal domain decomposition method with mixed true second order transmission condition for solving large finite antenna arrays. IEEE Trans Antennas Propag, 2011, 59: 1638–1651
91 Jiang M, Jian Ran W, Wei Wu J, et al. Efficient and accurate simulations of metamaterials based on domain decomposition and unit feature database. IEEE Trans Antennas Propag, 2024, 72: 8635–8646
92 Zhao K Z, Rawat V, Lee J F. A domain decomposition method for electromagnetic radiation and scattering analysis of multi-target problems. IEEE Trans Antennas Propag, 2008, 56: 2211–2221
93 Lu J Q, Lee J F. Signal integrity analysis of integrated circuits by using embedded domain decomposition method. IEEE Trans Microw Theory Techn, 2018, 66: 5369–5382
94 Lu J Q, Chen Y P, Li D W, et al. An embedded domain decomposition method for electromagnetic modeling and design. IEEE Trans Antennas Propag, 2019, 67: 309–323
95 Yang X, Chen Y P, Huang Y, et al. A novel embedded domain decomposition method for electromagnetic simulation of structures in inhomogeneous medium. IEEE Trans Antennas Propag, 2022, 70: 9470–9482
96 Yang X. Domain decomposition method of hybrid finite-element/boundary-element formulation for electromagnetic characteristics of complex targets. Dissertation for Ph.D. Degree. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2023 [杨

雄. 复杂目标电磁特性有限元边界元区域分解方法的研究与应用. 博士学位论文. 成都: 电子科技大学, 2023]
97 Guan J, Yan S, Jin J M. A multisolver scheme based on Robin transmission conditions for electromagnetic modeling of highly complex objects. IEEE Trans Antennas Propag, 2016, 64: 5345–5358
98 Guan J, Yan S, Jin J M. A multi-solver scheme based on combined field integral equations for electromagnetic modeling of highly complex objects. IEEE Trans Antennas Propag, 2017, 65: 1236–1247
99 Jia P H, Lei L, Hu J, et al. Twofold domain decomposition method for the analysis of multiscale composite structures. IEEE Trans Antennas Propag, 2019, 67: 6090–6103
100 Jia P H. Research and application of new finite element domain decomposition method. Dissertation for Ph.D. Degree. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2019 [贾平昊. 新型有限元区域分解方法的研究与应用. 博士学位论文. 成都: 电子科技大学, 2019]
101 Yang X, Hu J, Lei L, et al. A nonconformal multidomain multisolver method for the analysis of electromagnetic properties of objects. IEEE Trans Antennas Propag, 2024, 72: 5148–5158
102 Gao H W, Peng Z, Sheng X Q. A geometry-aware domain decomposition preconditioning for Hybrid finite element-boundary integral method. IEEE Trans Antennas Propag, 2017, 65: 1875–1885
103 Wang Z C, Zhang B, Yang M. Verification, validation and accreditation (VV&A) for simulation system: current status and future. J Syst Simul, 1999, 5: 321–325+340 [王子才, 张冰, 杨明. 仿真系统的校核、验证与验收 (VV&A): 现状与未来. 系统仿真学报, 1999, 5: 321–325+340]
104 Liu Q H, Chen D Y, Wang Z C. An overview of modeling and simulation verification, validation, and accreditation. J Syst Simul, 2003, 7: 925–930 [刘庆鸿, 陈德源, 王子才. 建模与仿真校核、验证与确认综述. 系统仿真学报, 2003, 7: 925–930]
105 Hsiao G C, Kleinman R E. Mathematical foundations for error estimation in numerical solutions of integral equations in electromagnetics. IEEE Trans Antennas Propag, 1997, 45: 316–328
106 Peterson A F. Integral equation residuals for error estimation and internal resonance detection. IEEE Trans Antennas Propag, 2023, 71: 9326–9333
107 Bogdanov F G, Jobava R G, Frei S. Estimating accuracy of MoM solutions on arbitrary triangulated 3-D geometries based on examination of boundary conditions performance and accurate derivation of scattered fields. J ElectroMagn Waves Appl, 2004, 18: 879–897
108 Bibby M B, Andrew F P. On the use of overdetermined systems in the adaptive numerical solution of integral equations. IEEE Trans Antennas Propag, 2005, 53: 2267–2273
109 Tobon Vasquez J A, Peng Z, Lee J F, et al. Automatic localized nonconformal mesh refinement for surface integral equations. IEEE Trans Antennas Propag, 2020, 68: 967–975
110 Cao H J, Lei L, Lu Y Y, et al. Curvilinear nonconformal adaptive *h*-refinement using augmented EFIE with a multiresolution preconditioner for analyzing complex objects. IEEE Trans Antennas Propag, 2024, 72: 5910–5922
111 Tobon Vasquez J A, Martin V F, Serna A, et al. On the use of a localized Huygens' surface scheme for the adaptive H-refinement of multiscale problems. IEEE Trans Antennas Propag, 2023, 71: 9344–9356
112 Kim S K, Peterson A F. Evaluation of local error estimators for the RWG-based EFIE. IEEE Trans Antennas Propag, 2018, 66: 819–826
113 Saeed U, Peterson A F. Explicit local error estimators for electromagnetic integral equations. IEEE Trans Antennas Propag, 2015, 63: 1159–1163
114 Kim S K, Peterson A F. Adaptive *h*-refinement for the RWG-based EFIE. IEEE J Multiscale Multiphys Comput Techn, 2018, 3: 58–65
115 Cao H J, Lei L, Wang H, et al. Adaptive *hp*-refinement for electromagnetic radiation and scattering via surface integral equations. IEEE Trans Antennas Propag, 2026, 74: 1838–1849
116 Kim S K, Peterson A F. Adaptive *h*-refinement for the RWG EFIE applied to targets with edges. IEEE Trans Antennas Propag, 2022, 70: 2370–2374
117 Ding N, Yin L, Zhao X W, et al. An efficient *h*-adaptive MoM for modeling composite metallic-dielectric structures. Antennas Wirel Propag Lett, 2024, 23: 3073–3077
118 Lei L, Yang G R, Zhao R, et al. Cost-effective *a posteriori* error estimator-driven adaptive *h*-refinement of volume integral equation for complex EM Analysis. IEEE Trans Antennas Propag, 2026, 74: 1814–1826
119 Cao H J, Lei L, Zhao R, et al. Nonconformal adaptive *h*-refinement based on discontinuity error estimator. IEEE Trans Antennas Propag, 2026, 74: 1221–1226
120 Strydom W J, Botha M M. Charge recovery for the RWG-based method of moments. Antennas Wirel Propag Lett, 2015, 14: 305–308
121 Strydom W J, Botha M M. Current recovery for the RWG-based method of moments. IET Sci Meas Technol, 2016, 10: 831–838
122 Wang X, Botha M M, Jin J M. An error estimator for the moment method in electromagnetic scattering. Microw Opt Technol

Lett, 2005, 44: 320–326
123 Dee J B, Peterson A F. Performance comparison of source discontinuity and source recovery error estimators for higher-order conformal solutions of the electric field integral equation. In: Proceedings of 2025 International Applied Computational Electromagnetics Society Symposium, 2025
124 Cilliers P I, Botha M M. Goal-oriented error estimation for the method of moments to compute antenna impedance. IEEE Antennas Wirel Propag Lett, 2020, 19: 997–1001
125 Harmon J J, Notaroš B M. Accelerated adaptive error control and refinement for SIE scattering problems. IEEE Trans Antennas Propag, 2022, 70: 9497–9510
126 Ainsworth M, Oden J T. *A Posteriori* Error Estimation in Finite Element Analysis. In: Pure and Applied Mathematics. New York: John Wiley & Sons, 2000
127 Babuvska I, Rheinboldt W C. Error estimates for adaptive finite element computations. SIAM J Numer Anal, 1978, 18: 736–754
128 Babuška I, Rheinboldt W C. A-posteriori error estimates for the finite element method. Internat J Numer Methods Engrg, 1978, 12: 1597–1615
129 Botha M M, Davidson D B. An explicit *a posteriori* error indicator for electromagnetic, finite element-boundary integral analysis. IEEE Trans Antennas Propag, 2005, 53: 3717–3725
130 Lin P L, Yang X, Lei L, et al. Novel adaptive nonconforming FEM-BEM scheme for electromagnetic modeling. IEEE Trans Antennas Propag, 2026, 74: 6644–6656
131 Botha M M, Davidson D B. The implicit, element residual method for *a posteriori* error estimation in FE-BI analysis. IEEE Trans Antennas Propag, 2006, 54: 255–258
132 Pekel U, Lee R. An *a posteriori* error reduction scheme for the three-dimensional finite element solution of Maxwell's equations. IEEE Trans Microw Theory Techn, 1995, 43: 421–427
133 Bank R E, Smith R K. *A posteriori* error estimates based on hierarchical bases. SIAM J Numer Anal, 1993, 30: 921–935
134 Zienkiewicz O C, Zhu J Z. The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 1: the recovery technique. Internat J Numer Methods Engrg, 1992, 33: 1331–1364
135 Zienkiewicz O C, Zhu J Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineerng analysis. Internat J Numer Methods Engrg, 1987, 24: 337–357
136 Siboni M H, Shephard M S. Adaptive workflow for simulation of RF heaters. Comput Phys Commun, 2022, 279: 108434
137 Wang Y D, Zhan Q W, Wang Y Y, et al. A skeleton-based electromagnetic recovery for explicit adaptive mesh refinement. IEEE Trans Microw Theory Techn, 2024, 72: 5155–5166
138 Harmon J J, Key C, Estep D, et al. Adjoint-based accelerated adaptive refinement in frequency domain 3-D finite element method scattering problems. IEEE Trans Antennas Propag, 2021, 69: 940–949
139 Lin P L, Yang X, Lei L, et al. A nonconformal adaptive h-refinement method for 2-D finite element analysis based on normalized edge basis functions. IEEE Antennas Wirel Propag Lett, 2025, 24: 1023–1027
140 Ingelström P, Bondeson A. Goal-oriented error estimation and h-adaptivity for Maxwell's equations. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2003, 192: 2597–2616
141 Wu H X, Fu K J, Zuo S, et al. An efficient goal-oriented adaptive finite element method for accurate simulation of complex electromagnetic radiation problems. IEEE Trans Antennas Propag, 2024, 72: 110–122
142 Wang Y D, Zhan Q W, Zhang H X, et al. A Posterior h/p adaptive refinement algorithm for 3-D goal-oriented electromagnetic problems. IEEE Trans Microw Theory Techn, 2023, 71: 4206–4217
143 Erten H, Üngör A. Quality triangulations with locally optimal Steiner points. SIAM J Sci Comput, 2009, 31: 2103–2130
144 Rivara M C. New longest-edge algorithms for the refinement and/or improvement of unstructured triangulations. Internat J Numer Methods Engrg, 1997, 40: 3313–3324
145 Gonzaga de Oliveira S L. A review on Delaunay refinement techniques. In: Proceedings of Computational Science and Its Applications, 2012. 172–187
146 Ruppert J. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. J Algorithms, 1995, 18: 548–585
147 Chew L P. Guaranteed-quality mesh generation for curved surfaces. In: Proceedings of the Ninth Annual Symposium on Computational Geometry, 1993. 274–280
148 Si H. TetGen, a Delaunay-based quality tetrahedral mesh generator. ACM Trans Math Softw, 2015, 41: 1–36
149 Zhang L B, Zheng W Y, Lu B Z, et al. The toolbox PHG and its applications. Sci Sin Inform, 2016, 46: 1442–1464 [张林波, 郑伟英, 卢本卓, 等. 并行自适应有限元软件平台 PHG 及其应用. 中国科学: 信息科学, 2016, 46: 1442–1464]
150 Webb J P. Hierarchal vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements. IEEE Trans Antennas Propag, 1999, 47: 1244–1253
151 Graglia R D, Wilton D R, Peterson A F. Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics. IEEE Trans Antennas Propag, 1997, 45: 329–342

152 Notaros B M. Higher order frequency-domain computational electromagnetics. IEEE Trans Antennas Propag, 2008, 56: 2251–2276
153 Zhen P ,Sheng X Q. A flexible and efficient higher order FE-BI-MLFMA for scattering by a large body with deep cavities. IEEE Trans Antennas Propag, 2008, 56: 2031–2042
154 Nie Z, Ma W M, Ren Y, et al. A wideband electromagnetic scattering analysis using MLFMA With higher order hierarchical vector basis functions. IEEE Trans Antennas Propag, 2009, 57: 3169–3178
155 Dörfler W. A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation. SIAM J Numer Anal, 1996, 33: 1106–1124
156 Webb J P. *hp*-adaption for computing scattering parameters on tetrahedral meshes. Electromagnetics, 2014, 34: 298–306

Review of numerical methods for electromagnetic computation of complex targets: from efficient computation to trustworthy simulation

Jun HU*, Ran ZHAO, Haojie CAO, Xiong YANG, Peiling LIN & Ming JIANG

School of Electronic Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China
* Corresponding author. E-mail: hujun@uestc.edu.cn

Abstract Electromagnetic numerical methods serve as an important bridge between electromagnetic theory and modern engineering applications, playing a critical role in antenna and radio-frequency system design, electromagnetic scattering analysis, wireless communications, and related fields. This paper systematically reviews the development of key technologies in electromagnetic numerical methods along the progression from computational feasibility to trustworthy simulation. First, the development of electromagnetic solution methods, ranging from analytical and approximate methods to full-wave numerical methods and fast algorithms, is reviewed, with particular emphasis on the crucial role of the multilevel fast multipole algorithm in overcoming the computational bottleneck of large-scale electromagnetic problems. Although the multilevel fast multipole algorithm has significantly improved the capability for solving electrically large problems, traditional single-domain algorithms still face difficulties in simultaneously achieving computational efficiency and accuracy for complex multiscale and multi-material targets. To address this challenge, the development of domain decomposition methods (DDMs) is reviewed, including DDMs based on the equivalence principle, overlapping DDMs, and non-overlapping DDMs, and discusses their advantages in the electromagnetic analysis of complex systems. Beyond efficient solution techniques for complex electromagnetic problems, trustworthy computation techniques that integrate meshes and algorithms are further reviewed. Particular attention is paid to trustworthy computational techniques centered on *a posteriori* error estimation and adaptive refinement techniques. Finally, the main contents of this paper are summarized, and perspectives on future developments in trustworthy computational electromagnetics are presented.

Keywords numerical electromagnetic computation, the multilevel fast multipole algorithm, domain decomposition methods, adaptive refinement, trustworthy computational electromagnetics