



饱和观测下逐分量自适应预测理论及其分阶段耦合量刑应用

刘宇静¹, 金依菲^{1,2}, 刘志新¹, 郭雷^{1*}

1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

2. 中国科学院大学前沿交叉科学学院, 北京 101408

* 通信作者. E-mail: Lguo@amss.ac.cn

收稿日期: 2026-05-24; 修回日期: 2026-08-12; 接受日期: 2026-08-31; 网络出版日期: 2026-09-22

国家自然科学基金 (批准号: T2293772, 12288201) 和国家重点研发计划 (批准号: 2024YFC3307200) 资助项目

摘要 司法量刑预测往往面临法定区间约束, 特征高维异质以及扰动非高斯等挑战. 为此, 本文考虑一类带时变饱和映射的随机动态模型的自适应预测问题, 基于 Laplace 条件负对数似然提出逐分量自适应似然梯度算法 (componentwise adaptive likelihood gradient algorithm, CALG). 该算法可依据各坐标方向的历史信息对不同分量进行自适应更新, 从而适用于高维、稀疏和异质的结构化量刑数据. 在理论方面, 本文建立了 CALG 算法的累积遗憾上界, 证明在常用量刑评价指标下, CALG 算法的自适应预测器能渐近达到与已知真实参数的 Oracle 预测器相同的性能. 为验证上述理论框架在真实司法场景中的适用性, 本文基于盗窃罪量刑逻辑构建了“有期徒刑预测–缓刑适用判定–缓刑考验期预测”的分阶段耦合量刑模型. 该模型将有期徒刑和缓刑考验期刻画为带时变饱和映射的随机回归问题, 并将缓刑适用判定刻画为由主刑门槛和案件综合评分共同决定的二分类问题, 从而显式反映法定区间约束与阶段性裁判逻辑. 在真实盗窃罪裁判文书数据上, 本文开展残差分布拟合与尺度参数估计实验, 以检验 Laplace 噪声假设的经验合理性. 随后, 本文在三阶段预测任务上将 CALG 算法与牛顿型饱和观测自适应方法、非逐分量更新方法、常用一阶优化器以及大模型评测方法进行比较, 实验结果表明所提方法在有期徒刑预测、缓刑适用判定和缓刑考验期预测任务上整体取得更优预测精度和计算效率.

关键词 量刑预测, 缓刑预测, 时变饱和模型, 逐分量自适应似然梯度算法, 分阶段耦合量刑模型, 盗窃罪

1 引言

司法量刑是在既有法律规范框架下, 综合考虑犯罪事实、量刑情节以及行为人的危险性等因素, 确定刑罚种类与刑罚幅度的关键裁判环节. 随着司法大数据建设以及自然语言处理技术的发展, 量刑预测逐渐成为司法人工智能中的重要研究方向^[1]. 与一般预测问题不同, 量刑结果通常受量刑起点、基准刑调节、缓刑适用条件以及缓刑考验期上下界等多重规则的约束. 同时, 裁判文书中连续型与二值等离散型量刑要素并存, 不同特征在数值尺度、频率和预测作用上差异明显. 事实抽取误差、地区裁判差异和个案裁量空间等因素, 也可能使量刑残

引用格式: 刘宇静, 金依菲, 刘志新, 等. 饱和观测下逐分量自适应预测理论及其分阶段耦合量刑应用. 中国科学: 信息科学, 2026, 56: 2283–2309, doi: 10.1360/SSI-2026-0235

Liu Y J, Jin Y F, Liu Z X, et al. Componentwise adaptive prediction theory under saturated observations and its application to stage-coupled sentencing. Sci Sin Inform, 2026, 56: 2283–2309, doi: 10.1360/SSI-2026-0235

差偏离单一高斯噪声假设,呈现尖峰厚尾等非高斯特征.因此,如何在法定饱和约束、高维异质特征和非高斯扰动并存的条件下建立具有理论保证的自适应预测方法,是量刑预测中的基础问题.

现有量刑与裁判预测研究大多采用静态监督学习框架,其基本思路是利用文本表示学习、特征工程或深度神经网络,从裁判文书或结构化案件特征中学习案件事实与罪名、适用法条、刑期或其他裁判结果之间的映射关系.例如,文献[2]通过图神经网络和注意力机制学习法条之间的语义关联,以区分易混淆法条并提升法律判决预测效果;文献[3]提出半监督溯因学习框架,将法律知识用于盗窃罪名量刑情节抽取和刑期预测.与裁判结果预测相配套,法律要素抽取研究也开始探索利用大语言模型从刑事裁判文书中识别案件事实和量刑情节,为后续结构化建模提供数据基础[4].该类方法能够利用大规模司法数据中的复杂语义信息和非线性特征交互,具有较强的拟合能力和任务适应性.然而,其预测规律主要由样本数据隐式学习,对法定量刑区间、裁判阶段顺序和缓刑适用条件等法律规则通常缺少显式约束,因而难以直接保证预测结果与法律规则的一致性,其预测过程的可解释性也相对有限.

为增强量刑预测的法律解释性和规则一致性,近年来已有研究将法律规则、量刑指导意见和裁判逻辑显式纳入模型结构.该类方法是将量刑起点、基准刑调节、量刑情节的作用方式以及法定刑幅度等法律规则直接表示为模型中的结构关系或约束条件.例如,在量刑规则与量刑情节的实证研究方面,文献[5]基于故意伤害罪致人轻伤样本研究认罪认罚对量刑的实际影响,揭示了特定量刑情节在司法实践中的作用方式.机理建模方面,文献[6]依据相关法律法规首次构建了更符合法逻辑的非线性随机量刑模型,并在故意伤害罪致人重伤样本上建立了有期徒刑预测的理论保证.文献[7]进一步依据量刑指导意见构建了更细化的饱和量刑模型,文献[8]引入神经网络拟合未建模动态,构建了两阶段混合非线性随机量刑模型,并结合随机梯度算法和Adam算法设计两阶段学习方法,在故意伤害罪数据上验证了机理模型与神经网络模型结合的有效性.相较于仅依赖数据驱动的预测方法,机理量刑模型能够显式保留法律规则和量刑逻辑,有助于提升量刑预测的可解释性和可靠性.

然而,现有机理量刑模型多以有期徒刑预测为核心任务,对缓刑适用和缓刑考验期的阶段性依赖关系刻画不足.一类常见做法是将是否缓刑或缓刑考验期直接作为有期徒刑预测模型中的解释变量^[6,8],但缓刑并非主刑确定之前的普通量刑情节,而是在主刑确定后结合犯罪情节、悔罪表现、再犯危险性以及社区影响等条件作出的独立判断.因此,将是否缓刑或缓刑考验期直接作为有期徒刑预测模型中的解释变量可能造成量刑阶段关系的倒置,也难以刻画主刑、缓刑适用与缓刑考验期之间的内在耦合关系.现有缓刑研究更多聚焦于缓刑适用影响因素、再犯风险评估以及缓刑适用判定任务^[9~11].例如文献[11]将案件事实描述与缓刑法律要素相结合,构建了融合法律逻辑的缓刑预测模型,从而提高了缓刑适用判定的准确性与可解释性,但仍主要依赖深度神经网络近似和离线训练.据我们所知,现有研究尚未建立同时输出有期徒刑、缓刑适用和缓刑考验期,并显式反映三者阶段性依赖关系的分阶段耦合量刑预测模型.

从计算方法来看,带约束输出的随机动态系统辨识与预测在控制、信号处理与在线学习等领域已有较多研究.针对饱和观测下的自适应辨识问题,根据参数更新增益结构的不同,现有算法分为Newton型或拟Newton型方法以及梯度型方法两类.Newton型或拟Newton型算法通常通过递推更新信息矩阵或增益矩阵,利用不同参数方向上的二阶信息对更新方向进行校正.该类方法能够提高参数更新的方向性和估计效率,并建立了具有更快收敛速度的参数收敛性或累积遗憾分析^[12,13].然而,其通常需要存储和更新高维矩阵,空间复杂度和单步计算复杂度随参数维数呈二次增长.当司法量刑特征经过机理展开和交互构造后,特征维度往往迅速增大,此时二阶矩阵的存储和更新成本将显著上升.梯度型算法^[8,14]主要利用当前样本产生的一阶梯度方向递推更新参数,具有实现简单、存储开销低和适用于高维特征数据等优点.优化领域以AdaGrad、RMSProp、Adam及其变体为代表的梯度方法,通常结合历史梯度信息实现逐坐标自适应更新,已成为处理高维稀疏与异质数据的重要工具^[15,16].然而现有饱和观测梯度型方法通常对所有参数采用统一的更新尺度,尚未充分考虑不同特征坐标在尺度、稀疏性和激励强度上的差异.例如,盗窃金额、盗窃次数等连续变量与自首、累犯、认罪认罚、退赃退赔等二值或等级变量在数值范围、出现频率和预测作用上存在明显差别.若所有参数共用同一学习率,则可能出现高频或大尺度坐标主导更新,而低频或弱激励坐标学习不足的问题,从而影响算法的数值稳定性和预测性能.因此,根据各坐标方向的历史梯度强度分别更新步长,是一种避免高维矩阵更新且同时适应量刑数据高维、稀疏和

尺度异质特征的自然途径.

综上, 现有研究在模型层面仍缺乏对有期徒刑、缓刑适用和缓刑考验期阶段性依赖关系的统一刻画, 在算法层面则仍缺乏一种能够同时兼顾饱和和观测、高维可扩展性和坐标异质性的递推更新机制. 因此, 本文考虑饱和观测下随机动态模型, 针对高维异质数据特征提出了逐分量自适应似然梯度算法, 建立了无需任何数据激励条件下算法的预测性能理论分析并应用于盗窃罪量刑预测. 本文的主要贡献如下.

(1) 算法方面. 针对饱和随机动态模型, 提出基于 Laplace 条件负对数似然的逐分量自适应似然梯度算法 (CALG). 该算法利用各特征坐标的历史激励强度构造对角信息矩阵以调节不同维度的自适应步长, 避免 Newton 型方法中高维矩阵增益更新的计算负担, 可适用于高维、稀疏和尺度异质结构化量刑数据.

(2) 理论方面. 在无需任何数据激励条件下建立了 CALG 算法的累积条件似然遗憾上界, 并在相对精度、带自由裁量容忍区间的相对精度、分类准确率等常用量刑评价指标下, 证明 CALG 自适应预测器可渐近逼近已知真实参数的 Oracle 预测器.

(3) 应用方面. 进一步在真实盗窃罪裁判文书数据上开展系统实验. 首先, 基于盗窃罪量刑逻辑构建“有期徒刑预测 – 缓刑适用判定 – 缓刑考验期预测”的分阶段耦合量刑模型. 随后, 将 CALG 算法与矩阵型饱和和观测自适应方法、非逐分量更新方法、常用一阶优化器以及大模型评测方法进行比较. 实验结果表明, CALG 在三阶段量刑预测任务上整体取得更优的预测精度和计算效率.

2 问题描述

针对量刑预测中输出受法定区间约束、案件特征呈现高维异质性、存在非高斯扰动等情形, 本节考虑一类带时变饱和和映射的随机动态回归模型, 提出基于 Laplace 条件似然的逐分量自适应学习算法.

2.1 模型和假设

考虑如下随机动态模型^[6]:

$$y_{k+1} = S_k(\phi_k^\top \theta^* + w_{k+1}), \quad (1)$$

其中 $y_k \in \mathbb{R}$ 表示 k 时刻的量刑输出, $\phi_k \in \mathbb{R}^d$ 代表 k 时刻的 d 维特征, $\theta^* \in \mathbb{R}^d$ 为未知真实参数, $w_{k+1} \in \mathbb{R}$ 为随机噪声干扰, 可表示未观测量刑因素、个案裁量差异、模型近似误差以及数据处理误差等因素在量刑预测中的综合影响. 非线性函数 $S_k(\cdot)$ 定义如下:

$$S_k(x) = \begin{cases} U_k, & x > u_k, \\ x, & x \in [l_k, u_k], \\ L_k, & x < l_k, \end{cases} \quad (2)$$

其中 l_k, u_k 分别表示输入饱和区间的上下阈值, L_k, U_k 为对应的输出饱和区间的上下阈值.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}, \mathbb{P})$ 为一滤过概率空间, 其中 $\{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}$ 为一列非降的 σ -代数. 本文假定阈值 l_k, u_k, L_k, U_k 均 $\mathcal{F}_{k-}$ 可测且满足

$$L_k \leq l_k \leq u_k \leq U_k, \quad \sup_{k \geq 0} \max\{|l_k|, |u_k|\} < \infty, \quad \text{a.s.} \quad (3)$$

同时, 完全退化情形 $L_k = l_k = u_k = U_k$ 几乎处处不发生. 当 $l_k = u_k$ 且 $L_k < U_k$ 时, 上述饱和映射退化为二分类模型, 因而模型 (1) 可同时涵盖连续型饱和和回归和二分类饱和和观测两类任务. 为后续理论分析, 进一步引入如下假设.

假设1 对任意 $k \geq 0$, ϕ_k 为 $\mathcal{F}_{k-}$ 可测且满足 $\sup_{k \geq 0} \|\phi_k\| < \infty$, a.s. 此外, 存在已知凸紧集 $D \subset \mathbb{R}^d$ 使得真实参数 $\theta^* \in D$.

假设2 给定 $\mathcal{F}_k$, 噪声 w_{k+1} 条件服从 Laplace 分布 $L(0, b)$, 其中 $b > 0$ 为尺度参数.

注释1 假设 2 中, 位置参数为 0 表示扰动在给定历史信息后不存在系统性方向偏差, 尺度参数 b 刻画潜在扰动的离散程度. 相较于正态分布, Laplace 分布具有更尖峰的中心形态和相对更厚的指数型尾部, 因而更适合刻画司法量刑数据中可能由事实抽取误差、裁判尺度差异、个案裁量空间或异常案件等因素引起的尖峰厚尾扰动. 后文第 4.3.1 小节的残差拟合实验进一步表明, Laplace 分布比正态分布更贴近本文盗窃罪有期徒刑残差的经验分布, 从而为该噪声假设提供了经验支持.

2.2 自适应估计与预测算法

给定 $\mathcal{F}_k$, 噪声 w_{k+1} 的条件密度函数和条件分布函数分别记为 $f_w(x)$ 和 $F_w(x)$. 在模型 (1) 和假设 2 下, 观测值 y_{k+1} 的条件负对数似然函数可写为

$$\begin{aligned}\ell_k(\theta) &= -\log p_\theta(y_{k+1} | \mathcal{F}_k) \\ &= -[\delta_k \log F_w(l_k - \phi_k^\top \theta) + (1 - \delta_k - \bar{\delta}_k) \log f_w(y_{k+1} - \phi_k^\top \theta) + \bar{\delta}_k \log(1 - F_w(u_k - \phi_k^\top \theta))],\end{aligned}\quad (4)$$

其中 $\delta_k = \mathbb{I}(y_{k+1} = L_k)$, $\bar{\delta}_k = \mathbb{I}(y_{k+1} = U_k)$. 对 $\ell_k(\theta)$ 关于参数 θ 求次梯度, 可得

$$g_k(\theta) = -\phi_k \psi_k(\theta) \in \partial \ell_k(\theta), \quad (5)$$

其中标量似然方向定义为

$$\psi_k(\theta) = (1 - \delta_k - \bar{\delta}_k) \frac{\text{sgn}(y_{k+1} - \phi_k^\top \theta)}{b} - \delta_k \frac{f_w(l_k - \phi_k^\top \theta)}{F_w(l_k - \phi_k^\top \theta)} + \bar{\delta}_k \frac{f_w(u_k - \phi_k^\top \theta)}{1 - F_w(u_k - \phi_k^\top \theta)}. \quad (6)$$

在不可微点处取 $\text{sgn}(0) = 0$. 式 (6) 表明, 非饱和观测通过 Laplace 绝对值损失的符号方向修正参数, 而饱和观测处分别通过相应边界事件的条件概率修正参数.

为适应不同特征坐标在尺度、出现频率和历史累计强度方面的差异, 对任意 $i = 1, \dots, d$, 定义

$$\begin{aligned}r_{-1,i} &= e, \quad r_{k,i} = r_{k-1,i} + \phi_{k,i}^2 = e + \sum_{t=0}^k \phi_{t,i}^2, \\ R_k &= \text{diag}\{R_{k,1}, \dots, R_{k,d}\}, \quad R_{k,i} = r_{k,i}^{\beta_1} \log^{\beta_2} r_{k,i},\end{aligned}\quad (7)$$

其中 e 为自然对数的底. 由此, 第 i 个参数坐标在第 k 步的有效学习率为 $\mu/R_{k,i}$.

为保证参数估计序列的有界性, 同时考虑到不同参数坐标采用 R_k 所确定的不同更新尺度, 本文定义相应的加权投影算子和 CALG 更新为

$$\begin{aligned}\Pi_k[x] &= \arg \min_{\vartheta \in D} \|R_k^{1/2}(\vartheta - x)\|^2, \\ \theta_{k+1} &= \Pi_k[\theta_k + \mu R_k^{-1} \phi_k \psi_k(\theta_k)].\end{aligned}\quad (8)$$

完整的算法实现流程如算法 1 所示. 在第 k 步, 算法首先利用回归向量 ϕ_k 和参数估计 θ_k 生成在线预测, 接收到观测 y_{k+1} 后, 根据其饱和状态计算标量似然方向 $\psi_k(\theta_k)$, 并利用逐分量尺度矩阵 R_k 调节不同参数坐标的有效更新步长. 最后, 算法通过投影算子 Π_k 将更新结果限制在凸紧集 D 内, 从而保证参数估计序列的有界性. 此外, 算法引入对角缩放矩阵 R_k 对各个分量进行自适应归一化, 其第 i 个对角元 $R_{k,i}$ 由对应分量的历史信息累计量 $r_{k,i}$ 自适应构造, 从而使算法能够对强激励坐标采用相对保守的更新尺度, 对弱激励坐标保留较大的有效步长. 该逐分量缩放机制既避免了矩阵型自适应方法中高维增益矩阵的存储与更新开销, 又能够更好地适应高维、稀疏和尺度异质的结构化量刑特征. 参数 β_1, β_2 分别控制多项式型和对数型缩放强度, 在收敛速度与数值稳定性间提供更灵活的平衡.

3 主要结果及证明

在 3.1 和 3.2 小节中, 我们分别给出 CALG 算法的预测性能理论及证明.

算法 1 逐分量自适应似然梯度算法 (CALG).

输入: 参数集合 D , 初始估计 θ_0 , 步长 $\mu > 0$, 参数 β_1, β_2 , Laplace 尺度参数 b , 数据量 T .

输出: 预测序列 $\{\hat{y}_{k+1}\}_{k=0}^{T-1}$ 和参数估计序列 $\{\theta_k\}_{k=0}^T$.

```

1: 初始化: 对  $i = 1, \dots, d$ , 令  $r_{-1,i} = e$ ;
2: for  $k = 0, 1, \dots, T-1$  do
3:   在线预测:  $\hat{y}_{k+1} = S_k(\phi_k^\top \theta_k)$ ;
4:   计算似然梯度方向: 根据式 (6) 计算  $\psi_k(\theta_k)$ ;
5:   更新逐分量尺度: 根据式 (7) 更新  $r_{k,i}$  和  $R_k$ ;
6:   投影更新参数: 根据式 (8) 更新  $\theta_{k+1}$ ;
7: end for

```

3.1 性能分析

本小节基于条件负对数似然的凸性和随机 Lyapunov 函数分析方法, 建立 CALG 学习算法相对于真实参数 θ^* 的累积似然遗憾上界, 说明由 CALG 生成的自适应预测器在平均意义下可逼近已知真实参数时的 Oracle 预测器, 并给出相对精度、自由裁量精度以及分类准确率等司法量刑常用预测指标的渐近性能分析.

为便于表述, 记 $\mathbb{E}_k[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_k]$. 下述定理首先给出累积似然遗憾的渐近上界.

定理1 在假设 1 和 2 下, 若参数满足 $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 \in (\frac{1}{2}, 1]$ 或者 $\beta_1 \in (\frac{1}{2}, 1)$, $\beta_2 = 0$, 有

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{E}_k [\ell_k(\theta_k) - \ell_k(\theta^*)] = O\left(n^{\beta_1} \log^{\beta_2} n\right), \quad \text{a.s.} \quad (9)$$

注释2 注意到在司法量刑预测中, 结构化特征数据通常具有高维稀疏性, 难以满足传统持续激励条件. 定理 1 在无需任何特征向量的激励条件下, 给出了 CALG 算法的累积条件似然遗憾上界, 可为 CALG 应用于司法量刑预测场景提供理论保证.

基于定理 1, 本文进一步分析算法的预测性能极限. 当真实参数 θ^* 已知时, 由于 Laplace 噪声关于零点对称, 且连续饱和映射 $S_k(\cdot)$ 为单调非降函数, 在绝对值损失准则 $|y - \hat{y}|$ 下的 Oracle 预测器可取为

$$\hat{y}_{k+1}^* = S_k(\phi_k^\top \theta^*). \quad (10)$$

由于真实参数 θ^* 未知, CALG 算法以递推估计值 θ_k 代替 θ^* , 从而得到相应的自适应预测器

$$\hat{y}_{k+1} = S_k(\phi_k^\top \theta_k).$$

对于有期徒刑预测任务来说, 考虑到司法量刑中存在一定的自由裁量空间, 本文参考文献 [8] 的设定, 采用带自由裁量容忍区间的相对精度 (relative accuracy with discretion, RAD) 作为评价指标

$$\text{RAD}(T) = 1 - \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \frac{|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}|}{y_{k+1}} \mathbb{I}(|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}| > \tau(y_{k+1})), \quad (11)$$

其中 $\tau(y) = \max\{0.2y, 2\}$. 对于缓刑考验期预测任务来说, 本文采用司法量刑任务中常见的相对精度 [6] 作为评价指标

$$\text{RA}(T) = 1 - \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \frac{|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}|}{y_{k+1}}. \quad (12)$$

相应地, 将式 (11) 和 (12) 中的自适应预测器 $\hat{y}_{k+1}$ 分别替换为 Oracle 预测器 $\hat{y}_{k+1}^*$, 可得已知真实参数下的精度指标 $\text{RAD}^*(T)$ 和 $\text{RA}^*(T)$. 下述定理给出自适应预测器与已知真实参数 Oracle 预测器在上述指标式 (11) 和 (12) 下的渐近关系.

定理2 在定理1的条件下,若饱和映射 $S_k(\cdot)$ 连续 ($L_k = l_k$, $U_k = u_k$, a.s.), 且存在常数 $\underline{y}$, 使得 $l_k \geq \underline{y} > 0$, a.s., 则有

$$\text{RA}(T) = \text{RA}^*(T) + o(1) = 1 - \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \sigma_k + o(1), \quad \text{a.s.}, \quad (13)$$

若进一步满足如下自由裁量阈值分离条件:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \left[\mathbb{I}(|\phi_k^\top \theta^* - (l_k + \tau(l_k))| \leq \varepsilon) + \mathbb{I}(|\phi_k^\top \theta^* - (u_k - \tau(u_k))| \leq \varepsilon) \right] = 0, \quad \text{a.s.}, \quad (14)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \left[\mathbb{I}(|(u_k - l_k) - \tau(l_k)| \leq \varepsilon) + \mathbb{I}(|(u_k - l_k) - \tau(u_k)| \leq \varepsilon) \right] = 0, \quad \text{a.s.}, \quad (15)$$

则有

$$\text{RAD}(T) = \text{RAD}^*(T) + o(1) = 1 - \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \bar{\sigma}_k + o(1), \quad \text{a.s.}, \quad (16)$$

其中

$$\sigma_k = \mathbb{E}_k \left[\frac{|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*|}{y_{k+1}} \right], \quad \bar{\sigma}_k = \mathbb{E}_k \left[\frac{|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*|}{y_{k+1}} \mathbb{I}(|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*| > \tau(y_{k+1})) \right]. \quad (17)$$

注释3 由 RAD 指标定义式 (11) 可知, 如果 $|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*|$ 经常位于自由裁量阈值 $\tau(y_{k+1})$ 附近, 那么即使 $\hat{y}_{k+1}$ 与 $\hat{y}_{k+1}^*$ 很接近, 相应示性函数也可能频繁发生跳变. 条件式 (14) 用于排除 Oracle 未饱和预测值在端点诱导的裁量临界值附近持续聚集. 而条件式 (15) 排除区间宽度与端点容忍阈值重合的退化情形. 对于本文采用的三个固定有期徒刑区间, 区间宽度与相应端点自由裁量阈值之间的最小距离为 22.8 个月, 条件式 (15) 自动成立.

此外, 针对是否适用缓刑的二分类任务, 即 $L_k = 0$, $l_k = u_k = 0$, $U_k = 1$, 本文采用准确率作为评价指标

$$\text{Acc}(T) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{I}(y_{k+1} = \hat{y}_{k+1}), \quad \text{Acc}^*(T) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{I}(y_{k+1} = \hat{y}_{k+1}^*), \quad (18)$$

其中 $\hat{y}_{k+1} = \mathbb{I}(\phi_k^\top \theta_k > 0)$, $\hat{y}_{k+1}^* = \mathbb{I}(\phi_k^\top \theta^* > 0)$. 下述定理给出自适应分类器与已知真实参数 Oracle 分类器在准确率指标下的渐近关系.

定理3 在定理1的条件下, 若如下分类边界分离条件成立:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{I}(|\phi_k^\top \theta^*| \leq \varepsilon) = 0, \quad \text{a.s.}, \quad (19)$$

则有

$$\text{Acc}(T) = \text{Acc}^*(T) + o(1) = 1 - \frac{1}{2T} \sum_{k=0}^{T-1} \exp \left(-\frac{|\phi_k^\top \theta^*|}{b} \right) + o(1), \quad \text{a.s.} \quad (20)$$

注释4 条件式 (19) 用于刻画类别可分性, 要求样本不会频繁落在分类边界上, 使得当 θ_k 逼近 θ^* 时, 由参数估计误差引起的分类符号变化在时间平均意义下趋于 0, 从而保证自适应分类器与 Oracle 分类器在准确率指标下的渐近等价性.

3.2 定理证明

在本小节中, 我们将依次给出定理 1~3 的证明. 为此, 我们首先给出两个辅助引理.

引理1 在假设 1 和 2 下, 对任意 $k \geq 0$, 由式 (4) 定义的单步条件负对数似然函数 $\ell_k(\vartheta)$ 关于参数 $\vartheta \in \mathbb{R}^d$ 是凸函数, 且满足

$$\mathbb{E}_k[\psi_k(\theta_k)] \phi_k^\top \tilde{\theta}_k \leq \mathbb{E}_k[\ell_k(\theta^*) - \ell_k(\theta_k)], \quad (21)$$

其中 $\tilde{\theta}_k = \theta_k - \theta^*$.

证明 由假设 2, 噪声 w_{k+1} 的条件密度函数和条件分布函数分别为

$$f_w(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x|}{b}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad F_w(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x}{b}\right), & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x}{b}\right), & x \geq 0. \end{cases} \quad (22)$$

记 $\rho_0(x) = -\log f_w(x)$, $\rho_1(x) = -\log F_w(x)$, $\rho_2(x) = -\log(1 - F_w(x))$. 由式 (22) 可知 $\rho_0(x) = \log(2b) + \frac{|x|}{b}$ 为凸函数. 进一步, 由式 (22) 可知, 当 $x < 0$ 时, $\rho_1''(x) = 0$, 且当 $x > 0$ 时, $\rho_1''(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{-x/b}}{b^2(1-\frac{1}{2}e^{-x/b})^2} \geq 0$. 同时我们有 $\rho_1'(0-) = -\frac{1}{b}$, $\rho_1'(0+) = -\frac{1}{b}$. 故 ρ_1 在 $\mathbb{R}$ 上为凸函数. 类似地, 由式 (22) 可知当 $x > 0$ 时, $\rho_2''(x) = 0$, 且当 $x < 0$ 时, $\rho_2''(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{x/b}}{b^2(1-\frac{1}{2}e^{x/b})^2} \geq 0$. 此外 $\rho_2'(0-) = \frac{1}{b}$, $\rho_2'(0+) = \frac{1}{b}$. 故 ρ_2 在 $\mathbb{R}$ 上也为凸函数. 结合 $\delta_k, 1 - \delta_k - \bar{\delta}_k$ 和非负性可知 $\ell_k(\theta)$ 关于 θ 为凸函数.

进一步, 注意到 $g_k(\vartheta) = -\phi_k \psi_k(\vartheta) \in \partial \ell_k(\vartheta)$, 其中在内部连续观测项不可微处采用 $\text{sgn}(0) = 0$ 对应的次梯度, 于是由凸函数的次梯度不等式可得

$$\psi_k(\theta_k) \phi_k^\top \tilde{\theta}_k \leq \ell_k(\theta^*) - \ell_k(\theta_k). \quad (23)$$

此外, 由于 θ_k 和 ϕ_k 均为 $\mathcal{F}_k$ -可测, 因此对式 (23) 两边取条件期望可得式 (21). 证毕.

引理2 在假设 1 和 2 下, 存在正的 $\mathcal{F}_k$ -可测随机变量 c_k 使得

$$\mathbb{E}_k[\psi_k(\theta_k)] \phi_k^\top \tilde{\theta}_k \leq -c_k (\phi_k^\top \tilde{\theta}_k)^2, \quad (24)$$

其中 $c_k = \frac{1}{2b^2} \exp\left(-\frac{\max\{|l_k|, |u_k|\} + \|\phi_k\|(\|\theta_k\| + \|\theta^*\|)}{b}\right)$.

证明 记 $X_{k+1} = \phi_k^\top \theta^* + w_{k+1}$, 则有

$$\mathbb{P}(X_{k+1} < l_k \mid \mathcal{F}_k) = F_w(l_k - \phi_k^\top \theta^*), \quad \mathbb{P}(X_{k+1} > u_k \mid \mathcal{F}_k) = 1 - F_w(u_k - \phi_k^\top \theta^*). \quad (25)$$

下面分三种情形证明引理. 首先, 当 $\phi_k^\top \theta_k \leq l_k$ 时, 在事件 $l_k < X_{k+1} < u_k$ 上 $\text{sgn}(y_{k+1} - \phi_k^\top \theta_k) = 1$ 几乎处处成立. 同时, 由于 $u_k - \phi_k^\top \theta_k \geq 0$ 且 $l_k - \phi_k^\top \theta_k \geq 0$, 并利用 Laplace 分布的特征可得

$$\frac{f_w(u_k - \phi_k^\top \theta_k)}{1 - F_w(u_k - \phi_k^\top \theta_k)} = \frac{1}{b}, \quad f_w(l_k - \phi_k^\top \theta_k) = \frac{1 - F_w(l_k - \phi_k^\top \theta_k)}{b}.$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_k[\psi_k(\theta_k)] &= \frac{F_w(u_k - \phi_k^\top \theta^*) - F_w(l_k - \phi_k^\top \theta^*)}{b} - F_w(l_k - \phi_k^\top \theta^*) \frac{f_w(l_k - \phi_k^\top \theta_k)}{F_w(l_k - \phi_k^\top \theta_k)} + \frac{1}{b} [1 - F_w(u_k - \phi_k^\top \theta^*)] \\ &= \frac{F_w(l_k - \phi_k^\top \theta_k) - F_w(l_k - \phi_k^\top \theta^*)}{b F_w(l_k - \phi_k^\top \theta_k)}. \end{aligned}$$

由拉格朗日中值定理, 存在位于 $l_k - \phi_k^\top \theta_k$ 与 $l_k - \phi_k^\top \theta^*$ 之间的随机变量 $\xi_{k,1}$, 使得

$$F_w(l_k - \phi_k^\top \theta_k) - F_w(l_k - \phi_k^\top \theta^*) = -f_w(\xi_{k,1}) \phi_k^\top \tilde{\theta}_k.$$

从而

$$\mathbb{E}_k[\psi_k(\theta_k)] \phi_k^\top \tilde{\theta}_k = -\frac{f_w(\xi_{k,1})}{b F_w(l_k - \phi_k^\top \theta_k)} (\phi_k^\top \tilde{\theta}_k)^2 \leq -\frac{f_w(\xi_{k,1})}{b} (\phi_k^\top \tilde{\theta}_k)^2.$$

其次, 当 $l_k < \phi_k^\top \theta_k < u_k$ 时, 有 $l_k - \phi_k^\top \theta_k < 0$ 且 $u_k - \phi_k^\top \theta_k > 0$, 从而由 Laplace 分布可得

$$\frac{f_w(l_k - \phi_k^\top \theta_k)}{F_w(l_k - \phi_k^\top \theta_k)} = \frac{1}{b}, \quad \frac{f_w(u_k - \phi_k^\top \theta_k)}{1 - F_w(u_k - \phi_k^\top \theta_k)} = \frac{1}{b}.$$

因此

$$\mathbb{E}_k[\psi_k(\theta_k)] = \frac{1}{b} [\mathbb{P}(X_{k+1} > \phi_k^\top \theta_k | \mathcal{F}_k) - \mathbb{P}(X_{k+1} < \phi_k^\top \theta_k | \mathcal{F}_k)] = \frac{1 - 2F_w(\phi_k^\top \tilde{\theta}_k)}{b}.$$

由于 $F_w(0) = 1/2$, 由拉格朗日中值定理, 存在位于 0 与 $\phi_k^\top \tilde{\theta}_k$ 之间的随机变量 $\xi_{k,2}$, 使得

$$1 - 2F_w(\phi_k^\top \tilde{\theta}_k) = -2f_w(\xi_{k,2})\phi_k^\top \tilde{\theta}_k.$$

于是

$$\mathbb{E}_k[\psi_k(\theta_k)] \phi_k^\top \tilde{\theta}_k = -\frac{2f_w(\xi_{k,2})}{b} (\phi_k^\top \tilde{\theta}_k)^2.$$

最后, 当 $\phi_k^\top \theta_k \geq u_k$ 时, 在事件 $l_k < X_{k+1} < u_k$ 上, $\text{sgn}(y_{k+1} - \phi_k^\top \theta_k) = -1$ 几乎处处成立. 同时, 由于 $l_k - \phi_k^\top \theta_k \leq 0$, 由 Laplace 分布可得

$$\frac{f_w(l_k - \phi_k^\top \theta_k)}{F_w(l_k - \phi_k^\top \theta_k)} = \frac{1}{b}.$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_k[\psi_k(\theta_k)] &= -\frac{F_w(u_k - \phi_k^\top \theta^*) - F_w(l_k - \phi_k^\top \theta^*)}{b} - \frac{F_w(l_k - \phi_k^\top \theta^*)}{b} + \frac{[1 - F_w(u_k - \phi_k^\top \theta^*)] f_w(u_k - \phi_k^\top \theta_k)}{1 - F_w(u_k - \phi_k^\top \theta_k)} \\ &= -\frac{F_w(u_k - \phi_k^\top \theta^*)}{b} + [1 - F_w(u_k - \phi_k^\top \theta^*)] \frac{f_w(u_k - \phi_k^\top \theta_k)}{1 - F_w(u_k - \phi_k^\top \theta_k)}. \end{aligned}$$

又因为 $u_k - \phi_k^\top \theta_k \leq 0$, 有

$$f_w(u_k - \phi_k^\top \theta_k) = \frac{F_w(u_k - \phi_k^\top \theta_k)}{b}.$$

因此

$$\mathbb{E}_k[\psi_k(\theta_k)] = \frac{F_w(u_k - \phi_k^\top \theta_k) - F_w(u_k - \phi_k^\top \theta^*)}{b [1 - F_w(u_k - \phi_k^\top \theta_k)]}.$$

由拉格朗日中值定理, 存在位于 $u_k - \phi_k^\top \theta_k$ 与 $u_k - \phi_k^\top \theta^*$ 之间的随机变量 $\xi_{k,3}$, 使得

$$F_w(u_k - \phi_k^\top \theta_k) - F_w(u_k - \phi_k^\top \theta^*) = -f_w(\xi_{k,3})(\phi_k^\top \tilde{\theta}_k).$$

从而

$$\mathbb{E}_k[\psi_k(\theta_k)] (\phi_k^\top \tilde{\theta}_k) = -\frac{f_w(\xi_{k,3})}{b [1 - F_w(u_k - \phi_k^\top \theta_k)]} (\phi_k^\top \tilde{\theta}_k)^2 \leq -\frac{f_w(\xi_{k,3})}{b} (\phi_k^\top \tilde{\theta}_k)^2.$$

综上, 三种情形下均存在 $\xi_{k,i}$, $i = 1, 2, 3$, 使得

$$\mathbb{E}_k[\psi_k(\theta_k)] (\phi_k^\top \tilde{\theta}_k) \leq -\frac{f_w(\xi_{k,i})}{b} (\phi_k^\top \tilde{\theta}_k)^2.$$

结合 Laplace 密度函数式 (22) 和 $|\xi_{k,i}| \leq \max\{|l_k|, |u_k|\} + \|\phi_k\|(\|\theta_k\| + \|\theta^*\|)$ 可得

$$f_w(\xi_{k,i}) \geq \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{\max\{|l_k|, |u_k|\} + \|\phi_k\|(\|\theta_k\| + \|\theta^*\|)}{b}\right).$$

故可得式 (24). 证毕.

定理 1 的证明. 记 $e_{k+1} = \psi_k(\theta_k) - \mathbb{E}_k[\psi_k(\theta_k)]$. 显然 $\{e_{k+1}, \mathcal{F}_{k+1}\}$ 为鞅差序列. 由 Laplace 分布式 (22) 和 $\psi_k(\theta_k)$ 的定义可知 $|\psi_k(\theta_k)| \leq \frac{1}{b}$, $|e_{k+1}| \leq \frac{2}{b}$. 为统一记号, 令 $R_{-1} = R_0$. 类似最小二乘的经典分析方法 (如 [17]), 对任意 $k \geq 1$, 构造 Lyapunov 函数为 $V_k = \tilde{\theta}_k^\top R_{k-1} \tilde{\theta}_k$ 且 $V_0 = \tilde{\theta}_0^\top R_0 \tilde{\theta}_0$. 由算法 1 和投影算子 $\Pi_k(\cdot)$ 的非扩张性, 可得

$$\begin{aligned} V_{k+1} &\leq V_k + \tilde{\theta}_k^\top (R_k - R_{k-1}) \tilde{\theta}_k + 2\mu \phi_k^\top \tilde{\theta}_k \mathbb{E}_k[\psi_k(\theta_k)] + \mu^2 \phi_k^\top R_k^{-1} \phi_k (\mathbb{E}_k[\psi_k(\theta_k)])^2 \\ &\quad + 2\mu \phi_k^\top \tilde{\theta}_k e_{k+1} + 2\mu^2 \phi_k^\top R_k^{-1} \phi_k \mathbb{E}_k[\psi_k(\theta_k)] e_{k+1} + \mu^2 \phi_k^\top R_k^{-1} \phi_k e_{k+1}^2. \end{aligned} \quad (26)$$

对式 (26) 从 $k=0$ 到 n 求和, 由引理 1 和 2 可得

$$\begin{aligned} V_{n+1} \leq & V_0 + \sum_{k=0}^n \tilde{\theta}_k^\top (R_k - R_{k-1}) \tilde{\theta}_k - \mu \sum_{k=0}^n \mathbb{E}_k [\ell_k(\theta_k) - \ell_k(\theta^*)] - \mu \sum_{k=0}^n c_k \left(\phi_k^\top \tilde{\theta}_k \right)^2 \\ & + \mu^2 \sum_{k=0}^n \phi_k^\top R_k^{-1} \phi_k (\mathbb{E}_k [\psi_k(\theta_k)])^2 + 2\mu \sum_{k=0}^n \phi_k^\top \tilde{\theta}_k e_{k+1} \\ & + 2\mu^2 \sum_{k=0}^n \phi_k^\top R_k^{-1} \phi_k \mathbb{E}_k [\psi_k(\theta_k)] e_{k+1} + \mu^2 \sum_{k=0}^n \phi_k^\top R_k^{-1} \phi_k e_{k+1}^2. \end{aligned} \quad (27)$$

下面分别估计式 (27) 的右端各项.

首先, 针对第 2 项, 由于投影集合 D 是紧的, 存在有限随机变量 C 使得 $\|\tilde{\theta}_k\| \leq C$, a.s. 此外, 注意到 R_k 为对角阵, 且对任意 $k \geq 1$ 和 $1 \leq i \leq d$ 有 $R_{k,i} - R_{k-1,i} \geq 0$, 因此

$$\tilde{\theta}_k^\top (R_k - R_{k-1}) \tilde{\theta}_k = \sum_{i=1}^d \tilde{\theta}_{k,i}^2 (R_{k,i} - R_{k-1,i}) \leq C^2 \sum_{i=1}^d (R_{k,i} - R_{k-1,i}),$$

对上式从 $k=1$ 到 n 求和可得

$$\sum_{k=1}^n \tilde{\theta}_k^\top (R_k - R_{k-1}) \tilde{\theta}_k = O\left(\max_{1 \leq i \leq d} R_{n,i}\right), \quad \text{a.s.} \quad (28)$$

其次, 针对第 5 项有

$$\phi_k^\top R_k^{-1} \phi_k = \sum_{i=1}^d \frac{\phi_{k,i}^2}{R_{k,i}} \leq \sum_{i=1}^d \frac{\phi_{k,i}^2}{r_{k,i}^{\beta_1} \log^{\beta_2} r_{k,i}},$$

注意到 $r_{k,i} - r_{k-1,i} = \phi_{k,i}^2$, 于是当 $\beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 > \frac{1}{2}$ 或 $\beta_1 > \frac{1}{2}, \beta_2 = 0$ 时

$$\sum_{k=1}^n \frac{\phi_{k,i}^2}{r_{k,i}^{\beta_1} \log^{\beta_2} r_{k,i}} \leq \int_e^{r_{n,i}} \frac{dx}{x^{\beta_1} \log^{\beta_2} x} = o\left(r_{n,i}^{\beta_1} \log^{\beta_2} r_{n,i}\right) + O(1). \quad (29)$$

由 $\psi_k(\theta_k)$ 的定义可知, 对任意 k 有 $|\psi_k(\theta_k)| \leq \frac{1}{b}$. 因此

$$\sum_{k=0}^n \phi_k^\top R_k^{-1} \phi_k (\mathbb{E}_k [\psi_k(\theta_k)])^2 = o\left(\sum_{i=1}^d r_{n,i}^{\beta_1} \log^{\beta_2} r_{n,i}\right) + O(1), \quad \text{a.s.} \quad (30)$$

进一步, 对于第 6 和 7 项, 由假设 1 知存在有限 $C_\phi > 0$, 使得对任意 $k \geq 0$ 和 $1 \leq i \leq d$ 有 $|\phi_{k,i}| \leq C_\phi$. 由 C_r 不等式可得

$$\left(\phi_k^\top R_k^{-1} \phi_k\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^d \frac{\phi_{k,i}^2}{R_{k,i}}\right)^2 \leq d \sum_{i=1}^d \frac{\phi_{k,i}^4}{r_{k,i}^{2\beta_1} \log^{2\beta_2} r_{k,i}} \leq C_\phi^2 d \sum_{i=1}^d \frac{\phi_{k,i}^2}{r_{k,i}^{2\beta_1} \log^{2\beta_2} r_{k,i}}.$$

另一方面, 由 $r_{k,i} - r_{k-1,i} = \phi_{k,i}^2$ 可得

$$\sum_{k=1}^n \frac{\phi_{k,i}^2}{r_{k,i}^{2\beta_1} \log^{2\beta_2} r_{k,i}} \leq \int_e^{r_{n,i}} \frac{dx}{x^{2\beta_1} \log^{2\beta_2} x} \leq \int_e^\infty \frac{dx}{x^{2\beta_1} \log^{2\beta_2} x} < \infty.$$

故可得

$$\sum_{k=1}^n \left(\phi_k^\top R_k^{-1} \phi_k\right)^2 = O(1), \quad \text{a.s.} \quad (31)$$

由式 (31) 和鞅收敛定理 (见文献 [18] 中定理 1.3.9) 以及 $\psi_k(\theta_k)$ 和 e_{k+1} 的有界性, 我们有

$$\begin{aligned} & 2\mu \sum_{k=0}^n \phi_k^\top \tilde{\theta}_k e_{k+1} + 2\mu^2 \sum_{k=0}^n \phi_k^\top R_k^{-1} \phi_k \mathbb{E}_k[\psi_k(\theta_k)] e_{k+1} \\ &= o\left(\sum_{k=1}^n (\phi_k^\top \tilde{\theta}_k)^2\right) + o\left(\sum_{k=0}^n (\phi_k^\top R_k^{-1} \phi_k)^2\right) + O(1) = o\left(\sum_{k=1}^n (\phi_k^\top \tilde{\theta}_k)^2\right) + O(1), \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (32)$$

类似地, 对于最后一项, 我们有

$$\sum_{k=0}^n \phi_k^\top R_k^{-1} \phi_k e_{k+1}^2 = O\left(\sum_{k=0}^n \phi_k^\top R_k^{-1} \phi_k\right) = O\left(\sum_{i=1}^d r_{n,i}^{\beta_1} \log^{\beta_2} r_{n,i}\right), \quad \text{a.s.} \quad (33)$$

此外, 由假设 1 以及参数 θ_k 的有界性, 可知存在正的有限随机变量 c_o 使得对任意 $k \geq 0$ 有 $c_k \geq c_o$. 故结合式 (27), (28), (30), (32) 和 (33), 可得

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{E}_k[\ell_k(\theta_k) - \ell_k(\theta^*)] + \frac{c_o}{2} \sum_{k=0}^n (\phi_k^\top \tilde{\theta}_k)^2 = O\left(\sum_{i=1}^d r_{n,i}^{\beta_1} \log^{\beta_2} r_{n,i}\right), \quad \text{a.s.} \quad (34)$$

由假设 1 可知 $r_{n,i} = O(n)$, a.s. 因此结合式 (34) 可得式 (9). 证毕.

定理 2 的证明. 首先证明 $\text{RA}^*(T)$ 和 $\text{RAD}^*(T)$ 的渐近表示. 由饱和映射连续且 $l_k \geq \underline{y} > 0$ 可得

$$0 \leq \frac{|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*|}{y_{k+1}} \leq \frac{u_k - l_k}{\underline{y}} \leq \frac{\sup_{t \geq 0} (u_t - l_t)}{\underline{y}} < \infty, \quad \text{a.s.}$$

于是 $\{\frac{|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*|}{y_{k+1}} - \sigma_k, \mathcal{F}_{k+1}\}$ 为条件二阶矩有界的鞅差序列. 由鞅收敛定理 (见文献 [18] 中定理 1.3.9) 有

$$\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \left[\frac{|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*|}{y_{k+1}} - \sigma_k \right] = o(1), \quad \text{a.s.} \quad (35)$$

同理, 可知 $\{\frac{|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*|}{y_{k+1}} \mathbb{I}(|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*| > \tau(y_{k+1})) - \bar{\sigma}_k, \mathcal{F}_{k+1}\}$ 也是条件二阶矩一致有界的鞅差序列, 从而有

$$\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \left[\frac{|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*|}{y_{k+1}} \mathbb{I}(|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*| > \tau(y_{k+1})) - \bar{\sigma}_k \right] = o(1), \quad \text{a.s.} \quad (36)$$

由式 (35) 和 (36) 可得

$$\text{RA}^*(T) = 1 - \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \sigma_k + o(1), \quad \text{RAD}^*(T) = 1 - \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \bar{\sigma}_k + o(1), \quad \text{a.s.} \quad (37)$$

下面证明自适应预测器与 Oracle 预测器之间的渐近等价关系. 由式 (34) 和 Schwarz 不等式可得

$$\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} |\phi_k^\top \tilde{\theta}_k| \rightarrow 0, \quad \text{a.s.} \quad (38)$$

因此有

$$\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} |\hat{y}_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*| \leq \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} |\phi_k^\top \tilde{\theta}_k| \rightarrow 0, \quad \text{a.s.} \quad (39)$$

进一步由三角不等式和 $y_{k+1} \geq \underline{y}$ 有

$$|\text{RA}(T) - \text{RA}^*(T)| \leq \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \frac{||y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}| - |y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*||}{y_{k+1}} \leq \frac{1}{\underline{y}} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} |\hat{y}_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*| = o(1), \quad \text{a.s.}$$

故有

$$\text{RA}(T) = \text{RA}^*(T) + o(1), \quad \text{a.s.} \quad (40)$$

下面证明 $\text{RAD}(T) = \text{RAD}^*(T) + o(1)$. 我们首先证明

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{I}(|y_{k+1} - S_k(\phi_k^\top \theta^*)| - \tau(y_{k+1})) \leq \varepsilon = 0, \quad \text{a.s.} \quad (41)$$

定义函数 $h_k(y) = |y - S_k(\phi_k^\top \theta^*)| - \tau(y)$. 由模型 (1), 假设 1 和 2 可知, 当 $y_{k+1} \in (l_k, u_k)$ 时, 存在与 k 无关的常数 $C_0 > 0$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|h_k(y_{k+1})| \leq \varepsilon, y_{k+1} \in (l_k, u_k) \mid \mathcal{F}_k) \leq \frac{C_0}{2b} \varepsilon. \quad (42)$$

当 $y_{k+1} = l_k$ 时, 若 $\phi_k^\top \theta^* < l_k$, 则 $|h_k(y_{k+1})| = |S_k(\phi_k^\top \theta^*) - (l_k + \tau(l_k))| = \tau(l_k) \geq 2$, 因此对任意 $\varepsilon < 1$, 事件 $|h_k(y_{k+1})| < \varepsilon$ 不可能发生. 故当 $y_{k+1} = l_k$ 时, 对任意 $\varepsilon < 1$ 有

$$\mathbb{I}(|S_k(\phi_k^\top \theta^*) - (l_k + \tau(l_k))| \leq \varepsilon) \leq \mathbb{I}(|\phi_k^\top \theta^* - (l_k + \tau(l_k))| \leq \varepsilon) + \mathbb{I}(|u_k - l_k - \tau(l_k)| \leq \varepsilon). \quad (43)$$

同理, 当 $y_{k+1} = u_k$ 时, 对任意 $\varepsilon < 1$ 有

$$\mathbb{I}(|S_k(\phi_k^\top \theta^*) - (u_k - \tau(u_k))| \leq \varepsilon) \leq \mathbb{I}(|\phi_k^\top \theta^* - (u_k - \tau(u_k))| \leq \varepsilon) + \mathbb{I}(|u_k - l_k - \tau(u_k)| \leq \varepsilon). \quad (44)$$

由式 (14), (15), (43) 和 (44) 可得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \left[\mathbb{I}(|S_k(\phi_k^\top \theta^*) - (l_k + \tau(l_k))| \leq \varepsilon) + \mathbb{I}(|S_k(\phi_k^\top \theta^*) - (u_k - \tau(u_k))| \leq \varepsilon) \right] = 0, \quad \text{a.s.} \quad (45)$$

故由式 (42)~(45) 可知

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{P}(|h_k(y_{k+1})| \leq \varepsilon \mid \mathcal{F}_k) = 0. \quad (46)$$

进一步, 令 $A_{k+1}(\varepsilon) = \{|h_k(y_{k+1})| \leq \varepsilon\}$. 对固定 $\varepsilon > 0$, $\{\mathbb{I}(A_{k+1}(\varepsilon)) - \mathbb{P}(A_{k+1}(\varepsilon) \mid \mathcal{F}_k), \mathcal{F}_{k+1}\}$ 是有界鞅差序列, 因而

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} [\mathbb{I}(A_{k+1}(\varepsilon)) - \mathbb{P}(A_{k+1}(\varepsilon) \mid \mathcal{F}_k)] = 0, \quad \text{a.s.}$$

故结合式 (46) 和 (45) 可得式 (41).

最后证明 $\text{RAD}(T) - \text{RAD}^*(T) \rightarrow 0$. 记

$$B_k = \mathbb{I}(|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}| > \tau(y_{k+1})), \quad B_k^* = \mathbb{I}(|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*| > \tau(y_{k+1})).$$

由 $||y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}| - |y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*|| \leq |\hat{y}_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*|$ 可知

$$\mathbb{I}(B_k \neq B_k^*) \leq \mathbb{I}(|\hat{y}_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*| > \varepsilon) + \mathbb{I}(|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*| - \tau(y_{k+1})) \leq \varepsilon. \quad (47)$$

由 Markov 不等式和式 (39), 对固定 $\varepsilon > 0$ 有

$$\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{I}(|\hat{y}_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} |\hat{y}_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*| \rightarrow 0, \quad \text{a.s.}$$

再结合式 (41) 与 (47), 得

$$\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{I}(B_k \neq B_k^*) \rightarrow 0, \quad \text{a.s.} \quad (48)$$

由三角不等式, 存在常数 $C_y > 0$ 使得

$$\begin{aligned} & \left| \frac{|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}|}{y_{k+1}} B_k - \frac{|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*|}{y_{k+1}} B_k^* \right| \\ & \leq \frac{||y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}| - |y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*||}{y_{k+1}} + \frac{|y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*|}{y_{k+1}} \mathbb{I}(B_k \neq B_k^*) \leq \frac{|\hat{y}_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^*|}{\underline{y}} + C_y \mathbb{I}(B_k \neq B_k^*). \end{aligned}$$

结合式 (39) 和 (48), 可得

$$\text{RAD}(T) = \text{RAD}^*(T) + o(1), \quad \text{a.s.}$$

再结合式 (37), 即得式 (16). 证毕.

定理 3 的证明. 在二分类模型下, 由假设 2 知, 当 $\phi_k^\top \theta^* \geq 0$ 时有

$$\mathbb{P}(y_{k+1} = \hat{y}_{k+1}^* | \mathcal{F}_k) = \mathbb{P}(\phi_k^\top \theta^* + w_{k+1} > 0 | \mathcal{F}_k) = 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{|\phi_k^\top \theta^*|}{b}\right).$$

当 $\phi_k^\top \theta^* < 0$ 时有

$$\mathbb{P}(y_{k+1} = \hat{y}_{k+1}^* | \mathcal{F}_k) = \mathbb{P}(\phi_k^\top \theta^* + w_{k+1} \leq 0 | \mathcal{F}_k) = F_w(-\phi_k^\top \theta^*) = 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{|\phi_k^\top \theta^*|}{b}\right).$$

综上, 对任意 $k \geq 0$, 均有

$$\mathbb{E}_k [\mathbb{I}(y_{k+1} = \hat{y}_{k+1}^*)] = 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{|\phi_k^\top \theta^*|}{b}\right).$$

因此 $\{\mathbb{I}(y_{k+1} = \hat{y}_{k+1}^*) - [1 - \frac{1}{2} \exp(-\frac{|\phi_k^\top \theta^*|}{b})], \mathcal{F}_{k+1}\}$ 为一致有界鞅差序列, 于是

$$\text{Acc}^*(T) = 1 - \frac{1}{2T} \sum_{k=0}^{T-1} \exp\left(-\frac{|\phi_k^\top \theta^*|}{b}\right) + o(1), \quad \text{a.s.} \quad (49)$$

下面证明 $\text{Acc}(T) = \text{Acc}^*(T) + o(1)$. 若 $\hat{y}_{k+1} \neq \hat{y}_{k+1}^*$, 则 $\phi_k^\top \theta_k$ 与 $\phi_k^\top \theta^*$ 位于分类阈值 0 的两侧, 从而必有 $|\phi_k^\top \theta^*| \leq |\phi_k^\top \tilde{\theta}_k|$. 因此, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\mathbb{I}(\hat{y}_{k+1} \neq \hat{y}_{k+1}^*) \leq \mathbb{I}(|\phi_k^\top \tilde{\theta}_k| > \varepsilon) + \mathbb{I}(|\phi_k^\top \theta^*| \leq \varepsilon).$$

由 Markov 不等式可得

$$\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{I}(|\phi_k^\top \tilde{\theta}_k| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} |\phi_k^\top \tilde{\theta}_k| \rightarrow 0, \quad \text{a.s.}$$

再结合分类边界分离条件式 (19), 可得

$$\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{I}(\hat{y}_{k+1} \neq \hat{y}_{k+1}^*) \rightarrow 0, \quad \text{a.s.}$$

另一方面, 对任意 k , 有

$$|\mathbb{I}(y_{k+1} = \hat{y}_{k+1}) - \mathbb{I}(y_{k+1} = \hat{y}_{k+1}^*)| \leq \mathbb{I}(\hat{y}_{k+1} \neq \hat{y}_{k+1}^*).$$

于是

$$|\text{Acc}(T) - \text{Acc}^*(T)| \leq \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \mathbb{I}(\hat{y}_{k+1} \neq \hat{y}_{k+1}^*) = o(1), \quad \text{a.s.}$$

结合上式和式 (49) 可得式 (20). 证毕.

4 基于盗窃罪裁判文书的量刑预测实验

在本节中, 我们结合盗窃罪量刑指导意见和缓刑适用规则, 构建分阶段耦合量刑预测模型, 并在真实盗窃罪裁判文书数据上检验 CALG 算法的性能.

4.1 非线性耦合量刑模型

本小节首先结合盗窃罪量刑指导意见和缓刑适用规则, 构建盗窃案件的分阶段量刑生成机制. 从裁判顺序看, 法院通常先根据犯罪事实和量刑情节确定主刑, 即有期徒刑刑期; 随后在主刑满足法定条件的基础上, 结合犯罪情节、悔罪表现、再犯危险性以及社区影响等因素判断是否适用缓刑; 若适用缓刑, 则进一步确定缓刑考验期. 因此, 本文将盗窃罪量刑过程建模为一个“有期徒刑预测 – 缓刑适用判定 – 缓刑考验期预测”的分阶段耦合系统. 具体而言, 对第 t 个案件, 记 $y_{t,1} \in \mathbb{R}_+$, $d_t \in \{0, 1\}$, $y_{t,2} \in \mathbb{R}_+$, 分别表示有期徒刑刑期 (月)、是否适用缓刑以及缓刑考验期 (月). 本文将三阶段裁判过程建模为

$$\begin{aligned} y_{t,1} &= S_{t,1}(\eta_t + w_{t,1}), \\ d_t &= \mathbb{I}(y_{t,1} \leq 36) \mathbb{I}(s_t \geq r), \quad s_t = \phi_t^\top \theta_1^* + w_{t,2}, \\ y_{t,2} &= d_t S_{t,2}(\max\{12, y_{t,1}\} + \phi_t^\top \theta_2^* + w_{t,3}), \end{aligned} \quad (50)$$

其中, $w_{t,1}$ 表示有期徒刑潜在刑期中未被量刑机理特征 η_t 建模的扰动, 主要反映未观测量刑因素、个案裁量差异及模型近似误差; $w_{t,2}$ 表示缓刑适用潜在评分 s_t 中的随机扰动; $w_{t,3}$ 表示缓刑考验期潜在连续变量中未被主刑结果和案件特征建模的扰动. 对是否缓刑任务, $\mathbb{I}(y_{t,1} \leq 36)$ 项对应缓刑适用中的主刑门槛条件, s_t 代表案件适宜适用缓刑的潜在评分, r 为缓刑适用判定阈值.

注意到盗窃罪量刑通常并非由单一因素线性决定, 而是具有较明显的层级化调节结构. 根据量刑指导意见的一般思路, 法院通常先结合犯罪事实确定量刑起点, 再根据盗窃金额、盗窃次数、作案方式等事实因素形成基准刑, 随后考虑犯罪形态、共同犯罪地位、认罪悔罪、退赃退赔、前科累犯等量刑情节, 对基准刑进行从宽或从严调节^[6,8]. 受这一量刑逻辑启发, 本文将有期徒刑生成阶段的未饱和结构项 η_t 设定为

$$\eta_t = \left(a_t + \sum_{r=1}^{m_1} b_r x_t^{(r)} \right) \times \left(\prod_{j=1}^{m_2} (1 + p_j z_t^{(j)}) \right) \times \left(1 + \sum_{k=1}^{m_3} q_k v_t^{(k)} \right), \quad (51)$$

其中第一部分表示由量刑起点和主要犯罪事实共同决定的基准刑部分, a_t 为量刑起点, $x_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(m_1)})^\top$ 表示 m_1 个决定基准刑的犯罪事实, 如盗窃数额、盗窃次数、作案手段、文物数量等. 第二部分表示具有优先适用性质的量刑因素对基准刑的比例调节作用, $z_t = (z_t^{(1)}, \dots, z_t^{(m_2)})^\top$ 表示 m_2 个优先量刑因素, 如犯罪预备、未遂、中止、从犯等. 第三部分表示一般量刑情节和缓刑相关因素对刑期的综合调节作用, $v_t = (v_t^{(1)}, \dots, v_t^{(m_3)})^\top$ 表示 m_3 个一般量刑情节, 如自首、前科、累犯、认罪认罚、退赃退赔以及盗窃罪特有情节等. 此外, 回归向量 $\phi_t = [x_t^\top, z_t^\top, v_t^\top, \zeta_t^\top]^\top$, 其中 $\zeta_t = (\zeta_t^{(1)}, \dots, \zeta_t^{(m_4)})^\top$ 表示 m_4 个主要影响缓刑适用与缓刑考验期的附加因素, 如悔罪表现、社会危险性、宣告缓刑对社区影响等. 式 (50) 中的饱和映射定义为

$$S_{t,i}(x) = \begin{cases} u_{t,i}, & x > u_{t,i}, \\ x, & l_{t,i} \leq x \leq u_{t,i}, \\ l_{t,i}, & x < l_{t,i}, \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

其中缓刑考验期 $y_{t,2}$ 的上下界, 按照《中华人民共和国刑法》关于缓刑考验期的区间限制, 取

$$l_{t,2} = \max\{12, y_{t,1}\}, \quad u_{t,2} = 60.$$

根据《中华人民共和国刑法》第二百六十四条以及山东省高级人民法院、山东省人民检察院《〈关于常见犯罪的量刑指导意见(试行)〉实施细则(试行)》,有期徒刑 $y_{t,1}$ 的上下界 $(l_{t,1}, u_{t,1})$ 由盗窃数额、盗窃次数、特定盗窃方式、文物等级以及其他严重情节等案件事实和法律规则统一确定,分为

$$(l_{t,1}, u_{t,1}) = \begin{cases} (6, 36), & \text{轻罪区间,} \\ (36, 120), & \text{中罪区间,} \\ (120, 180), & \text{重罪区间.} \end{cases} \quad (52)$$

对于具有法定减轻处罚情节的案件,亦按照相应规则予以降档处理.相应地,不同法定刑幅度分别设置量刑起点 a_t ,但采用维度和坐标含义统一的基准刑特征向量,其幅度差异由量刑起点、特征取值及饱和区间体现,从而保留量刑层级结构并满足相应的法定区间约束.

下面进一步说明上述非线性结构与前文理论模型之间的关系.对于缓刑适用阶段,在满足主刑门槛 $y_{t,1} \leq 36$ 的样本上,令 $\bar{\phi}_t = [\phi_t^\top, 1]^\top$, $\bar{\theta}^* = [\theta_1^{*\top}, -r]^\top$, 则 $d_t = \mathbb{I}(\bar{\phi}_t^\top \bar{\theta}^* + w_{t,2} \geq 0)$, 对应于模型(1)中 $l_k = u_k = 0$, $L_k = 0$, $U_k = 1$ 的二分类情形.对于缓刑考验期阶段,在 $d_t = 1$ 的样本上,记 $\bar{y}_{t,2} = y_{t,2} - \max\{12, y_{t,1}\}$, 则 $\bar{y}_{t,2} = \bar{S}_{t,2}(\phi_t^\top \theta_2^* + w_{t,3})$, 其中 $\bar{S}_{t,2}$ 的上下饱和阈值分别为 0 和 $60 - \max\{12, y_{t,1}\}$. 因而,缓刑考验期模型可写为带时变上下界的饱和随机回归模型.而针对有期徒刑预测任务,式(50)中的 η_t 采用乘积形式是为了反映量刑过程中的法律调节逻辑.但由于模型关于原始未知参数 b_r, p_j, q_k 通常是非线性的,难以直接适用前文针对线性参数化饱和和随机动态模型所建立的凸性和遗憾上界结果.因此,本文采用扩展回归向量方法将上述乘积结构改写为线性参数化形式.具体而言,定义扩展回归向量和扩展参数向量为

$$\varphi_t = \rho_t \otimes \chi_t \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ v_t \end{pmatrix}, \quad \Theta^* = \beta \otimes \vartheta \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \rho_t = (a_t, x_t^\top)^\top,$$

$$\chi_t = \otimes_{j=1}^{m_2} \begin{pmatrix} 1 \\ z_t^{(j)} \end{pmatrix}, \quad \vartheta = \otimes_{j=1}^{m_2} \begin{pmatrix} 1 \\ p_j \end{pmatrix}, \quad \beta = (1, b_1, \dots, b_{m_1})^\top, \quad \alpha = (q_1, \dots, q_{m_3})^\top,$$

其中 $\otimes$ 为 Kronecker 积.因此,令 $L_{t,1} = l_{t,1}$, $U_{t,1} = u_{t,1}$, 有期徒刑预测模型可写为与模型(1)统一的线性参数化饱和和随机回归形式

$$y_{t,1} = S_{t,1}(\varphi_t^\top \Theta^* + w_{t,1}). \quad (53)$$

本文允许回归向量和饱和阈值随案件、地区和时间适应变化,不要求其独立同分布或平稳.但假定真实参数 Θ^* , θ_2^* 和 $\bar{\theta}^*$ 保持不变.

4.2 数据处理与评价指标

值得注意的是,司法量刑预测不仅需要合理的模型结构,还依赖于高质量的结构化案件特征.然而,裁判文书通常以自然语言形式记录案件事实、量刑理由和判决结果,相关情节分散在事实认定、裁判说理和判决主文等不同部分,表述方式并不统一,难以直接用于定量分析.以盗窃罪为例,盗窃金额、盗窃次数、退赃退赔金额、刑期和罚金等信息常受到多笔盗窃、共同犯罪、既遂与未遂并存、金额类型混杂以及刑期单位换算等因素影响,难以通过简单正则匹配或传统命名实体识别方法准确提取.因此,实验中采用通用大语言模型辅助完成量刑要素的初步抽取,将非结构化裁判文书转换为可用于统计建模与在线递推的结构化特征.

在特征体系构建方面,本文依据《中华人民共和国刑法》总则关于量刑的规定、盗窃罪相关司法解释以及量刑指导意见,将抽取目标划分为被告人身份与刑事责任能力、共同犯罪地位与犯罪形态、认罪悔罪与从宽情节、退赃退赔情况、盗窃行为规模与次数、特殊场所和特殊对象情节、具体盗窃方式以及最终刑罚结果等维度.特征取值包括数值型和二值型两类:前者用于刻画盗窃金额、盗窃次数、有期徒刑刑期、缓刑考验期和罚金数额等可量化信息,后者用于标记自首、累犯、认罪认罚、退赃退赔、从犯、犯罪未遂等法院明确认定的量刑情节.为提

高抽取质量, 本文设置抽取前筛选、抽取后规则核验和人工抽样复核三个环节: 首先筛选多被告案件以减少情节混淆, 随后对被告人数量、刑罚类型、刑期单位和缓刑考验期约束等进行规则核验, 并对格式错误或抽取失败样本进行重复抽取. 本文所使用的数据提取 Prompt 见附录 B. 进一步地, 本文随机抽取 200 份裁判文书进行人工复核, 对盗窃金额、盗窃次数、有期徒刑刑期、缓刑考验期、罚金数额以及自首、累犯、认罪认罚、退赃退赔、从犯、犯罪未遂等 69 个量刑情节逐项核对. 复核结果显示各特征错误率不超过 5%, 表明经规则核验后的结构化量刑要素具有较高可靠性, 可作为后续量刑预测实验的数据基础.

实验数据. 本文选取中国裁判文书网公开发布的 2019 年以后山东省盗窃罪刑事判决书作为实验数据. 在数据预处理阶段, 依次排除管制、拘役、无期徒刑、死刑、数罪并罚等不适用于本文建模框架的样本, 剔除缓刑考验期不满足法律约束的缓刑案件, 即要求缓刑案件满足有期徒刑不超过 36 个月, 且缓刑考验期位于 $[\max\{12, y_{t,1}\}, 60]$ 区间内. 经筛选后, 最终得到 8948 条有效样本, 其中不适用缓刑样本 7399 条, 适用缓刑且缓刑考验期有效的样本 1549 条. 实验首先按照裁判文书判决日期由早到晚对全部样本排序, 并采用前向时间划分构造训练集和测试集, 得到训练集 7158 条和测试集 1790 条. 在特征构造方面, 本文将案件特征划分为四组, 其维数分别为 $m_1 = 8$, $m_2 = 10$, $m_3 = 35$, $m_4 = 3$, 分别对应决定基准刑的主要犯罪事实、优先适用的量刑因素、一般量刑情节以及主要影响缓刑适用和缓刑考验期的附加因素.

评价指标. 针对有期徒刑预测任务, 本文采用式 (11) 中定义的带自由裁量容忍区间的相对精度 RAD 作为评价指标. 具体而言, 对第 t 个案件, 设真实有期徒刑为 $y_{t,1}$, 本文参考既有研究 [8] 取自由裁量容忍阈值为 $\tau(y_{t,1}) = \max\{0.2y_{t,1}, 2\}$. 当预测刑期与真实刑期的绝对误差不超过该阈值时, 该样本不计入 RAD 的相对误差惩罚, 而一旦误差超过该阈值, 则将其相对误差 $|y_{t,1} - \hat{y}_{t,1}|/y_{t,1}$ 计入平均损失. 因此, RAD 更适合评价有期徒刑预测结果在量刑法裁量意义下的有效性, 可为识别超出自由裁量容忍阈值、需要优先人工复核的案件提供量化依据. 针对是否适用缓刑的二分类任务, 本文采用准确率 Acc 衡量分类效果, 表示全部测试案件中预测缓刑标签与真实缓刑标签一致的样本比例. 针对缓刑考验期预测任务, 本文采用式 (12) 中定义的相对精度 RA 作为评价指标, 用以衡量预测缓刑考验期相对于真实考验期的平均相对误差.

4.3 Laplace 尺度参数的估计实验

本小节首先通过残差分布拟合检验 Laplace 噪声假设的合理性, 随后基于附录 A 中的方法估计三阶段模型的尺度参数.

4.3.1 有期徒刑残差的噪声分布拟合实验

为比较 Laplace 噪声与正态噪声对有期徒刑预测误差的刻画能力, 本文设计分档残差拟合实验. 考虑到盗窃罪有期徒刑受到法定量刑区间约束, 不同档位的裁量空间和残差结构可能存在差异, 本文根据真实刑期将样本划分为三个开区间

$$\mathcal{D}_{\text{轻档}} = \{t \mid 6 < y_{t,1} < 36\}, \quad \mathcal{D}_{\text{中档}} = \{t \mid 36 < y_{t,1} < 120\}, \quad \mathcal{D}_{\text{重档}} = \{t \mid 120 < y_{t,1} < 180\},$$

为避免法定分界点处的截断效应和档位归属歧义, 实验中剔除位于分界点上的样本. 在每个档位内, 采用递推最小二乘方法拟合线性有期徒刑预测模型, 记未饱和线性预测值为 $\hat{\eta}_t$, 则对应残差为 $r_t = y_{t,1} - \hat{\eta}_t$. 随后, 我们分别使用正态分布和 Laplace 分布对残差进行极大似然拟合. 记两类分布的密度函数分别为 $f_N(r; \vartheta_N)$, $\vartheta_N = (\mu, \sigma)$, 和 $f_L(r; \vartheta_L)$, $\vartheta_L = (m, b)$, 其中 μ 和 σ 分别为正态分布的均值和标准差, m 和 b 分别为 Laplace 分布的位置参数和尺度参数. 对某一档位内的残差样本 $\mathcal{R} = \{r_1, \dots, r_n\}$, 定义样本对数似然函数为

$$\ell_n(\vartheta_M; \mathcal{R}) = \sum_{i=1}^n \log f_M(r_i; \vartheta_M), \quad M \in \{N, L\},$$

相应的极大似然估计为 $\hat{\vartheta}_M = \arg \max_{\vartheta_M} \ell_n(\vartheta_M; \mathcal{R})$. 本文采用样本对数似然、赤池信息准则 (Akaike information criterion, AIC)、贝叶斯信息准则 (Bayesian information criterion, BIC) 以及 Kolmogorov-Smirnov (KS) 统计量比

表 1 不同有期徒刑档位下残差噪声分布拟合结果.

Table 1 Distribution-fitting results for residual noise in different imprisonment ranges.

Range	Interval/months	Sample size	Distribution	Log-likelihood	AIC	BIC	KS
Minor	(6,36)	6868	Normal	-16969.72	33943.43	33957.10	0.0677
			Laplace	-16568.16	33140.31	33153.98	0.0292
Middle	(36,120)	307	Normal	-1096.24	2196.49	2203.94	0.0920
			Laplace	-1068.97	2141.95	2149.40	0.0662
Serious	(120,180)	22	Normal	-48.92	101.83	104.02	0.3636
			Laplace	-36.49	76.99	79.17	0.3300

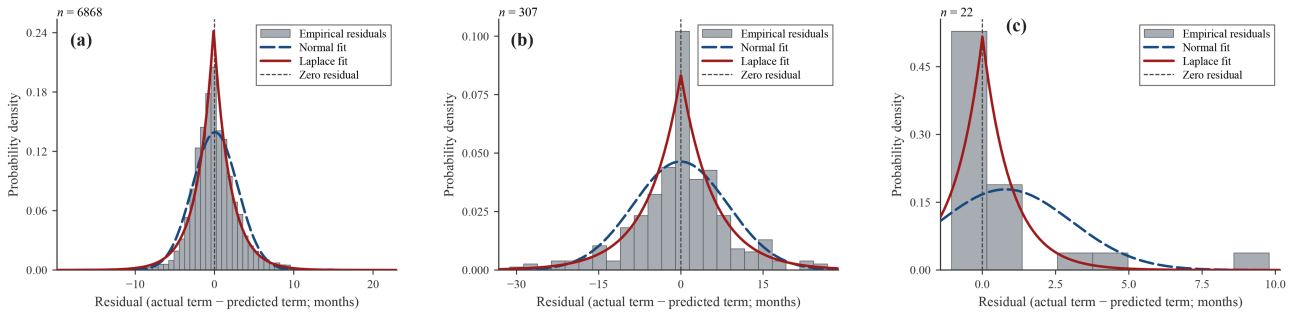


图 1 (网络版彩图) 不同有期徒刑档位下 RLS 残差的经验分布、正态分布和 Laplace 分布拟合曲线. (a) 轻档; (b) 中档; (c) 重档.

Figure 1 (Color online) Empirical distributions of RLS residuals and fitted normal and Laplace density curves for different fixed-term imprisonment ranges. (a) Minor range; (b) middle range; (c) serious range.

较两类分布的拟合效果. 具体而言,

$$AIC_M = 4 - 2\ell_n(\hat{v}_M; \mathcal{R}), \quad BIC_M = 2 \log n - 2\ell_n(\hat{v}_M; \mathcal{R}), \quad M \in \{N, L\}. \quad (54)$$

显然 AIC 和 BIC 越小, 表示对应分布对残差样本的拟合效果越好. 此外, KS 统计量定义为残差经验分布函数与拟合分布函数之间的最大距离

$$D_M = \sup_x |F_n(x) - F_M(x; \hat{v}_M)|, \quad M \in \{N, L\}, \quad (55)$$

其中 $F_n(x)$ 为残差样本的经验分布函数, $F_M(x; \hat{v}_M)$ 为在极大似然估计参数下得到的拟合分布函数. KS 统计量越小, 表示拟合分布与经验残差分布越接近.

表 1 给出了不同量刑档位下残差分布拟合结果. 可以看到, 在轻档、中档和重档中, Laplace 分布均取得了更高的最大化样本对数似然以及更低的 AIC、BIC 和 KS 统计量 (粗体表示最优结果), 表明其相较于正态分布更能刻画有期徒刑残差的经验分布. 图 1 进一步展示了各档位下 RLS 残差的经验分布及拟合曲线, 可以看出残差在零点附近具有较明显的集中峰值并呈现尖峰厚尾特征, 为本文采用 Laplace 噪声假设提供了经验依据.

4.3.2 三阶段 Laplace 尺度参数估计实验

上一节的残差拟合实验表明, Laplace 分布相较于正态分布更适合刻画有期徒刑残差. 需要指出的是, 该实验主要用于验证噪声分布形态. 在实际量刑模型中, 有期徒刑和缓刑考验期均受到法定上下界约束, 观测值可能是潜在连续变量经饱和映射后的结果. 因此, 若仅依赖非饱和区域残差估计尺度参数, 将忽略边界观测所包含的截尾概率信息. 为此, 本文采用附录 A 中基于边界阈值事件诱导的 Laplace 二分类似然方法, 分别估计有期徒刑、缓刑适用判定和缓刑考验期三个阶段的尺度参数.

表 2 三阶段模型中 Laplace 尺度参数的多随机种子估计结果.

Table 2 Laplace scale-parameter estimates for the three-stage model over multiple random seeds.

Task/range	Number of runs	Mean $\pm$ standard deviation	Median
Probation applicability	30	0.2153 $\pm$ 0.0515	0.2039
Imprisonment (minor range)	30	1.9763 $\pm$ 0.1939	2.0075
Imprisonment (middle range)	30	2.0569 $\pm$ 0.0134	2.0551
Imprisonment (serious range)	30	2.0575 $\pm$ 0.0228	2.0595
Probation period	30	5.1060 $\pm$ 1.7300	5.5774

为检验尺度估计的稳定性, 本文在不同随机种子 $0, 1, \dots, 29$ 下重复运行估计过程. 表 2 给出了各尺度参数在 30 次运行中的均值、标准差和中位数. 可以看到, 有期徒刑三个档位的尺度估计较为稳定, 表明分档尺度参数具有较好的重复性. 是否缓刑任务的尺度均值为 0.2153, 中位数为 0.2039. 缓刑考验期任务的尺度标准差相对较大, 主要原因在于缓刑考验期样本在法定下界处存在明显集中现象, 使尺度估计更容易受到下界样本比例变化的影响. 为保证后续对比实验的一致性, 本文采用多随机种子估计均值作为最终固定尺度参数.

4.4 与不同饱和观测自适应更新方法的对比

为验证 CALG 算法的有效性, 本小节与两类已有饱和观测自适应方法进行比较, 包括文献 [19] 中的两步加权最小绝对偏差算法 (TSWLAD) 和文献 [12] 中的两步拟牛顿算法 (TSQN). 三类方法均采用相同的数据预处理、样本划分和法定饱和区间, 均选取逐坐标边界为 10 且在每次参数更新时进行逐坐标投影. 为保证比较公平, TSWLAD 和 TSQN 的分布函数、密度函数和边界饱和修正项均替换为与本文一致的 Laplace 噪声模型.

4.4.1 是否缓刑预测

在是否缓刑任务中, 三类方法的参数初值均设为零向量, 分类阈值取为 0.5. 三类方法均对每个到达样本采用“先预测并记录预测结果, 再利用该样本更新参数”的在线递推方式, 采用累计预测准确率 $\text{Acc}(k)$ (式 (18)) 作为评价指标, 其中第 k 个样本的预测结果由利用该样本更新之前的参数给出.

图 2 展示了三类方法在是否缓刑预测任务中的累计准确率变化过程. 可以看到, CALG 在初始阶段快速提升, 并随样本数增加逐渐稳定在 92% 以上; TSWLAD 的累计准确率整体低于 CALG, 最终稳定在约 91%; TSQN 在初始阶段波动较大, 随后长期处于较低水平, 最终累计准确率约为 83%. 这说明, 在是否缓刑这一类别不平衡的二分类任务中, CALG 具有更好的在线适应能力和稳定性, 这可能得益于 CALG 能够根据不同特征坐标的累计信息自适应调节更新尺度, 并利用 Laplace 条件似然得分刻画非高斯扰动下二值观测中所包含的信息.

4.4.2 有期徒刑与缓刑考验期预测

本小节进一步考察三类方法在两个连续型量刑任务中的表现, 即有期徒刑预测和缓刑考验期预测. 如式 (53) 所示, 有期徒刑阶段的乘积型量刑机理可通过扩展回归向量改写为线性参数化饱和回归形式. 这一处理避免了直接求解非凸非线性参数估计问题, 但也带来了结构化特征高维稀疏的问题.

在有期徒刑预测任务中, CALG 使用优先适用量刑情节 z_t 、量刑起点、主要犯罪事实和一般量刑情节之间的全阶展开模型. 具体而言, 有期徒刑预测头的全阶展开维数为 $p_{\text{full}} = (1 + m_1)2^{m_2}(1 + m_3) = 331776$. 若 TSWLAD 和 TSQN 也使用该全阶展开, 则单个 $p_{\text{full}} \times p_{\text{full}}$ 增益矩阵规模约为 1.1008×10^{11} , 采用双精度浮点数存储时仅一个矩阵即需要约 881 GB 空间. 因此, 在可计算的对比实验中, TSWLAD 和 TSQN 仅采用零阶与一阶交互项, 其近似展开维数为 $\bar{p} = (1 + m_1) \sum_{q=0}^1 \binom{m_2}{q} (1 + m_3) = 3564$. 对缓刑考验期预测任务, 三类方法均采用下界平移的饱和回归模型. 训练阶段的下界由真实有期徒刑给出, 测试阶段的下界由上一阶段得到的有期徒刑预测值确定.

本文还在三阶段耦合量刑模型的基础上进一步引入“混合线性逼近”模块, 以拟合未建模动态. 该方法不使用神经网络, 而是在原有机理特征之外引入固定的线性逼近基函数. 记 ξ_t 为清洗并标准化后的直接案件特征向量. 基于 ξ_t , 分别构造 $\Gamma_1(\xi_t), \Gamma_2(\xi_t) \in \mathbb{R}^{q_n}$ 用于有期徒刑与缓刑考验期预测. 两类特征映射均采用最高三阶的混

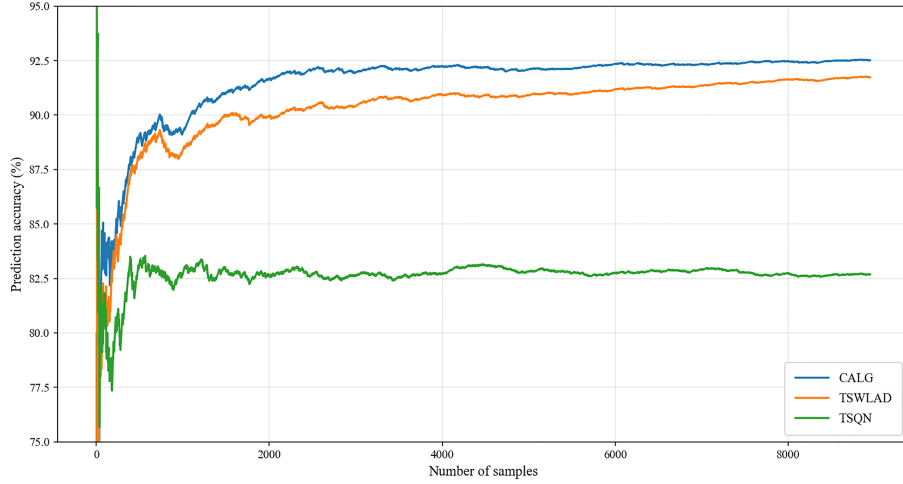


图 2 (网络版彩图) 是否缓刑预测任务中 CALG、TSWLAD 与 TSQN 的在线累计预测准确率曲线.

Figure 2 (Color online) Online cumulative prediction accuracy curves of CALG, TSWLAD, and TSQN for the probation applicability prediction task.

合基函数结构, 由 Volterra 型交互项、Taylor 型多项式项和 Chebyshev 型基函数组成. 三类基函数分别映射到互不重叠的哈希子空间, 每一类最多保留 700 个二阶交互项和 700 个三阶交互项. $q_h > 0$ 代表相应特征维度. 具体而言, 对有期徒刑预测任务, “全阶展开 + 线性逼近” 模型写为

$$y_{t,1} = S_{t,1} (\varphi_t^\top \Theta^* + \Gamma_1(\xi_t)^\top \gamma_1 + w_{t,1}), \quad (56)$$

其中 $\Gamma_1(\xi_t)^\top \gamma_1$ 用于补充机理模型未覆盖的复杂交互和经验性裁量偏差. 类似地, 对缓刑考验期预测任务, 相应模型可写为

$$y_{t,2} = d_t S_{t,2} (l_{t,2} + \phi_t^\top \theta_2^* + \Gamma_2(\xi_t)^\top \gamma_2 + w_{t,3}). \quad (57)$$

本文采用 CALG 算法对机理参数和线性逼近参数进行统一递推更新. 为避免高维线性逼近项过拟合并替代原有量刑机理项, 本文引入正则约束 $\frac{\lambda}{2} (\Gamma_h(\xi_t)^\top \gamma_h)^2$, $h = 1, 2$, 其中正则系数 $\lambda > 0$ 由验证集寻优确定.

注意到固定基函数的表达能力仍受预设基函数类型和阶数限制, 难以充分刻画结构化量刑特征之间更复杂的非线性作用. 尽管前文 CALG 算法的理论结果并不能覆盖关于神经网络参数的非凸扩展, 但为进一步考察所构建分阶段耦合量刑框架与非线性数据驱动模块的兼容性, 类似文章 [8], 本文在保持全阶量刑机理项、法定饱和和区间和阶段耦合关系不变的基础上, 将线性逼近项替换为神经网络残差项 $g_h(\tilde{\xi}_{t,h}; \omega_h)$, $h = 1, 2$. 该模块为两隐含层全连接网络, 两层宽度分别为 128 和 64, 隐含层使用 ReLU 激活函数, 输出层为单维线性单元. 为降低初始化波动, 有期徒刑预测使用 $K = 5$ 个独立初始化网络的平均输出. 此外, 我们同样对神经网络输出增加正则约束 $\frac{\lambda_{\text{out},h}}{2} g_h(\tilde{\xi}_{t,h}; \omega_h)^2$, $h = 1, 2$, 其中正则系数由验证集寻优确定.

表 3 给出了两个连续型量刑任务在 5 个随机种子下的测试集性能. 结果以均值 $\pm$ 标准差表示. 表中 “approx” 和 “NN” 分别表示逼近和神经网络. 可以看到, 在有期徒刑预测任务中, 采用全阶展开的 CALG 已优于 TSWLAD 和 TSQN; 进一步加入高维线性逼近项/神经网络逼近项后, CALG 的 RAD 由 88.23% 提升至 89.20%/90.19%. 在缓刑考验期预测任务中, 全阶展开 CALG 的 RA 为 91.00%, 加入线性逼近项/神经网络逼近项后提升至 91.10%/92.58%. 这说明, 全阶机理展开能够有效保留量刑规则中的结构性信息, 而高维线性逼近项以及神经网络逼近项能够进一步补充机理模型未完全刻画的复杂交互和经验性裁量偏差, 从而进一步提高预测精度.

表 4 给出了有期徒刑预测任务下不同方法的计算效率比较, 其中 $q_h = 350000$ 为线性逼近特征维数, C_{NN} 和 $P_{\text{NN}} = 17665$ 分别表示单个网络前向 - 反向训练的计算成本和可训练参数个数. 运行时间为同一实验环境下的实际耗时, 以均值 $\pm$ 标准差表示, 耗时比以 CALG 全阶展开方法的运行时间为基准. 可以看出, CALG 使用全

表 3 两个回归预测任务下不同方法的测试集主要指标比较.

Table 3 Comparison of major test-set metrics for different methods on two regression tasks.

Method	Model	Fixed-term imprisonment prediction RAD (%)	Probation-period prediction RA (%)
TSWLAD	First-order approx	87.03 ± 0.09	90.76 ± 0.09
TSQN	First-order approx	83.69 ± 1.35	89.58 ± 0.32
CALG	Full-order expansion	88.23 ± 0.07	91.00 ± 0.04
CALG	Full-order expansion + linear approx	89.20 ± 0.02	91.10 ± 0.02
CALG	Full-order expansion + NN approx	90.19 ± 0.11	92.58 ± 0.20

表 4 有期徒刑预测任务下不同方法的计算效率比较.

Table 4 Comparison of computational efficiency for different methods in fixed-term-imprisonment prediction.

Method	Model	Time complexity	Space complexity	Runtime (s)	Relative runtime
TSWLAD	First-order approx	$O(n\bar{p}^2)$	$O(\bar{p}^2)$	2034.18 ± 384.46	163.46×
TSQN	First-order approx	$O(n\bar{p}^2)$	$O(\bar{p}^2)$	1893.68 ± 73.74	152.17×
CALG	Full-order expansion	$O(np_{\text{full}})$	$O(p_{\text{full}})$	12.44 ± 1.91	1.00×
CALG	Full-order expansion + linear approx	$O(n(p_{\text{full}} + q_h))$	$O(p_{\text{full}} + q_h)$	37.56 ± 0.47	3.02×
CALG	Full-order expansion + NN approx	$O(np_{\text{full}} + KnC_{\text{NN}})$	$O(p_{\text{full}} + KP_{\text{NN}})$	39.68 ± 2.06	3.19×

阶机理展开时运行时间为 12.44 s, 进一步叠加高维线性逼近项后运行时间为 37.56 s, 仍显著低于 TSWLAD 和 TSQN 方法. 这是因为 TSWLAD 和 TSQN 需要维护并更新 $p \times p$ 量级的增益矩阵, 时间和空间复杂度分别为 $O(np^2)$ 和 $O(p^2)$; 而 CALG 仅维护参数向量和逐分量累计量, 对给定设计维数呈线性复杂度.

本小节实验表明, 在高维结构化量刑特征下, CALG 能够利用全阶机理展开并兼容高维线性逼近项, 在提升预测精度的同时显著降低矩阵型自适应方法所需的计算和存储成本, 具有较好的在线更新能力和可扩展性.

4.5 逐分量更新机制的有效性分析

为验证逐分量参数更新机制的有效性, 本文进一步将所提出的逐分量 Laplace 随机梯度方法与非逐分量更新方法^[8]进行比较. 两种方法采用相同的数据预处理、Laplace 噪声假设和超参数设置, 唯一差异在于自适应步长的构造方式. 对于逐分量更新方法, 每个参数维度有不同的自适应学习率, 而非逐分量更新方法中所有参数在同一时刻使用相同的学习率. 实验结果如图 3 所示. 在 5 个随机种子下, 逐分量更新在三个预测任务上均优于全局步长更新, 其中是否缓刑任务的 Acc 由 90.42% 提升至 93.64%, 提高 3.22%; 有期徒刑预测的 RAD 精度由 87.60% 提升至 88.23%, 提高 0.63%; 对于缓刑考验期预测, 逐分量更新的相对精度为 91.00%, 略高于全局步长更新的 90.17%. 总体来看, 逐分量更新能够更好地适应不同量刑特征在尺度、频率和稀疏性上的差异, 从而提升多阶段量刑预测模型的综合性能.

4.6 优化器消融实验

为进一步验证所提出逐分量自适应似然梯度更新机制的有效性, 本文对同一阶优化器进行消融比较, 包括 SGD、SGD-Momentum 方法、Nesterov 方法、RMSprop、Adam、AdamW 以及本文提出的 CALG 算法. 具体而言, 所有方法均采用相同的三阶段量刑预测模型、相同的不含高维线性逼近项的基础全阶展开模型、相同的 Laplace 条件似然和相同的逐分量投影边界 10. 各算法的超参数均通过在训练集内部按时间顺序划分的验证集上进行网格搜索确定. 在缓刑考验期预测任务中, 各方法均使用对应有期徒刑预测头输出的预测刑期构造测试阶段的缓刑考验期下界, 以保持三阶段端到端预测流程一致.

各优化器在三个预测头上的最终超参数配置见表 5. 其中, SGD 仅含学习率 η ; SGD-Momentum 和 Nesterov 额外包含动量系数 m ; RMSprop 包含学习率、二阶矩衰减系数 α ; Adam 与 AdamW 包含学习率、一阶矩衰减

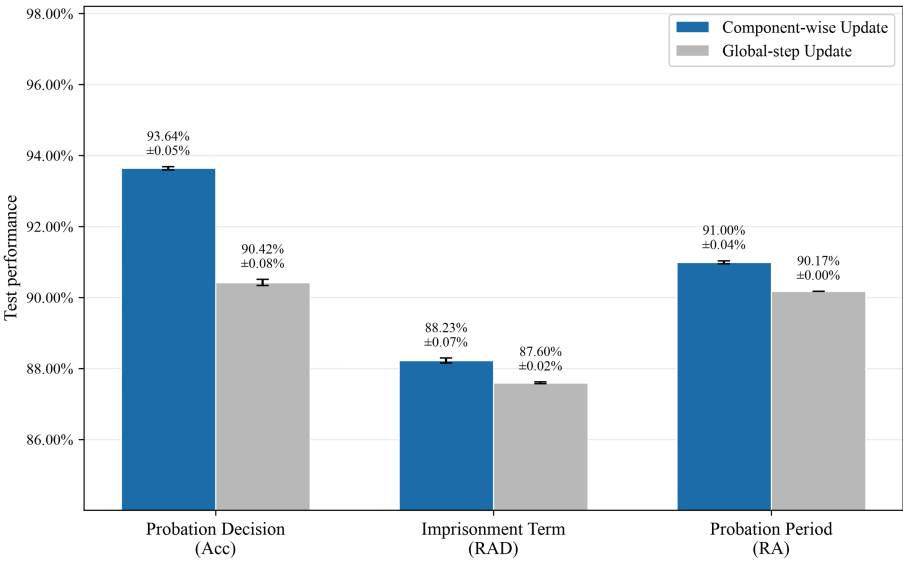


图 3 (网络版彩图) 逐分量步长更新与全局步长更新在五个随机种子下的测试性能比较. 柱顶数值为均值 ± 标准差.

Figure 3 (Color online) Comparison of test performance between componentwise and global step update schemes over five random seeds. Values above the bars indicate the mean ± standard deviation.

表 5 不同优化器在三个预测任务中的超参数配置.

Table 5 Hyperparameter settings of different optimizers for the three prediction tasks.

Optimizer	Probation applicability	Fixed-term imprisonment prediction	Probation-period prediction
SGD	$\eta = 3 \times 10^{-3}$	$\eta = 1 \times 10^{-4}$	$\eta = 3 \times 10^{-3}$
SGD-Momentum	$\eta = 3 \times 10^{-4}, m = 0.9$	$\eta = 1 \times 10^{-4}, m = 0.8$	$\eta = 3 \times 10^{-4}, m = 0.9$
Nesterov	$\eta = 1 \times 10^{-3}, m = 0.95$	$\eta = 1 \times 10^{-4}, m = 0.8$	$\eta = 3 \times 10^{-4}, m = 0.9$
RMSprop	$\eta = 10^{-3}, \alpha = 0.99$	$\eta = 10^{-3}, \alpha = 0.9$	$\eta = 10^{-3}, \alpha = 0.99$
Adam	$\eta = 10^{-3}, \beta_{1,A} = 0.9, \beta_{2,A} = 0.99$		
AdamW	$\eta = 10^{-3}, \beta_{1,A} = 0.9, \beta_{2,A} = 0.99, \lambda = 10^{-3}$		

系数 $\beta_{1,A}$ 、二阶矩衰减系数 $\beta_{2,A}$, 且 AdamW 额外使用解耦权重衰减系数.

表 6 给出了不同优化器在五个随机种子下的测试集结果. 可以看到, CALG 在是否缓刑、有期徒刑预测和缓刑考验期预测三个任务的主要指标上均取得最高平均性能, 分别达到 93.64%、88.23% 和 91.00%. 在是否缓刑任务中, CALG 高于 SGD、SGD-Momentum、Nesterov、RMSprop、Adam 和 AdamW, 表明基于历史坐标信息的逐分量更新更适合类别不均衡且具有门槛效应的缓刑适用判定. 在有期徒刑预测任务中, CALG 的 RAD 高于 RMSprop、Adam 和 AdamW 等自适应优化器, 说明其为主刑预测中仍保持较强竞争力. 在缓刑考验期预测任务中, CALG 的 RA 同样优于其他优化器, 表明逐分量自适应更新能够在三阶段量刑预测流程中保持较好的整体稳定性.

4.7 与大模型基准的比较

近年来, 大模型在长文本理解和生成式推理方面取得了显著进展, 并逐渐应用于法律文本分析任务. 与本文基于结构化量刑要素的 CALG 方法不同, 大模型基准直接以裁判文书中的事实描述和量刑情节为输入, 输出有期徒刑刑期、是否适用缓刑以及缓刑考验期, 从原始文本端到端建模的角度评价其三阶段量刑预测能力.

大模型基准设置. 本文评估 Qwen3-max 和 DeepSeek-V4-Flash (284B) 两个大模型直接评测基准. 为避免标签泄漏, 本文在构造输入时删除判决主文、最终刑期、缓刑考验期、罚金数额等结果信息, 仅保留事实认定和量

表 6 不同优化器在五个随机种子下的测试集性能比较.

Table 6 Comparison of test-set performance among different optimizers over five random seeds.

Method	Probation applicability	Fixed-term imprisonment prediction	Probation-period prediction
	Acc (%)	RAD (%)	RA (%)
SGD	92.57 ± 0.00	87.58 ± 0.05	90.45 ± 0.07
SGD-Momentum	92.63 ± 0.00	85.35 ± 0.35	89.92 ± 0.25
Nesterov	91.56 ± 0.07	85.53 ± 0.26	89.89 ± 0.36
RMSprop	93.18 ± 0.00	88.20 ± 0.05	90.18 ± 0.01
Adam	93.13 ± 0.00	88.22 ± 0.06	90.27 ± 0.02
AdamW	93.13 ± 0.00	88.22 ± 0.05	90.28 ± 0.05
CALG	93.64 ± 0.05	88.23 ± 0.07	91.00 ± 0.04

表 7 大模型与 CALG 的测试集性能比较.

Table 7 Comparison of test-set performance between large language models and CALG.

Method	Probation applicability	Fixed-term imprisonment prediction	Probation-period prediction
	Acc (%)	RAD (%)	RA (%)
Qwen3-max	91.62	82.38	70.91
DeepSeek-V4-Flash (284B)	90.37	87.97	85.64
CALG	93.64	88.23	91.00

刑情节描述,并要求模型输出以月为单位的刑期结果.考虑到未经司法量刑数据微调的大模型可能存在数值输出不稳定或格式不规范的问题,本文采用两阶段评测流程:先由模型直接生成预测结果,再由同一模型解析回答并统一转换为月份数值;对未能解析出有效预测结果的样本,在相应指标计算中予以排除.

实验结果.表 7 给出了两个大模型评测与 CALG 在相同测试集上的比较结果.可以看到,在本文数据集、特征抽取规则、提示设置和评价流程下,基于结构化特征的 CALG 在三项指标上均取得最优性能,是否缓刑 Acc、有期徒刑 RAD 和缓刑考验期 RA 分别达到93.64%、88.23% 和 91.00%.在大模型直接评测中,Qwen3-max 的是否缓刑 Acc 为 91.62%,但有期徒刑和缓刑考验期任务指标相对较低,分别为 82.38% 和 70.91%;DeepSeek-V4-Flash 在数值预测任务上表现更好,有期徒刑 RAD 和缓刑考验期 RA 分别达到 87.97% 和 85.64%,说明大规模通用模型具备一定的法律文本理解和量刑语义推断能力.但与 CALG 相比,其三项指标仍存在差距,表明仅依赖通用大模型的零样本生成式推理,仍难以充分适配具体量刑预测任务的数据分布和评价目标.从计算和建模代价看,CALG 基于抽取后的结构化量刑要素进行逐分量递推更新,具有更低的模型规模、训练成本和部署成本.此外,CALG 显式保留了分阶段裁判逻辑、法定区间约束和特征层面的可解释性,更适合对在线更新能力和结果可解释性有要求的量刑辅助分析场景.

5 总结

司法量刑预测通常面临法定区间约束、高维异质特征、多阶段耦合以及非高斯扰动等问题,对现有监督学习方法和传统自适应辨识算法提出了新的挑战.针对此类问题,本文研究了一类带时变饱和映射的随机动态模型的自适应预测问题,提出基于 Laplace 条件负对数似然的 CALG,以适用于高维、稀疏和尺度异质的结构化量刑特征数据.在无需特征数据任何激励的条件下,证明了 CALG 自适应预测器在常用量刑评价指标下可渐近逼近已知真实参数的 Oracle 预测器,为复杂司法量刑预测提供了理论保证.

在应用层面,本文结合盗窃罪量刑指导逻辑和缓刑适用规则,构建了“有期徒刑预测 – 缓刑适用判定 – 缓

刑考验期预测”的分阶段耦合量刑模型. 借助大语言模型从真实盗窃罪裁判文书中抽取结构化量刑要素, 并通过规则核验和人工抽样复核提高数据可靠性. 残差分布拟合实验表明, 相比正态分布, Laplace 分布能够更好地刻画有期徒刑残差的尖峰厚尾特征, 为本文采用 Laplace 噪声假设提供了经验依据. 在三阶段量刑预测实验中, CALG 与饱和牛顿型算法、非逐分量更新方法、常用一阶优化器以及大模型基准评测进行了系统比较. 结果表明, CALG 在有期徒刑预测、缓刑适用判定和缓刑考验期预测任务上整体取得了较好的预测精度和稳定性.

本文工作仍有若干值得进一步研究的问题. 例如, 真实司法数据中可能存在地区差异、时间漂移以及更复杂的未建模因素, 后续可进一步研究带有时变参数、区域异质性或非线性补偿项的结构化量刑模型. 总体而言, 本文建立的逐分量 Laplace 自适应预测方法及其分阶段量刑建模框架, 为高维异质司法数据下兼具法律解释性、理论保证和计算效率的量刑预测研究提供了一种新的思路.

参考文献

- 1 Zuo W M. Some thoughts on the application prospects of legal artificial intelligence in China. *Tsinghua Univ Law J*, 2018, 12: 108–124 [左卫民. 关于法律人工智能在中国运用前景的若干思考. *清华法学*, 2018, 12: 108–124]
- 2 Xu N, Wang P, Chen L, et al. Distinguish confusing law articles for legal judgment prediction. In: *Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*, 2020. 3086–3095
- 3 Huang Y X, Dai W Z, Yang J, et al. Semi-supervised abductive learning and its application to theft judicial sentencing. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Data Mining*, 2020. 1070–1075
- 4 Xue Z, Liu H, Hu Y, et al. LEEC for judicial fairness: a legal element extraction dataset with extensive extra-legal labels. In: *Proceedings of the 33rd International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 2024. 7527–7535
- 5 Wang F, Gan D, Liu N. A study on impact of leniency on sentencing for suspects admitting guilt & accepting punishments—based on data of misdemeanor crime of intentional injury. *J Shandong Univ (Philos Soc Sci)*, 2022, 3: 65–77 [王芳, 甘叠, 刘念. 认罪认罚量刑从宽实效研究——基于故意伤害罪轻罪的数据解读. *山东大学学报 (哲学社会科学版)*, 2022, 3: 65–77]
- 6 Wang F, Zhang L T, Guo L. Applications of nonlinear recursive identification theory in sentencing data analyses. *Sci Sin Inform*, 2022, 52: 1837–1852 [王芳, 张蓝天, 郭雷. 非线性递推辨识理论在量刑数据分析中的应用. *中国科学: 信息科学*, 2022, 52: 1837–1852]
- 7 Jin Y, Zheng X, Guo L. Adaptive prediction theory for MLMS with applications to judicial sentencing. In: *Proceedings of the 23rd World Congress of the International Federation of Automatic Control*, 2026
- 8 Dai R, Zheng X, Wang F, et al. Judicial sentencing prediction based on hybrid models and two-stage learning algorithms. *IEEE Trans Comput Soc Syst*, 2026, 13: 1693–1702
- 9 Eno Loudon J, Skeem J L. How do probation officers assess and manage recidivism and violence risk for probationers with mental disorder? An experimental investigation. *Law Hum Behav*, 2013, 37: 22–34
- 10 Williams L R, LeCroy C W, Vivian J P. Assessing risk of recidivism among juvenile offenders: the development and validation of the recidivism risk instrument. *J Evid-Based Soc Work*, 2014, 11: 318–327
- 11 Wang Q, Zhang X, Yang L, et al. Incorporating legal logic into deep learning: an intelligent approach to probation prediction. In: *Proceedings of the 34th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 2025. 7804–7812
- 12 Zhang L, Guo L. Adaptive identification with guaranteed performance under saturated observation and nonpersistent excitation. *IEEE Trans Automat Contr*, 2024, 69: 1584–1599
- 13 Zheng X, Guo L. L_1 -based adaptive identification with saturated observations. *IEEE Trans Automat Contr*, 2025, 70: 5836–5847
- 14 Liu Y, Zheng X, Liu Z, et al. Gradient-based adaptive prediction and control for nonlinear stochastic systems. In: *Proceedings of the 23rd World Congress of the International Federation of Automatic Control*, 2026
- 15 Duchi J, Hazan E, Singer Y. Adaptive subgradient methods for online learning and stochastic optimization. *J Mach Learn Res*, 2011, 12: 2121–2159
- 16 Shaiakhmetov R, Pianini D, Filaseta A, et al. First-order optimization algorithms: state of the art, classification, and performance: a practitioner’s guide. *Neural Comput Appl*, 2026, 38: 233
- 17 Guo L. Convergence and logarithm laws of self-tuning regulators. *Automatica*, 1995, 31: 435–450
- 18 Guo L. *Time-Varying Stochastic Systems: Stability and Adaptive Theory*. Beijing: Science Press, 2020 [郭雷. 时变随机系统: 稳定性与自适应理论 (第二版). 北京: 科学出版社, 2020]
- 19 Zheng X, Jin Y, Liu Y, et al. ℓ_1 -based adaptive identification under quantized observations with applications. In: *Proceedings of the 23rd World Congress of the International Federation of Automatic Control*, 2026

附录 A Laplace 尺度参数的估计

针对 CALG 算法对噪声尺度参数的依赖性, 本文根据三阶段模型中不同输出变量的观测机制, 利用训练集样本分别估计相应的 Laplace 尺度参数. 由于有期徒刑阶段受到不同法定量刑档位的影响, 本文对有期徒刑扰动采用分档尺度参数. 记第 t 个案件所属的有期徒刑档位 $\kappa_t \in \{\text{轻档}, \text{中档}, \text{重档}\}$. 假设有期徒刑阶段的扰动项在给定档位后服从

$$w_{t,1} | \{\kappa_t = j\} \sim \text{Laplace}(0, b_{1,j}), \quad j \in \{\text{轻档}, \text{中档}, \text{重档}\}.$$

缓刑适用阶段和缓刑考验期阶段的扰动项分别假设为

$$w_{t,2} \sim \text{Laplace}(0, b_2), \quad w_{t,3} \sim \text{Laplace}(0, b_3),$$

其中 $b_{1,j}$ 表示有期徒刑第 j 个量刑档位的尺度参数, b_2 表示缓刑适用判定阶段的尺度参数, b_3 表示缓刑考验期阶段的尺度参数.

首先, 记标准 Laplace 分布函数为

$$F_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{A1})$$

对二值观测 $z \in \{0, 1\}$, 定义 Laplace 分布函数诱导的二分类负对数似然为

$$\ell_{\text{bin}}(z, \eta) = -z \log F_0(\eta) - (1 - z) \log \{1 - F_0(\eta)\}. \quad (\text{A2})$$

后续三个阶段的尺度参数 $\{b_{1,\text{轻}}, b_{1,\text{中}}, b_{1,\text{重}}, b_2, b_3\}$ 均基于该二分类似然函数进行估计.

A.1 有期徒刑阶段的三档尺度估计

针对有期徒刑阶段, 如式 (52) 所示, 首先根据案件事实将训练样本划入轻档、中档和重档. 对任一档位 j , 记其固定上下界为

$$(c_{j,1}, c_{j,2}) \in \{(6, 36), (36, 120), (120, 180)\}.$$

记第 j 档训练样本集合为 $\mathcal{T}_j$. 对 $t \in \mathcal{T}_j$, 构造辅助变量如下:

$$s_{t,j} = \min\{\max(y_{t,1}, c_{j,1}), c_{j,2}\}. \quad (\text{A3})$$

由此定义两个边界阈值事件

$$z_{t,j}^{(1)} = \mathbb{I}(s_{t,j} - c_{j,1} > 0), \quad z_{t,j}^{(2)} = \mathbb{I}(s_{t,j} - c_{j,2} \geq 0). \quad (\text{A4})$$

在第 j 档内, 令 $X_{t,j} = [\varphi_{t,j}^\top, 1]^\top$, 其中 $\varphi_{t,j}$ 为第 j 档有期徒刑对应的展开特征向量. 本文引入两个阈值模型

$$\mathbb{P}(z_{t,j}^{(r)} = 1 | X_{t,j}) = F_0(X_{t,j}^\top \lambda_{j,r}), \quad r = 1, 2, \quad (\text{A5})$$

其中

$$\lambda_{j,1} = \begin{bmatrix} \theta_j / b_{1,j} \\ (a_j - c_{j,1}) / b_{1,j} \end{bmatrix}, \quad \lambda_{j,2} = \begin{bmatrix} \theta_j / b_{1,j} \\ (a_j - c_{j,2}) / b_{1,j} \end{bmatrix}, \quad (\text{A6})$$

其中 a_j 表示未知截距参数. 记两个阈值模型的最后一维参数分别为 $\alpha_{j,1}$ 和 $\alpha_{j,2}$, 由 $\alpha_{j,1}$ 和 $\alpha_{j,2}$ 的估计值 $\hat{\alpha}_{j,1}$ 和 $\hat{\alpha}_{j,2}$ 可以恢复第 j 档的尺度参数, 即

$$\hat{b}_{1,j} = \frac{c_{j,2} - c_{j,1}}{\hat{\alpha}_{j,1} - \hat{\alpha}_{j,2}}. \quad (\text{A7})$$

在数值实现中, 为提高稳定性, 首先根据非饱和区域的数据构造尺度参数初始值. 对第 j 档内部样本 $\mathcal{I}_j = \{t : c_{j,1} < s_{t,j} < c_{j,2}\}$, 采用最小二乘拟合, 根据残差得到初始位置参数. 进一步, 通过最小化如下负对数似然指标给出参数 $\lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}$ 的估计:

$$\min_{\lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}} \sum_{t \in \mathcal{T}_j} \sum_{r=1}^2 \ell_{\text{bin}}(z_{t,j}^{(r)}, X_{t,j}^\top \lambda_{j,r}). \quad (\text{A8})$$

在高维展开特征下, 为避免完整 RLS 维护 $p \times p$ 增益矩阵带来的计算和存储开销, 主实验中采用 L-BFGS-B 对目标式 (A8) 进行批量优化. L-BFGS-B 最大迭代次数设为 100, 正则系数设为 10^{-6} , 并通过式 (A7) 得到各档尺度参数.

A.2 缓刑适用阶段的尺度估计

对于是否适用缓刑阶段, 给定分类阈值 r 下, 由假设 2 和模型 (50) 有

$$\mathbb{P}(d_t = 1 | \phi_t, t \in \mathcal{T}_e) = F_0([\phi_t^\top, 1] \lambda_2), \quad \mathcal{T}_e = \{t : y_{t,1} \leq 36\}, \quad (\text{A9})$$

其中 ϕ_t 为缓刑适用判定阶段的特征向量且 $\lambda_2 = \left[\frac{\theta_2^*}{b_2}, -\frac{r}{b_2}\right]$. 在数值实现中, 通过如下的最小化二分类负对数似然给出参数 λ_2 的估计值, 即

$$\min_{\lambda_2} \sum_{t \in \mathcal{T}_e} \ell_{\text{bin}}(d_t, [\phi_t^\top, 1] \lambda_2). \quad (\text{A10})$$

算法采用递推形式训练, 训练轮数设为 20 次. 本文实验中默认取 $r = 0.5$. 因此当得到 λ_2 最后一维参数估计 $\hat{\alpha}$ 时, 可由

$$\hat{b}_2 = -\frac{r}{\hat{\alpha}}, \quad (\text{A11})$$

得到缓刑适用阶段的 Laplace 尺度参数.

A.3 缓刑考验期阶段的尺度估计

对于缓刑考验期阶段, 本文只使用真实适用缓刑且缓刑考验期满足法律约束的训练样本. 记该样本集合为

$$\mathcal{T} = \{t : d_t = 1, y_{t,2} \in [o_t, 60], o_t = l_{t,2} = \max\{12, y_{t,1}\}\}.$$

定义中心化变量

$$\tilde{y}_{t,2} = y_{t,2} - o_t, \quad \tilde{l}_{t,2} = 0, \quad \tilde{u}_{t,2} = 60 - o_t.$$

于是缓刑考验期模型可写为中心化后的饱和形式

$$\tilde{y}_{t,2} = \tilde{S}_{t,2} \left(a + \phi_t^\top \theta_2^* + w_{t,3} \right), \quad \tilde{l}_{t,2} = 0, \quad \tilde{u}_{t,2} = 60 - o_t,$$

其中 a 为阈值参数.

与有期徒刑阶段类似, 对中心化后的缓刑考验期构造两个阈值事件

$$z_{t,3}^{(1)} = \mathbb{I}(\tilde{y}_{t,2} > 0), \quad z_{t,3}^{(2)} = \mathbb{I}(\tilde{y}_{t,2} \geq \tilde{u}_{t,2}), \quad (\text{A12})$$

由假设 2 可知

$$\mathbb{P}\left(z_{t,3}^{(p)} = 1 \mid \phi_t, c_{t,p}\right) = F_0\left([\phi_t^\top, 1, -c_{t,p}]\lambda_3\right), \quad c_{t,1} = 0, \quad c_{t,2} = \tilde{u}_{t,2}, \quad p = 1, 2, \quad (\text{A13})$$

其中 $\lambda_3 = [\frac{\theta_2^{*\top}}{b_3}, \frac{a}{b_3}, \frac{1}{b_3}]^\top$. 记 λ_3 的最后一维参数为 γ_2 . 因此, 在估计得到 $\hat{\gamma}_2$ 后, 缓刑考验期阶段的尺度参数便可恢复.

在实际数据中, 缓刑考验期存在明显的下界集中现象, 即大量样本满足 $\tilde{y}_{t,2} = 0$. 为避免下界样本在尺度识别中占据过强主导作用, 本文对不同边界状态的样本采用类别加权. 具体而言, 本阶段优化的加权负对数似然为

$$\mathcal{L}_3(\lambda_3) = \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{p=1}^2 \omega_t \ell_{\text{bin}}\left(z_{t,3}^{(p)}, [\phi_t^\top, 1, -c_{t,p}]\lambda_3\right), \quad (\text{A14})$$

其中 ω_t 表示样本 t 所属边界状态对应的权重定义为

$$\omega_t = \begin{cases} 0.3, & \tilde{y}_{t,2} = 0, \\ 1, & 0 < \tilde{y}_{t,2} < \tilde{u}_{t,2}, \\ 1, & \tilde{y}_{t,2} \geq \tilde{u}_{t,2}. \end{cases}$$

本文采用 L-BFGS-B 对目标式 (A14) 进行数值优化, 并由 $\hat{b}_3 = 1/\hat{\gamma}_2$ 恢复缓刑考验期阶段的 Laplace 尺度参数.

附录 B 数据提取 Prompt

PROMPT = “你是一个专业的法律信息结构化抽取助手. 你的任务是阅读裁判文书全文, 客观提取影响量刑的关键情节.

核心原则:

1. 全案罪名覆盖: 不仅限于盗窃罪, 需提取被告人所犯所有罪名 (如合同诈骗、抢劫等) 对应的量刑情节. 只要在该案判决中被认定, 均需提取.

2. 多被告独立提取: 该案件可能包含多名被告人, 必须逐一提取每人的特征, 严禁混淆.

3. 统括性描述映射: 特别注意文中“三被告人均...”, “二被告人...”, “均系自首”, “均认罪认罚”等统括性表述.

必须将此类特征准确赋值给所有涵盖在内的被告人, 绝不能只给第一被告人填 1, 其余填 0.

4. “本院认为”优先: 对于法定量刑情节 (如数额巨大、主从犯、自首), 以“本院认为”段落的认定为准确. 若公诉机关指控但法院未认定, 则不提取.

5. 前科严格绑定: 提取“前科详情”时, 必须严格通过人名定位, 确保张某的行政处罚不会被错误提取到李某名下.

6. 互斥特征规则: 主犯类型, 退赃情况字段均为互斥项, 最多仅一项填 1, 其余填 0, 严格按提取规则优先级判定.

输出必须为标准 JSON, 键名与特征列表完全一致.”

EXTRACTION_USER_PROMPT_TEMPLATE = r“

[任务]: 请阅读以下案件信息, 针对盗窃罪, 提取影响量刑的关键特征. 若为多被告, 请逐一输出每位被告人的特征.

[基础信息字段] (文本/列表/整数)

– 被告人姓名

– 案号

– crimes: 触犯罪名 (列表, 可包含盗窃罪以外罪名; 无则填空列表或空字符串)

– previous_judgments_text: 前科详情 (仅该被告人的前科/行政处罚; 无填“无”或空)

– prior_sentence_months: 漏罪/新罪有期徒刑原判刑期 (月整数; 无填 0)

[身份与刑事责任] (0/1)

– 无刑事责任 (14–16 岁)

– 减轻刑事责任 (16–18 岁)

- 75 周岁或以上
- 无刑事责任的精神病人
- 负刑事责任的精神病人
- 减轻刑事责任的精神病人
- 又聋又哑, 盲人

[退赃情况 0/1] (互斥, 优先级: 全部退赃 > 部分退赃 > 追回 > 无)

- 追回: 赃物被公安机关或司法机关追回, 被告人未主动退赃
- 全部退赃: 被告人主动退还全部赃款赃物
- 部分退赃: 被告人主动退还部分赃款赃物
- 退赃金额: 如果有退赃金额的话输出金额, 无则为 0
- 无: 以上情况都不满足

[共同犯罪地位与形态] (0/1)

- 主犯 (法院明确认定为主犯)
- 罪责较轻的主犯: 法院明确认定为主犯, 但同时认定其罪责较轻
- 非主犯: 以上情况都不满足
- 共同犯罪 (注意: 只要该被告人参与的任一罪名被认定为共同犯罪, 此处即填 1. 若三被告人合谋诈骗, 三人此处均为 1)
- 从犯
- 胁从犯
- 教唆犯
- 教唆不满十八周岁
- 被教唆人未实施犯罪
- 犯罪预备
- 犯罪未遂
- 犯罪中止
- 单位犯罪
- 犯罪集团的首要分子
- 涉黑涉恶
- 不致再危害社会/不致危害社会
- 没有参与分赃或分赃较少

[认罪悔罪与从宽] (0/1)

特别注意: 若文中出现“三被告人均自首”, “均签署认罪认罚”等表述, 所有涉及的被告人以下对应字段均需填 1.

- 自首
- 累犯
- 立功
- 坦白
- 认罪认罚
- 当庭自愿认罪
- 前科, 劣迹
- 初犯, 偶犯
- 调解
- 和解
- 谅解 (注意: 若取得谅解, 通常意味着有赔偿或特定行为, 需结合上下文判断)
- 积极赔偿
- 被害人过错
- 符合社区矫正条件/社区同意对其社区矫正

[盗窃行为规模与次数] (数值/0/1)

注意: 以“本院认为”中对犯罪数额的定性 (如“数额巨大”) 为准. 若涉及多个罪名, 只要任意一个罪名达到“数额巨大”, 此处

即填 1.

- 盗窃次数
- 盗窃金额 (仅填写盗窃罪的金额, 无盗窃填 0)
- 数额较大 (0/1)
- 数额巨大 (0/1, 例如: 合同诈骗数额巨大, 此处填 1)
- 数额特别巨大 (0/1)
- 2 年内 3 次盗窃 (0/1)

- 曾因盗窃受过刑事处罚 (0/1)
- 1 年内曾因盗窃受过行政处罚 (0/1)

[盗窃次数计算规则]

- 无论是否成功, 每次实施盗窃行为计为 1 次
- 连续盗窃不同对象视为多次
- 累计所有明确描述的盗窃行为次数
- 如果文本中无法明确盗窃次数, 但是提到被告人多次盗窃, 那么盗窃次数算作 3

[盗窃金额计算规则]

- 仅统计被告人实际盗窃的财物价值
- 如果文本中明确写出了被告人盗窃财物的总价值, 直接提取, 不用再把多个财物价值相加
- 必须排除: 罚金/赔偿金/误工费/精神损失费等衍生费用
- 混合表述时仅提取直接盗窃金额 (例: ‘售卖盗窃物品非法获利 2010 元, 盗窃物品经鉴定价值 3150 元’ 仅计 3150)

[场所/对象/动机等特殊情节] (0/1)

- 组织, 控制未成年人盗窃
- 盗窃弱势群体
- 犯罪对象为弱势群体
- 在医院盗窃
- 盗窃救灾物资
- 自然灾害盗窃
- 为赌博盗窃
- 生活所需盗窃
- 社会危害大 (后果比较严重, 影响恶劣)
- 附带民事诉讼

[盗窃具体方式] (0/1)

- 入户盗窃
- 扒窃 (行为方式: 趁人不备或贴身盗窃, 非公共场合或使用暴力胁迫等非秘密手段的不认定为扒窃)
- 盗窃近亲友财物
- 携带凶器盗窃
- 社会安全事件期间盗窃
- 采用破坏性手段盗窃

[刑罚结果] (月份整数/0/1)

- 管制 (月数)
- 拘役 (月数)
- 数罪并罚 (0/1, 法院是否判决数罪并罚)
- 有期徒刑 (月数)
- 无期徒刑 (0/1)
- 死刑 (0/1)
- 缓刑考验期 (注意: 是缓刑考验期, 不是主刑; 只输出月份整数)
- 罚金 (整数, 人民币; 无填 0)
- 主动缴纳罚金 (0/1)
- 减轻 (0/1, 法院是否认定减轻处罚)
- 从轻 (0/1, 法院是否认定从轻处罚)

[统一换算规则]

- (1) 所有 “年/月/日” 一律换算成 “月数整数”, 输出时不要单位, 不要文字, 只输出数字.
- (2) 年 $\rightarrow$ 月: 1 年 = 12 个月.
- (3) 月 $\rightarrow$ 月: 直接取月数.
- (4) 年 + 月: 例如 “三年六个月” = $3*12 + 6 = 42$.
- (5) 日/天: 若出现 “X 日/天”, 按 30 天 = 1 个月换算, 月数 = 四舍五入到整数 (例如 90 天约等于 3 个月).
- (6) 中文数字必须转换为阿拉伯数字再换算: 如 “一年六个月” = 18, “十个月” = 10, “二年” = 24.
- (7) 若出现 “免于刑事处罚/无罪/不予处罚” 等无刑罚情形, 则所有月数字段为 0, 无期/死刑为 0.

[案情详情]:

case_info

[输出要求]:

1. 必须输出标准 JSON; 键名与上述特征列表完全一致.

2. 数值型字段 (如 “盗窃次数”, “盗窃金额”, “prior_sentence_months”, “罚金”, “管制”, “拘役”, “有期徒刑”, “缓刑考验期”) 填写具体整数;
缺失填 0.
3. 其他所有特征 (0/1 项) 仅在 “本院认为” 明确认定时填 1, 否则填 0.
4. 多被告时用数组 ‘defendants’, 每个元素为一名被告人的对象; 建议保留: 被告人姓名, 案号, crimes, previous_judgments_text, prior_sentence_months.
5. 不要包含 Markdown 标记; 不要输出说明文字. ”

Componentwise adaptive prediction theory under saturated observations and its application to stage-coupled sentencing

Yujing LIU¹, Yifei JIN^{1,2}, Zhixin LIU¹ & Lei GUO^{1*}

1. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

2. School of Advanced Interdisciplinary Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 101408, China

* Corresponding author. E-mail: Lguo@amss.ac.cn

Abstract Judicial sentencing prediction often faces challenges arising from statutory sentencing-range constraints, high-dimensional heterogeneous features, and non-Gaussian disturbances. To address these issues, this paper studies the adaptive prediction problem for a class of stochastic dynamic models with time-varying saturation mappings, and proposes a componentwise adaptive likelihood gradient algorithm (CALG) based on the Laplace conditional negative log-likelihood. CALG adaptively updates different components according to the historical information along each coordinate, making it suitable for high-dimensional, sparse, and heterogeneous structured sentencing data. Theoretically, this paper establishes a cumulative regret upper bound for CALG, and shows that, under commonly used sentencing evaluation metrics, the adaptive predictor generated by CALG can asymptotically achieve the same performance as the Oracle predictor with the true parameter. To verify the applicability of the proposed theoretical framework to real judicial scenarios, this paper constructs a stage-coupled sentencing model for theft cases, consisting of fixed-term imprisonment prediction, probation applicability determination, and probation prediction. The model formulates fixed-term imprisonment and probation prediction as stochastic regression problems with time-varying saturation mappings, and formulates probation applicability determination as a binary classification problem jointly governed by a principal-sentence threshold and a case-level score, thereby explicitly capturing statutory range constraints and the staged logic of judicial sentencing. On real theft judgment data, residual-distribution fitting and scale-parameter estimation experiments are conducted to examine the empirical plausibility of the Laplace noise assumption. Subsequently, in the three-stage prediction tasks, CALG is compared with Newton-like adaptive methods for saturation-observation models, non-componentwise updating methods, commonly used first-order optimizers, and large-language-model evaluation baselines. The experimental results show that the proposed method achieves overall better predictive accuracy and computational efficiency in fixed-term imprisonment prediction, probation applicability determination, and probation prediction.

Keywords sentencing prediction, probation prediction, time-varying saturation model, componentwise adaptive likelihood gradient algorithm, stage-coupled sentencing model, theft cases