

具有异常连边的复杂网络拓扑结构辨识方法

郑尧中, 张海涛*, 胡源园

华中科技大学人工智能与自动化学院, 人工智能研究院, 武汉 430074

* 通信作者. E-mail: zht@mail.hust.edu.cn

收稿日期: 2025-10-29; 修回日期: 2026-02-10; 接受日期: 2026-03-10; 网络出版日期: 2026-04-17

国家自然科学基金(批准号: 62225306, U2141235)和科技部重大项目(批准号: 2022ZD0119601)资助

摘要 复杂网络的拓扑结构是实现网络安全控制的基础, 基于节点的时间序列观测数据集辨识网络拓扑结构已经成为计算机、系统科学、物理学等多学科交叉领域的研究热点. 然而网络中可能存在异常连边, 从而影响辨识性能, 削弱网络控制的安全性与稳定性. 为解决上述问题, 本文提出了一种策略块稀疏贝叶斯学习算法 (S-Block-SBL) 辨识具有异常连边的网络拓扑结构, 包括利用块稀疏贝叶斯学习实现所有数据集上辨识结果的统一, 并提出一种数据集提纯策略进一步提高辨识的准确性. 证明了上述 S-Block-SBL 的损失函数非增且收敛. 在基准网络上进行实验, 验证了所提算法的有效性和优越性.

关键词 复杂网络, 拓扑结构, 网络辨识, 稀疏贝叶斯学习

1 引言

复杂网络已被广泛应用于各学科的系统结构及功能的研究, 例如生物医学^[1]、生态学^[2]、社会科学^[3]、计算机科学^[4,5]等. 其中, 拓扑结构为复杂网络的重要特征, 网络的安全控制依赖于已知的拓扑结构^[6]. 然而, 在实际复杂系统中, 网络拓扑结构经常无法预知^[7], 只能观察得到节点的时间序列数据. 并且, 由于异常连边的存在, 可能产生异常的观测数据集^[8]. 若直接利用该数据辨识拓扑结构, 将引入虚假连边或遗漏关键连边, 进而导致后续网络控制失稳^[9,10]. 因此, 辨识具有异常连边的复杂网络拓扑结构对于提高网络的可靠性, 实现网络的安全有效运行具有十分重要的意义^[11].

近年来, 研究者已经提出了很多方法辨识复杂网络的拓扑结构. 针对一般动力学网络, 文献^[12]通过定义拓扑结构辨识问题的可解性, 利用约束的李雅普诺夫方程, 建立了通用的网络辨识算法. 驱动响应方法通过网络对外部驱动信号的响应来辨识网络结构^[13]. 网络同步方法建立一个辅助网络, 利用同步状态时其参数将收敛至原网络的结构参数, 从而辨识网络结构^[14]. 此外, 通过检测节点之间的统计相关性与格兰杰因果关系也可以辨识网络结构^[15,16]. 针对数据有限的问题, 基于压缩感知的方法(例如 l_1 方法^[17]和稀疏贝叶斯学习^[18,19]等), 利用拓扑结构的稀疏性实现辨识. 稀疏贝叶斯学习(SBL)是基于贝叶斯框架的稀疏优化算法, 旨在通过引入稀疏先验和证据最大化推断, 获得高质量的稀疏解^[18]. 其机理可解释为一种迭代加权 l_1 正则化最小化过程, 相比传统压缩感知算法在精度以及稀疏性上更具优势^[20]. 稀疏贝叶斯学习因其稀疏促进能力和求解质量优势, 已成为

引用格式: 郑尧中, 张海涛, 胡源园. 具有异常连边的复杂网络拓扑结构辨识方法. 中国科学: 信息科学, 2026, 56: 1101–1109, doi: 10.1360/SSI-2025-0451

Zheng Y Z, Zhang H-T, Hu Y Y. Topological structure identification method for complex networks with anomalous edges. Sci Sin Inform, 2026, 56: 1101–1109, doi: 10.1360/SSI-2025-0451

动力学系统与网络化系统辨识的重要工具^[21]. 文献 [22] 将稀疏贝叶斯学习应用于非线性状态空间系统的辨识. 文献 [23] 开发了高效的随机变分推断辨识算法, 降低了传统变分推断的计算量. 此外, 压缩感知类方法已有广泛的网络结构辨识应用. 文献 [24] 提出了结构化压缩感知方法, 对含弱扰动的复杂网络拓扑进行全局辨识. 文献 [25] 结合 QR 分解与压缩感知, 利用高斯噪声构造测量矩阵实现结构辨识. 文献 [26] 基于最小描述长度原理, 采用贝叶斯推理实现无需交叉验证的结构辨识, 适用于多节点相互作用网络. 文献 [27] 提出了一种块采样方法, 从异质数据中辨识动力学网络的结构. 文献 [28] 提出了一种正则化方法, 用于处理大规模实时流数据的在线网络结构辨识问题. 针对多目标网络重构, 文献 [29] 利用社区结构提升进化算法的辨识性能. 文献 [30] 通过引入先验知识克服结构辨识中的系统混叠问题. 针对噪声场景, 文献 [31] 提出了基于最小数据最小距离的方法辨识拓扑结构. 当仅有部分节点可观测时, 文献 [32] 提出了一种基于图论的方法, 可通过部分观测辨识网络拓扑结构. 文献 [33] 利用非参数贝叶斯方法, 开展网络拓扑结构辨识与社区检测. 针对多层复杂网络, 文献 [34] 构建了一种进化多任务框架, 通过特征提取与知识迁移解决高维结构辨识问题. 此外, 当仅有少部分连接未知时, 网络拓扑结构辨识问题转为链路预测问题. 文献 [35,36] 提出了非线性模型与图神经网络融合的框架用于提升动力学网络链路预测性能. 尽管目前取得了很多进展, 然而实际情况中经常存在多组独立观测的节点状态时间序列 (简称为数据集), 其中部分数据集由于网络结构存在异常连边导致观测数据集异常, 仅有剩余数据集没有被异常连边污染. 此外, 各数据集是否为异常是未知的. 当前很少有工作考虑在这种情况下辨识网络拓扑结构.

因此, 本文提出了一种策略块稀疏贝叶斯学习算法 (S-Block-SBL) 辨识具有异常连边的网络拓扑结构. 本文主要贡献如下所述:

- (1) 利用块稀疏贝叶斯学习同时使用各数据集进行拓扑辨识;
- (2) 提出了一种数据集提纯策略筛选并去除低质量的异常数据集.

本文的其余部分组织如下. 第 2 节提供了预备知识并对问题进行描述. 第 3 节设计了策略块稀疏贝叶斯学习算法. 第 4 节进行了数值模拟, 以证实所提出方法的有效性和优越性. 最后, 在第 5 节中得出结论.

2 问题描述

考虑一个具有 N 个节点的复杂网络 $\mathbb{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{A})$, 其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 表示节点索引集, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 表示边索引集, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 表示邻接矩阵. 复杂网络 \mathbb{G} 由以下动力学描述^[34]:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} A_{ij} x_j(t), \quad (1)$$

其中 $x_i(t)$ 表示第 i 个节点的状态, $f(x_i(t))$ 表示自交互函数, 均假设为已知. 定义 H 为每个数据集观测时刻总数, 第 h 个观测点记为 t_h , $h \in \{1, \dots, H\}$. 定义数据向量 $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^H$ 为

$$\mathbf{y}_i := [y_i(t_1), \dots, y_i(t_H)]^T, \quad (2)$$

其中 $y_i(t_h) := \frac{dx_i(t_h)}{dt} - f(x_i(t_h))$, 导数用一阶前向欧拉法近似^[34]. 定义 $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(t_h) := [x_1(t_h), \dots, x_N(t_h)]^T \in \mathbb{R}^N$, 构造字典矩阵 $\Phi_i \in \mathbb{R}^{H \times n}$ 如下:

$$\Phi_i := [\boldsymbol{\kappa}_i(t_1), \dots, \boldsymbol{\kappa}_i(t_H)]^T, \quad (3)$$

其中 $\boldsymbol{\kappa}_i(t_h) \in \mathbb{R}^n$ 由 $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(t_h)$ 去掉第 i 个元素 $x_i(t_h)$ 得到, $n = N - 1$. 因此, 待辨识向量 $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^n$ 定义为邻接矩阵 \mathbf{A} 的第 i 行去掉对角元素 A_{ii} , 代表节点 i 的连边.

定义 m 为数据集的总数, \tilde{m} 为被异常连边污染的异常数据集的个数. 在第 c 个数据集中, 将第 i 个节点的状态观测向量, 字典矩阵及待辨识向量分别记为 $x_{i[c]}(t)$, $\mathbf{y}_{i[c]}$, $\Phi_{i[c]}$ 及 $\mathbf{w}_{i[c]}$, 可得

$$\mathbf{y}_{i[c]} = \Phi_{i[c]} \mathbf{w}_{i[c]} + \boldsymbol{\rho}_i, \quad (4)$$

其中 $\rho_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma \mathbf{I})$ 表示外部高斯噪声, $c \in \{1, \dots, m\}$. 注意由于部分数据集上网络存在异常连边, 即部分 $\mathbf{w}_{i[c]}$ 存在异常值. 由于所提出的方法独立地辨识每个节点的邻居, 为了符号简洁省略下标 i .

为了利用整体的数据集减小异常值影响, 通过堆叠 (4) 并重新排列矩阵块来整合所有数据集. 定义由所有 $\mathbf{y}_{[c]}$ 和 $\Phi_{[c]}$ 分别堆叠得到的 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{Hm}$ 和 $\Psi \in \mathbb{R}^{Hm \times nm}$ 如下:

$$\mathbf{z} := [\mathbf{y}_{[1]}^T, \mathbf{y}_{[2]}^T, \dots, \mathbf{y}_{[m]}^T]^T, \quad (5)$$

$$\Psi := \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Phi_{[1],1} & & & \Phi_{[1],n} & & \\ & \Phi_{[2],1} & & & \Phi_{[2],n} & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & \Phi_{[m],1} & & \Phi_{[m],n} \end{array} \right], \quad (6)$$

其中 $\Phi_{[c],k} \in \mathbb{R}^H$ 表示 $\Phi_{[c]}$ 的第 k 列, $k \in \{1, \dots, n\}$. 由所有 $\mathbf{w}_{[c]}$ 堆叠得到待辨识向量 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{nm}$ 为

$$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_n] = [w_{[1],1}, \dots, w_{[m],1}, \dots, w_{[1],n}, \dots, w_{[m],n}]^T, \quad (7)$$

其中 $\boldsymbol{\theta}_k = [w_{[1],k}, \dots, w_{[m],k}] \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, $w_{[c],k}$ 表示 $\mathbf{w}_{[c]}$ 的第 k 个元素. 因此, 所有数据集的数据及待辨识元素可进行对应, 即

$$\mathbf{z} = \Psi \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(0, \sigma \mathbf{I}). \quad (8)$$

本文研究的问题描述如下.

问题 1: 针对节点动力学为式 (1) 的复杂网络, 根据 m 个观测时间序列数据集 $x_{i[c]}(t)$ 辨识网络结构 \mathbf{A} .

3 基于块稀疏贝叶斯学习的网络结构辨识算法

本节提出一种策略块稀疏贝叶斯学习算法 (S-Block-SBL) 来求解式 (8). 注意到 $\boldsymbol{\theta}$ 具有块稀疏结构, 块的大小为 m , 因此定义块稀疏先验如下^[19]:

$$p(\boldsymbol{\theta}_k | \gamma_k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \gamma_k \mathbf{I}),$$

$$p(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{(2\pi)^{(nm)/2} |\boldsymbol{\Gamma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\theta}\right), \quad (9)$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}_k := [\gamma_k, \dots, \gamma_k] \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, $\boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_n]^T \in \mathbb{R}^{nm}$, $\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}(\boldsymbol{\gamma}) \in \mathbb{R}^{nm \times nm}$. 显而易见, 一个块 $\boldsymbol{\theta}_k$ 的所有元素 $\{w_{[1],k}, \dots, w_{[m],k}\}$ 由同一个超参数 γ_k 控制, 因此具有一致稀疏性, 从而实现块稀疏并平滑块中的异常值. 式 (8) 的似然函数服从高斯分布

$$p(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta}; \sigma) \sim \mathcal{N}(\Psi \boldsymbol{\theta}, \sigma \mathbf{I}). \quad (10)$$

由贝叶斯原理^[19], 后验密度 $\boldsymbol{\theta}$ 也服从高斯分布

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}; \boldsymbol{\gamma}, \sigma) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\Sigma}_\theta), \quad (11)$$

其均值与协方差分别为

$$\boldsymbol{\mu}_\theta = \sigma^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_\theta \Psi^T \mathbf{z}, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_\theta = (\sigma^{-1} \Psi^T \Psi + \boldsymbol{\Gamma}^{-1})^{-1}. \quad (13)$$

超参数 γ 与噪声方差 σ 可通过第二类最大似然估计得到, 即先对 $\boldsymbol{\theta}$ 进行边际化积分, 再对所得边际似然进行最大似然估计. 边际概率密度函数可以解析计算为

$$p(\mathbf{z}; \gamma, \sigma) = \int p(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta}; \sigma) p(\boldsymbol{\theta} | \gamma) d\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{(2\pi)^{Hm/2} |\boldsymbol{\Sigma}_z|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \boldsymbol{\Sigma}_z^{-1} \mathbf{z}\right), \quad (14)$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}_z = \sigma \mathbf{I} + \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Psi}^T$.

采用期望最大化 (EM) 算法^[37] 最大化 $p(\mathbf{z}; \gamma, \sigma)$, 等价于最小化 $-\ln p(\mathbf{z}; \gamma, \sigma)$, 可得损失函数

$$\mathcal{L}(\gamma, \sigma) = \mathbf{z}^T (\sigma \mathbf{I} + \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Psi}^T)^{-1} \mathbf{z} + \log |\sigma \mathbf{I} + \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Psi}^T|. \quad (15)$$

$\mathcal{L}(\gamma, \sigma)$ 是非凸的, 由凸函数和凹函数组成^[18]. EM 算法为最大-最小化 (MM) 方法^[38] 的一种特例, 适用于此形式的代价函数优化. EM 算法其将权重 $\boldsymbol{\theta}$ 视为隐变量, 并最大化 Q 函数

$$\begin{aligned} Q(\gamma, \sigma) &= E_{\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}; \gamma^{(old)}, \sigma^{(old)}} [\log p(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}; \gamma, \sigma)] \\ &= E_{\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}; \gamma^{(old)}, \sigma^{(old)}} [\log p(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta}; \sigma)] + E_{\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}; \gamma^{(old)}, \sigma^{(old)}} [\log p(\boldsymbol{\theta}; \gamma)]. \end{aligned} \quad (16)$$

定义 q 为上一轮迭代次数. 对于 γ , Q 函数可简化为

$$\begin{aligned} Q(\gamma) &= E_{\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}; \gamma^{(old)}, \sigma^{(old)}} [\log p(\boldsymbol{\theta}; \gamma)] \\ &\propto -\frac{m}{2} \log(|\gamma|) - \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} + \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\theta}}^{(q)T} \right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

对 γ_k 求导可得

$$\frac{\partial Q(\gamma)}{\partial \gamma_k} = -\frac{m}{2\gamma_k} + \frac{1}{2\gamma_k^2} \left[\sum_{p \in \Lambda_p} \left(\left(\mu_{\boldsymbol{\theta}, p}^{(q)} \right)^2 + (\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{(q)})_{p,p} \right) \right], \quad (18)$$

其中 $\mu_{\boldsymbol{\theta}, p}^{(q)}$ 为 $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}$ 的第 p 个元素, $(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{(q)})_{p,p}$ 为 $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}$ 的第 p 行第 p 列的元素, $\Lambda_p \in \{(k-1)m+1, \dots, km\}$. 因此, 对于第 $q+1$ 次迭代, γ_k 的更新公式如下:

$$\gamma_k^{(q+1)} = \frac{1}{m} \sum_{p \in \Lambda_p} \left(\left(\mu_{\boldsymbol{\theta}, p}^{(q)} \right)^2 + (\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{(q)})_{p,p} \right). \quad (19)$$

为了估计 σ , Q 函数可简化为

$$\begin{aligned} Q(\sigma) &= E_{\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}; \gamma^{(old)}, \sigma^{(old)}} [\log p(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta}; \sigma)] \\ &\propto -\frac{Hm}{2} \log \sigma - \frac{1}{2\sigma} E_{\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}; \gamma^{(old)}, \sigma^{(old)}} [\|\mathbf{z} - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\theta}\|_2^2] \\ &= -\frac{Hm}{2} \log \sigma - \frac{1}{2\sigma} \left[\|\mathbf{z} - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}\|_2^2 + \sigma^{(q)} \left[nm - \text{Tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} (\boldsymbol{\Gamma}^{(q)})^{-1} \right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

对 σ 求导可得

$$\frac{\partial Q(\sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{Hm}{2\sigma} + \frac{1}{2\sigma^2} \left[\|\mathbf{z} - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}\|_2^2 + \sigma^{(q)} \left[nm - \text{Tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} (\boldsymbol{\Gamma}^{(q)})^{-1} \right) \right] \right]. \quad (21)$$

因此, 对于第 $q+1$ 次迭代, σ 的更新公式如下:

$$\sigma^{(q+1)} = \frac{\|\mathbf{z} - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}\|_2^2 + \sigma^{(q)} \left[nm - \text{Tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} (\boldsymbol{\Gamma}^{(q)})^{-1} \right) \right]}{Hm}. \quad (22)$$

得到新的超参数 $\gamma^{(q+1)}$ 与噪声方差 $\sigma^{(q+1)}$ 后, 由式 (12) 和 (13) 更新得到 $\mu_{\theta}^{(q+1)}$ 和 $\Sigma_{\theta}^{(q+1)}$. 重复上述过程直到算法收敛, 可得

$$\hat{\theta} = \hat{\mu}_{\theta}. \quad (23)$$

对于 $\hat{\theta}$ 中每个块 $\hat{\theta}_k$ 取平均值, 得到最终的 $\hat{\mathbf{w}}$:

$$\hat{\mathbf{w}} = [\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n], \quad \hat{w}_k = \frac{1}{m} \sum_{c=1}^m \hat{\theta}_{k,c}, \quad (24)$$

其中 $\hat{\theta}_{k,c}$ 表示 $\hat{\theta}_k$ 的第 c 个元素.

定理1 给定初始点 $\{\gamma^{(0)}, \sigma^{(0)}\}$, 由稀疏贝叶斯学习算法 (12), (13), (19), (22) 生成的迭代序列 $\{\gamma^{(q)}, \sigma^{(q)}\}$ 所对应的损失函数 (15) 非增且收敛.

证明 由 $\log p(\mathbf{z}; \gamma, \sigma) = \log p(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta} | \gamma, \sigma) - \log p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}; \gamma, \sigma)$, 对于第 q 次迭代, 等式两边取关于后验 $\boldsymbol{\theta}$ 的数学期望, 可得

$$\log p(\mathbf{z}; \gamma, \sigma) = Q(\gamma, \sigma) - E_{\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}; \gamma^{(q)}, \sigma^{(q)}}[\log p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}; \gamma, \sigma)].$$

由于 $Q(\gamma, \sigma)$ 对于 γ 和 σ 为凹, 可得

$$Q(\gamma^{(q)}, \sigma^{(q)}) \leq Q(\gamma^{(q+1)}, \sigma^{(q+1)}).$$

由 Jensen 不等式 [39], 可得

$$E_{\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}; \gamma^{(q)}, \sigma^{(q)}}[\log p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}; \gamma^{(q+1)}, \sigma^{(q+1)})] \leq E_{\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}; \gamma^{(q)}, \sigma^{(q)}}[\log p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}; \gamma^{(q)}, \sigma^{(q)})].$$

因此,

$$\mathcal{L}(\gamma^{(q+1)}, \sigma^{(q+1)}) = -\log p(\mathbf{z}; \gamma^{(q+1)}, \sigma^{(q+1)}) \leq -\log p(\mathbf{z}; \gamma^{(q)}, \sigma^{(q)}) = \mathcal{L}(\gamma^{(q)}, \sigma^{(q)}).$$

由于 $\mathcal{L}(\gamma, \sigma)$ 有下界 [39], 因此 $\mathcal{L}(\gamma, \sigma)$ 非增且收敛, 定理得证.

为进一步提高辨识精度, 本文提出一种数据集提纯策略, 去除质量不佳的数据集.

定义 s 为要去掉的数据集的个数, 其中 $s < m$. 由于上述求得的 $\boldsymbol{\theta}^*$ 使用了所有 m 个数据集, 且通过块稀疏先验强制实现 $\boldsymbol{\theta}_k$ 块内的一致稀疏性, 即保障 m 个数据集对 $\boldsymbol{\theta}_k$ 产生相同的影响. 因此, 定义各个数据集由 $\hat{\mathbf{w}}$ 拟合的残差 $\mathbf{r}_{[c]}$ 如下:

$$\mathbf{r}_{[c]} := \mathbf{y}_{[c]} - \Phi_{[c]} \hat{\mathbf{w}}, \quad (25)$$

具有最大残差 $\|\mathbf{r}_{[c]}\|_2^2$ 所对应的数据集被认为是质量最差的数据集, 将其舍弃. 将剩余数据集重复进行上述算法, 最终得到 \mathbf{w}^* . 参数 s 的选择是基于规则的, 根据其在数据上的表现质量. 数据集根据是否去除设定权重. 具体来说, 在 S-Block-SBL 中, s 通过网格搜索进行调优, 搜索区间为 $[0, m-1]$. 对于每个 s 参数值, 计算获得结果的 Akaike 信息准则 (AIC) 类型误差, 并选择与最低误差相关的 s 参数值.

定义数据比例 R_D 为测量数据长度与待辨识系数总数之比, 即 $R_D = H/n$. 需要注意的是, 如果去除数据集, 则 \mathbf{z} , Ψ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的维度将以相同比例减小, 数据比例 R_D 保持不变. 因此, 数据集的提纯不会因数据可用性减少而对算法的结果造成影响.

上述过程的伪代码如算法 1 所示.

算法 1 基于策略块稀疏贝叶斯学习的拓扑结构辨识算法.

Require: $x_{i[c]}(t)$: 各节点的观测状态; m : 数据集的个数; s : 要去除的数据集的个数; q_{\max} : 块稀疏贝叶斯算法的最大迭代次数; ς : 块稀疏贝叶斯算法的停止阈值; 令 $p = m$;

Ensure: w_i^* : 各节点的连边;

```

1: while  $p > m - s$  do
2:   由式 (2) 构造观测向量  $\mathbf{y}_{i[c]}$ , 由式 (3) 构造字典矩阵  $\Phi_{i[c]}$ ;
3:   由式 (5) 构造综合观测向量  $\mathbf{z}$ , 由式 (6) 构造综合字典矩阵  $\Psi$ ;
4:   初始化  $\gamma^{(0)}$  与  $\sigma^{(0)}$ , 由式 (12) 和 (13) 计算  $\mu_{\theta}^{(0)}$ ;
5:   for  $q = 0, \dots, q_{\max}$  do
6:     由式 (19) 计算  $\gamma^{(q+1)}$ , 由式 (22) 计算  $\sigma^{(q+1)}$ ;
7:     由式 (12) 和 (13) 计算  $\mu_{\theta}^{(q+1)}$ ;
8:     if  $\|\mu_{\theta}^{(q+1)} - \mu_{\theta}^{(q)}\| \leq \varsigma$  then
9:       break
10:    end if
11:  end for
12:  由式 (25) 计算  $\mathbf{r}_{[c]}$ , 并舍弃最大  $\|\mathbf{r}_{[c]}\|_2^2$  所对应的数据集  $\mathbf{y}_{[c]}$  与  $\Phi_{[c]}$ ;
13:   $p = p - 1$ ;
14: end while

```

4 实验结果

4.1 实验设置

本实验选择常用的 Watts-Strogatz (WS) 小世界网络^[40] 和 Barabási-Albert (BA) 无标度网络^[41] 两种基准网络作为拓扑结构. 网络节点的动力学方程选为

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sin(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} A_{ij} x_j(t). \quad (26)$$

为量化所提出的 S-Block-SBL 算法的性能, 采用两个综合指标. (1) AUC (真阳性率 – 假阳性率 ROC 曲线下的面积): 衡量算法区分存在连接与不存在连接的整体能力. (2) AUPR (精确率 – 召回率 PR 曲线下的面积): 评估算法的精确率与召回率权衡关系. 为测试所提 S-Block-SBL 算法的优越性, 选择了 Lasso^[17] 和 SBL^[18] 两种主流压缩感知方法进行对比. 其中, Lasso 是基于 ℓ_1 正则化的稀疏重构算法, SBL 是基础稀疏贝叶斯学习算法. 实验比较了 3 种算法在不同数据比例和噪声水平下的性能, 假设外部噪声为高斯白噪声, 单位为分贝 (dB). 每个实验均独立进行 10 次. 实验中, 网络节点个数 N 设置为 100, 数据集个数 m 设置为 10. 异常数据集的比例设置为 0.3, 即 $\tilde{m}/m = 0.3$.

4.2 不同数据比例下的性能表现

选用 WS 网络作为结构模型, 外部噪声幅度设置为 70 dB.

图 1 展示了不同数据比例下 3 种算法的 AUC 和 AUPR 对比结果. 结果显示, 随着可用数据的增加, 3 种算法的性能均逐步提升, 且 S-Block-SBL 在 3 种算法中始终表现最佳. 当数据比例超过 0.8 时, 所提出的 S-Block-SBL 算法的 AUC 为 0.953, AUPR 为 0.921, 取得了令人满意的性能. 当数据比例为 0.6 时, 与 Lasso 和 SBL 相比, S-Block-SBL 的 AUC 分别提升了 34.4% 和 14.2%, AUPR 分别提升了 43.9% 和 18.4%, 显著优于其他算法. 由此可见, 所提 S-Block-SBL 算法在观测数据有限时具有有效性和优越性.

4.3 不同噪声水平下的性能表现

选用 BA 网络作为结构模型, 数据比例设置为 2.5.

图 2 展示了 3 种算法在不同噪声幅度下的 AUC 和 AUPR 结果. 结果表明, 随着噪声幅度的增大, 所有算法的性能均逐渐下降, 而 S-Block-SBL 在所有算法中实现了最佳辨识性能. 具体来说, 当噪声强度为 60 dB 时,

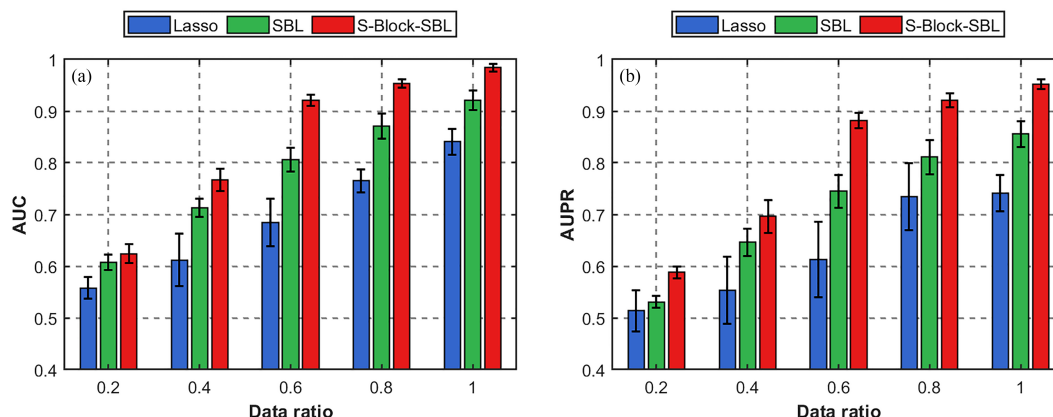


图 1 (网络版彩图) Lasso, SBL 和 S-Block-SBL 在数据比例增加时 (a) AUC 和 (b) AUPR 的变化. 观察到 S-Block-SBL 在 AUC 和 AUPR 方面均优于其他方法.

Figure 1 (Color online) Changes in (a) AUC and (b) AUPR of Lasso, SBL, and S-Block-SBL with increasing data ratio. It can be observed that S-Block-SBL outperforms the other methods in both AUC and AUPR.

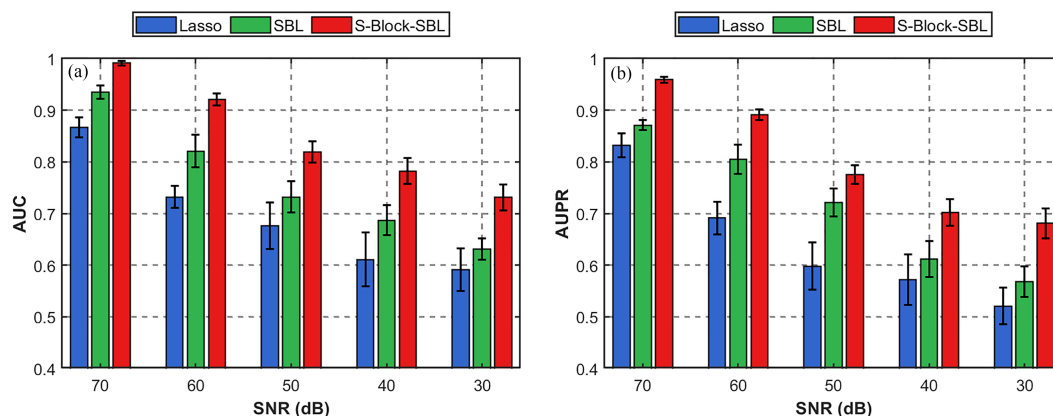


图 2 (网络版彩图) Lasso, SBL 和 S-Block-SBL 在噪声幅度增加时 (a) AUC 和 (b) AUPR 的变化. 观察到 S-Block-SBL 在 AUC 和 AUPR 方面均优于其他方法.

Figure 2 (Color online) Changes in (a) AUC and (b) AUPR of Lasso, SBL, and S-Block-SBL as the noise amplitude increases. It can be observed that S-Block-SBL outperforms the other methods in both AUC and AUPR.

S-Block-SBL 展现出显著的性能提升, 与 Lasso 和 SBL 相比, AUC 分别提升 25.8% 和 12.2%, AUPR 分别提升 28.9% 和 10.7%. 实验结果表明, 所提 S-Block-SBL 算法对外部白噪声具有良好的鲁棒性.

5 结论

本文提出了一种策略块稀疏贝叶斯学习算法, 用于辨识具有异常连边的复杂网络拓扑结构. 该算法通过块稀疏先验实现所有数据集上对应元素的稀疏性的统一, 并通过 EM 算法推断参数. 此外, 设计了一种数据集提纯策略, 剔除低质量的异常数据集. 算法的收敛性得到了证明. 针对典型复杂网络进行了广泛实验, 验证了所提方法在有限数据以及外部白噪声下对于辨识具有异常连边的网络结构的有效性和优越性. 未来工作将考虑复杂动力学下工业、社会、生物的网络拓扑结构辨识.

参考文献

1 Guo M Z, Wu X J, Zhao N, et al. A method for mining core modules of cancer based on multi-omics biological network. *Sci Sin Inform*, 2017, 47: 1510–1522 [郭茂祖, 武雪剑, 赵宁, 等. 一种基于多组学生物网络的癌症关键模块挖掘方法. *中国科学: 信息*

- 科学, 2017, 47: 1510–1522]
- 2 Wang G, Liu X, Xiao Y, et al. Extinction chains reveal intermediate phases between the safety and collapse in mutualistic ecosystems. *Engineering*, 2024, 43: 89–98
 - 3 Li L H, Zhang J P, Yang J. Based time-series aware of social network nodes set context aggregation method. *Sci Sin Inform*, 2013, 43: 1079–1095 [李力恒, 张健沛, 杨静. 一种基于时序感知的社会网络节点集情境聚合方法. *中国科学: 信息科学*, 2013, 43: 1079–1095]
 - 4 Wang L, Wang Z, Yang C, et al. Evolution and stability of Linux kernels based on complex networks. *Sci Sin Inform*, 2011, 41: 1064–1075 [王雷, 王政, 杨晨, 等. 基于复杂网络的操作系统内核演化与稳定性研究. *中国科学: 信息科学*, 2011, 41: 1064–1075]
 - 5 Cao H, Hu B B, Mo X, et al. The immense impact of reverse edges on large hierarchical networks. *Engineering*, 2024, 36: 240–249
 - 6 D'Souza R M, di Bernardo M, Liu Y Y. Controlling complex networks with complex nodes. *Nat Rev Phys*, 2023, 5: 250–262
 - 7 Chu Y, Fei J, Hou S. Adaptive global sliding-mode control for dynamic systems using double hidden layer recurrent neural network structure. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2020, 31: 1297–1309
 - 8 Zhu S, Zhou J, Chen G, et al. A new method for topology identification of complex dynamical networks. *IEEE Trans Cybern*, 2021, 51: 2224–2231
 - 9 Li X, Lv J, Yi Z. An efficient representation-based method for boundary point and outlier detection. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2018, 29: 51–62
 - 10 Zhao J, Li W, Yuan X, et al. An end-to-end physics-informed neural network for defect identification and 3-D reconstruction using rotating alternating current field measurement. *IEEE Trans Ind Inf*, 2023, 19: 8340–8350
 - 11 Castro-Correa J A, Giraldo J H, Badiéy M, et al. Gegenbauer graph neural networks for time-varying signal reconstruction. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2024, 35: 11734–11745
 - 12 van Waarde H J, Tesi P, Camlibel M K. Topology reconstruction of dynamical networks via constrained Lyapunov equations. *IEEE Trans Automat Contr*, 2019, 64: 4300–4306
 - 13 Nitzan M, Casadiego J, Timme M. Revealing physical interaction networks from statistics of collective dynamics. *Sci Adv*, 2017, 3: e1600396
 - 14 Liu H, Li Y, Li Z, et al. Topology identification of multilink complex dynamical networks via adaptive observers incorporating chaotic exosignals. *IEEE Trans Cybern*, 2022, 52: 6255–6268
 - 15 Usta O C, Gunel S. Causation entropy en route to re-synchronization unfolds the structure of chaotic dynamical networks. *IEEE Trans Netw Sci Eng*, 2023, 10: 3242–3252
 - 16 Zhou D, Xiao Y, Zhang Y, et al. Causal and structural connectivity of pulse-coupled nonlinear networks. *Phys Rev Lett*, 2013, 111: 054102
 - 17 Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the lasso. *J R Statistical Soc Ser B-Statistical Methodology*, 1996, 58: 267–288
 - 18 Wipf D P, Rao B D. Sparse Bayesian learning for basis selection. *IEEE Trans Signal Process*, 2004, 52: 2153–2164
 - 19 Zhang Z, Rao B D. Extension of SBL algorithms for the recovery of block sparse signals with intra-block correlation. *IEEE Trans Signal Process*, 2013, 61: 2009–2015
 - 20 Wipf D P, Rao B D, Nagarajan S. Latent variable Bayesian models for promoting sparsity. *IEEE Trans Inform Theor*, 2011, 57: 6236–6255
 - 21 Babacan S D, Molina R, Katsaggelos A K. Bayesian compressive sensing using Laplace priors. *IEEE Trans Image Process*, 2009, 19: 53–63
 - 22 Pan W, Yuan Y, Gonçalves J, et al. A sparse Bayesian approach to the identification of nonlinear state-space systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2015, 61: 182–187
 - 23 Liu Q, Zhu L, Hou R, et al. Stochastic sparse Bayesian identification for nonlinear systems from large dataset. *IEEE Trans Instrum Meas*, 2025, 74: 1–11
 - 24 Jiang D, Wang W, Shi L, et al. A compressive sensing-based approach to end-to-end network traffic reconstruction. *IEEE Trans Netw Sci Eng*, 2018, 7: 507–519
 - 25 Li L, Xu D, Peng H, et al. Reconstruction of complex network based on the noise via QR decomposition and compressed sensing. *Sci Rep*, 2017, 7: 15036
 - 26 Peixoto T P. Network reconstruction via the minimum description length principle. *Phys Rev X*, 2025, 15: 011065
 - 27 Yue Z, Thunberg J, Pan W, et al. Dynamic network reconstruction from heterogeneous datasets. *Automatica*, 2021, 123: 109339
 - 28 Wu K, Hao X, Liu J, et al. Online reconstruction of complex networks from streaming data. *IEEE Trans Cybern*, 2020, 52: 5136–5147
 - 29 Wu K, Liu J, Hao X, et al. An evolutionary multiobjective framework for complex network reconstruction using community structure. *IEEE Trans Evol Computat*, 2020, 25: 247–261
 - 30 Yue Z, Thunberg J, Ljung L, et al. System aliasing in dynamic network reconstruction: issues on low sampling frequencies. *IEEE Trans Automat Contr*, 2020, 66: 5788–5801

- 31 Yuan Y, Stan G B, Warnick S, et al. Robust dynamical network structure reconstruction. *Automatica*, 2011, 47: 1230–1235
- 32 Hendrickx J M, Gevers M, Bazanella A S. Identifiability of dynamical networks with partial node measurements. *IEEE Trans Automat Contr*, 2018, 64: 2240–2253
- 33 Peixoto T P. Network reconstruction and community detection from dynamics. *Phys Rev Lett*, 2019, 123: 128301
- 34 Wu K, Wang C, Liu J. Evolutionary multitasking multilayer network reconstruction. *IEEE Trans Cybern*, 2021, 52: 12854–12868
- 35 Lei K, Qin M, Bai B, et al. GCN-GAN: a non-linear temporal link prediction model for weighted dynamic networks. In: *Proceedings of IEEE INFOCOM*, 2019. 388–396
- 36 Chen J, Zhang J, Xu X, et al. E-LSTM-D: a deep learning framework for dynamic network link prediction. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2019, 51: 3699–3712
- 37 Moon T K. The expectation-maximization algorithm. *IEEE Signal Process Mag*, 1996, 13: 47–60
- 38 Hunter D R, Lange K. A tutorial on MM algorithms. *Am Statistician*, 2004, 58: 30–37
- 39 Wu C F J. On the convergence properties of the EM algorithm. *Ann Statist*, 1983, 11: 95–103
- 40 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 1998, 393: 440–442
- 41 Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, 286: 509–512

Topological structure identification method for complex networks with anomalous edges

Yaozhong ZHENG, Hai-Tao ZHANG* & Yuanyuan HU

School of Artificial Intelligence and Automation, Institute of Artificial Intelligence, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China

* Corresponding author. E-mail: zht@mail.hust.edu.cn

Abstract The topology of complex networks serves as the backbone of secure control. Network topology identification based on nodal time-series data has become a research hotspot across interdisciplinary fields such as computer science, systems science, physics, and others. However, the presence of anomalous edges in the network influences the identification performance and even weakens the security and stability of network control. As a remedy, this paper proposes a strategy block-sparse Bayesian learning algorithm (S-Block-SBL) for identifying network topology with anomalous edges. With the aid of block-sparse Bayesian learning, the algorithm unifies identification results across all datasets, and a dataset purification strategy is proposed to substantially improve identification accuracy. It is proven that the loss function of the proposed S-Block-SBL is nonincreasing and convergent. Extensive experiments on benchmark networks demonstrate the algorithm’s effectiveness and superiority.

Keywords complex networks, topological structure, network identification, sparse Bayesian learning