



有向通信下二阶动力学系统的无梯度型分布式资源分配算法

栾琳华^{1*}, 贾文文^{2*}, 秦泗甜^{1*}

1. 哈尔滨工业大学(威海)理学院, 威海 264209

2. 东南大学数学学院, 南京 211102

* 通信作者. E-mail: llh1568@163.com, lejww123@163.com, qinsitian@hitwh.edu.cn

收稿日期: 2025-04-17; 修回日期: 2025-08-21; 接受日期: 2025-10-21; 网络出版日期: 2026-04-03

国家自然科学基金(批准号: 62576117, 12271127, 62403129, 62506094)、山东省泰山学者(批准号: tsqn202211090)、山东省自然科学基金(批准号: ZR2024MF080)和江苏省自然科学基金(批准号: BK20241288)资助项目

摘要 智能电网中的经济调度问题对分布式资源分配算法的高效性与兼容性提出了挑战. 鉴于现有梯度依赖型算法常因需要处理高维梯度信息而导致计算复杂度较高, 且对非平衡通信拓扑的适应性不足, 本文基于二阶动力学多智能体系统, 提出了一种适用于非平衡有向图的无梯度型分布式资源分配算法. 该算法通过引入权重平衡策略, 实现了对非对称通信拓扑的兼容性; 此外, 结合极值搜索机制与有界激励信号, 有效减轻了高维梯度所带来的计算负担. 此外, 基于 Lyapunov 稳定性与平均分析方法, 本文严格证明了算法在非平衡有向通信拓扑下的稳定性. 仿真实验进一步验证了算法可使各智能体状态收敛至满足供需平衡的最优解邻域, 并通过对比实验体现出所提方法在拓扑兼容性与运行效率方面的优势.

关键词 二阶动力学模型, 多智能体系统, 经济调度, 分布式算法, 极值搜索, 非平衡有向通信

1 引言

随着信息技术和人工智能等新兴技术的快速发展, 多智能体系统在工业控制与最优决策领域中得到了广泛应用, 包括电力调度^[1]、能源系统管理^[2,3]、协同优化^[4,5]等实际场景. 特别是在当前全球能源转型与电力需求持续攀升的双重背景下, 大规模智能电网的部署已成为现代电力系统发展的必然选择. 作为电网运行中的关键问题, 经济调度旨在确保电力供需平衡的约束条件下, 通过优化决策各发电机组的资源配置, 实现系统总发电成本的最小化^[6]. 现代电力系统中的发电单元具备高度的自主感知、计算与决策能力, 故其可建模为多智能体系统. 由此, 经济调度问题本质上可转化为一个多智能体间协同优化的资源配置问题.

与传统集中式控制机制依赖中央处理器获取全网信息进行统一决策不同^[7,8], 分布式优化架构中每个智能体仅需维护本地私有信息(包括发电成本函数和负荷约束等), 通过通信网络与相邻节点进行有限信息交互, 即可协同实现全局最优调度. 这种分布式架构不仅从根本上避免了集中式方法因中央处理器单点故障导致的系统性风险, 还通过局部信息交互机制有效保护了各机组的隐私数据. 为实现分布式场景下的资源协调, 已有多种资

引用格式: 栾琳华, 贾文文, 秦泗甜. 有向通信下二阶动力学系统的无梯度型分布式资源分配算法. 中国科学: 信息科学, 2026, 56: 1765–1779, doi: 10.1360/SSI-2025-0152

Luan L H, Jia W W, Qin S T. Gradient-free distributed resource allocation algorithm for second-order multi-agent systems under directed communication. Sci Sin Inform, 2026, 56: 1765–1779, doi: 10.1360/SSI-2025-0152

源分配算法被提出,例如文献[9]提出了具有抗干扰能力的固定时间优化方法,文献[10]针对二阶系统设计了连续时间分布式资源分配算法,文献[11]进一步将分布式资源分配算法的研究推广到一般线性系统并引入了固定时间收敛机制.此外,文献[12]基于Lagrange乘子法,针对受扰动的线性多智能体系统设计了分布式资源分配算法,以求解电力系统中的经济调度问题.文献[13]则通过估计总需求与发电总量之间的误差,结合一致性控制协议,设计了完全分布式的资源分配算法.然而,该算法的有效性依赖于特定的初始方案,极大限制了其鲁棒性和可扩展性.为克服这一问题,文献[14]提出了免初始化的分布式资源分配算法,有效降低了算法性能对初始点的依赖.

不难发现,在多智能体系统的分布式优化问题中,许多经典方法依赖于局部目标函数的梯度信息进行迭代更新,例如基于负梯度算法^[9~14]驱使状态轨迹沿着目标函数下降的方向更新,零梯度和算法^[15~17]借助二阶梯度信息实现更新轨迹延续零梯度和性质.然而,在实际应用中,一旦目标函数的解析形式难以获得,或梯度计算依赖复杂模型和昂贵的数值投入时,获取精确的梯度信息往往面临诸多挑战.即使可以借助文献[18,19]中使用的有限差分方法间接估算梯度,在高维优化任务中会产生极大的计算资源开销,且估算结果对噪声极为敏感,容易影响算法稳定性和收敛性.因此,从实际应用角度出发,急需发展无需精确梯度信息的无梯度优化算法以提升系统的适应性与实用性.

目前常用的无梯度型分布式优化方法主要包括:随机近似方法、奇异扰动方法和极值搜索方法.文献[20]提出了一种具有精确收敛性的随机近似分布式算法,但算法的性能对图结构有较强依赖;文献[21]针对通信噪声引入了随机扰动机制,尽管该算法鲁棒性有一定的提升,其收敛速度仍存在一定限制.文献[22]基于奇异扰动与LaSalle不变性原理设计了用于非凸优化的分布式算法,但该算法对扰动幅值较为敏感,影响了实际可调性.另有文献[23]利用极值搜索策略实现了无需梯度的动态优化,已成功应用于源定位与智能电网调度等任务.而文献[24]针对非凸问题设计了具有有界输入的无梯度算法,有效兼顾了输入可行性与收敛性,并在[25]中拓展应用于协同源定位场景.然而,相较于文献中广泛研究的一阶动力学模型,具有二阶动力学模型的系统不仅能够描述每个智能体的位置信息,还能反映其速度特性,因而在动态性能要求较高的应用场景中具备明显优势.例如,在无人机编队控制、自动驾驶系统^[26,27]等实际工程中,控制输入往往直接作用于加速度层,此时一阶动力学模型已不足以准确刻画系统动态.二阶线性动力学模型不仅能提高协调控制的精度与响应速度,也更贴合实际物理系统的行为特性.此外,在多摆系统^[28,29]、力矩电机与气体喷射^[30]等典型系统中,二阶动力学模型也被广泛采用.因此,围绕具有二阶动力学模型的多智能体系统开展分布式算法设计,能够更好地满足现代智能系统在动态响应性能与建模精度方面的复杂需求,具有重要的理论研究价值和实际应用意义.在面向受到耦合约束的资源配置问题方面,文献[31]基于二阶线性多智能体系统,提出了一种适用于无向通信网络的分布式优化策略;文献[32]在此基础上引入了拓扑切换机制,拓展了算法在动态通信环境下的适用性;文献[33]则面向二阶非线性系统在电网调度中的实际应用需求,设计了结构更具通用性的分布式资源分配算法.值得注意的是,在实际应用场景中,智能体之间的信息交互往往具有方向性与不对称性,通信链路的权重也存在显著差异,导致系统通信拓扑呈现非平衡的有向结构.传统依赖图平衡性的分布式算法难以适应这类非理想网络结构,在一定程度上限制了算法的可适用性.

综上,为提升分布式优化算法在非理想通信结构、复杂动态系统和梯度信息受限环境中的适用性,本文面向具有二阶动力学模型的多智能体系统,设计了一种适用于非平衡有向通信拓扑的无梯度型分布式资源分配算法.具体而言,本文的创新点包括三点.

(1) 相较于以往普遍依赖显式梯度信息甚至需交互梯度信息的分布式算法,本文提出的无梯度型算法引入极值搜索机制,利用局部目标函数值构造低维振荡更新律,规避了高维梯度计算和额外信息交互.

(2) 鉴于无人机、车辆等实际物理系统通常表现出位置-速度耦合的二阶动力学特性,而多数现有方法仍基于一阶模型建模,难以准确刻画系统的动态行为,本文将无梯度型资源分配算法推广至二阶动力学系统.该算法在设计中充分考虑系统的加速度响应,从而拓宽了其在实际应用场景下的适用性.

(3) 考虑到实际应用中的通信网络常呈现出方向性强、链路不对称的特征,传统方法多依赖于图的平衡性或对称性假设,难以推广至非理想网络中.为突破这一限制,本文设计了一种适用于非平衡有向图的分布式资源分

配算法,并通过理论分析与仿真实验验证了其在非对称通信环境下的稳定性与有效性.

本文后续内容结构如下:第2节描述了经济调度问题的数学表示形式;第3节介绍了分布式资源分配算法的设计,并通过理论严格证明了其收敛性;第4节给出了智能电网中经济调度问题的数值模拟结果;最后,第5节对本文进行了总结.

符号说明. 本文使用 $\mathbf{R}$ 表示实数集, $\mathbf{R}_+$ 表示非负实数集, $\mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{R}^{p \times q}$ 分别表示 p 维列实向量集和 $p \times q$ 维实矩阵空间. 对于 $a, b \in \mathbf{R}$, $a_{[b]}$ 表示一组元素全为 a 的 b 维列向量; I_a 表示 $a \times a$ 维单位矩阵; 对于任意的 $a \leq b$, 记 $\mathbf{I}_{[a,b]} = \{a, a+1, \dots, b\}$. 给定向量 $s = [s_i]_{p \times 1} \in \mathbf{R}^p$, s_i 是其第 i 个元素, s^T 表示 s 的转置, $\text{diag}(s)$ 表示以 s 的每个元素作为对角元素的 $p \times p$ 维对角矩阵. 对于任意两个向量 $s = [s_i]_{p \times 1}$, $r = [r_i]_{q \times 1}$, 记 $\text{col}(s, r) = [s^T, r^T]^T$. $\|\cdot\|$ 表示 Euclidean 范数, $\otimes$ 表示 Kronecker 积. 给定矩阵 $S = [s_{ij}]_{p \times p} \in \mathbf{R}^{p \times p}$, $\lambda_i(S)$ 表示矩阵 S 的第 i 小的特征值. 特别地, 对于 $p \times p$ 维实对称矩阵 S , $\lambda_1(S)$ 和 $\lambda_p(S)$ 分别表示其最小和最大的特征值.

2 问题描述

本文针对现代电力系统中的经济调度问题展开研究. 作为保障电网稳定运行的核心环节, 高效的电力资源分配对城市微电网系统尤为重要. 考虑一个由 K 台涡轮发电机组成的供电系统, 其功率输出需要精确匹配城市总需求 D , 即满足供需平衡条件 $\sum_{i=1}^K P_i = D$, 其中 $P_i \in \mathbf{R}^p$ 表示第 i 台发电机的输出功率向量. 在实际运行中, 城市供电区域可划分为 K 个对应子区域, 各发电机负责采集所在区域的用电需求 D_i , 自然满足 $D = \sum_{i=1}^K D_i$ 的关系. 基于多智能体系统架构, 将每台发电机建模为具有自主决策能力的智能体, 设各发电机运行成本函数为 $C_i(P_i)$, 则经济调度问题可表述为

$$\min \sum_{i=1}^K C_i(P_i) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^K P_i = \sum_{i=1}^K D_i. \quad (1)$$

假设1 对每个智能体 $i \in \mathbf{I}_{[1,K]}$, $C_i(P_i)$ 是 θ_i -强凸的可微函数, 其中 $\theta_i > 0$. 此外, $C_i(P_i)$ 的梯度 $\nabla C_i(P_i)$ 是 ℓ_i -Lipschitz 的 ($\ell_i > 0$).

假设2 经济调度问题 (1) 至少存在一个有限可行解.

注释1 上述对经济调度问题 (1) 的假设源于其在电力系统中的工程背景和建模需求. 根据文献 [3,6] 所讨论的经济调度问题可知, 代价函数常取二次型或其变形, 具有强凸性和梯度 Lipschitz 连续性, 因此假设 1 在实际中是合理的. 假设 2 是优化理论中的标准可行性假设, 确保问题存在可行解, 意味着总发电能力能满足系统负荷, 也隐含了问题 (1) 满足 Slater 条件. 综上, 假设 1 与 2 为经济调度与最优控制中常用设定 [6], 共同保障了问题 (1) 最优解的存在性与唯一性, 也为算法设计与分析奠定了基础.

根据文献 [34], 可以得到经济调度问题 (1) 的最优性条件.

引理1 若假设 1~3 成立, 则 $P^* = \text{col}(P_1^*, \dots, P_K^*)$ 是经济调度问题 (1) 的最优配置, 当且仅当

$$\nabla C_i(P_i^*) = \nabla C_j(P_j^*), \quad i, j \in \mathbf{I}_{[1,K]}, \quad \sum_{i=1}^K P_i^* = \sum_{i=1}^K D_i. \quad (2)$$

下文将围绕经济调度问题 (1) 的求解, 设计一种基于二阶动力学系统的分布式资源分配算法. 该系统中每个智能体的动力学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = u_i, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $x_i \in \mathbf{R}^p$, $v_i \in \mathbf{R}^p$, 和 $u_i \in \mathbf{R}^p$ 分别表示第 i 个智能体的决策变量 (位置信息)、状态变量 (速度信息), 以及控制输入. 对于多智能体系统 (3), 可以通过使用 Kronecker 积将一维系统扩展到多维的情况. 因此, 为了简化描述, 我们在不失一般性的前提下取 $p = 1$.

结合引理 1, 如果所设计的算法使多智能体系统 (3) 稳定且其稳定状态变量满足最优性条件 (2), 则称该算法能够有效求解经济调度问题 (1), 同时, 所得到的稳定状态变量即问题 (1) 的最优配置.

3 算法设计及理论分析

在实际应用中, 多智能体系统的通信拓扑通常存在方向性和非对称性, 如在无线传感器网络和多无人机协作中, 因通信功率限制、信道干扰或节点差异, 信息交换往往具有方向差异性. 因此, 本节基于多智能体系统 (3), 针对非平衡的有向通信拓扑, 提出有效的无梯度型分布式资源分配算法, 并对算法进行收敛性分析.

3.1 分布式资源分配算法

首先, 本文考虑通信拓扑满足以下假设.

假设 3 多智能体系统 (3) 的通信拓扑 $\mathcal{G}$ 是非平衡且强连通的有向图, 同时, 存在 $\gamma_i > 0$ ($i \in \mathbf{I}_{[1,K]}$) 使得 $\mathcal{G}$ 基于 $\gamma = [\gamma_i]_{K \times 1}$ 条件平衡.

假设 3 中条件平衡的定义可以在文献 [35,36] 中找到. 显然, 引入 γ -条件平衡结构, 一方面保留了通信拓扑的方向性特征, 另一方面为系统通信网络的 Laplacian 矩阵提供加权对称结构, 便于后续稳定性分析. 因此, 假设 3 在理论可分析性与工程可实现性之间实现了有效权衡.

为了求解经济调度问题 (1), 受到文献 [37,38] 中利用分布式一致性机制估计 Lagrange 乘子以应对耦合约束的启发, 本文对智能体 i 设计如下的控制输入:

$$u_i = -2bC_i(x_i)\sin\omega t - b^2y_i - kb^2(v_i - bw\cos\omega t) - bw^2\sin\omega t,$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= kb^2(x_i - b\sin\omega t - D_i) + 2kb^2(v_i - bw\cos\omega t) + kb^2 \sum_{j=1}^K \gamma_i a_{ij}(z_i - z_j) - kb^2 \sum_{j=1}^K \gamma_i a_{ij}(y_i - y_j), \\ \dot{z}_i &= -kb^2 \sum_{j=1}^K \gamma_i a_{ij}(y_i - y_j) - kb^2 \sum_{j=1}^K \gamma_i a_{ij}(v_i - v_j), \end{aligned}$$

$k > 0$ 为控制增益参数. 为实现无梯度优化, 系统通过周期性激励使状态围绕当前点进行微小扰动, 并利用扰动与系统响应之间的平均相关性估计目标函数的极值方向. 其中, $\sin(\omega t)$ 和 $\cos(\omega t)$ 分别用于在不同相位方向上激发系统, 保证激励在整个状态空间中具有覆盖性; 参数 b 控制扰动幅度, 影响系统搜索范围和估计精度; 参数 ω 控制扰动频率, 调节系统对目标函数变化的辨识能力.

结合多智能体系统的动力学行为 (3), 上述无梯度型分布式资源分配算法可被描述为以下紧形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = -2bC(x)\sin\omega t - b^2y - kb^2(v - (bw\cos\omega t)_{[K]}) - (bw^2\sin\omega t)_{[K]}, \\ \dot{y} = kb^2(x - (b\sin\omega t)_{[K]} - d) + 2kb^2(v - (bw\cos\omega t)_{[K]}) + kb^2\mathcal{L}z - kb^2\mathcal{L}y, \\ \dot{z} = -kb^2\mathcal{L}y - kb^2\mathcal{L}v, \end{cases} \quad (4)$$

其中, $x = \text{col}(x_1, \dots, x_K)$, $v = \text{col}(v_1, \dots, v_K)$, $y = \text{col}(y_1, \dots, y_K)$, $z = \text{col}(z_1, \dots, z_K)$, $C(x) = \text{col}(C_1(x_1), \dots, C_K(x_K))$, $d = \text{col}(D_1, \dots, D_K)$, 以及 $\mathcal{L} = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_K)\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$.

注释 2 与现有多数面向经济调度问题的分布式资源分配算法相比, 本文所提出的算法 (4) 采用周期激励信号对系统注入外部扰动, 通过极值搜索机制引导系统状态沿目标函数值下降的方向演化. 图 1 展示了算法 (4) 的整体架构. 在该过程中, 算法仅依赖局部目标函数的函数值, 无需获取其解析形式或计算梯度信息, 有效克服了文献 [12~14] 中梯度依赖型算法的局限性. 以代价函数 $C(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i)$ 为例, 函数值计算复杂

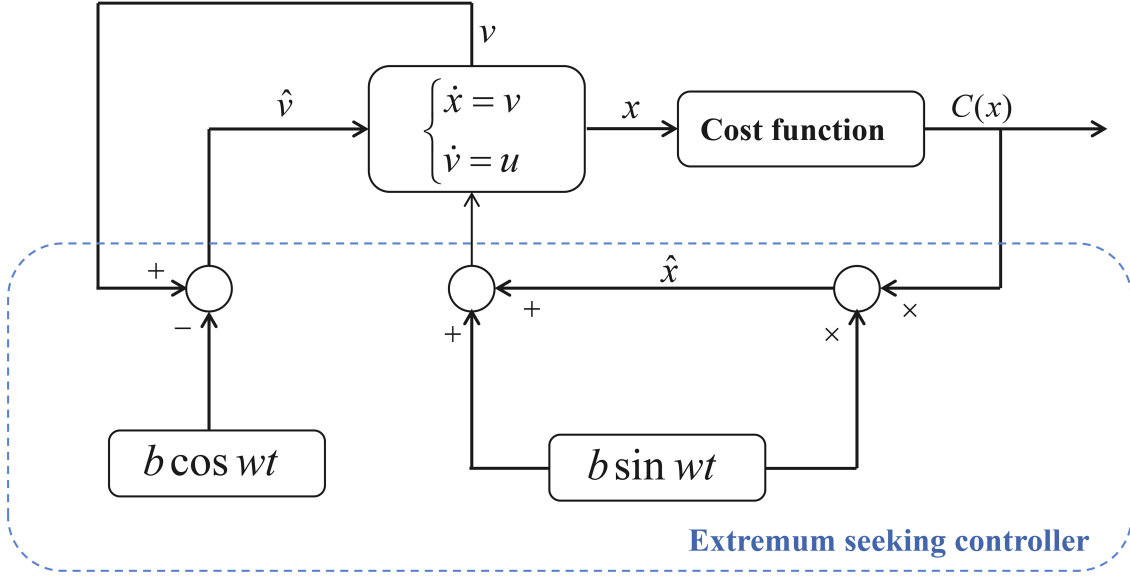


图 1 (网络版彩图) 无梯度型分布式资源分配算法的结构示意图.

Figure 1 (Color online) Structural diagram of the gradient-free distributed resource allocation algorithm.

度为 $O(n)$, 而显式计算 $\nabla C(x)$ 复杂度可达 $O(n^2)$ 或更高. 因此, 算法 (4) 的无梯度特性不仅避免额外信息交互, 也省去了高维梯度运算的计算开销, 使其在算力受限或隐私敏感的环境中展现出潜在优势. 除此之外, 鉴于二阶动力学模型在网络物理系统中的广泛应用, 算法 (4) 相较于文献 [23] 中基于一阶动力学模型提出的无梯度型算法具备更精确的动态性能, 从而更适用于描述复杂物理系统的动力学行为^[39, 40].

3.2 收敛性分析

对于本文设计的无梯度型分布式资源分配算法 (4), 下面将从理论层面分析其在求解经济调度问题 (1) 方面的有效性.

结合平均分析理论^[40] 和 Taylor 展开式^[41], 记 $\hat{x}_i = x_i - b \sin wt$, $\hat{v}_i = v_i - b \cos wt$, 可以得到

$$C_i(x_i) \sin wt = C_i(\hat{x}_i) \sin wt + \nabla C_i(\hat{x}_i) b \sin^2 wt + b^2 R_i,$$

其中 R_i 是更高阶的项, 因此智能体 i 的平均系统为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = \hat{v}_i, \\ \dot{\hat{v}}_i = -b^2 \nabla C_i(\hat{x}_i) - b^2 y_i - kb^2 \hat{v}_i, \\ \dot{y}_i = kb^2 (\hat{x}_i - D_i) + 2kb^2 \hat{v}_i + kb^2 \sum_{j=1}^K \gamma_i a_{ij} (z_i - z_j) - kb^2 \sum_{j=1}^K \gamma_i a_{ij} (y_i - y_j), \\ \dot{z}_i = -kb^2 \sum_{j=1}^K \gamma_i a_{ij} (y_i - y_j) - kb^2 \sum_{j=1}^K \gamma_i a_{ij} (\hat{v}_i - \hat{v}_j), \end{cases} \quad (5)$$

其中, 受到一阶分布式资源分配算法^[23] 的启发, 由于 b 是一个接近 0 的正参数, R_i 是高阶项, 所以在使用平均分析时省略了 $b^2 R_i$ 这一项. 因此, 定义 $\hat{x} = \text{col}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_K)$, $\hat{v} = \text{col}(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_K)$, 以及 $\nabla C(x) = \text{col}(\nabla C_1(x_1), \dots,$

$\nabla C_K(x_K)$), 可以得到平均系统 (5) 的紧形式, 即

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{v}, \\ \dot{\hat{v}} = -b^2 \nabla C(\hat{x}) - b^2 y - kb^2 \hat{v}, \\ \dot{y} = kb^2(\hat{x} - d) + 2kb^2 \hat{v} + kb^2 \mathcal{L}z - kb^2 \mathcal{L}y, \\ \dot{z} = -kb^2 \mathcal{L}y - kb^2 \mathcal{L}\hat{v}. \end{cases} \quad (6)$$

定义1 (参见文献 [42]) 称 (x^*, v^*, y^*, z^*) 是平均系统 (6) 的平衡点, 如果

$$\begin{cases} v^* = 0_{[K]}, \\ -\nabla C(x^*) - y^* - kv^* = 0_{[K]}, \\ x^* - d + 2v^* + \mathcal{L}z^* - \mathcal{L}y^* = 0_{[K]}, \\ \mathcal{L}y^* + \mathcal{L}v^* = 0_{[K]}. \end{cases} \quad (7)$$

接下来, 首先分析平均系统 (6) 的平衡点与经济调度问题 (1) 最优配置之间的关系.

定理1 若假设 1~3 成立, $x^* = \text{col}(x_1^*, \dots, x_K^*)$ 是经济调度问题 (1) 的最优配置, 当且仅当存在 $v^*, y^*, z^* \in \mathbf{R}^K$ 使得 (x^*, v^*, y^*, z^*) 是平均系统 (6) 的平衡点.

证明 首先, 假设 (x^*, v^*, y^*, z^*) 是平均系统 (6) 的平衡点. 根据定义 1, 可以得到

$$\mathcal{L}y^* = 0_{[K]}, \quad (8)$$

$$\nabla C(x^*) + y^* = 0_{[K]}, \quad (9)$$

$$x^* - d + \mathcal{L}z^* = 0_{[K]}. \quad (10)$$

显然, 式 (8) 和 (9) 意味着式 (2) 的第一个公式成立. 此外, 在假设 3 下, 将式 (10) 左乘 $1_{[K]}^T$ 可以得到式 (2) 的第二个公式也成立. 从而, 结合引理 1 可得 x^* 是经济调度问题 (1) 的最优配置.

反之, 如果 x^* 是经济调度问题 (1) 的最优配置, 那么它满足 (2). 因此, 取 $y^* = \nabla C(x^*) = \text{col}(\nabla C_1(x_1^*), \dots, \nabla C_K(x_K^*))$, 我们有式 (8) 和 (9) 成立. 同样地, 由于 $1_{[K]}^T(x^* - d) = 0_{[K]}$, 结合假设 3, 可推出 $x^* - d \in \text{Range}(\mathcal{L})$, 其中 Range 表示值域空间. 故一定存在 $z^* \in \mathbf{R}^K$ 使得式 (10) 成立. 于是, 令 $v^* = 0_{[K]}$, 可以得到 (x^*, v^*, y^*, z^*) 满足式 (7). 由此可得, 存在 $v^*, y^*, z^* \in \mathbf{R}^K$ 使得 (x^*, v^*, y^*, z^*) 是平均系统 (6) 的平衡点.

定理 1 表明, 平均系统 (6) 的平衡点包含经济调度问题 (1) 的最优配置. 因此, 受文献 [23] 的启发, 我们通过分析平均系统 (6) 平衡点的稳定性来得到分布式资源分配算法 (4) 对于求解经济调度问题 (1) 的有效性.

定理2 若假设 1~3 成立, 且参数 k 满足

$$k > \max \left\{ \frac{\varpi + \sqrt{\varpi^2 + 4b^4\chi}}{2b^2}, \frac{\hat{\theta} + 8\hat{\ell}^2 + 8\sigma\varrho_2}{7\hat{\theta}} \right\}, \quad (11)$$

其中, $\varpi = \frac{2\hat{\ell}^2 b^2}{\hat{\theta}} + \frac{\lambda_K(\mathcal{L})b^2}{4} + b^2 + 1$, $\chi = \frac{2\hat{\ell}^2}{\hat{\theta}} + \sigma\varrho_1 + 4\sigma\varrho_2$, $0 < \sigma < \frac{1}{4+2\varrho_1}$, $\varrho_1 = \frac{\lambda_K(\mathcal{L})}{2} + \frac{2\lambda_K^2(\mathcal{L})}{\lambda_2(\mathcal{L})}$, $\varrho_2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{\lambda_2(\mathcal{L})}$, 则 (x^*, v^*, y^*, z^*) 对于平均系统 (6) 是指数稳定的.

证明 定义 $\bar{x} = \hat{x} - x^*$, $\bar{v} = \hat{v} - v^*$, $\bar{y} = y - y^*$, $\bar{z} = z - z^*$, 则平均系统 (6) 可以转换为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{v}, \\ \dot{\bar{v}} = -b^2 H - b^2 \bar{y} - kb^2 \bar{v}, \\ \dot{\bar{y}} = kb^2 \bar{x} + 2kb^2 \bar{v} + kb^2 \mathcal{L}\bar{z} - kb^2 \mathcal{L}\bar{y}, \\ \dot{\bar{z}} = -kb^2 \mathcal{L}\bar{y} - kb^2 \mathcal{L}\bar{v}, \end{cases} \quad (12)$$

其中, $H = \nabla C(x) - \nabla C(x^*)$.

根据假设 3, 记 $\rho_{ij} = \gamma_i a_{ij}$, 则 $\mathcal{L}$ 可以看作一个邻接矩阵为 $\mathcal{B} = [\rho_{ij}]_{K \times K}$ 的无向连通拓扑图的 Laplacian 矩阵. 于是, 存在正交矩阵 $\mathcal{M} = [m, M] \in \mathbf{R}^{K \times K}$, $m = \frac{1}{\sqrt{K}} \mathbf{1}_{[K]} \in \mathbf{R}^{K \times 1}$, $M \in \mathbf{R}^{K \times K-1}$ 使得 $\mathcal{M}^T \mathcal{L} \mathcal{M} = \text{diag}(\lambda_2(\mathcal{L}), \dots, \lambda_K(\mathcal{L}))$. 因此, 作如下的正交变换:

$$\begin{aligned} \xi &:= \text{col}(\xi_1, \xi_2) = \mathcal{M}^T \bar{x}, \quad \vartheta := \text{col}(\vartheta_1, \vartheta_2) = \mathcal{M}^T \bar{v}, \\ \eta &:= \text{col}(\eta_1, \eta_2) = \mathcal{M}^T \bar{y}, \quad \zeta := \text{col}(\zeta_1, \zeta_2) = \mathcal{M}^T \bar{z}, \end{aligned}$$

其中, $\xi_1, \vartheta_1, \eta_1, \zeta_1 \in \mathbf{R}$, $\xi_2, \vartheta_2, \eta_2, \zeta_2 \in \mathbf{R}^{K-1}$. 于是, 系统 (12) 可被等价地分解为两个子系统, 即

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \vartheta_1, \\ \dot{\vartheta}_1 = -b^2 m^T H - b^2 \eta_1 - kb^2 \vartheta_1, \\ \dot{\eta}_1 = kb^2 \xi_1 + 2kb^2 \vartheta_1, \\ \dot{\zeta}_1 = 0_{[K]} \end{cases} \quad (13)$$

和

$$\begin{cases} \dot{\xi}_2 = \vartheta_2, \\ \dot{\vartheta}_2 = -b^2 M^T H - b^2 \eta_2 - kb^2 \vartheta_2, \\ \dot{\eta}_2 = kb^2 \xi_2 + 2kb^2 \vartheta_2 + kb^2 M^T \mathcal{L} M (\zeta_2 - \eta_2), \\ \dot{\zeta}_2 = -kb^2 M^T \mathcal{L} M (\eta_2 + \vartheta_2). \end{cases} \quad (14)$$

考虑下述 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{k}{2} \|\xi + \vartheta\|^2 + \frac{k^2 b^2 - kb^2 - k}{2} \|\xi\|^2 + \frac{1}{2} \|\vartheta + \eta\|^2 + \frac{1}{2} \|\zeta_2\|^2 + \frac{\sigma}{2k} \|\eta_2 - \zeta_2\|^2. \quad (15)$$

记 $\psi = \text{col}(\xi, \vartheta, \eta, \zeta_2)$, 容易得到, 当 $k > \frac{2}{b^2} + 2$, $0 < b < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 以及 $\sigma > 0$ 时, V 在 (x^*, v^*, y^*, z^*) 处正定, 并且满足

$$c_1 \|\psi\|^2 \leq V \leq c_2 \|\psi\|^2, \quad (16)$$

其中, $c_1 = \min\{\lambda_1(\Phi_1), \lambda_1(\Phi_2)\}$, $c_2 = \lambda_2(\Phi_1) + \lambda_3(\Phi_2)$,

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{2k} & -\frac{\sigma}{2k} \\ -\frac{\sigma}{2k} & \frac{\sigma}{2k} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \frac{k^2 b^2 - kb^2}{2} & \frac{k}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{k}{2} & \frac{k+1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

此外, 沿系统 (13) 和 (14) 轨迹, 我们得到 V 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -(k^2 b^2 - kb^2 - k) \|\vartheta\|^2 - b^2 \eta^T \vartheta - kb^2 (\xi_1^T m^T H + \xi_2^T M^T H) - b^2 \|\eta\|^2 \\ &\quad - (k+1)b^2 (\vartheta_1^T m^T H + \vartheta_2^T M^T H) - b^2 (\eta_1^T m^T H + \eta_2^T M^T H) \\ &\quad - kb^2 (\vartheta_2 + \eta_2)^T M^T \mathcal{L} M \eta_2 + \sigma b^2 (\eta_2 - \zeta_2)^T M^T \mathcal{L} M (\zeta_2 + \vartheta_2) + \sigma b^2 (\eta_2 - \zeta_2)^T (\zeta_2 + 2\vartheta_2). \end{aligned} \quad (17)$$

基于假设 1 和 2, 令 $\hat{\theta} = \min\{\theta_1, \dots, \theta_K\}$, $\hat{\ell} = \max\{\ell_1, \dots, \ell_K\}$, 我们有

$$\xi_1^T m^T H + \xi_2^T M^T H = (\hat{x} - x^*)^T (\nabla C(\hat{x}) - \nabla C(x^*)) \geq \hat{\theta} \|\xi\|^2, \quad (18)$$

$$-(k+1)b^2 (\vartheta_1^T m^T H + \vartheta_2^T M^T H) \leq (k+1)b^2 \left(\frac{2\hat{\ell}^2}{\hat{\theta}} \|\vartheta\|^2 + \frac{\hat{\theta}}{8} \|\xi\|^2 \right), \quad (19)$$

以及

$$-b^2(\eta_1^T m^T H + \eta_2^T M^T H) \leq b^2 \left(\hat{\ell}^2 \|\xi\|^2 + \frac{1}{4} \|\eta\|^2 \right). \quad (20)$$

从 Schur 补引理可知,

$$\Gamma := \begin{pmatrix} M^T \mathcal{L} M & \frac{1}{2} M^T \mathcal{L} M \\ \frac{1}{2} M^T \mathcal{L} M & \frac{1}{4} \lambda_K(\mathcal{L}) I_K \end{pmatrix}$$

是半正定矩阵. 因此,

$$-kb^2(\vartheta_2 + \eta_2)^T M^T \mathcal{L} M \eta_2 = -kb^2 \text{col}(\eta_2, \vartheta_2)^T \Gamma \text{col}(\eta_2, \vartheta_2) + \frac{kb^2 \lambda_K(\mathcal{L})}{4} \|\vartheta_2\|^2 \leq \frac{kb^2 \lambda_K(\mathcal{L})}{4} \|\vartheta_2\|^2. \quad (21)$$

根据 Young 不等式, 可以得到

$$-b^2 \eta^T \vartheta \leq b^2 \|\vartheta\|^2 + \frac{b^2}{4} \|\eta\|^2, \quad (22)$$

$$\sigma b^2(\eta_2 - \zeta_2)^T M^T \mathcal{L} M(\zeta_2 + \vartheta_2) \leq -\frac{3\sigma b^2 \lambda_2(\mathcal{L})}{4} \|\zeta_2\|^2 + \sigma b^2 \varrho_1 (\|\eta_2\|^2 + \|\vartheta_2\|^2), \quad (23)$$

$$\sigma b^2(\eta_2 - \zeta_2)^T (\xi_2 + 2\vartheta_2) \leq 2\sigma b^2 \|\eta_2\|^2 + \frac{\sigma b^2 \lambda_2(\mathcal{L})}{4} \|\zeta_2\|^2 + \sigma b^2 \varrho_2 (\|\xi_2\|^2 + 4\|\vartheta_2\|^2), \quad (24)$$

其中 $\varrho_1 = \frac{\lambda_K(\mathcal{L})}{2} + \frac{2\lambda_K^2(\mathcal{L})}{\lambda_2(\mathcal{L})}$, $\varrho_2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{\lambda_2(\mathcal{L})}$. 因此, 将式 (18)~(24) 代入式 (17) 可得

$$\dot{V} \leq -\kappa_1 \|\xi\|^2 - \kappa_2 \|\vartheta\|^2 - \kappa_3 \|\eta\|^2 - \kappa_4 \|\zeta_2\|^2,$$

其中 $\kappa_1 = \frac{7}{8}kb^2\hat{\theta} - \frac{\hat{\theta}b^2}{8} - b^2\hat{\ell}^2 - \sigma b^2\varrho_2$, $\kappa_2 = (k^2b^2 - kb^2 - k) - b^2 - (k+1)b^2\frac{2\hat{\ell}^2}{\hat{\theta}} - \frac{kb^2\lambda_K(\mathcal{L})}{4} - \sigma b^2\varrho_1 - 4\sigma b^2\varrho_2$, $\kappa_3 = \frac{b^2}{2} - \sigma b^2(2 + \varrho_1)$, $\kappa_4 = \frac{\sigma b^2\lambda_2(\mathcal{L})}{2}$. 因此, 当参数 k 满足式 (11) 时, 可以保证 $\kappa_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. 于是, 结合式 (16) 和 $\kappa = \min\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4\}$, 我们有

$$\dot{V} \leq -\frac{\kappa}{c_2} V$$

成立. 又因为 $\dot{\zeta}_1 = 0_{[K]}$, 于是, 可以得出结论: 当参数 k 满足式 (11) 时, (x^*, v^*, y^*, z^*) 对于平均系统 (6) 是指数稳定的.

注释3 尽管矩阵 $\mathcal{L}$ 的特征值 $\lambda_2(\mathcal{L})$ 和 $\lambda_K(\mathcal{L})$ 依赖于全局网络拓扑结构, 无法在分布式设置下被单个智能体直接获取, 但文献 [43] 提出的分布式估计算法可以通过每个智能体的局部通信与计算, 分布式地估计 Laplacian 矩阵的特征值及其对应的特征向量. 因此, 该机制可作为算法 (4) 的初始化阶段嵌入, 使智能体实现定理 2 中设计参数的分布式调优.

为便于分析算法 (4) 的稳定性, 现引入 κ -类函数与一致 SPA 稳定性的定义.

定义2 (参见文献 [40]) 如果连续函数 $\alpha: [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ 严格递增, 且 $\alpha(0) = 0$, 则称其属于 κ -类函数; 如果 κ -类函数 $\beta: [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ 满足 $a = \infty$ 以及 $\beta(r) \rightarrow \infty$ (当 $r \rightarrow \infty$), 则称其属于 κ_∞ -类函数; 如果连续函数 $\gamma: [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 满足 (1) 对于每个固定的 $s \in [0, \infty)$, $\gamma(r, s)$ 属于 κ -类函数, (2) 对于每个固定的 $r \in [0, a)$, 函数 $\gamma(r, s)$ 是 s 的递减函数, 且 $\gamma(r, s) \rightarrow +\infty$ (当 $s \rightarrow +\infty$), 则称其属于 κ_L -类函数.

定义3 (参见文献 [42]) 对于参数化系统

$$\dot{x} = f(x, \epsilon, t), \quad (25)$$

其中 $x \in \mathbf{R}^m$, $\epsilon \in \mathbf{R}_+^p$, $t \in \mathbf{R}_+$ 分别是系统状态、参数向量和时间变量, 称系统 (25) 是关于参数 $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_j)$ ($j \in \mathbf{I}_{[1, p]}$) SPA 稳定的, 如果存在一个 κ_L -类函数 γ 满足 (1) 对于每一对严格正的实数 (μ, ν) , 存在实数 $\epsilon_k^* = \epsilon_k^*(\mu, \nu) > 0$, 其中 $\hat{k} \in \mathbf{I}_{[1, j]}$; (2) 对任意固定的 $\epsilon_{\hat{k}} \in (0, \epsilon_k^*)$, 存在 $\epsilon_i = \epsilon_i(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \mu, \nu)$, $i \in \mathbf{I}_{[j+1, p]}$, 使得系统 (25) 在所构造参数 $\epsilon = [\epsilon_i]_{p \times 1}$ 下, 对任意的 $t \geq t_0 \geq 0$, $x(t_0) = x_0$, 以及 $\|x(t_0)\| \leq \mu$ 满足 $\|x(t)\| \leq \gamma(\|x(t_0)\|, \epsilon(t - t_0)) + \nu$. 此外, 如果 $j = p$, 系统 (25) 对于 ϵ 是一致 SPA 稳定的.

定理3 若假设 1~3 成立, 则对于满足式 (11) 的参数 k , 分布式资源分配算法 (4) 对于 b 是一致 SPA 稳定的.

证明 定义 $g(\hat{x}, t) = b\nabla C(\hat{x}) - k(C(\hat{x})\sin wt + b\nabla C(\hat{x})\sin^2 wt)$, 以及

$$G(\hat{x}, t) = \int_0^t g(\hat{x}, \tau) d\tau,$$

则 $G(\hat{x}, t)$ 对于在任意紧集的 $\hat{x}$ 是有界的周期函数, 并且

$$\frac{\partial G(\hat{x}, t)}{\partial t} = g(\hat{x}, t)$$

和

$$\frac{\partial G(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} = \int_0^t \frac{\partial g(\hat{x}, \tau)}{\partial \hat{x}} d\tau$$

对于在任意紧集的 $\hat{x}$ 是有界的周期函数.

采用坐标变换

$$\hat{v} = E + bG(E, t), \quad (26)$$

则有

$$\dot{\hat{v}} = \dot{E} + b \left(\frac{\partial G(E, t)}{\partial t} + \frac{\partial G(E, t)}{\partial E} \dot{E} \right). \quad (27)$$

从而, 式 (27) 可以转化为

$$\left(I_K + b \frac{\partial G(E, t)}{\partial E} \right) \dot{E} = \dot{\hat{v}} - b \frac{\partial G(E, t)}{\partial t} = -b^2 \nabla C(E) - b^2 y - kb^2 E + \Delta,$$

其中, $\Delta = bk(C(E)\sin wt + b\nabla C(E)\sin^2 wt) - 2b(C(\hat{x})\sin wt + b\nabla C(\hat{x})\sin^2 wt) + o(b^2)$. 利用均值定理^[44], 显然, 对于任何紧集中的 E , $\Delta = o(b) + o(b^2)$. 此外, 由于 $\frac{\partial G(E, t)}{\partial E}$ 有界, $I_K + b \frac{\partial G(E, t)}{\partial E}$ 是一个可逆矩阵, 且 $[I_K + b \frac{\partial G(E, t)}{\partial E}]^{-1} = (1 + o(b))I_K$. 于是, 对于充分小的 b , 可以得到

$$\dot{E} = -b^2 \nabla C(E) - b^2 y - kb^2 E + o(b^2) + o(b^3).$$

因此, 在坐标变换下的系统是

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = E + o(b), \\ \dot{E} = -b^2 \nabla C(E) - b^2 y - kb^2 E, \\ \dot{y} = kb^2(\hat{x} - d) + 2kb^2 E + kb^2(\mathcal{L}z - \mathcal{L}y) + o(b^3), \\ \dot{z} = -kb^2(\mathcal{L}y + \mathcal{L}\hat{v}). \end{cases} \quad (28)$$

考虑 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{k}{2} \|\xi + \nu\|^2 + \frac{k^2 b^2 - kb^2 - k}{2} \|\xi\|^2 + \frac{1}{2} \|\nu + \eta\|^2 + \frac{1}{2} \|\zeta_2\|^2 + \frac{\sigma}{2k} \|\eta_2 - \zeta_2\|^2,$$

其中 $\nu = \mathcal{M}E$, 其余符号的定义见式 (15). 类似定理 2 的证明, 可以得到

$$\dot{V}_1 \leq -\beta(V_1) + o(b) + o(b^2) + o(b^3),$$

其中 β 是一个 κ -类函数. 此外, 由于 Lyapunov 函数 V_1 是正定的径向无界函数, 故存在 κ_∞ -类函数 β_1 和 β_2 成立

$$\beta_1(\|\psi\|) \leq V_1 \leq \beta_2(\|\psi\|).$$

从而, 当取 $\|\psi\| \geq \beta_1^{-1}(\beta^{-1}(2(o(b) + o(b^2) + o(b^3))))$ 时, 我们有 $\dot{V}_1 \leq -\frac{1}{2}\beta(V_1)$. 因此, 系统 (28) 是对于 b 一致 SPA 稳定的. 于是, 结合式 (26), 可以得到分布式资源分配算法 (4) 对于 b 是一致 SPA 稳定的.

表 1 发电机参数.

Table 1 Parameters of generators.

Generator ID	Agent ID	Parameter	Value
1	1	$[a_1, b_1, c_1, D_1]$	$[2, 4.76, 4, 10]$
2	2	$[a_2, b_2, c_2, D_2]$	$[1, 6, 2, 15]$
5	3	$[a_3, b_3, c_3, D_3]$	$[2.3, -1, -0.25, 6]$
8	4	$[a_4, b_4, c_4, D_4]$	$[1.4, -2.2, 0.2, 3]$
11	5	$[a_5, b_5, c_5, D_5]$	$[2, 1.5, 0, 12]$
13	6	$[a_6, b_6, c_6, D_6]$	$[1, -2.9, 6.3, 4]$

注释4 通过 Lyapunov 稳定性理论和平均分析方法, 定理 2 和 3 证明了本文设计的分布式资源分配算法 (6) 的平衡点实际上是渐近 SPA 稳定的. 于是, 根据定理 1, 可以得到该算法生成的状态解 $x(t)$ 可以收敛到经济调度问题 (1) 最优配置的一个小邻域.

本文所给出的收敛性分析不仅验证了算法的正确性, 也从理论上支撑了其在降低计算复杂度和提升拓扑兼容性方面的优势. 一方面, 算法在不依赖梯度信息的前提下即可得到最优配置, 避免了高维梯度计算, 减小了计算负担; 另一方面, 算法通过权重平衡策略实现了对有向非平衡通信的有效兼容, 增强了其在现实网络系统的适用性.

注释5 在基于极值搜索的无梯度型优化算法 (4) 中, 控制增益参数 k 、激励信号的幅值 b 和频率 w 对系统性能具有显著影响. 首先, 参数 $k > 0$ 决定系统对估计误差和状态偏差的响应强度, 适当增大 k 有助于确保算法有效性, 但若过大可能引发系统震荡或不稳定. 其次, 激励信号幅值 $b > 0$ 控制扰动信号的强度, 是实现极值搜索能力的关键. 较大的 b 能增强状态空间的探索能力, 但同时带来较大估计偏差与扰动影响; 反之, 较小的 b 虽能提高估计精度, 但可能不足以激发系统的搜索行为, 陷入局部停滞. 文中所提出的算法对 b 保持一致 SPA 稳定性, 为参数选择提供了理论保障. 最后, 激励频率 $w > 0$ 反映系统对目标函数变化的辨识能力, 影响收敛速度, 适当的 w 可提供持续激励以保证收敛性, 但若频率过高则可能引入高频震荡, 过低则导致估计效率下降. 因此, 这 3 个参数需在满足式 (11) 的条件下协调设计, 以保证系统稳定性的同时, 实现对最优解的高效搜索.

4 数值模拟

为了验证分布式资源分配算法 (4) 的有效性, 本节将通过对经济调度问题 (1) 进行数值模拟实验来进行论证. 实验在 Matlab R2023b 平台上进行, 运行环境为搭载 Intel Core i7-14700K 处理器和 32 GB 内存的计算机.

考虑如图 2 所示的 IEEE 30 总线系统的经济调度问题^[45], 其中包含发电机的总线为 1, 2, 5, 8, 11 和 13. 将这 6 个总线视为具有 6 个智能体的多智能体系统, 其通信网络可见图 3, 其中通信链路的权重反映的是总线之间的通信质量, 即通信链路的权重越小, 表示总线之间的通信更加快速.

显然, 该通信网络是基于参数 $\gamma = [1.5, 4.5, 1, 0.5, 0.5, 0.25]^T$ 条件平衡的强连通有向图. 为了满足供电需求, 6 个发电机产生的功率应满足 $\sum_{i=1}^6 P_i = D$, 其中 $P_i \in \mathbf{R}$ 是第一台发电机的输出功率, 单位为 MW, $D = 50$ MW 为总功率需求. 假设局部代价函数 $C_i(P_i) = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i$, 参数的具体取值见表 1.

容易验证, 假设 1~3 均成立. 对于具有二阶动力学行为的多智能体系统 (3), 算法 (4) 的设计参数分别设置为 $b = 0.1$, $w = 50$, $k = 20003$. 以零作为初始状态, 运行分布式资源分配算法 (4) 求解上述经济调度问题, 得到的数值结果如图 4 和 5 所示. 具体地, 图 4 给出了算法 (4) 产生的状态解 $x(t)$ 的变化轨迹, 图 5 展示了总代价函数值的变化轨迹. 可以看出, 发电机的功率轨迹逐步收敛至最优配置的邻域, 且系统状态在收敛过程中保持稳定, 未出现震荡或发散现象. 这表明所提出的分布式资源分配算法 (4) 不仅能够有效求解经济调度问题, 还具备良好的动态稳定性. 结合约束满足性和参数设计原则, 仿真结果印证了算法的稳定性与收敛性.

此外, 为了评估算法 (4) 对激励参数的敏感性, 我们对比分析了不同激励频率 w 和幅值 b 下算法的收敛速

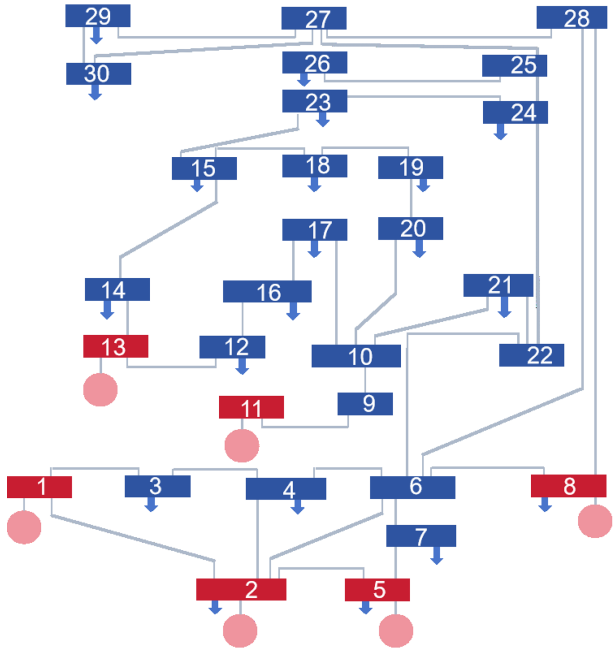


图 2 (网络版彩图) IEEE 30 总线系统单线图.

Figure 2 (Color online) Single-line diagram of IEEE 30-bus system.

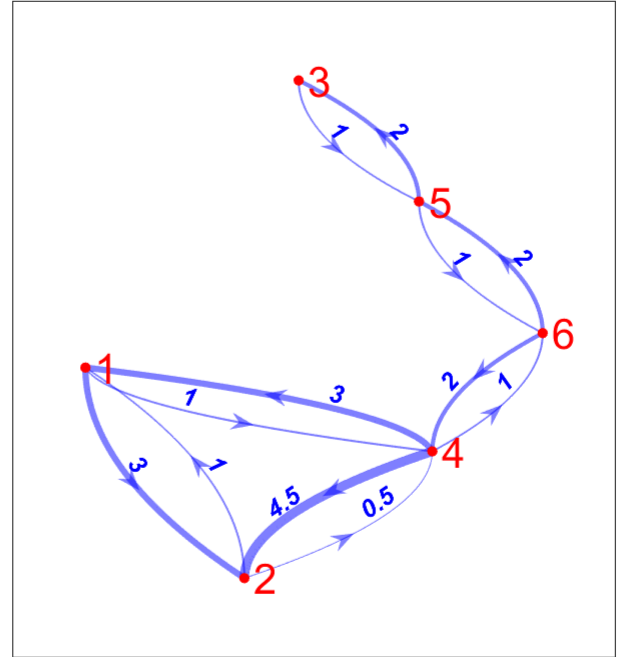


图 3 (网络版彩图) 多智能体系统的通信网络图.

Figure 3 (Color online) Communication network graph of the multi-agent system.

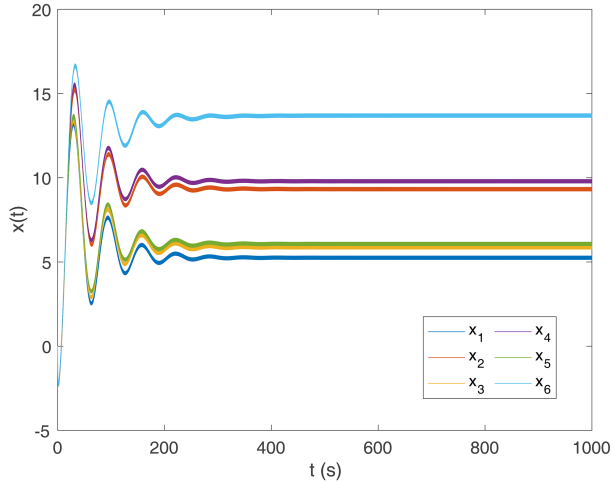


图 4 (网络版彩图) 求解 IEEE 30 总线系统经济调度问题的算法状态解轨迹.

Figure 4 (Color online) State solution trajectories for solving the economic dispatch problem of IEEE 30-bus system.

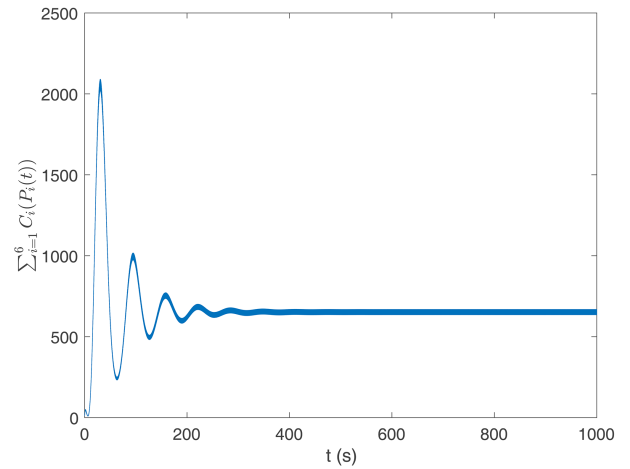

 图 5 (网络版彩图) 总代价函数值 $C(P(t))$ 的轨迹.

Figure 5 (Color online) Trajectory of the global cost function value $C(P(t))$.

度和估计精度, 结果详见表 2 和 3. 其中, 收敛速度通过系统达到稳态所需的时间来衡量, 估计精度则以智能体 6 状态轨迹的稳态幅值差表示. 结果显示, 在固定激励频率 w 的情况下, 增大激励幅值 b 可以在一定程度上加快算法收敛, 但同时也导致估计误差明显增加. 反之, 在固定激励幅值 b 时, 降低频率 w 有助于提升收敛速度, 但系统估计误差也相应增大. 该现象表明, 较强的激励信号虽然增强了状态空间的探索能力, 但也带来了更大的扰动波动, 从而影响稳态精度.

表 2 不同激励参数下的收敛时间 (s).

Table 2 Convergence time with different excitation parameters (s).

w	b				
	0.1	0.5	1	1.5	2
50	400	50	60	52	65
20	220	35	45	36	60

 表 3 不同激励参数下 x_6 的稳态幅值差.

 Table 3 Steady-state amplitude difference of x_6 with different excitation parameters.

w	b				
	0.1	0.5	1	1.5	2
50	0.2	1.1	2.2	3.2	4.1
20	0.3	1.6	2.6	3.2	4.0

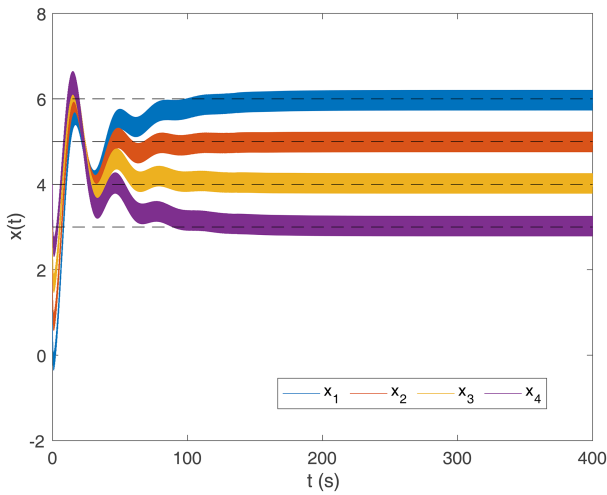


图 6 (网络版彩图) 求解问题 (29) 的算法状态解轨迹.

Figure 6 (Color online) State solution trajectories for solving the problem (29).

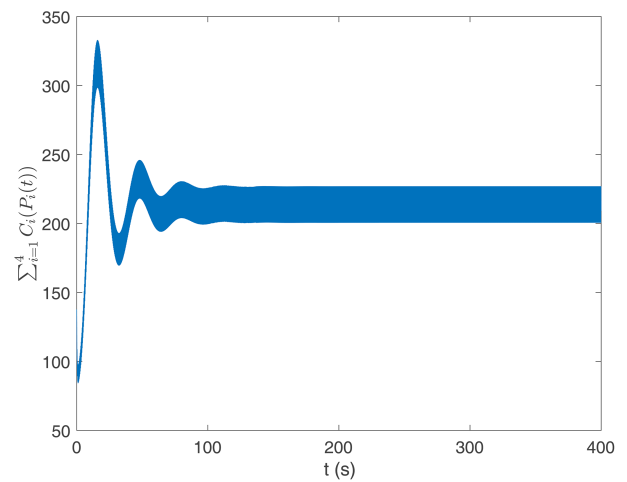

 图 7 (网络版彩图) 问题 (29) 的总代价函数值 $\bar{C}(P(t))$ 的轨迹.

 Figure 7 (Color online) Trajectory of the global cost function value $\bar{C}(P(t))$ of problem (29).

作为对比, 下面应用分布式资源分配算法 (4) 求解文献 [23] 中的经济调度问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{C}(P) = C_1(P_1) + C_2(P_2) + C_3(P_3) + C_4(P_4) \\ \text{s.t.} \quad & P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 18, \end{aligned} \quad (29)$$

其中, $C_1(P_1) = P_1^2 + 2P_1 + 7.5$, $C_2(P_2) = P_2^2 + 4P_2 + 9$, $C_3(P_3) = P_3^2 + 6P_3 + 12$, $C_4(P_4) = P_4^2 + 8P_4 + 19$. 取 $b = 0.5$, $w = 25$, $k = 104$, 由算法 (4) 产生的状态解 $x(t)$ 的变化轨迹如图 6 所示, 图中的虚线表示 4 台发电机的最佳功率. 此外, 图 7 展示了经济调度问题 (29) 中总代价函数值随时间的变化轨迹. 结合以上仿真结果可知, 对于求解经济调度问题 (29), 本文所提出的算法 (4) 能够实现与文献 [23] 中一阶极值搜索算法相当的优化效果, 即 4 台发电机的输出功率均收敛至最优解的邻域. 值得强调的是, 本文算法基于具备二阶动力学特性的系统, 设计更符合实际物理执行体的动态响应特性, 因此算法 (4) 在实现对经济调度问题最优分配的同时, 具有更强的工程适应性与可实现性.

5 结论

本文针对智能电网经济调度问题,采用极值搜索技术,在无需代价函数梯度显式表达式的条件下,建立了适用于二阶动力学模型的算法框架,并从理论上严格证明了所提算法在最优解处的一致 SPA 稳定性.数值仿真结果进一步验证了该算法在智能电网经济调度任务中的有效性和工程适用性.

需要指出的是,尽管本文提升了算法的广泛适用性和系统建模的物理合理性,但仍存在一定局限性.一方面,当前模型主要处理等式耦合约束,尚未涉及更复杂的不等式或混合约束情形;另一方面,算法依赖周期激励信号进行极值搜索,可能在系统运行中引入高频扰动,影响能耗或设备稳定性.未来研究可从提升对复杂约束的处理能力和降低运行扰动强度两方面展开,进一步拓展算法的应用边界.

参考文献

- Ren L N, Wu H, Jiao X H. Consistency-based energy management strategy for microgrids with V2G. *Sci Sin Inform*, 2022, 52: 1098–1113 [任丽娜, 武瀚, 焦晓红. 考虑 V2G 背景下微电网的一致性能量管理策略. *中国科学: 信息科学*, 2022, 52: 1098–1113]
- Wang D, Wang Z, Wen C, et al. Second-order continuous-time algorithm for optimal resource allocation in power systems. *IEEE Trans Ind Inf*, 2019, 15: 626–637
- Qin Y J, Wu L L, Zheng J H, et al. Optimal operation of integrated energy systems subject to the coupled demand constraints of electricity and natural gas. *CSEE J Power Energy Syst*, 2020, 6: 444–457
- Yang T, Chai T Y. Research status and prospects of distributed collaborative optimization. *Sci Sin Tech*, 2020, 50: 1414–1425 [杨涛, 柴天佑. 分布式协同优化的研究现状与展望. *中国科学: 技术科学*, 2020, 50: 1414–1425]
- Yi P, Hong Y G. Distributed cooperative optimization and its applications. *Sci Sin Math*, 2016, 46: 1547–1564 [衣鹏, 洪奕光. 分布式合作优化及其应用. *中国科学: 数学*, 2016, 46: 1547–1564]
- Yi P, Hong Y, Liu F. Initialization-free distributed algorithms for optimal resource allocation with feasibility constraints and application to economic dispatch of power systems. *Automatica*, 2016, 74: 259–269
- Fan J-Y, Zhang L. Real-time economic dispatch with line flow and emission constraints using quadratic programming. *IEEE Trans Power Syst*, 1998, 13: 320–325
- Chaturvedi K T, Pandit M, Srivastava L. Self-organizing hierarchical particle swarm optimization for nonconvex economic dispatch. *IEEE Trans Power Syst*, 2008, 23: 1079–1087
- Geng C, Wu Y B, Sun J, et al. Fixed-time distributed optimization algorithm for multi-agent systems with disturbance resistance. *Control Decis*, 2024, 39: 527–535 [耿超, 武永宝, 孙佳, 等. 抗干扰的多智能体系统固定时间分布式资源分配算法. *控制与决策*, 2024, 39: 527–535]
- Shi X S, Yang T, Lin Z Y, et al. Distributed resource allocation algorithm for second-order multi-agent systems in continuous-time. *Acta Automat Sin*, 2021, 47: 2050–2060 [时侠圣, 杨涛, 林志赞, 等. 基于连续时间的二阶多智能体分布式资源分配算法. *自动化学报*, 2021, 47: 2050–2060]
- Shi X, Xu L, Yang T, et al. Distributed fixed-time resource allocation algorithm for the general linear multi-agent systems. *IEEE Trans Circuits Syst II*, 2022, 69: 2867–2871
- Shi X S, Sun C Y, Mu C X. Distributed resource allocation algorithms for linear multi-agent systems with disturbances. *Sci Sin Inform*, 2024, 54: 911–926 [时侠圣, 孙长银, 穆朝絮. 扰动线性多智能体系统的分布式资源分配算法. *中国科学: 信息科学*, 2024, 54: 911–926]
- Yang S, Tan S, Xu J X. Consensus based approach for economic dispatch problem in a smart grid. *IEEE Trans Power Syst*, 2013, 28: 4416–4426
- Yun H, Shim H, Ahn H S. Initialization-free privacy-guaranteed distributed algorithm for economic dispatch problem. *Automatica*, 2019, 102: 86–93
- Shi X, Yu X, Wen G, et al. Extended zero-gradient-sum approach for constrained distributed optimization with free initialization. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2025, 55: 3824–3834
- Wu Z, Li Z, Yu J. Designing zero-gradient-sum protocols for finite-time distributed optimization problem. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2022, 52: 4569–4577
- Guo G, Zhang R, Zhou Z D. A local-minimization-free zero-gradient-sum algorithm for distributed optimization. *Automatica*, 2023, 157: 111247
- Tang Y, Zhang J, Li N. Distributed zero-order algorithms for nonconvex multiagent optimization. *IEEE Trans Control Netw Syst*, 2021, 8: 269–281
- Inoue K, Hayashi N, Takai S. Distributed zeroth-order online optimization with communication delays. *IET Control Theor Appl*,

2025, 19: e12759

- 20 Pang Y, Hu G. Gradient-free distributed optimization with exact convergence. *Automatica*, 2022, 144: 110474
- 21 Wang D, Zhou J, Wang Z, et al. Random gradient-free optimization for multiagent systems with communication noises under a time-varying weight balanced digraph. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2020, 50: 281–289
- 22 Carnevale G, Notarstefano G. Nonconvex distributed optimization via Lasalle and singular perturbations. *IEEE Control Syst Lett*, 2023, 7: 301–306
- 23 Wang D, Chen M, Wang W. Distributed extremum seeking for optimal resource allocation and its application to economic dispatch in smart grids. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2019, 30: 3161–3171
- 24 Du Y, Chen F, Xiang L, et al. Distributed nonconvex optimization via bounded gradient-free inputs. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2025, 55: 2560–2568
- 25 Du Y, Chen F, Xiang L, et al. Simultaneous source localization and formation via a distributed sign gradient-free algorithm. *IEEE Trans Control Netw Syst*, 2024, 11: 319–327
- 26 Wang J, Han L, Li X, et al. Time-varying formation of second-order discrete-time multi-agent systems under non-uniform communication delays and switching topology with application to UAV formation flying. *IET Control Theor Appl*, 2020, 14: 1947–1956
- 27 Mei J, Ren W, Ma G. Distributed coordination for second-order multi-agent systems with nonlinear dynamics using only relative position measurements. *Automatica*, 2013, 49: 1419–1427
- 28 Yang N, Li J. Fully distributed coordination learning control of second-order nonlinear multi-agent systems with input saturation. *Asian J Control*, 2021, 23: 1748–1761
- 29 Li Y, Zhang J, Tong S. Fuzzy adaptive optimized leader-following formation control for second-order stochastic multiagent systems. *IEEE Trans Ind Inf*, 2022, 18: 6026–6037
- 30 Yang H, Zhang Z, Zhang S. Consensus of second-order multi-agent systems with exogenous disturbances. *Intl J Robust Nonlinear*, 2011, 21: 945–956
- 31 Deng Z, Liang S, Yu W. Distributed optimal resource allocation of second-order multiagent systems. *Intl J Robust Nonlinear*, 2018, 28: 4246–4260
- 32 Luan L, Qin S, Sheng J, et al. Generalized second-order neurodynamic approach for distributed optimal allocation. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2024, 54: 3369–3380
- 33 Deng Z, Luo J, Chen T. Distributed strategy for constrained resource allocation problems of autonomous second-order nonlinear agents and its application to smart grids. *Inf Sci*, 2024, 652: 119754
- 34 Lakshmanan H, de Farias D P. Decentralized resource allocation in dynamic networks of agents. *SIAM J Optim*, 2008, 19: 911–940
- 35 Yu Z, Sun J, Yu S, et al. Fixed-time consensus for multi-agent systems with objective optimization on directed detail-balanced networks. *Inf Sci*, 2022, 607: 1583–1599
- 36 Lu J, Wang Y, Shi X, et al. Finite-time bipartite consensus for multiagent systems under detail-balanced antagonistic interactions. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2021, 51: 3867–3875
- 37 Luan L, Li H, Qin S. Neurodynamic approaches to multiple constrained distributed resource allocation with planned or self-regulated demand. *IEEE Trans Ind Inf*, 2024, 20: 349–357
- 38 Cherukuri A, Cortés J. Initialization-free distributed coordination for economic dispatch under varying loads and generator commitment. *Automatica*, 2016, 74: 183–193
- 39 Wang Y W, Wei Y W, Liu X K, et al. Optimal persistent monitoring using second-order agents with physical constraints. *IEEE Trans Automat Contr*, 2018, 64: 3239–3252
- 40 Khalil H K. *Nonlinear Systems*. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002
- 41 Edwards C H, Penney D E. *Calculus, Geometry A*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1998
- 42 Tan Y, Nešić D, Mareels I. On non-local stability properties of extremum seeking control. *Automatica*, 2006, 42: 889–903
- 43 Zareh M, Sabattini L, Secchi C. Distributed Laplacian eigenvalue and eigenvector estimation in multi-robot systems. In: *Proceedings of the 13th International Symposium on Distributed Autonomous Robotic Systems*, 2018. 191–204
- 44 Ortega J M, Rheinboldt W C. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Philadelphia: SIAM, 1970
- 45 Firouzbahrami M, Nobakhti A. Cooperative fixed-time/finite-time distributed robust optimization of multi-agent systems. *Automatica*, 2022, 142: 110358

Gradient-free distributed resource allocation algorithm for second-order multi-agent systems under directed communication

Linhua LUAN^{1*}, Wenwen JIA^{2*} & Sitian QIN^{1*}

1. *School of Science, Harbin Institute of Technology, Weihai 264209, China*

2. *Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing 211102, China*

* Corresponding author. E-mail: llh1568@163.com, lejww123@163.com, qinsitian@hitwh.edu.cn

Abstract Economic dispatch in smart grids poses challenges to the efficiency and compatibility of distributed resource allocation algorithms. Existing gradient-dependent algorithms often suffer from high computational complexity due to the need to process high-dimensional gradient information and are not adaptable to unbalanced communication topologies. This paper proposes a gradient-free distributed resource allocation algorithm for unbalanced directed graphs based on a second-order dynamical multi-agent system. Leveraging a weight balancing strategy, the algorithm is compatible with asymmetric communication topologies. Furthermore, by combining an extremum seeking mechanism with bounded incentive signals, it effectively mitigates the computational burden of high-dimensional gradients. Furthermore, based on Lyapunov stability and average analysis methods, this paper rigorously proves the stability of the algorithm under unbalanced directed communication topologies. Simulation experiments further verify that the states generated by the algorithm converge to a neighborhood of the optimal solution that satisfies supply-demand balance. Comparative experiments demonstrate the advantages of the proposed algorithm in terms of topological compatibility and operational efficiency.

Keywords second-order dynamical model, multi-agent systems, economic dispatch, distributed algorithm, extremum seeking, unbalanced directed communication