



# 非凸控制约束下多智能体系统一致性和包含分析: 终端迭代学习策略

罗子健<sup>1</sup>, 熊文军<sup>2\*</sup>, 曹进德<sup>3</sup>

1. 中国民用航空飞行学院理学院, 成都 641419

2. 电子科技大学自动化工程学院, 成都 611731

3. 东南大学数学学院, 南京 211189

\* 通信作者. E-mail: xwenjun2@uestc.edu.cn

收稿日期: 2024-05-18; 修回日期: 2024-09-04; 接受日期: 2024-11-20; 网络出版日期: 2025-01-07

国家重点研发计划 (批准号: 2020YFA0714300)、国家自然科学基金 (批准号: 62373308) 和中央引导地方科技发展资金 (批准号: 2023ZYD0009) 资助项目

**摘要** 本文通过设计非凸控制约束条件下的迭代学习控制策略, 解决多智能体系统的一致性和包含控制问题. 此类问题的难点在于缺乏一种有效工具来处理分布式控制中的非凸约束. 为此, 本文综合非凸约束算子方法提出了一类新颖的迭代学习策略, 并将其用于非凸约束下的多智能体一致性分析中. 进一步, 通过设计非凸约束下的终端迭代学习策略, 探讨了相关的包含控制问题, 即使各节点在终端时刻的状态收敛到领导者状态生成的凸包内. 本文在迭代学习的框架下, 结合压缩映射和 Lyapunov 稳定性理论, 分别给出了非凸约束下实现一致性或包含的充分性条件. 最后, 通过两个数值模拟来说明本文理论结果的有效性.

**关键词** 非凸约束, 终端迭代学习, 一致性, 包含控制, 收敛性分析

## 1 引言

随着信息技术的发展, 多智能体系统 (multi-agent systems, MAS) 得到了显著的进步和广泛的应用. 该系统是由多个智能体构成具有网络结构的动态系统. 在多个智能体的协同作用下, 该网络系统能够有效处理和应对单个智能体或单一系统无法解决的问题, 例如, 由计算机组成的多智能体系统可有效地处理天气预报、挖掘数据等现实问题. 因此, 多智能体系统吸引着越来越多的人对其进行理论和应用研究. 其中, 一致性和包含控制问题是该领域研究的两个热点问题. Amirkhani 等<sup>[1]</sup> 对多智能体系统一致性问题研究进行综述, 分析并比较了所有与一致性相关的问题, 为后续研究厘清了思路. Thummalapeta 和 Liu<sup>[2]</sup> 则对多智能体包含控制问题进行概述, 从包含概念到控制器设计, 详述了该领域研究方向和挑战以及现实世界中的应用. 无论是多智能体一致性还是包含控制, 其最终目标都是实现智能体状态的某种协调性. 要实现一致性或包含控制目标离不开合适的调控算法, 两者在控制算

**引用格式:** 罗子健, 熊文军, 曹进德. 非凸控制约束下多智能体系统一致性和包含分析: 终端迭代学习策略. 中国科学: 信息科学, 2025, 55: 140–155, doi: 10.1360/SSI-2024-0152

Luo Z J, Xiong W J, Cao J D. Multi-agent systems consensus and containment analysis under nonconvex control constraints: a terminal iterative learning strategy. Sci Sin Inform, 2025, 55: 140–155, doi: 10.1360/SSI-2024-0152

法设计上都需要考虑智能体间的通信方式等因素. 那么, 如何利用智能体间的信息协调, 设计出简单有效的控制策略是问题研究的关键.

众所周知, 迭代学习控制 (iterative learning control, ILC) 是智能控制的重要分支之一. 作为一种学习型控制策略, 该方法具有严格数学描述、适应性强、鲁棒性好且易于实现等优势 and 特点. 该控制方法以“训练”的方式提高控制精度, 从而最终实现理想的系统控制目标. 在过去几十年中, ILC 方法因其简单有效、模型依赖度低等优势而备受关注, 得到了工业生产等领域的广泛应用, 例如快速热处理<sup>[3]</sup>、智能机械臂<sup>[4,5]</sup>、非线性系统<sup>[6~8]</sup>以及化工聚合反应<sup>[9~11]</sup>等. 在理论研究方面, Chien 等<sup>[4]</sup>综合 PD 调节方法和切换补偿技术提出了一种迭代学习策略, 以处理不确定机器人的重复控制问题. Xiong 等<sup>[6]</sup>则充分考虑注入攻击情况, 应用两种带有部分信息的迭代学习算法分析了离散非线性系统的安全问题, 并给出了达成系统安全的充分性判据. 结合 ILC 理论, 人们还设计不同类型的控制策略分析网络系统动态行为, 以及对相关问题加以解决<sup>[12~16]</sup>. 例如, Yang 等<sup>[14]</sup>和 Wang 等<sup>[12]</sup>分别针对固定和切换通信拓扑, 设计迭代学习控制策略实现多智能体系统的一致性跟踪. Shen 和 Xu<sup>[13]</sup>将参数化不确定性和整块不确定性设为不同参数, 借助新颖的壁垒 Lyapunov 函数来驱动控制更新和参数学习, 进而解决异源高阶非线性多代理系统一致性问题. Song 等<sup>[15]</sup>从一致性视角出发, 设计迭代学习策略, 有效解决了分布式协同优化问题. 以上研究结果表明, 迭代学习控制理论为剖析多智能体一致性及其相关问题提供了一种有效方法.

另一方面, 在某些实际系统 (如护航舰队编队和多机器人合作) 中, 各个节点 (智能体) 状态可能并不需要达成一致, 而只需要运动到某个凸区域内, 这便产生了包含控制问题. 该问题在无人机编队飞行等方面得到了普遍关注, 其关键是设计合理有效的调算算法迫使所有智能体进入由某些动态或静态领导者形成的凸包之中. 为提高适应性和鲁棒性, 人们结合迭代学习方法, 提出相应的控制策略并分析多智能体系统包含控制问题<sup>[17~19]</sup>. 特别地, 文献<sup>[17]</sup>提出了一种基于事件触发的迭代学习算法, 用于分析具有固定拓扑的无模型系统分布式包含控制问题. 结果表明, 研究所提出的控制策略不仅能够实现包含控制, 而且它不依赖系统模型, 同时还减少了控制器更新次数. 目前, 运用迭代学习控制方法探讨包含控制问题的结果相对较少, 尚有一些难题需要进一步探究, 比如约束限制下, 尤其是非凸约束下的包含控制问题等.

实际系统往往受各种约束条件限制, 这些约束条件对控制器设计和系统运行具有重要影响. 特别是控制约束, 它是确保系统稳定运行, 保障安全以及实现预期目标的关键因素和重要手段. 然而, 现有多智能体系统一致性和包含控制研究的结果都假设每个节点的控制输入没有任何约束<sup>[20,21]</sup>或者为凸约束<sup>[22~25]</sup>. 事实上, 非凸约束比凸约束在现实中更具一般性. 在航空航天领域, 飞行器的轨迹优化问题常常涉及非凸约束<sup>[26]</sup>; 在电力系统经济调度<sup>[27]</sup>等问题中, 非凸约束限制也普遍存在. 相较于凸约束, 非凸约束问题在求解过程中面临更为复杂的困难和挑战. 例如, 非凸问题的复杂性使得算法设计变得更加困难, 需要采用更复杂的求解策略, 这给理论分析带来了不小的挑战. 为克服非凸约束的不利影响, 文献<sup>[28~31]</sup>利用非凸约束算子方法对相应的包含控制等问题进行分析, 但其研究结果中的充分性判据较为复杂, 在具体应用中不易检验. 因此, 这启发我们结合 ILC 方法设计结构相对简易且可行的控制策略. 另外, 当运用已有的非凸约束处理方法时, 系统动态行为仍然难以预测. 这给设计满足约束条件, 且能实现既定目标的实时控制策略带来困难, 也会让系统收敛性分析变得复杂. 这些困难和挑战值得人们进行深入探索和研究, 但研究成果依然较少.

基于以上讨论, 本文聚焦于设计满足非凸约束条件的迭代学习控制策略, 进而分析和研究多智能体系统的一致性和包含控制问题. 为达成研究目标, 本文面临着 3 个主要挑战: (1) 由于非凸控制约束的限制, 难以设计既满足约束条件, 又能实现预定目标的实时控制策略. 那么, 如何设计满足非凸控制约束且有效的迭代学习控制策略, 进而使一致性和包含控制问题能得以解决? (2) 在讨论和分析一致性和包含控制问题时, 基于迭代学习理论提出的满足非凸约束的控制算法存在怎样的差异? (3) 在理论分析上, 是否能获得简洁且易于验证的充分条件, 从而使多智能体系统达到或实现所需的动态行为?

为应对非凸控制约束带来的困难和挑战,所设计的控制策略需要降低计算复杂度和先验知识要求,避免实时数据更新带来的计算和分析负担.受文献 [32~34] 研究方法启发,本文将结合终端迭代学习方法设计相应的调控策略,并对主要研究问题展开理论分析.

综上所述,本文将结合非凸约束特点,设计终端迭代学习控制策略以解决多智能体系统一致性和包含控制问题.本文研究主要贡献如下:(1)设计了一类新型终端迭代学习控制算法,克服了传统迭代学习方法在应对非凸约束时,难以完全达到预定目标的缺陷.(2)设计的控制策略形式较为简洁,在理论分析中,运用适当的数学技巧得到易于在应用中检验的收敛性条件.(3)与已有研究成果相比,仿真结果表明本文提出的策略能更有效地实现智能体的一致性和包含控制.

符号表示:  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  代表一个实向量,符号  $\dagger$  表示转置,  $\|x\|$  表示向量  $x$  的欧氏范数.  $M = (m_{ij})_{n \times p} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  为一实矩阵,矩阵范数可表示为  $\|M\|$ . 对于方阵  $M$ ,其谱半径用  $\rho(M)$  表示.特别地,  $\mathcal{O}$  表示零矩阵,  $\mathcal{I}_N$  表示  $N$  维单位矩阵.集合  $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$  表示时间区间,其中  $T$  代表固定的终端时刻.另外,  $P_H(\cdot)$  表示闭凸集  $H$  的投影算子,  $P_H(x) = \arg \min_{\bar{x} \in H} \|x - \bar{x}\|$ ,其中  $\arg \min(\cdot)$  表示函数  $\min(\cdot)$  的反函数.

## 2 预备知识与问题描述

### 2.1 预备知识

$\mathcal{S}_N = \{1, 2, \dots, N\}$  表示智能体集合,智能体之间的通信网络由图  $\mathcal{G}$  来描述.对图  $\mathcal{G}$  而言,  $V = \{\nu_i : i \in \mathcal{S}_N\}$  代表节点的集合,  $E \subseteq V \times V$  代表边的集合.有序对  $(i, j) \in E$  表示信息从节点  $\nu_i$  到节点  $\nu_j$ .  $\mathcal{N}_i = \{\nu_j \in V | (j, i) \in E\}$  表示节点  $\nu_i$  邻居节点结合.进一步,矩阵  $A = (\alpha_{ij})_{N \times N}$  代表图  $\mathcal{G}$  的邻接矩阵,  $A$  中的对角元素用符号  $\alpha_{ii}$  ( $\alpha_{ii} = 0$ ) 表示.若  $(j, i) \notin E$ ,则非对角元素  $\alpha_{ij} = 0$ ;反之,  $\alpha_{ij} > 0$ .Laplace 矩阵表示为  $\mathbb{L} = (l_{ij})_{N \times N}$ ,且矩阵  $\mathbb{L}$  的元素规定如下:  $i \neq j, l_{ij} = -\alpha_{ij}; l_{ii} = \sum_{i \neq j} \alpha_{ij}$ .另外,有向路径表示为  $(i, j), (j, k), \dots, (l, N), i, j, l \in \mathcal{S}_N$ .如果一个有向图中只含有一个根节点,其余节点都是根节点的子节点,那么该图被称为有向生成树.

### 2.2 问题描述

考虑以下带有非凸约束迭代控制策略的离散时间多智能体系统:

$$\begin{cases} x_{k,i}(t+1) = x_{k,i}(t) + u_{k,i}, & t \in \mathcal{T}, \\ u_{k,i} = S_{C_i}[v_{k,i}], \end{cases} \quad (1)$$

其中  $k$  代表第  $k$  次迭代过程,  $t$  表示  $t$  时刻,  $i$  表示第  $i$  个智能体.  $x_{k,i}(0)$  则表示第  $k$  次迭代第  $i$  个智能体的初始状态,  $x_{k,i}(t) \in \mathbb{R}^n$  则是  $t$  时刻的状态,  $v_{k,i} \in \mathbb{R}^n$  是输入向量,  $u_{k,i} \in \mathbb{R}^n$  是控制向量.  $S_{C_i}[\cdot]$  表示约束算子,其详细定义将在下文中给出.需要说明的是,式 (1) 中的控制策略  $u_{k,i}$  和  $v_{k,i}$  在每一次迭代过程中是不随时间改的,只在迭代过程的终端时刻加以调控,并被应用于下一次迭代过程.采用该调控方式的目的在于降低计算复杂度和先验知识要求等,避免了实时数据更新带来的计算和分析负担.

考虑到现实因素限制,本文假设输入向量  $v_{k,i}$  可能受到某个非凸集合  $C_i$  的约束,也即  $v_{k,i} \in C_i, i \in \mathcal{S}_N$ .为描述非凸约束限制,本文采用文献 [29, 30] 所定义的约束算子  $S_{C_i}[\cdot]$  来刻画约束作用,其定义如下:

$$S_{C_i}[x] = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|} \max_{0 \leq \rho \leq \|x\|} \left\{ \rho \left| \frac{\rho \gamma x}{\|x\|} \in C_i, \forall 0 \leq \gamma \leq 1 \right. \right\}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $x$  表示某一向量,  $u_{k,i} = S_{C_i}[v_{k,i}]$  表示控制  $u_{k,i}$  与输入  $v_{k,i}$  之间的关系. 非凸算子  $S_{C_i}[x]$  的作用是在约束集内搜寻一个模最大的向量, 使  $\|S_{C_i}[x]\| \leq \|x\|$ ,  $\gamma S_{C_i}[x] \in C_i, \forall \gamma \in [0, 1]$ , 同时  $S_{C_i}[x]$  与向量  $x$  具有相同的方向. 注意到, 若约束算子  $S_{C_i}[\cdot]$  具有强非线性, 会给理论分析带来一些困难. 为分析方便, 采用文献 [29,30] 中的非凸约束系数  $\sigma_{k,i}$  来刻画控制约束作用, 该系数定义为  $\sigma_{k,i} = S_{C_i}[v_{k,i}]/v_{k,i}$ . 另外, 根据式 (2), 若  $v_{k,i} = 0$  规定  $\sigma_{k,i} = 1$ , 那么,  $u_{k,i} = \sigma_{k,i}v_{k,i}, \sigma_{k,i} \in [0, 1]$ .

综上, 本文目的是实现系统 (1) 在终端  $T$  时刻的一致性和包含控制. 同时, 希望每个智能体的控制输入在每次迭代时维持在相应的非凸约束集  $C_i$  之中. 具体而言, (i) 一致性控制的目标为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{k,i}(T) - x_d(T)\| = 0, \forall i \in \mathcal{S}_N, \quad (3)$$

其中  $x_d(T)$  代表  $T$  时的一致性期望状态. (ii) 包含控制的目标是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{k,i}(T) - x_{d,i}(T)\| = 0, \forall i \in \mathcal{S}_N, x_{d,i}(T) \in H, \quad (4)$$

其中  $H$  是由属于  $\mathcal{Y} = \{y_{N+1}(T), \dots, y_{N+m}(T)\}$  的  $m$  个领导者生成的凸包, 即  $H = \{\sum_{j=1}^m \omega_j y_{N+j}(T) | \sum_{j=1}^m \omega_j = 1, \omega_j \geq 0\}$ ,  $y_{N+1}(T), y_{N+2}(T), \dots, y_{N+m}(T) \in \mathbb{R}^n$  则代表这些领导者在终端  $T$  时刻的状态. 此处, 假设  $H$  是有界的, 也即  $\|y\| \leq B_H, \forall y \in H, B_H$  为一个正常数.  $x_{d,i}(T)$  则表示终端时刻凸包中需要跟踪的理想状态. 值得指出的是, 若  $x_{d,i}(T) = x_d(T)$ , 则包含控制目标 (4) 就退化为一致性控制目标 (3), 故可将一致性目标视为包含控制目标的一个特殊情形.

### 3 基于迭代学习策略的一致性控制

本节主要通过迭代学习方法分析多智能体系统 (1) 的终端一致性问题. 由于约束算子是非线性的, 本文首先提出一类具有非凸约束条件的迭代学习策略, 如下:

$$u_{k+1,i} = \sigma_{k+1,i} \left\{ u_{k,i} + \gamma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} [x_{k,j}(T) - x_{k,i}(T)] - q_i [x_{k,i}(T) - x_d(T)] \right\}, \quad (5)$$

其中  $\gamma_i > 0$  为学习增益参数,  $q_i$  满足如下要求:

$$\begin{cases} q_i > 0, \text{ 节点 } i \text{ 能接收到理想状态信息 } x_d(T), \\ q_i = 0, \text{ 节点 } i \text{ 不能接收到理想状态信息 } x_d(T). \end{cases} \quad (6)$$

另外, 定义各节点终端时刻跟踪误差  $e_{k,i}(T) = x_{k,i}(T) - x_d(T), i \in \mathcal{S}_N$ . 为实现一致性, 我们还需要以下的假设和引理.

**假设1** 每一次迭代时, 各节点初始状态都不发生改变, 即  $x_{k,i}(0) = x_{k+1,i}(0)$ .

**假设2** 增广图  $\tilde{\mathcal{G}} = (V \cup \{\nu_0\}, \tilde{E})$  有一棵生成树, 该生成树以  $\nu_0$  为根节点, 且该节点的期望状态记为  $x_d(T)$ .

**假设3** 输入  $v_{k,i}$  在每一次迭代过程中是有界的, 即  $\|v_{k,i}\| \leq B_{v_i}, B_{v_i} > 0$ ; 同时  $\sigma_{k,i} \geq \sigma_{\min} > 0, \forall i \in \mathcal{S}_N, k > 0$ .

**引理1** ([35]) 设  $\{d_k\}$  是一个实数序列, 且  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = d_\infty$ . 若实数序列  $\{a_k\}$  满足不等式  $pa_k + qa_{k-1} \leq d_k$ , 其中  $p > -q \geq 0$ . 那么, 有以下不等式成立  $\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \frac{d_\infty}{p+q}$ .

**定理1** 若假设 1 ~ 3 成立, 将迭代学习控制策略 (5) 应用于多智能体系统 (1). 那么,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|e_k(T)\|$$

是有界的, 当以下不等式成立时:

$$\|\mathcal{I}_N - T\Lambda_{k+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)\| \leq \varrho_1 < 1, \quad (7)$$

$\forall k \geq 0$ ,  $\Lambda_{k+1} = \text{diag}\{\sigma_{k+1,1}, \dots, \sigma_{k+1,N}\}$ ,  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$  和  $Q = \text{diag}\{q_1, \dots, q_N\}$ .

**证明** 根据  $e_{k,i}(T) = x_{k,i}(T) - x_d(T)$ , 不难得到

$$e_{k+1,i}(T) = e_{k,i}(T) + [x_{k+1,i}(T) - x_{k,i}(T)]. \quad (8)$$

根据式 (1) 可知  $x_{k+1,i}(T) - x_{k,i}(T) = [x_{k+1,i}(0) - x_{k,i}(0)] + T[u_{k+1,i} - u_{k,i}]$ , 结合假设 1 可知

$$e_{k+1,i}(T) = e_{k,i}(T) + [x_{k+1,i}(T) - x_{k,i}(T)] = e_{k,i}(T) + T[u_{k+1,i} - u_{k,i}]. \quad (9)$$

由迭代学习策略 (5), 可知

$$u_{k+1,i} - u_{k,i} = [\sigma_{k+1,i} - 1]u_{k,i} + \sigma_{k+1,i} \left\{ \gamma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} [e_{k,j}(T) - e_{k,i}(T)] - q_i e_{k,i}(T) \right\}. \quad (10)$$

因此, 式 (8) 可变为

$$\begin{aligned} & e_{k+1,i}(T) - e_{k,i}(T) \\ &= T\sigma_{k+1,i} \left\{ \gamma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} [e_{k,j}(T) - e_{k,i}(T)] - q_i e_{k,i}(T) \right\} + T[\sigma_{k+1,i} - 1]u_{k,i}. \end{aligned} \quad (11)$$

从而可得

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e_{k+1,1}(T) \\ e_{k+1,2}(T) \\ \vdots \\ e_{k+1,N}(T) \end{bmatrix}}_{e_{k+1}(T)} = \underbrace{\Phi_{k+1}}_{\Phi_{k+1}} \underbrace{\begin{bmatrix} e_{k,1}(T) \\ e_{k,2}(T) \\ \vdots \\ e_{k,N}(T) \end{bmatrix}}_{e_k(T)} + \underbrace{\Psi_{k+1}}_{\Psi_{k+1}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{k,1} \\ u_{k,2} \\ \vdots \\ u_{k,N} \end{bmatrix}}_{u_k}, \quad (12)$$

其中  $\Phi_{k+1} = [(\mathcal{I}_N - T\Lambda_{k+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)) \otimes \mathcal{I}_n]$ ,  $\Psi_{k+1} = T[(\Lambda_{k+1} - \mathcal{I}_N) \otimes \mathcal{I}_n]$ . 对式 (12) 取范数, 有

$$\|e_{k+1}(T)\| \leq \|\Phi_{k+1}\| \cdot \|e_k(T)\| + \|\Psi_{k+1}\| \cdot \|u_k\|. \quad (13)$$

再结合式 (7), 可得  $\|\Phi_{k+1}\| < 1$ ,  $k \geq 0$ . 另外, 若令  $\varrho_1 = \max_{k \geq 0} \{\|\Phi_k\|\} < 1$ ,  $\tau_1 = \max_{k \geq 0} \{\|\Psi_k\|\}$ , 并注意到  $u_{k,i} = \sigma_{k,i}v_{k,i}$ , 由假设 3 可得  $\|u_{k,i}\| \leq \|v_{k,i}\| \leq B_{v_i}$ . 因而,  $\|u_k\| \leq B_1 = \sqrt{N} \max_{i \in \mathcal{S}_N} \{B_{v_i}\}$ ,  $\|e_{k+1}(T)\| \leq \varrho_1 \|e_k(T)\| + \tau_1 B_1$ . 由引理 1 知  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|e_k(T)\| \leq \frac{\tau_1 B_1}{1 - \varrho_1}$ . 这意味着  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|e_k(T)\|$  有界.

**注释1** 对于迭代学习控制策略 (5), 非凸约束迭代控制器的设计类似于文献 [32, 33] 中的控制策略. 然而, 由于非凸约束的非线性特性, 定理 1 只能确保一致性误差的有界性, 而无法实现跟踪误差收敛于零. 为克服上述这一困难, 下面将对迭代学习策略 (5) 加以改善, 以提升一致性跟踪效率.

第二类基于迭代学习的控制策略, 具有以下形式:

$$u_{k+1,i} = \sigma_{k+1,i} \left\{ \gamma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} [x_{k,j}(T) - x_{k,i}(T)] - q_i [x_{k,i}(T) - x_d(T)] \right\}. \quad (14)$$

需要说明的是, 控制策略 (14) 不同于式 (5) 之处在于它直接利用每一次相邻节点终端状态偏差和跟踪误差构造下一次的控制输入, 而非对上一次迭代控制策略进行校正.

**假设4** 在每次迭代过程中,第  $i$  个智能体的初始状态满足  $x_{k+1,i}(0) = x_{k,i}(T), \forall i \in \mathcal{S}_N$ .

**定理2** 若假设 2 ~ 4 成立,将迭代学习控制策略 (14) 应用于多智能体系统 (1). 那么,  $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(T) = 0$  当以下条件成立时:

$$\|\mathcal{I}_N - T\Lambda_{k+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)\| < 1, \quad (15)$$

$\forall k \geq 0, \Lambda_{k+1}$ , 矩阵  $\Gamma$  与  $Q$  形式与定理 1 中一致.

**证明** 根据假设 2, 假设 4 以及  $e_{k,i}(T) = x_{k,i}(T) - x_d(T)$ , 可得

$$\begin{aligned} e_{k+1,i}(T) &= x_{k,i}(T) - x_d(T) + Tu_{k+1,i} \\ &= e_{k,i}(T) + T\sigma_{k+1,i} \left\{ \gamma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} [x_{k,j}(T) - x_{k,i}(T)] - q_i [x_{k,i}(T) - x_d(T)] \right\} \\ &= e_{k,i}(T) + T\sigma_{k+1,i} \left\{ \gamma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} [e_{k,j}(T) - e_{k,i}(T)] - q_i e_{k,i}(T) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

结合式 (16), 进一步有

$$e_{k+1}(T) = \Phi_{k+1}e_k(T), \quad (17)$$

其中  $\Phi_{k+1} = [\mathcal{I}_N - T\Lambda_{k+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)] \otimes \mathcal{I}_n$ .

通过计算, 可得  $\|\Phi_{k+1}\| = \|\mathcal{I}_N - T\Lambda_{k+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)\| \cdot \|\mathcal{I}_n\|$ . 注意到  $\|\mathcal{I}_n\| = 1, \|\Phi_{k+1}\| = \|\mathcal{I}_N - T\Lambda_{k+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)\|$ . 此外, 还有  $\|e_{k+1}(T)\| \leq \|\Phi_{k+1}\| \cdot \|e_k(T)\|, \|e_{k+1}(T)\| \leq (\prod_{j=1}^{k+1} \|\Phi_j\|) \|e_0(T)\|$ . 再根据假设 3, 可知  $\Lambda_{k+1} \neq 0$ , 这意味着  $\|\mathcal{I}_N - T\Lambda_{k+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)\| < 1, k \geq 0$ . 从而可知  $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(T) = \mathbf{0}$ , 也即式 (3) 得以实现.

**注释2** 与已有文献 [22~24] 相比较, 本文提出的调控策略具有以下两个优点: (1) 在文献 [22~24] 中, 所考虑的约束条件都是凸约束. 本文研究中主要考虑的是迭代控制策略的非凸约束, 这在实际应用中更为普遍. (2) 假设 4 只要求下一次初始状态等于上一次迭代过程的终端状态, 即  $x_{k+1,i}(0) = x_{k,i}(T)$ , 并不要求每次迭代初态完全一样, 从而在一定程度上降低了传统迭代学习控制中初态条件的保守性.

值得注意的是, 每一次迭代过程均满足条件 (15) 并不容易, 因为该条件中矩阵  $\Lambda_{k+1}$  与迭代步长  $k+1$  有关. 为解决这一难题, 下面提出以下一致性误差收敛性结果.

**推论1** 若假设 2 ~ 4 成立, 将迭代学习控制策略 (14) 应用于多智能体系统 (1). 那么,  $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(T) = \mathbf{0}$  当存在一个无限迭代序列  $k_0, k_1, \dots$  ( $k_0 = 0, 0 < k_{s+1} - k_s \leq b, s, b \in \mathbb{Z}_+$ ) 满足下述不等式时:

$$\left\| \prod_{j=k_s}^{k_{s+1}} [\mathcal{I}_N - T\Lambda_{j+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)] \right\| \leq \beta < 1, \quad (18)$$

其中  $\beta > 0, \Lambda_{j+1} = \text{diag}\{\sigma_{j+1,1}, \dots, \sigma_{j+1,N}\}$ , 矩阵  $\Gamma$  与  $Q$  形式与定理 1 中的一样.

**证明** 与定理 1 的证明类似, 结合式 (18), 可得  $\|\prod_{j=k_s}^{k_{s+1}} [\mathcal{I}_N - T\Lambda_{j+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)] \otimes \mathcal{I}_n\| < 1$ . 因为  $\Phi_{k+1} = [\mathcal{I}_N - T\Lambda_{k+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)] \otimes \mathcal{I}_n$ , 有

$$\left\| \prod_{j=k_s}^{k_{s+1}} \Phi_{j+1} \right\| < 1, \quad (19)$$

其中  $\prod_{j=k_s}^{k_{s+1}} \Phi_{j+1} = \Phi_{k_{s+1}} \cdots \Phi_{k_s+1}$ . 进一步, 令  $\tilde{\Phi}_{k_s}^{k_{s+1}} = \prod_{j=k_s}^{k_{s+1}} \Phi_{j+1}$ , 对于一些  $s \in \mathbb{Z}_+, \|\tilde{\Phi}_{k_s}^{k_{s+1}}\| = \beta < 1$ . 因此, 根据式 (19), 可知  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_{k+1}(T)\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \beta^{\frac{k-k_1}{b}} \|\tilde{\Phi}_{k_0}^{k_1}\| \|e_0(T)\|$ . 这意味着  $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(T) = \mathbf{0}$ , 也即调控目标 (3) 得以实现.

#### 4 基于迭代学习策略的包含控制

第3节研究工作主要聚焦于由单个领导者构成的多智能体系统的一致性. 而在实践中, 引入多个领导者可以保证所有个体的动态都进入规定的区域, 从而扩大理论的应用范围. 因此, 本节将在非凸约束条件下探讨包含控制问题. 具体而言, 本文将结合迭代学习控制策略迫使所有智能体都进入由多个领导者在终端时间生成的凸包中.

**假设5** 对每个跟随者  $i \in \mathcal{S}_N$ , 至少存在一个  $x_{d,i}(T)$  ( $x_{d,i}(T) \in H$ ), 从它到该追随者有一条有向路径.

**定理3** 若假设3~5成立, 将迭代学习控制策略(14)应用于多智能体系统(1)中. 那么, 多智能体系统(1)在满足以下条件时, 能实现包含控制:

$$\|\mathcal{I}_N - T\Lambda_{k+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)\| \leq \varrho_1 < 1, \quad (20)$$

和

$$\frac{\tau_2\sqrt{N}B_H}{1 - \varrho_1} \leq \min_{i \in \mathcal{S}_N} \left\{ \text{dist}(x_{d,i}(T), H) \right\}, \quad (21)$$

其中  $\tau_2 = \max_{k \geq 0} \|\mathcal{I}_N - T\Lambda_{k+1}\Gamma\mathbb{L}\|$ ,  $\Lambda_{k+1}$  与  $\Gamma$  与定理1中一样.  $\text{dist}(x_{d,i}(T), H)$  则表示  $x_{d,i}(T)$  与凸集  $H$  之间的距离.

**证明** 定义  $\tilde{e}_{k,i}(T) = x_{k,i}(T) - x_{d,i}(T)$ . 与式(16)相仿, 根据假设4和5, 可得

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{k+1,i}(T) &= x_{k,i}(T) - x_{d,i}(T) + Tu_{k+1,i} \\ &= \tilde{e}_{k,i}(T) + T\sigma_{k+1,i} \left\{ \gamma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} [x_{k,j}(T) - x_{k,i}(T)] - q_i [x_{k,i}(T) - x_{d,i}(T)] \right\} \\ &= \tilde{e}_{k,i}(T) + T\sigma_{k+1,i} \left\{ \gamma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} [\tilde{e}_{k,j}(T) - \tilde{e}_{k,i}(T)] - q_i \tilde{e}_{k,i}(T) \right\} \\ &\quad + T\sigma_{k+1,i} \left\{ \gamma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} [x_{d,j}(T) - x_{d,i}(T)] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

由式(22)可得

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{e}_{k+1,1}(T) \\ \tilde{e}_{k+1,2}(T) \\ \vdots \\ \tilde{e}_{k+1,N}(T) \end{bmatrix}}_{\tilde{e}_{k+1}(T)} = \Phi_{k+1} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{e}_{k,1}(T) \\ \tilde{e}_{k,2}(T) \\ \vdots \\ \tilde{e}_{k,N}(T) \end{bmatrix}}_{\tilde{e}_k(T)} - \Upsilon_{k+1} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{d,1}(T) \\ x_{d,2}(T) \\ \vdots \\ x_{d,N}(T) \end{bmatrix}}_{x_d(T)}, \quad (23)$$

其中  $\Phi_{k+1} = [\mathcal{I}_N - T\Lambda_{k+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)] \otimes \mathcal{I}_n$ ,  $\Upsilon_{k+1} = [T(\Lambda_{k+1}\Gamma\mathbb{L}) \otimes \mathcal{I}_n]$ .

进一步, 对式(23)取范数有

$$\|\tilde{e}_{k+1}(T)\| \leq \|\Phi_{k+1}\| \cdot \|\tilde{e}_k(T)\| + \|\Upsilon_{k+1}\| \cdot \|x_d(T)\|.$$

根据假设3, 可知  $\Lambda_{k+1} \neq \mathcal{O}$ . 另外,  $\|\Phi_{k+1}\| = \|\mathcal{I}_N - T\Lambda_{k+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)\| < 1$ ,  $x_{d,i}(T) \in H$ . 注意到集合  $H$  有界, 从而可得  $\|x_d(T)\| \leq \sqrt{N}B_H$ . 此外, 令  $\varrho_1 = \max_{k \geq 0} \|\Phi_{k+1}\|$  和  $\tau_2 = \max_{k \geq 0} \|\Upsilon_{k+1}\|$ , 结合引理1不难知道  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{e}_k(T)\| \leq \frac{\tau_2\sqrt{N}B_H}{1 - \varrho_1}$ . 因此, 当  $\frac{\tau_2\sqrt{N}B_H}{1 - \varrho_1} \leq \min_{i \in \mathcal{S}_N} \{\text{dist}(x_{d,i}(T), H)\}$  时, 系统包含控制目标(4)得以实现.

**注释3** 与文献 [17] 相比, 本文在探讨包含控制问题时考虑了非凸约束条件, 因而结论更具一般性. 在非凸约束条件下, 定理得出的充分性条件 (20) 和 (21) 易于验证. 此外, 当  $x_{d,i}(T) = x_{d,j}(T) = x_d(T)$ ,  $\forall i, j \in \mathcal{S}_N$  时, 定理 3 可转化为定理 2. 这表明一致性目标 (3) 可视为包含控制目标 (4) 的一个特殊情形.

在应用定理 3 时, 需要知道精确值  $x_{d,i}(T)$ ,  $\tau_2$  和  $\min_{i \in \mathcal{S}_N} \{\text{dist}(x_{d,i}(T), H)\}$ , 从而实现包含控制. 然而, 在实际中获取这些变量的精确值并非易事. 为降低定理 3 中条件的复杂性, 重构迭代学习策略 (14) 如下:

$$u_{k+1,i} = \sigma_{k+1,i} \left\{ \gamma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} [x_{k,j}(T) - x_{k,i}(T)] - q_i [x_{k,i}(T) - P_{H_i}(x_{k,i}(T))] \right\}. \quad (24)$$

由于此时在假设 1 条件下不能实现包含控制目标, 为克服这一困难, 我们将在假设 4 的条件下进行分析研究, 即  $x_{k+1,i}(0) = x_{k,i}(T)$ . 同时, 令  $\tilde{u}_{k+1,i} = x_{k,i}(T) + c_i u_{k,i}$ ,  $c_i > 0$ . 由式 (24), 系统 (1) 可变换为如下形式:

$$\begin{cases} x_{k+1,i}(T) = \left(1 - \frac{T}{c_i}\right) x_{k,i}(T) + \frac{T}{c_i} \tilde{u}_{k+1,i}, & t \in \mathcal{T}, \\ \tilde{u}_{k+1,i} = (1 - c_i \sigma_{k+1,i} w_i) x_{k,i}(T) + c_i \sigma_{k+1,i} \gamma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} x_{k,j}(T) + c_i \sigma_{k+1,i} q_i P_{H_i}(x_{k,i}(T)), \end{cases} \quad (25)$$

其中  $w_i = \gamma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} + q_i$ ,  $i \in \mathcal{S}_N$ . 另外, 定义 Lyapunov 函数如下:

$$V_k(T) = \max_{i \in \mathcal{S}_N} \left\{ \|x_{k,i}(T) - P_H(x_{k,i}(T))\| \right\}. \quad (26)$$

类似于文献 [28], 后文将采用 Lyapunov 函数方法来研究包含控制问题. 在给出结论之前, 我们还需要以下假设和引理.

**假设6** 对每个追随者  $i \in \mathcal{S}_N$ , 至少存在一个  $P_{H_i}(x_{k,i}(T))$ , 从它到该追随者存在一条有向路径.

**引理2** ([31])  $Q \subseteq \mathbb{R}^m$  是一个非空闭凸集. 如果等式  $\sum_{i=1}^q \beta_i = 1$  成立, 则有  $\|\sum_{i=1}^q \beta_i x_i - P_Q(\sum_{i=1}^q \beta_i x_i)\| \leq \sum_{i=1}^q \beta_i \|x_i - P_Q(x_i)\|$ ,  $\forall i \in \mathcal{S}_N$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^m$ ,  $\beta_i \geq 0$ .

**定理4** 若假设 3, 4 和 6 成立, 将迭代学习策略 (24) 应用于多智能体系统 (1). 在终端时刻有  $V_{k+1}(T) \leq V_k(T)$ , 当下述不等式成立时:

$$c_i w_i < 1, \quad (27)$$

其中  $c_i > T$ ,  $w_i = \gamma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} + q_i$ ,  $i \in \mathcal{S}_N$ .

**证明** 根据假设 4, 假设 6 以及式 (24), 可得

$$\begin{aligned} & \|x_{k+1,i}(T) - P_H(x_{k+1,i}(T))\| \\ &= \left\| \left[1 - \frac{T}{c_i}\right] x_{k,i}(T) + \frac{T}{c_i} \tilde{u}_{k+1,i} - P_H \left( \left[1 - \frac{T}{c_i}\right] x_{k,i}(T) + \frac{T}{c_i} \tilde{u}_{k+1,i} \right) \right\|. \end{aligned} \quad (28)$$

注意到  $c_i > T$ ,  $\beta_1 = 1 - \frac{T}{c_i} > 0$ ,  $\beta_2 = \frac{T}{c_i} > 0$ , 且  $\beta_1 + \beta_2 = 1$ , 结合引理 2, 式 (8) 可化为

$$\begin{aligned} & \|x_{k+1,i}(T) - P_H(x_{k+1,i}(T))\| \\ &= \left\| \beta_1 x_{k,i}(T) + \beta_2 \tilde{u}_{k+1,i} - P_H \left( \beta_1 x_{k,i}(T) + \beta_2 \tilde{u}_{k+1,i} \right) \right\| \\ &\leq \left[1 - \frac{T}{c_i}\right] \|x_{k,i}(T) - P_H(x_{k,i}(T))\| + \frac{T}{c_i} \|\tilde{u}_{k+1,i} - P_H(\tilde{u}_{k+1,i})\|. \end{aligned} \quad (29)$$



令  $w_i = \gamma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} + q_i$ , 由假设 3 和式 (27), 可知

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}_{k+1,i} - P_H(\tilde{u}_{k+1,i})\| \\ & \leq (1 - c_i \sigma_{k+1,i} w_i) \|x_{k,i}(T) - P_H(x_{k,i}(T))\| + c_i \sigma_{k+1,i} (w_i - q_i) \|x_{k,j}(T) - P_H(x_{k,j}(T))\| \\ & \quad + c_i \sigma_{k+1,i} q_i \|P_{H_i}(x_{k,i}(T)) - P_H(P_{H_i}(x_{k,i}(T)))\|. \end{aligned} \quad (30)$$

由  $H_i \subseteq H$ , 可得  $P_H(P_{H_i}(x_{k,i}(T))) = P_{H_i}(x_{k,i}(T))$ ,  $\|P_{H_i}(x_{k,i}(T)) - P_H(P_{H_i}(x_{k,i}(T)))\| = 0$ . 结合式 (26), (29) 以及 (30), 有

$$\begin{aligned} & \|x_{k+1,i}(T) - P_H(x_{k+1,i}(T))\| \\ & \leq (1 - T\sigma_{k+1,i} w_i) \|x_{k,i}(T) - P_H(x_{k,i}(T))\| + T\sigma_{k+1,i} (w_i - q_i) \|x_{k,j}(T) - P_H(x_{k,j}(T))\| \\ & \leq (1 - T\sigma_{k+1,i} w_i) V_k(T) + T\sigma_{k+1,i} (w_i - q_i) V_k(T) \\ & \leq V_k(T). \end{aligned} \quad (31)$$

由式 (30) 及 (31), 可知  $V_{k+1}(T) \leq V_k(T)$ ,  $k \geq 0$ .

下文将证明 Lyapunov 函数  $V_k(T)$  随着迭代步骤的增加而趋于零. 为此, 需要以下两个引理.

**引理3** 设定理 4 中的条件均成立. 如果存在一个智能体  $i_1 \in \mathcal{S}_N$  和某个迭代步长  $\bar{k} > k_0 > 0$  满足不等式  $\|x_{\bar{k},i_1}(T) - P_H(x_{\bar{k},i_1}(T))\| \leq \rho_1 V_{k_0}(T)$ ,  $0 \leq \rho_1 < 1$ . 那么, 以下不等式成立:

$$\|x_{\bar{k}+1,i_1}(T) - P_H(x_{\bar{k}+1,i_1}(T))\| \leq \rho_2 V_{k_0}(T), \quad (32)$$

其中  $0 < \rho_2 < 1$ .

**证明** 由于  $V_k(T)$  不增, 结合式 (28) 与 (30), 可得

$$\begin{aligned} & \|x_{\bar{k}+1,i_1}(T) - P_H(x_{\bar{k}+1,i_1}(T))\| \\ & \leq \left[1 - \frac{T}{c_{i_1}}\right] \|x_{\bar{k},i_1}(T) - P_H(x_{\bar{k},i_1}(T))\| + \frac{T}{c_{i_1}} \|\tilde{u}_{\bar{k}+1,i_1} - P_H(\tilde{u}_{\bar{k}+1,i_1})\| \\ & \leq \left[1 - \frac{T}{c_{i_1}}\right] \rho_1 V_{k_0}(T) + \frac{T}{c_{i_1}} V_{\bar{k}}(T) \\ & \leq \left[\left(1 - \frac{T}{c_{i_1}}\right) \rho_1 + \frac{T}{c_{i_1}}\right] V_{k_0}(T) \\ & \leq \left[1 - \left(1 - \frac{T}{c_{i_1}}\right) (1 - \rho_1)\right] V_{k_0}(T). \end{aligned} \quad (33)$$

令  $\rho_2 = 1 - \left(1 - \frac{T}{c_{i_1}}\right) (1 - \rho_1)$ , 不难验证  $0 < \rho_2 < 1$ .

**引理4** 设定理 4 中的条件均成立, 那么有以下结论.

(a) 若存在某个节点  $i_1$  满足  $q_{i_1} \geq q_0 > 0$ , 并且迭代参数  $\bar{k}$  满足  $\bar{k} > k_0 > 0$ , 则有

$$\|x_{\bar{k}+1,i_1}(T) - P_H(x_{\bar{k}+1,i_1}(T))\| \leq \rho_1 V_{k_0}(T), \quad (34)$$

其中常数  $\rho_1$  满足  $0 < \rho_1 < 1$ .

(b) 若节点  $i_1 \in \mathcal{S}_N$  和迭代参数  $\bar{k}$  ( $\bar{k} > k_0 > 0$ ) 满足  $\|x_{\bar{k},i_1}(T) - P_H(x_{\bar{k},i_1}(T))\| \leq \rho_1 V_{k_0}(T)$ , 其中  $\rho_1$  为常数且  $0 \leq \rho_1 < 1$ . 同时, 若还存在另一节点  $i_2$  满足  $\alpha_{i_2 i_1} > 0$ , 则有

$$\|x_{\bar{k}+1,i_2}(T) - P_H(x_{\bar{k}+1,i_2}(T))\| \leq \rho_2 V_{k_0}(T), \quad (35)$$

$\rho_2$  为常数且满足  $0 < \rho_2 < 1$ .

**证明** 对于结论 (a), 根据式 (30), 则有

$$\begin{aligned}
 & \|\tilde{u}_{\bar{k}+1,i_1} - P_H(\tilde{u}_{\bar{k}+1,i_1})\| \\
 & \leq (1 - c_{i_1}\sigma_{\bar{k}+1,i_1}w_{i_1})\|x_{\bar{k},i_1}(T) - P_H(x_{\bar{k},i_1}(T))\| \\
 & \quad + c_{i_1}\sigma_{\bar{k}+1,i_1}(w_{i_1} - q_{i_1})\|x_{\bar{k},j}(T) - P_H(x_{\bar{k},j}(T))\| \\
 & \leq (1 - c_{i_1}\sigma_{\bar{k}+1,i_1}q_{i_1})V_{k_0}(T).
 \end{aligned} \tag{36}$$

结合式 (36) 和 (28), 可知

$$\begin{aligned}
 & \|x_{\bar{k}+1,i_1}(T) - P_H(x_{\bar{k}+1,i_1})\| \\
 & \leq \left[1 - \frac{T}{c_{i_1}}\right]\|x_{\bar{k},i_1}(T) - P_H(x_{\bar{k},i_1}(T))\| + \frac{T}{c_{i_1}}\|\tilde{u}_{\bar{k}+1,i_1} - P_H(\tilde{u}_{\bar{k}+1,i_1})\| \\
 & \leq \left[1 - \frac{T}{c_{i_1}}\right]\|x_{\bar{k},i_1}(T) - P_H(x_{\bar{k},i_1}(T))\| + \frac{T}{c_{i_1}}(1 - c_{i_1}\sigma_{\bar{k}+1,i_1}q_{i_1})V_{k_0}(T) \\
 & \leq [1 - T\sigma_{\bar{k}+1,i_1}q_0]V_{k_0}(T).
 \end{aligned} \tag{37}$$

令  $\rho_1 = 1 - T\sigma_{\bar{k}+1,i_1}q_{i_0}$ , 由定理 4, 不难验证  $0 < \rho_1 < 1$ .

对于结论 (b), 由式 (25), 可得

$$\begin{aligned}
 & \|\tilde{u}_{\bar{k}+1,i_2} - P_H(\tilde{u}_{\bar{k}+1,i_2})\| \\
 & \leq (1 - c_{i_2}\sigma_{\bar{k}+1,i_2}w_{i_2})\|x_{\bar{k},i_2}(T) - P_H(x_{\bar{k},i_2}(T))\| + c_{i_2}\sigma_{\bar{k}+1,i_2}\gamma_{i_2}\alpha_{i_2i_1}\|x_{\bar{k},i_1} - P_H(x_{\bar{k},i_1})\| \\
 & \quad + c_{i_2}\sigma_{\bar{k}+1,i_2}\gamma_{i_2} \sum_{j \in \mathcal{N}_{i_2}, j \neq i_1} \alpha_{i_2j}\|x_{\bar{k},j}(T) - P_H(x_{\bar{k},j}(T))\| \\
 & \leq (1 - c_{i_2}\sigma_{\bar{k}+1,i_2}w_{i_2})V_{k_0}(T) + c_{i_2}\sigma_{\bar{k}+1,i_2}\gamma_{i_2}\alpha_{i_2i_1}\rho_1 V_{k_0}(T) \\
 & \quad + c_{i_2}\sigma_{\bar{k}+1,i_2}\gamma_{i_2} \sum_{j \in \mathcal{N}_{i_2}, j \neq i_1} \alpha_{i_2j}V_{k_0}(T) \\
 & \leq [1 - c_{i_2}\sigma_{\bar{k}+1,i_2}(\gamma_{i_2}\alpha_{i_2i_1} + q_{i_2}) + c_{i_2}\sigma_{\bar{k}+1,i_2}\gamma_{i_2}\alpha_{i_2i_1}\rho_1]V_{k_0}(T) \\
 & \leq [1 - c_{i_2}\sigma_{\bar{k}+1,i_2}\gamma_{i_2}\alpha_{i_2i_1}(1 - \rho_1)]V_{k_0}(T).
 \end{aligned} \tag{38}$$

由  $c_i w_i < 1$ ,  $\sigma_{\min} \leq \sigma_{k,i} \leq 1$ , 可知  $1 - c_{i_2}\sigma_{\bar{k}+1,i_2}\gamma_{i_2}\alpha_{i_2i_1}(1 - \rho_1) \in (0, 1)$ . 根据式 (28) 和 (38), 得

$$\begin{aligned}
 & \|x_{\bar{k}+1,i_2}(T) - P_H(x_{\bar{k}+1,i_2}(T))\| \\
 & \leq \left[1 - \frac{T}{c_{i_2}}\right]\|x_{\bar{k},i_2}(T) - P_H(x_{\bar{k},i_2}(T))\| + \frac{T}{c_{i_2}}\|\tilde{u}_{\bar{k}+1,i_2} - P_H(\tilde{u}_{\bar{k}+1,i_2})\| \\
 & \leq \left[1 - \frac{T}{c_{i_2}}\right]V_{k_0}(T) + \frac{T}{c_{i_2}}[1 - c_{i_2}\sigma_{\bar{k}+1,i_2}\gamma_{i_2}\alpha_{i_2i_1}(1 - \rho_1)]V_{k_0}(T) \\
 & \leq [1 - T\sigma_{\bar{k}+1,i_2}\gamma_{i_2}\alpha_{i_2i_1}(1 - \rho_1)]V_{k_0}(T).
 \end{aligned} \tag{39}$$

类似于结论 (a) 的证明, 可得  $\rho_2 := 1 - T\sigma_{\bar{k}+1,i_2}\gamma_{i_2}\alpha_{i_2i_1}(1 - \rho_1) \in (0, 1)$ .

综合定理 4, 引理 3 和引理 4, 可得下面的结论.

**定理5** 若假设 3, 假设 4 以及假设 6 成立, 将迭代学习控制策略 (24) 应用于多智能体系统 (1). 如果下述不等式成立:

$$c_i w_i < 1, \tag{40}$$

其中  $c_i > T$ ,  $w_i = \gamma_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij} + q_i$ ,  $i \in \mathcal{S}_N$ , 那么当  $k \rightarrow \infty$  时, 所有的智能体在终端时刻收敛于凸包  $H$ , 也即  $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k(T) = 0$ .

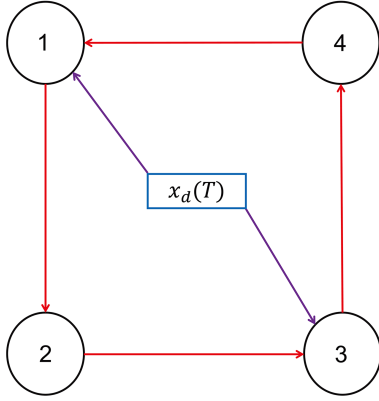


图 1 (网络版彩图) 智能体之间的通信图.

Figure 1 (Color online) Communication graph between the agents.

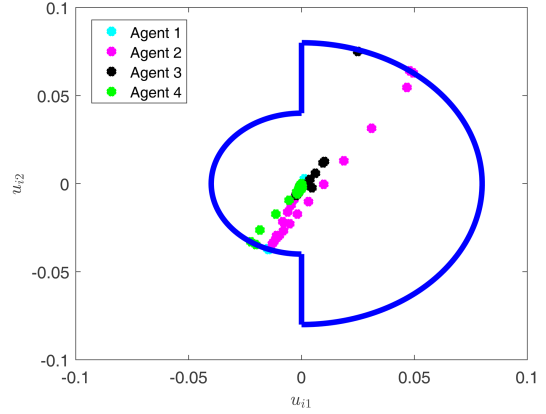


图 2 (网络版彩图) 非凸约束下一致性控制策略.

Figure 2 (Color online) Consensus control strategy under nonconvex constraints.

 表 1 各智能体的非凸控制约束系数  $\sigma_{k,i}$ .

 Table 1 Nonconvex control constraint coefficients  $\sigma_{k,i}$  for each agent.

Iteration	Agent 1	Agent 2	Agent 3	Agent 4
$k = 1$	0.0324	0.3200	0.5060	0.2879
$k = 3$	0.0346	0.4067	1.0000	0.4639
$k = 5$	0.0372	0.5811	1.0000	0.6779
$k = 7$	0.0403	1.0000	1.0000	1.0000
$k = 9$	0.0441	1.0000	1.0000	1.0000

**证明** 该定理证明类似于文献 [28] 中定理 1 的证明, 故这里省略了详细的证明过程.

**注释 4** 与已有研究 [28, 30, 31] 相比, 本文定理 4 和 5 为实现系统 (1) 的包含控制提供了另一种有效的方法和途径. 具体而言, 与文献 [28] 中的定理 1 相比, 本文定理 4 与 5 无需计算凸包  $H$  中任意两个领导者之间的最大距离. 这意味着本文结果在一定程度上能削弱收敛条件的保守性.

## 5 算例仿真

本节将通过两个数值示例来说明本文理论结果的有效性.

**例 1** 本例主要探讨一致性控制问题 (3). 针对多智能体系统 (1), 规定  $x_{k,i}(t)$ ,  $v_{k,i}$  和  $u_{k,i} \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathcal{T} = [0, T]$ , 终端时刻  $T = 5$ . 智能体之间的通信如图 1 所示, 其边权重设置为  $\alpha_{21} = \alpha_{32} = \alpha_{43} = \alpha_{14} = 0.5$ , 以及  $q_1 = q_3 = 0.2$ ,  $q_2 = q_4 = 0$ , 从而假设 2 得以满足. 令假设 3 中的参数为  $\sigma_{\min} = 0.02$ , 且设各智能体初始控制输入为  $u_{0,i} = 0, \forall i \in \mathcal{S}_N$ , 学习参数为  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0.1$ . 结合假设 4, 应用迭代学习策略 (14) 于系统 (1). 各智能体初始状态分别设为  $x_{0,1}(0) = [2, 1.5]^\dagger$ ,  $x_{0,2}(0) = [0.5, -0.5]^\dagger$ ,  $x_{0,3}(0) = [0.8, -1.2]^\dagger$  和  $x_{0,4}(0) = [1.5, 0]^\dagger$ . 终端时刻的理想状态设为  $x_d(T) = [1, -1]^\dagger$ . 参照文献 [30], 控制约束集设为  $C_i = \{(u_{i1}, u_{i2}) | [(u_{i1}^2 + u_{i2}^2 \leq r_i^2) \cap (u_{i1} \leq 0)] \cup [(u_{i1}^2 + u_{i2}^2 \leq \bar{r}_i^2) \cap (u_{i1} \geq 0)]\}$ , 其中  $r_i = 0.04$ ,  $\bar{r}_i = 0.08, \forall i \in \mathcal{S}_N$ .

通过 MatLab 程序计算, 得到各智能体的非凸约束系数 (如表 1 所示) 以及定理 1, 定理 2 和推论 1 的条件验证 (如表 2 所示). 从表 1 可知, 各智能体非凸约束系数随着迭代次数增加而变化, 且逐渐趋于 1. 这表明控制策略是满足非凸约束要求的. 同时, 由于非凸约束系数随着迭代次数变化而变化, 这使得本文中定理 1 和 2 的条件难以在每次迭代过程中都成立. 表 2 中罗列了部分迭代次数时的

表 2 定理 1、定理 2 和推论 1 中条件验证.

Table 2 Conditional verification in Theorem 1, Theorem 2 and Corollary 1.

Iteration	$\ \mathcal{I}_N - T\Lambda_{k+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)\ $	Iteration	$\ \prod_{j=k_s}^{k_{s+1}} [\mathcal{I}_N - T\Lambda_{j+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)]\ $
$k = 1$	$0.9882 < 1$	$k_s = 1, k_{s+1} = 5$	$0.9476 < 1$
$k = 5$	$1.0023 > 1$	$k_s = 2, k_{s+1} = 6$	$0.9602 < 1$
$k = 10$	$1.0179 > 1$	$k_s = 3, k_{s+1} = 10$	$0.9498 < 1$
$k = 15$	$1.0004 > 1$	$k_s = 12, k_{s+1} = 15$	$0.9849 < 1$
$k = 16$	$0.9952 < 1$	$k_s = 14, k_{s+1} = 16$	$0.9791 < 1$

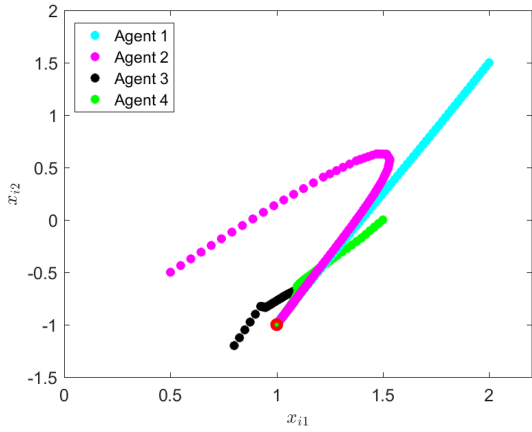


图 3 (网络版彩图) 一致性控制下的智能体状态轨迹.

Figure 3 (Color online) Agent state trajectories with the consensus control strategy.

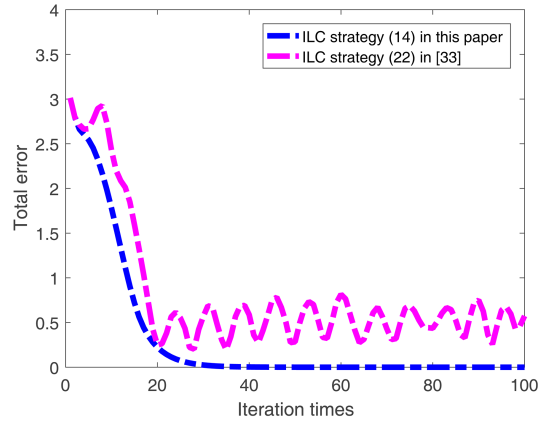


图 4 (网络版彩图) 不同 ILC 策略的一致性综合跟踪误差.

Figure 4 (Color online) Consensus aggregate tracking error with different ILC strategies.

定理条件值, 从中可看出定理 1 或定理 2 的充分性条件  $\|\mathcal{I}_N - T\Lambda_{k+1}(\Gamma\mathbb{L} + Q)\| < 1$  并不能在每一次迭代都成立, 而在选择合适的迭代序列  $k_s, \dots, k_{s+1}$  后, 推论 1 的条件总能得以满足. 这表明推论 1 的结果更具适用性和优势.

通过模拟仿真, 非凸控制约束集与各智能体控制策略如图 2 所示, 各智能体随迭代变化的状态轨迹和跟踪误差分别如图 3 和 4 所示. 图 3 代表各智能体从第 1 次迭代到第 100 次迭代的状态轨迹. 图 4 描述了智能体从第 1 次迭代到第 100 次迭代的跟踪误差. 从图 3 可知, 本文带有非凸约束的控制策略可在终端时刻实现智能体的状态一致. 定义综合跟踪误差  $e_k(T) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \|e_{k,i}(T)\|^2}$ , 图 4 则展现了本文迭代学习策略 (14) 与文献 [33] 迭代学习策略 (22) 的跟踪误差轨迹. 从图 4 中可知, 本文提出的策略 (14) 比文献 [33] 中的策略更加有效.

**例 2** 本例主要考虑包含控制问题 (4). 该例子中有 4 个领导者, 而智能体与领导者之间的通信图如图 5 所示. 各领导者终端时刻状态记为  $y_5(T)$ ,  $y_6(T)$ ,  $y_7(T)$  和  $y_8(T)$ , 其中  $y_5(T) = [0, 1]^\dagger$ ,  $y_6(T) = [0, 0]^\dagger$ ,  $y_7(T) = [0.5, 0]^\dagger$ ,  $y_8(T) = [0.5, 1]^\dagger$ . 凸包  $H$  则由 4 个领导者生成, 即  $H = \{\sum_{j=1}^4 \omega_j \cdot y_{4+j}(T) | \sum_{j=1}^4 \omega_j = 1, \omega_j \geq 0\}$ . 另外, 智能体 1 和 3 能够获取子凸包  $H_i \subseteq H$  的信息, 其中子凸包  $H_i = \{\omega_2 y_6(T) + \omega_4 y_8(T) | \omega_2 + \omega_4 = 1, \omega_2, \omega_4 \geq 0\}$ ,  $i = 1, 3$ . 这意味着智能体 1 和 3 能接收领导者 6 和 8 的信息.

与例 1 类似,  $x_{k,i}(t)$ ,  $v_{k,i}$  和  $u_{k,i} \in \mathbb{R}^2$ ,  $T = 5$ . 通信拓扑图权重为  $\alpha_{21} = \alpha_{43} = 0.5$ ,  $q_1 = q_3 = 0.1$ ,  $q_2 = q_4 = 0$ . 根据图 5 可知, 本文假设条件 6 得以满足, 且智能体间的通信图并不要求连通. 设每个智能体的初始状态为  $x_{0,1}(0) = [1, 0.5]^\dagger$ ,  $x_{0,2}(0) = [0.3, 2]^\dagger$ ,  $x_{0,3}(0) = [-1, 0.8]^\dagger$  和  $x_{0,4}(0) = [0.2, -0.5]^\dagger$ . 每

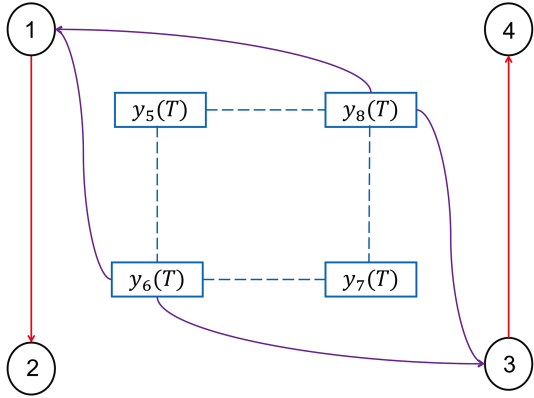


图 5 (网络版彩图) 智能体与领导者之间的通信拓扑.  
**Figure 5** (Color online) Communication topology between agents and leaders.

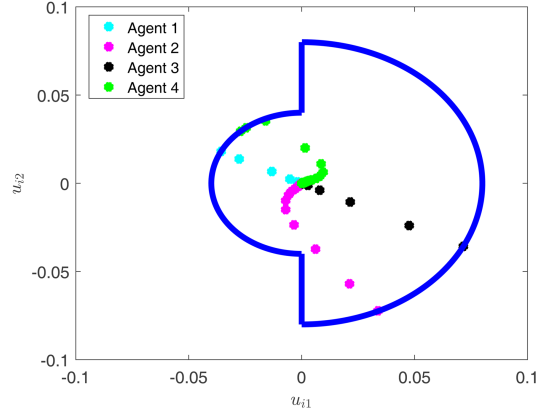


图 6 (网络版彩图) 非凸约束下包含控制策略.  
**Figure 6** (Color online) Containment control strategy under nonconvex constraints.

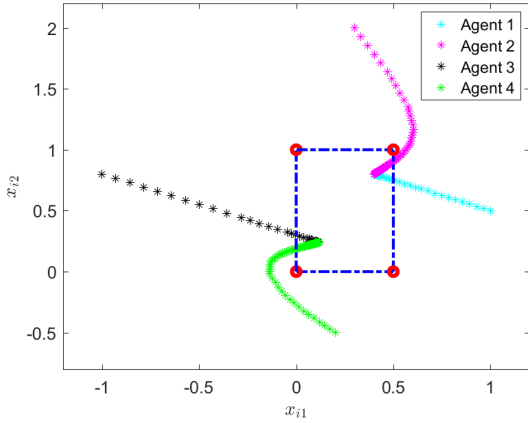


图 7 (网络版彩图) 包含控制策略下的智能体状态轨迹.  
**Figure 7** (Color online) Agent state trajectories with the containment control strategy.

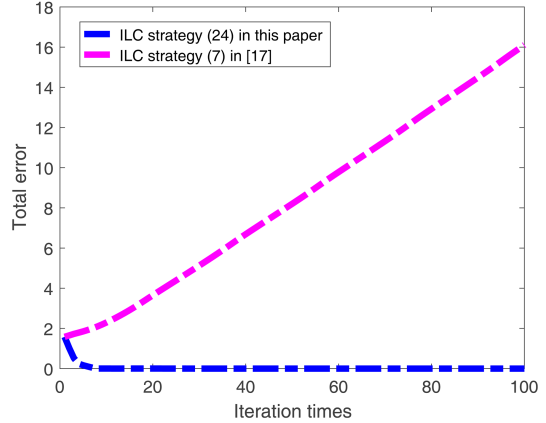


图 8 (网络版彩图) 不同 ILC 策略的包含控制综合跟踪误差.  
**Figure 8** (Color online) Aggregate tracking error of containment control with different ILC strategies.

个智能体初始控制输入为  $u_{0,i} = 0$ , 参数  $c_i = 6, \forall i \in \mathcal{S}_N$ , 学习参数  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0.1$ . 结合假设 4, 应用迭代学习策略 (24) 于系统 (1) 之中. 控制约束集合与例 1 相同, 均参照文献 [30]. 通过计算可知, 定理 4, 定理 5, 引理 3 以及引理 4 的条件均成立.

通过仿真, 包含控制中非凸约束下的控制策略如图 6 所示. 从图 6 中可知, 在迭代过程中控制策略始终满足约束限制. 图 7 则刻画了随迭代变化的每一时刻智能体状态, 随着迭代次数增加, 各智能体状态逐渐进入目标区域内. 规定  $V_k(T) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \|V_{k,i}(T)\|^2}$ , 图 8 则展现了本文迭代学习策略 (24) 与文献 [17] 中的学习策略 (7) 的综合误差曲线. 不难发现, 本文的调控方法能够较好地使综合误差收敛于零, 而已有文献结果确不能. 这表明本文策略 (24) 比文献 [17] 中的迭代学习算法更为有效.

## 6 结论

本文研究了在非凸约束条件下多智能体系统的一致性和包含控制问题. 本文首先对控制约束加以描述和分析, 结合约束算子方法, 提出了新颖的迭代学习控制策略, 进而研究非凸约束下的多智能体系

统一一致性问题. 随后, 以跟随者和领导者的终端状态构成的凸集投影作为每个智能体的跟踪目标, 本文进而提出了不同的迭代学习策略实现了非凸控制约束下多智能体系统的包含控制. 最后, 通过两个例子来说明研究结果的正确性和有效性. 相较于已有的研究成果, 本文提出的控制策略能在满足约束条件下, 更好地实现系统目标.

## 参考文献

- 1 Amirkhani A, Barshooi A H. Consensus in multi-agent systems: a review. *Artif Intell Rev*, 2022, 55: 3897–3935
- 2 Thummalapeta M, Liu Y C. Survey of containment control in multi-agent systems: concepts, communication, dynamics, and controller design. *Int J Syst Sci*, 2023, 54: 2809–2835
- 3 Yang D R, Lee K S, Ahn H J, et al. Experimental application of a quadratic optimal iterative learning control method for control of wafer temperature uniformity in rapid thermal processing. *IEEE Trans Semicond Manufact*, 2003, 16: 36–44
- 4 Chien C J, Tayebi A. Further results on adaptive iterative learning control of robot manipulators. *Automatica*, 2008, 44: 830–837
- 5 Bouakrif F, Boukhetala D, Boudjema F. Velocity observer-based iterative learning control for robot manipulators. *Int J Syst Sci*, 2013, 44: 214–222
- 6 Xiong W J, Gong K, Wen G H, et al. Security analysis of discrete nonlinear systems with injection attacks under iterative learning schemes. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2022, 52: 927–935
- 7 Yu Q X, Hou Z S, Bu X H, et al. RBFNN-based data-driven predictive iterative learning control for nonaffine nonlinear systems. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2020, 31: 1170–1182
- 8 Meng D Y, Zhang J Y. Convergence analysis of robust iterative learning control against nonrepetitive uncertainties: system equivalence transformation. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2021, 32: 3867–3879
- 9 Flores-Cerrillo J, MacGregor J F. Iterative learning control for final batch product quality using partial least squares models. *Ind Eng Chem Res*, 2005, 44: 9146–9155
- 10 Jia L, Han C, Chiu M-S. Dynamic R-parameter based integrated model predictive iterative learning control for batch processes. *J Process Control*, 2017, 49: 26–35
- 11 Lee K S, Lee J H. Iterative learning control-based batch process control technique for integrated control of end product properties and transient profiles of process variables. *J Process Control*, 2003, 13: 607–621
- 12 Wang C, Zhou Z, Dai X, et al. Iterative learning approach for consensus tracking of partial difference multi-agent systems with control delay under switching topology. *ISA Trans*, 2023, 136: 46–60
- 13 Shen D, Xu J X. Distributed learning consensus for heterogenous high-order nonlinear multi-agent systems with output constraints. *Automatica*, 2018, 97: 64–72
- 14 Yang S P, Xu J X, Huang D Q, et al. Optimal iterative learning control design for multi-agent systems consensus tracking. *Syst Control Lett*, 2014, 69: 80–89
- 15 Song Q, Meng D, Liu F. Consensus-based iterative learning of heterogeneous agents with application to distributed optimization. *Automatica*, 2022, 137: 110096
- 16 Jin X. Adaptive iterative learning control for high-order nonlinear multi-agent systems consensus tracking. *Syst Control Lett*, 2016, 89: 16–23
- 17 Hua C C, Qiu Y F, Guan X P. Event-triggered iterative learning containment control of model-free multiagent systems. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2021, 51: 7719–7726
- 18 Liu T, Hou Z S. Model-free adaptive iterative learning containment control for unknown heterogeneous nonlinear MASs with disturbances. *Neurocomputing*, 2023, 515: 121–132
- 19 Sang S Y, Zhang R K, Lin X. Model-free adaptive iterative learning bipartite containment control for multi-agent systems. *Sensors*, 2022, 22: 7115
- 20 Bu X H, Yu Q X, Hou Z S, et al. Model free adaptive iterative learning consensus tracking control for a class of nonlinear multiagent systems. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2019, 49: 677–686
- 21 Meng D Y. Convergence conditions for solving robust iterative learning control problems under nonrepetitive model uncertainties. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2019, 30: 1908–1919
- 22 Shen D, Xu J X. Distributed adaptive iterative learning control for nonlinear multiagent systems with state constraints. *Adaptive Control Signal*, 2017, 31: 1779–1807
- 23 Sebastian G, Tan Y, Oetomo D. Convergence analysis of feedback-based iterative learning control with input saturation. *Automatica*, 2019, 101: 44–52

- 24 Xu J X, Jin X. State-constrained iterative learning control for a class of MIMO systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2013, 58: 1322–1327
- 25 Liu X M, Ge S Z S, Goh C H. Formation potential field for trajectory tracking control of multi-agents in constrained space. *Int J Control*, 2017, 90: 2137–2151
- 26 Zhao Z, Shang H, Wei B. Tackling nonconvex collision avoidance constraints for optimal trajectory planning using saturation functions. *J Guidance Control Dyn*, 2022, 45: 1002–1016
- 27 Urazel B, Keskin K. A new solution approach for non-convex combined heat and power economic dispatch problem considering power loss. *Energy*, 2023, 278: 128031
- 28 Xu J H, Lin P, Cheng L, et al. Containment control with input and velocity constraints. *Automatica*, 2022, 142: 110417
- 29 Lin P, Ren W, Gao H J. Distributed velocity-constrained consensus of discrete-time multi-agent systems with nonconvex constraints, switching topologies, and delays. *IEEE Trans Automat Contr*, 2017, 62: 5788–5794
- 30 Xiong Q, Zhang Q, Lin P, et al. Containment problem for multiagent systems with nonconvex velocity constraints. *IEEE Trans Cybern*, 2021, 51: 4716–4721
- 31 Tu M Y, Mo L P, Lin P, et al. Containment control with different constraints. *IEEE Trans Control Netw Syst*, 2023, 10: 579–585
- 32 Bu X H, Liang J Q, Hou Z S, et al. Data-driven terminal iterative learning consensus for nonlinear multiagent systems with output saturation. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2021, 32: 1963–1973
- 33 Meng D Y, Jia Y M. Iterative learning approaches to design finite-time consensus protocols for multi-agent systems. *Syst Control Lett*, 2012, 61: 187–194
- 34 Meng D Y, Jia Y M, Du J P. Finite-time consensus protocols for networks of dynamic agents by terminal iterative learning. *Int J Syst Sci*, 2014, 45: 2435–2446
- 35 Sun M X. Robust convergence analysis of iterative learning control systems. *Control Theory Appl*, 1998, 15: 320–326  
[孙明轩. 迭代学习控制系统的鲁棒收敛性分析. *控制理论与应用*, 1998, 15: 320–326]

# Multi-agent systems consensus and containment analysis under nonconvex control constraints: a terminal iterative learning strategy

Zijian LUO<sup>1</sup>, Wenjun XIONG<sup>2\*</sup> & Jinde CAO<sup>3</sup>

1. *Faculty of Science, Civil Aviation Flight University of China, Chengdu 641419, China*

2. *School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China*

3. *School of Mathematics, Southeast University, Nanjing 211189, China*

\* Corresponding author. E-mail: xwenjun2@uestc.edu.cn

**Abstract** This paper aims to address the consensus and containment control problems of multi-agent systems by designing iterative learning controllers in the presence of nonconvex constraints. A difficulty in solving such problems is the lack of an efficient tool for dealing with the nonconvex constraints in distributed control. To tackle the issue, this paper proposes a novel class of iterative learning strategies in line with the nonconvex constraint operator approach. Then, we apply them in consensus analysis of multi-agent systems under the constraints. Furthermore, the containment control problem of multi-agent systems is investigated by designing terminal iterative learning strategies in the presence of nonconvex constraints where the coordination objective is to make the states of agents at the terminal time converge into the convex hull generated by those of the leaders. Under the framework of iterative learning control, combined with the contractive mapping technique and Lyapunov stability theory, some sufficient conditions are established for consensus and containment problems with terminal iterative learning strategies under nonconvex constraints. Finally, two numerical simulations are presented for illustration.

**Keywords** nonconvex constraint, terminal iterative learning control, consensus, containment control, convergence analysis