



# 随机切换和不确定目标下异质非线性多智能体系统的一致性跟踪控制

孙亚平<sup>1</sup>, 杨鑫松<sup>1\*</sup>, 苏厚胜<sup>2,3</sup>

1. 四川大学电子信息学院, 成都 610065
2. 华中科技大学人工智能与自动化学院, 武汉 430074
3. 华中科技大学图像信息处理与智能控制教育部重点实验室, 武汉 430074

\* 通信作者. E-mail: xinsongyang@scu.edu.cn

收稿日期: 2024-06-05; 修回日期: 2024-08-04; 接受日期: 2024-08-19; 网络出版日期: 2024-11-08

国家杰出青年科学基金 (批准号: 62425602)、国家自然科学基金 (批准号: 62303336, 62373262, 62273159)、四川大学与港澳高校种子基金 (切换拓扑下异质多智能体的最优输出同步与编队避障控制)、江苏省自然科学基金优秀青年基金 (批准号: BK20220104) 和四川省自然科学基金 (批准号: 2023NSFSC1433) 资助项目

**摘要** 本文探讨了不确定目标下异质非线性切换多智能体系统的一致性跟踪问题, 其中待跟踪的目标具有未知的控制输入且不受界的限定; 所采用的随机切换机制不仅考虑了转移概率, 还考虑了驻留时间. 由于目标的不确定性、非线性、异质性以及随机切换特性, 一致性跟踪问题很难直接用现有方法解决. 因此, 本文为一致性跟踪问题开发了一种新的依模态双层设计框架. 基于该框架并通过引入自由矩阵和参数提出了一个新的多重李雅普诺夫函数, 给出了异质非线性切换多智能体系统能几乎必然指数型一致性跟踪上不确定目标的条件. 最后, 通过数值仿真验证了所提控制方案的有效性.

**关键词** 多智能体系统, 一致性跟踪, 非线性, 随机切换, 不确定性

## 1 引言

一致性跟踪是多智能体系统 (multi-agent systems, MASs) 重要的协同行为. 它是导弹拦截、协同打击和协同搜救等应用中的基本问题之一. 针对该问题, 学者们已对不同模型进行了探讨, 例如低阶模型<sup>[1]</sup>、高阶模型<sup>[2]</sup>、一般线性模型<sup>[3,4]</sup> 和非线性模型<sup>[5]</sup> 等. 相比于其他模型, 非线性模型更具普遍性, 也更实用. 此外, 系统内部机制或外部环境的变化会使个体模型和个体间错综复杂的关系发生变化. 因此, 将多智能体系统建模为具有异质非线性切换特性的系统更加贴近实际.

对异质非线性切换多智能体系统的跟踪问题而言, 切换规则设计、模型构建和算法设计是重要的研究要点. 众所周知, 基于驻留时间 (dwell time, DT) 的切换是切换系统中最重要切换规则之一. 它有两种经典的 DT 切换机制: 平均驻留时间 (average dwell time, ADT) 切换<sup>[6,7]</sup> 和依模态的平均驻留

**引用格式:** 孙亚平, 杨鑫松, 苏厚胜. 随机切换和不确定目标下异质非线性多智能体系统的一致性跟踪控制. 中国科学: 信息科学, 2024, 54: 2674-2688, doi: 10.1360/SSI-2024-0168  
Sun Y P, Yang X S, Su H S. Consensus tracking control of heterogeneous nonlinear multi-agent systems with random switching and uncertain targets (in Chinese). Sci Sin Inform, 2024, 54: 2674-2688, doi: 10.1360/SSI-2024-0168

时间 (mode-dependent average dwell time, MDADT) 切换<sup>[8,9]</sup>. ADT 切换是为每一个模态赋予相同的 ADT; MDADT 切换是为每一个模态赋予不同的 ADT. 这两种切换有利于探讨不需要考虑模态间转换概率 (transition probability, TP) 的问题, 但对于包含了常用模态、紧急模态和突发模态的切换系统则不再适用. 基于这一需求, 文献 [10, 11] 的工作开发了一种名为 TP-based MDADT 切换的机制. 该切换机制同时考虑了 TP 和 DT, 且马尔可夫 (Markov) 切换和 DT 切换是它的特殊情况, 具有很好的通用性. 本文的动机之一是将该随机切换应用于异质非线性多智能体系统的一致性跟踪问题中, 以获得兼具强实用性和低保守性的结果.

在模型构建上, 目标模型的建立是极其重要的. 文献 [12~18] 的工作很好地实现了跟踪者对低阶或高阶目标的跟踪, 但是这些工作需要目标状态及其导数是有界的. 虽然这一假设可协助其获得更好的结果, 但是它同时也限制了可跟踪目标的类型. 文献 [19, 20] 将目标建模为一般系统, 但是其目标的状态仍受界的限制. 文献 [21] 虽然移除了目标状态需有界的假设, 但是其目标模型是线性的. 此外, 实际应用中, 待跟踪的目标往往具有很强的机动性, 例如多无人艇系统、多无人车系统和多无人机系统. 基于这一特征, 在建立目标模型时, 需要考虑目标控制器对其状态的影响. 然而, 现有工作 [19~21] 均忽略了目标模型的输入项, 并且对于跟踪者而言, 目标的输入信号是未知的. 因此, 有必要在考虑随机切换机制下设计一种有效的算法, 使跟踪者能成功跟踪上具有未知输入信号的不确定目标.

在算法设计上, 文献 [12~21] 中的算法均无法直接用于探讨本文的问题. 具体地, 文献 [12~20] 中的算法虽然有助于研究准一致性跟踪问题, 但是对于一致性跟踪问题则不再适用. 文献 [21] 的算法虽然探讨了一致性跟踪问题, 但是其针对线性且无控制器的目标, 故这一算法也不适用于研究本文所提出的问题. 此外, 当切换是随机的且目标具有未知的输入信号时, 算法设计的难度将极具增强. 因此, 在随机切换规则下, 跟踪具有未知输入信号的非线性切换目标且不对其状态进行界的限定是一个具有挑战性的难题.

受上述探讨启发, 本文构建了一种双层设计框架去克服随机切换、不确定目标、异质性以及非线性特征所带来的难点. 主要贡献如下:

(1) 本文首次利用 TP-based MDADT 随机切换机制探讨了不确定目标下异质非线性切换多智能体系统的一致性跟踪问题. 所采用的随机切换机制是同时考虑了 TP 和 DT 的联合切换机制, 这使得所获结果将比在 DT 切换或马尔可夫切换下所获结果具有更高的普遍性.

(2) 本文将待跟踪的目标建模为具有未知控制输入的一般非线性切换模型且不对其状态进行界的限定. 这将比低阶、高阶和一般线性的目标模型具有更强的实用性.

(3) 引入依模态自由矩阵构造的双层设计框架很好地实现了异质非线性切换多智能体系统对不确定目标的几乎必然指数型一致性跟踪. 引入自由参数和矩阵设计的多重李雅普诺夫 (Lyapunov) 函数很好地获得了几乎必然指数型一致性跟踪准则, 且通过连续型分析替换多重李雅普诺夫函数在切换时刻所进行的离散型分析降低了结果的保守性.

本文剩余部分组织如下. 第 2 节描述了本文所探讨的问题. 第 3 节构建了双层设计框架. 第 4 节给出了实现几乎必然指数型一致性跟踪的条件. 第 5 节将理论结果应用于跟踪不确定的蔡氏电路. 第 6 节对本文进行了总结.

符号说明:  $\mathbb{R}^n$  表示所有  $n$  维欧氏向量的集合;  $\mathbb{R}^{n \times m}$  表示所有  $n \times m$  维矩阵的集合;  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$  分别表示向量的 1 范数、2 范数和无穷范数.  $\mathbf{E}(\cdot)$  表示数学期望.  $\text{sgn}(\cdot)$  表示符号函数.  $I, 0$  分别表示具有合适维数的单位阵和 0 矩阵.  $\mathbb{N}^+$  表示正整数集.  $\lambda_{\max}(A)$  表示矩阵  $A$  的最大特征值.

## 2 问题阐述及准备

考虑一个时变的通信网络  $R^{\sigma(t)} = \{V, E^{\sigma(t)}, G^{\sigma(t)}\}$ , 其中,  $V = \{1, 2, \dots, N\}$  表示节点集;  $E^{\sigma(t)} = \{(i, j) | \text{节点 } i \text{ 和 } j \text{ 能相互通信}\}$  表示连边集;  $G^{\sigma(t)} = [g_{ij}^{\sigma(t)}]_{N \times N}$  表示邻接矩阵. 当  $(i, j) \in E^{\sigma(t)}$  时,  $g_{ij}^{\sigma(t)} > 0$ ; 否则,  $g_{ij}^{\sigma(t)} = 0$ . 令  $L^{\sigma(t)} = [l_{ij}^{\sigma(t)}]_{N \times N}$  表示网络的拉普拉斯矩阵, 其中,  $l_{ij}^{\sigma(t)} = -g_{ij}^{\sigma(t)}$ ,  $l_{ii}^{\sigma(t)} = \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij}^{\sigma(t)}$ .  $\sigma(t) : \mathbb{N}^+ \rightarrow \{1, 2, \dots, o\} = M_o$  表示随机的切换信号. 不失一般性, 当  $t \in [t_k, t_{k+1})$  时, 令  $\sigma(t) = m$ , 其中,  $k = 0, 1, 2, \dots, 0 = t_0 < t_1 < \dots < \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$ .

对于时变的通信网络  $R^{\sigma(t)}$ , 假设 1 是必要的.

**假设 1** ([22]) 每一个通信网络  $R^m$ ,  $m \in M_o$  都是无向连通的, 且至少有一个跟踪者能接收到目标信息.

考虑具有  $N$  个跟踪者和一个不确定目标的异质随机切换非线性多智能体系统.  $N$  个跟踪者的动态行为如下:

$$\dot{x}_i(t) = A_i^{\sigma(t)} x_i(t) + C_i^{\sigma(t)} f_i(\sigma(t), x_i(t), t) + u_i(\sigma(t), t), \quad (1)$$

其中,  $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$  和  $u_i(\sigma(t), t) \in \mathbb{R}^n$  分别表示跟踪者  $i$  的状态和控制输入;  $A_i^{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  和  $C_i^{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是常实数矩阵;  $f_i(\sigma(t), x_i(t), t) \in \mathbb{R}^n$  是一个连续的谱函数.

不确定目标的动态行为如下:

$$\dot{x}_0(t) = A_0^{\sigma(t)} x_0(t) + C_0^{\sigma(t)} f_0(\sigma(t), x_0(t), t) + u_0(\sigma(t), t), \quad (2)$$

其中,  $x_0(t) \in \mathbb{R}^n$  和  $f_0(\sigma(t), x_0(t), t) \in \mathbb{R}^n$  分别表示目标的状态和连续谱函数;  $u_0(\sigma(t), t) \in \mathbb{R}^n$  是一个满足假设 2 的未知且时变的控制输入.

**假设 2** ([23]) 未知输入信号  $u_0(\sigma(t), t)$  是一阶光滑的. 它满足如下的不等式:

$$\|u_0(\sigma(t), t)\|_{\infty} \leq r_0^{\sigma(t)}, \quad (3)$$

其中,  $r_0^{\sigma(t)} > 0$ .

特别地, 连续谱函数  $f_i(\sigma(t), x_i(t), t)$  和  $f_0(\sigma(t), x_0(t), t)$  满足假设 3.

**假设 3** ([24, 25]) 对于任意的  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , 存在常数  $\kappa_i^m > 0$  和  $m \in M_o$  使得以下不等式成立:

$$\|f_i(m, x) - f_i(m, y)\|_2 \leq \kappa_i^m \|x - y\|_2, \quad i = \{0, 1, 2, \dots, N\}. \quad (4)$$

对于随机切换信号  $\sigma(t)$ , 有必要给出如下的定义、假设和引理.

**定义 1** ([10]) 对  $\forall m, \tilde{m} \in M_o, m \neq \tilde{m}$ , 随机切换信号  $\sigma(t)$  从  $m$  模态切换为  $\tilde{m}$  模态时, TP 如下:

$$\text{Prob}\{\sigma(t_{k+1}) = \tilde{m} | \sigma(t_k) = m\} = \theta_{m\tilde{m}}, \quad (5)$$

其中,  $\theta_{mm} = 0, 0 \leq \theta_{m\tilde{m}} < 1; \Theta = [\theta_{m\tilde{m}}]_{o \times o}$  是一个行和为 1 的不可约矩阵. 它被命名为 TP 矩阵且其唯一的稳态分布  $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_o]$  满足  $\mu_m > 0, \mu\Theta = \mu$  以及所有元素的和为 1.

**假设 4** ([10]) 对  $\forall m \in M_o$ , 独立的正随机变量  $\delta_m(k)$  满足  $\mathbf{E}(\delta_m(k)) = \varepsilon_m > 0$ , 其中,  $\delta_m(k) = t_{k+1} - t_k$  是有界的驻留时间.

**引理1** ([11]) 在定义1和假设4下,对 $\forall m \in M_o$ ,下列等式成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T_m(t)}{t} = \bar{\mu}_m = \frac{\mu_m \varepsilon_m}{\sum_{\tilde{m}} \mu_{\tilde{m}} \varepsilon_{\tilde{m}}}, \quad \text{a.s.}, \quad (6)$$

其中,  $T_m(t)$  表示在时间区间  $[0, t]$  内,  $m$  模态被激活的总时间.

本文致力于设计一个能观测不确定目标状态的分布式观测器,一个能使跟踪者成功跟踪上异质不确定目标的分布式控制器,一个能推导出一致性跟踪条件的依模态李雅普诺夫函数.特别地,几乎必然指数型一致性跟踪的定义如下.

**定义2** 如果  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \left( \frac{\ln \mathbb{E} \|\tilde{\Gamma}(t)\|}{t} \right) < 0$ , 那么非线性异质切换多智能体系统 (1) 和不确定目标 (2) 就实现了几乎必然指数型一致性跟踪. 第4节将对新变量  $\tilde{\Gamma}(t)$  进行设计.

本文中,假设1描述了个体间的相互通信;假设2对目标的输入信号进行了说明;假设3是著名的李普希茨条件;假设4对各模态驻留时间的期望值进行了设定.对于假设1~4,在实际应用中,个体间的相互通信可人为设置,目标的输入信号有界且不可能时时刻刻突变,许多实际系统的非线性项都满足李普希茨条件,以及各模态驻留时间的期望值是可以根据经验数据而给出的.因此,本文的假设均可在实际应用中得到满足.

### 3 双层设计框架

对于跟踪者 (1) 和不确定目标 (2),很难通过设计简单的控制器实现跟踪者对不确定目标的一致性跟踪.因此,受工作 [23] 的启发,本节构建了一个能使跟踪者成功跟踪上异质不确定目标的双层设计框架.该框架第一层设计了一组分布式观测器,第二层设计了一组分布式控制器.其中,设计的观测器可分布式观测不确定目标的状态,设计的控制器可使得跟踪者状态,观测器状态以及不确定目标状态逐渐趋于一致.具体地,第3.1和3.2小节分别对观测器和控制器进行了设计.

#### 3.1 分布式观测器设计

通过引入依模态的自由矩阵  $H^{\sigma(t)}$  和  $P^{\sigma(t)}$  设计如下的分布式观测器:

$$\begin{aligned} \dot{s}_{0,i}(t) = & A_0^{\sigma(t)} s_{0,i}(t) + \gamma^{\sigma(t)} H^{\sigma(t)} \left( \sum_{j=1}^N g_{ij}^{\sigma(t)} (s_{0,j}(t) - s_{0,i}(t)) + d_i^{\sigma(t)} (x_0(t) - s_{0,i}(t)) \right) \\ & + r_0^{\sigma(t)} \operatorname{sgn} \left( P^{\sigma(t)} \left( \sum_{j=1}^N g_{ij}^{\sigma(t)} (s_{0,j}(t) - s_{0,i}(t)) + d_i^{\sigma(t)} (x_0(t) - s_{0,i}(t)) \right) \right) \\ & + C_0^{\sigma(t)} f_0(\sigma(t), s_{0,i}(t), t), \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $s_{0,i}(t)$  表示跟踪者  $i$  对目标状态的估计值;  $d_i^{\sigma(t)} > 0$  表示跟踪者  $i$  能接收到目标信息; 否则,  $d_i^{\sigma(t)} = 0$ . 令  $D^{\sigma(t)} = \operatorname{diag}(d_1^{\sigma(t)}, \dots, d_N^{\sigma(t)})$ . 在假设1下,很容易证实矩阵  $L_D^{\sigma(t)} = D^{\sigma(t)} + L^{\sigma(t)}$  的所有特征值都为正实数. 观测器 (7) 中,  $A_0^{\sigma(t)} s_{0,i}(t)$  和  $C_0^{\sigma(t)} f_0(\sigma(t), s_{0,i}(t), t)$  旨在追踪目标 (2) 的本征项;  $\gamma^{\sigma(t)} H^{\sigma(t)} (\sum_{j=1}^N g_{ij}^{\sigma(t)} (s_{0,j}(t) - s_{0,i}(t)) + d_i^{\sigma(t)} (x_0(t) - s_{0,i}(t)))$  旨在降低目标观测状态和目标真实状态间的差值;  $r_0^{\sigma(t)} \operatorname{sgn}(P^{\sigma(t)} (\sum_{j=1}^N g_{ij}^{\sigma(t)} (s_{0,j}(t) - s_{0,i}(t)) + d_i^{\sigma(t)} (x_0(t) - s_{0,i}(t))))$  旨在处理由目标未知输入信号所引起的不可预测型变化.

### 3.2 分布式控制器设计

通过利用观测器状态  $s_{0,i}(t)$  并引入反馈增益矩阵  $K_i^{\sigma(t)}$  设计如下的分布式控制器:

$$\begin{aligned} u_i(t) = & B_i^{\sigma(t)} K_i^{\sigma(t)} (s_{0,i}(t) - x_i(t)) - (A_i^{\sigma(t)} - A_0^{\sigma(t)}) s_{0,i}(t) - C_i^{\sigma(t)} f_i(\sigma(t), s_{0,i}(t), t) \\ & + r_0^{\sigma(t)} \operatorname{sgn} \left( P^{\sigma(t)} \left( \sum_{j=1}^N g_{ij}^{\sigma(t)} (s_{0,j}(t) - s_{0,i}(t)) + d_i^{\sigma(t)} (x_0(t) - s_{0,i}(t)) \right) \right) \\ & + C_0^{\sigma(t)} f_0(\sigma(t), s_{0,i}(t), t), \end{aligned} \quad (8)$$

其中,  $B_i^{\sigma(t)}$  是权重矩阵;  $K_i^{\sigma(t)}$  是待设计的反馈增益矩阵. 控制器 (8) 中,  $B_i^{\sigma(t)} K_i^{\sigma(t)} (s_{0,i}(t) - x_i(t))$  致力于减小跟踪者状态值和目标估计值之间的差异;  $-(A_i^{\sigma(t)} - A_0^{\sigma(t)}) s_{0,i}(t) - C_i^{\sigma(t)} f_i(\sigma(t), s_{0,i}(t), t) + C_0^{\sigma(t)} f_0(\sigma(t), s_{0,i}(t), t)$  旨在降低模型异质特征对实现一致性的不利作用;  $r_0^{\sigma(t)} \operatorname{sgn} (P^{\sigma(t)} (d_i^{\sigma(t)} (x_0(t) - s_{0,i}(t)) + \sum_{j=1}^N g_{ij}^{\sigma(t)} (s_{0,j}(t) - s_{0,i}(t))))$  旨在处理由目标未知输入信号所引起的不可预测型变化.

## 4 一致性跟踪证明

本节给出了实现几乎必然指数型一致性跟踪的条件. 在此之前, 需建立误差系统并对其进行分析.

令  $\Gamma_i(t) = x_i(t) - s_{0,i}(t)$ ,  $\hat{\Gamma}_i(t) = s_{0,i}(t) - x_0(t)$ . 结合跟踪者动态模型 (1) 和分布式观测器 (7), 可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_i(t) = & (A_i^{\sigma(t)} - B_i^{\sigma(t)} K_i^{\sigma(t)}) \Gamma_i(t) + C_i^{\sigma(t)} (f_i(\sigma(t), x_i(t), t) - f_i(\sigma(t), s_{0,i}(t), t)) \\ & - \gamma^{\sigma(t)} H^{\sigma(t)} \left( \sum_{j=1}^N g_{ij}^{\sigma(t)} (\hat{\Gamma}_j(t) - \hat{\Gamma}_i(t)) - d_i^{\sigma(t)} \hat{\Gamma}_i(t) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

构建如下形式的组合变量:

$$\begin{aligned} \Gamma(t) = & [\Gamma_1^T(t), \Gamma_2^T(t), \dots, \Gamma_N^T(t)]^T, \hat{\Gamma}(t) = [\hat{\Gamma}_1^T(t), \hat{\Gamma}_2^T(t), \dots, \hat{\Gamma}_N^T(t)]^T, \\ \mathbf{f}(t) = & [f_1(\sigma(t), x_1(t), t)^T, \dots, f_N(\sigma(t), x_N(t), t)^T]^T, \\ \bar{\mathbf{f}}(t) = & [f_1(\sigma(t), s_{0,1}(t), t)^T, \dots, f_N(\sigma(t), s_{0,N}(t), t)^T], \\ \mathbf{A}_k^{\sigma(t)} = & \operatorname{blkdiag}(A_1^{\sigma(t)} - B_1^{\sigma(t)} K_1^{\sigma(t)}, \dots, A_N^{\sigma(t)} - B_N^{\sigma(t)} K_N^{\sigma(t)}), \\ \mathbf{C}^{\sigma(t)} = & \operatorname{blkdiag}(C_1^{\sigma(t)}, \dots, C_N^{\sigma(t)}). \end{aligned} \quad (10)$$

将组合变量 (10) 代入误差模型 (9), 可以导出:

$$\dot{\Gamma}(t) = \mathbf{A}_k^{\sigma(t)} \Gamma(t) + \mathbf{C}^{\sigma(t)} (\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t)) + \gamma^{\sigma(t)} (L_D^{\sigma(t)} \otimes H^{\sigma(t)}) \hat{\Gamma}(t). \quad (11)$$

结合不确定目标模型 (2) 和分布式观测器 (7), 可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\Gamma}}_i(t) = & A_0^{\sigma(t)} \hat{\Gamma}_i(t) + \gamma^{\sigma(t)} H^{\sigma(t)} \left( \sum_{j=1}^N g_{ij}^{\sigma(t)} (\hat{\Gamma}_j(t) - \hat{\Gamma}_i(t)) - d_i^{\sigma(t)} \hat{\Gamma}_i(t) \right) \\ & + C_0^{\sigma(t)} (f_0(\sigma(t), s_{0,i}(t), t) - f_0(\sigma(t), x_0(t), t)) - u_0(\sigma(t), t)) \\ & + r_0^{\sigma(t)} \operatorname{sgn} \left( P^{\sigma(t)} \left( \sum_{j=1}^N g_{ij}^{\sigma(t)} (\hat{\Gamma}_j(t) - \hat{\Gamma}_i(t)) - d_i^{\sigma(t)} \hat{\Gamma}_i(t) \right) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

构建下列组合变量:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0(t) &= \mathbf{1}_N \otimes f_0(\sigma(t), x_0(t), t), U_0(t) = \mathbf{1}_N \otimes u_0(\sigma(t), t), \\ \bar{\mathbf{f}}_0(t) &= [f_0(\sigma(t), s_{0,1}(t), t)^T, \dots, f_0(\sigma(t), s_{0,N}(t), t)^T]^T. \end{aligned} \quad (13)$$

将组合变量 (13) 代入误差模型 (12), 可以导出:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\Gamma}}(t) &= (I \otimes A_0^{\sigma(t)} - \gamma^{\sigma(t)}(L_D^{\sigma(t)} \otimes H^{\sigma(t)}))\hat{\Gamma}(t) + (I \otimes C_0^{\sigma(t)})(\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t)) \\ &\quad - r_0^{\sigma(t)} \text{sgn}((L_D^{\sigma(t)} \otimes P^{\sigma(t)})\hat{\Gamma}(t)) - U_0(t). \end{aligned} \quad (14)$$

根据上述分析, 我们可以得到定理 1.

**定理 1** 基于假设 1~4, 分布式观测器 (7) 和分布式控制器 (8), 如果在给定的矩阵  $H^m, K_i^m$ , 正常数  $a^m, \gamma^m$ , 和任意的参数  $m \in M_o$  下, 存在正定矩阵  $P^m, Q^m$  和正参数  $\alpha_0^m, \alpha^m, \beta_2^m$  使得如下的不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1^m & L_D^m \otimes P^m C_0^m \\ * & -\alpha_0^m I \end{bmatrix} < 0, \quad (15a)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_2^m & (I \otimes Q^m) C^m \\ * & -\alpha^m I \end{bmatrix} < 0, \quad (15b)$$

其中,  $\Phi_1^m = a^m L_D^m \otimes P^m + L_D^m \otimes (P^m A_0^m + (A_0^m)^T P^m) + \gamma^m \beta_2^m L_D^m \otimes I + \alpha_0^m (\kappa_0^m)^2 I - \gamma^m ((L_D^m)^2 \otimes (P^m H^m + (H^m)^T P^m))$ ,  $\Phi_2^m = a^m I \otimes Q^m + (I \otimes Q^m) \mathbf{A}_k^m + (\mathbf{A}_k^m)^T (I \otimes Q^m) + \alpha^m \text{diag}([\kappa_1^m]^2, \dots, [\kappa_N^m]^2) \otimes I + \gamma^m L_D^m \otimes Q^m$ ,  $\beta_2^m \geq \lambda_{\max}(Q^m)$ . 那么, 在随机切换信号 (定义 1) 下, 非线性多智能体系统 (1) 和 (2) 实现了几乎必然指数型一致性跟踪.

**证明** 结合误差系统 (11) 和 (14), 引入依模态的正定矩阵  $Q^{\sigma(t)}$  和正常数  $\omega$ , 构造如下的李雅普诺夫函数:

$$V(\hat{\Gamma}(t), \Gamma(t), t) = V_1(\hat{\Gamma}(t), t) + V_2(\Gamma(t), t), \quad (16)$$

其中,

$$\begin{aligned} V_1(\hat{\Gamma}(t), t) &= \hat{\Gamma}^T(t)(L_D^{\sigma(t)} \otimes P^{\sigma(t)})\hat{\Gamma}(t), \\ V_2(\Gamma(t), t) &= \omega \Gamma^T(t)(I \otimes Q^{\sigma(t)})\Gamma(t). \end{aligned} \quad (17)$$

当  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , 即  $\sigma(t) = m$  时, 可以得到:

$$\dot{V}_1(\hat{\Gamma}(t), t) = 2\hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m)\dot{\hat{\Gamma}}(t). \quad (18)$$

将误差系统 (14) 代入 (18), 可以推导出:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\hat{\Gamma}(t), t) &= 2\hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m)(I \otimes A_0^m - \gamma^m(L_D^m \otimes H^m))\hat{\Gamma}(t) \\ &\quad + 2\hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m)(I \otimes C_0^m)(\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t)) \\ &\quad - 2r_0^m \hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m) \text{sgn}((L_D^m \otimes P^m)\hat{\Gamma}(t)) \\ &\quad - 2\hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m)U_0(t). \end{aligned} \quad (19)$$

为了推导出  $\dot{V}_1(\hat{\Gamma}(t), t) \leq -a^m V_1(\hat{\Gamma}(t), t)$ , 公式 (19) 的右边需要引入  $-a^m V_1(\hat{\Gamma}(t), t)$ . 利用符号函数的性质并代入零项  $-a^m V_1(\hat{\Gamma}(t), t) + a^m \hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m)\hat{\Gamma}(t) = 0$ , 公式 (19) 可以写为:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\hat{\Gamma}(t), t) = & 2\hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m A_0^m - \gamma^m (L_D^m)^2 \otimes P^m H^m)\hat{\Gamma}(t) \\ & + 2\hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m C_0^m)(\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t) - 2r_0^m \|(L_D^m \otimes P^m)\hat{\Gamma}(t)\|_1) \\ & - 2\hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m)U_0(t) - a^m V_1(\hat{\Gamma}(t), t) + a^m \hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m)\hat{\Gamma}(t). \end{aligned} \quad (20)$$

基于假设 2 和公式 (20), 可以推导出:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\hat{\Gamma}(t), t) \leq & 2\hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m A_0^m - \gamma^m (L_D^m)^2 \otimes P^m H^m)\hat{\Gamma}(t) \\ & + 2\hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m C_0^m)(\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t)) \\ & - a^m V_1(\hat{\Gamma}(t), t) + a^m \hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m)\hat{\Gamma}(t). \end{aligned} \quad (21)$$

在假设 3 下, 引入正参数  $\alpha_0^m$  可得:

$$\alpha_0^m (\kappa_0^m)^2 \hat{\Gamma}^T(t)\hat{\Gamma}(t) - \alpha_0^m (\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t))^T (\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t)) \geq 0. \quad (22)$$

结合公式 (21) 和公式 (22) 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\hat{\Gamma}(t), t) \leq & 2\hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m A_0^m - \gamma^m (L_D^m)^2 \otimes P^m H^m)\hat{\Gamma}(t) + \alpha_0^m (\kappa_0^m)^2 \hat{\Gamma}^T(t)\hat{\Gamma}(t) \\ & - \alpha_0^m (\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t))^T (\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t)) + 2\hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m C_0^m)(\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t)) \\ & - a^m V_1(\hat{\Gamma}(t), t) + a^m \hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m)\hat{\Gamma}(t). \end{aligned} \quad (23)$$

下面将讨论  $V_2(\Gamma(t), t)$ . 首先, 结合公式 (17) 可得:

$$\dot{V}_2(\Gamma(t), t) = 2\omega \Gamma^T(t)(I \otimes Q^m)\dot{\Gamma}(t). \quad (24)$$

将误差系统 (11) 代入 (24), 可以推导出:

$$\dot{V}_2(\Gamma(t), t) = 2\omega \Gamma^T(t)(I \otimes Q^m)(\mathbf{A}_k^m \Gamma(t) + \mathbf{C}^m(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t)) + \gamma^m (L_D^m \otimes H^m)\hat{\Gamma}(t)). \quad (25)$$

同样地, 为了推导出  $\dot{V}_2(\Gamma(t), t) \leq -a^m V_2(\Gamma(t), t)$ , 公式 (25) 的右边需要引入  $-a^m V_2(\Gamma(t), t)$ . 因为  $-a^m V_2(\Gamma(t), t) + a^m \omega \Gamma^T(t)(I \otimes Q^m)\Gamma(t) = 0$ , 故公式 (25) 等价于:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\Gamma(t), t) = & 2\omega \Gamma^T(t)(I \otimes Q^m)\mathbf{A}_k^m \Gamma(t) + 2\omega \Gamma^T(t)(I \otimes Q^m)\mathbf{C}^m(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t)) \\ & + 2\gamma^m \omega \Gamma^T(t)(I \otimes Q^m)(L_D^m \otimes H^m)\hat{\Gamma}(t) \\ & - a^m V_2(\Gamma(t), t) + a^m \omega \Gamma^T(t)(I \otimes Q^m)\Gamma(t). \end{aligned} \quad (26)$$

在假设 3 下, 引入正参数  $\alpha^m$  可得:

$$\alpha^m \omega \Gamma^T(t)(\text{diag}([\kappa_1^m]^2, \dots, [\kappa_N^m]^2]) \otimes I)\Gamma(t) - \alpha^m \omega (\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t))^T (\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t)) \geq 0. \quad (27)$$

结合公式 (26) 和公式 (27), 可以推导出:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\Gamma(t), t) \leq & 2\omega \Gamma^T(t)(I \otimes Q^m)\mathbf{A}_k^m \Gamma(t) + 2\omega \Gamma^T(t)(I \otimes Q^m)\mathbf{C}^m(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t)) \\ & + \alpha^m \omega \Gamma^T(t)(\text{diag}([\kappa_1^m]^2, \dots, [\kappa_N^m]^2]) \otimes I)\Gamma(t) \\ & - \alpha^m \omega (\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t))^T (\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t)) \\ & + 2\gamma^m \omega \Gamma^T(t)(I \otimes Q^m)(L_D^m \otimes H^m)\hat{\Gamma}(t) \\ & - a^m V_2(\Gamma(t), t) + a^m \omega \Gamma^T(t)(I \otimes Q^m)\Gamma(t). \end{aligned} \quad (28)$$

利用杨氏不等式, 对公式 (28) 的右边进行放缩, 可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\Gamma(t), t) \leq & 2\omega\Gamma^T(t)(I \otimes Q^m)\mathbf{A}_k^m\Gamma(t) + 2\omega\Gamma^T(t)(I \otimes Q^m)\mathbf{C}^m(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t)) \\ & + \alpha^m\omega\Gamma^T(t)(\text{diag}([\kappa_1^m]^2, \dots, [\kappa_N^m]^2]) \otimes I)\Gamma(t) - \alpha^m\omega(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t))^T(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t)) \\ & + \gamma^m\omega\Gamma^T(t)((L_D^m \otimes Q^m)\Gamma(t) + \gamma^m\omega\hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes (H^m)^T Q^m H^m)\hat{\Gamma}(t) \\ & - a^m V_2(\Gamma(t), t) + a^m\omega\Gamma^T(t)(I \otimes Q^m)\Gamma(t). \end{aligned} \quad (29)$$

令  $\beta_1^m \geq \lambda_{\max}((H^m)^T H^m)$ ,  $\beta_2^m \geq \lambda_{\max}(Q^m)$ , 且  $\omega \leq \frac{1}{\beta_1^m}$ . 将公式 (23) 和 (29) 代入公式 (16) 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{\Gamma}(t), \Gamma(t), t) \leq & \hat{\Gamma}^T(t)(2L_D^m \otimes P^m A_0^m - 2\gamma^m(L_D^m)^2 \otimes P^m H^m + \alpha_0^m(\kappa_0^m)^2 I + a^m L_D^m \otimes P^m \\ & + \beta_2^m \gamma^m L_D^m \otimes I)\hat{\Gamma}(t) - \alpha_0^m(\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t))^T(\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t)) \\ & + 2\hat{\Gamma}^T(t)(L_D^m \otimes P^m C_0^m)(\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t)) \\ & + \omega\Gamma^T(t)(2(I \otimes Q^m)\mathbf{A}_k^m + \alpha^m \text{diag}([\kappa_1^m]^2, \dots, [\kappa_N^m]^2]) \otimes I \\ & + \gamma^m(L_D^m \otimes Q^m) + a^m(I \otimes Q^m))\Gamma(t) \\ & + 2\omega\Gamma^T(t)(I \otimes Q^m)\mathbf{C}^m(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t)) - \alpha^m\omega(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t))^T(\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t)) \\ & - a^m V(\hat{\Gamma}(t), \Gamma(t), t). \end{aligned} \quad (30)$$

当条件 (15) 成立时, 公式 (30) 可以写为

$$\dot{V}(\hat{\Gamma}(t), \Gamma(t), t) \leq -a^m V(\hat{\Gamma}(t), \Gamma(t), t), \quad (31)$$

即:

$$\frac{d(\ln \mathbf{E}\{V(\hat{\Gamma}(t), \Gamma(t), t)\})}{dt} \leq -a^\sigma(t). \quad (32)$$

不等式 (32) 等价于以下不等式:

$$\frac{\ln \mathbf{E}\{V(\hat{\Gamma}(t), \Gamma(t), t)\}}{t} \leq \frac{\ln \mathbf{E}\{V(\hat{\Gamma}(0), \Gamma(0), 0)\}}{t} - \frac{1}{t} \int_0^t a^\sigma(s) ds. \quad (33)$$

对公式 (33) 两边取极限得:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbf{E}\{V(\hat{\Gamma}(t), \Gamma(t), t)\}}{t} \leq \underbrace{-\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a^\sigma(s) ds}_{\text{Term}}. \quad (34)$$

利用引理 1 可得:

$$\text{Term} = - \sum_{m=1}^r a_m \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{T_m(t)}{t} = - \sum_{m=1}^o a_m \bar{\mu}_m, \quad \text{a.s.} \quad (35)$$

考虑  $a_m > 0$ , 结合公式 (34) 和公式 (35), 可以推导出:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbf{E}\{V(\hat{\Gamma}(t), \Gamma(t), t)\}}{t} < 0, \quad \text{a.s.} \quad (36)$$

通过对公式 (36) 进行简单的推理可得:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbf{E}\|\hat{\Gamma}(t)\|}{t} < 0, \quad \text{a.s.}, \quad (37)$$



其中,  $\tilde{\Gamma}(t) = [\hat{\Gamma}^T(t), \Gamma^T(t)]^T$ .

至此, 在随机切换信号 (定义 1), 分布式观测器 (7) 和分布式控制器 (8) 下, 异质非线性多智能体系统 (1) 和 (2) 实现了几乎必然指数型一致性跟踪. 证明完毕.

接下来, 本文将给出一个包含增益矩阵设计的结果. 在此之前, 我们需要引入如下的组合变量:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^m &= \text{blkdiag}(A_1^m, \dots, A_N^m); \mathbf{B}^m = \text{blkdiag}(B_1^m, \dots, B_N^m); \\ \mathbf{J}^m &= \text{blkdiag}(J_1^m, \dots, J_N^m); \mathbf{F}^m = \text{blkdiag}(F_1^m, \dots, F_N^m). \end{aligned} \quad (38)$$

**定理2** 在假设 1~4, 分布式观测器 (7), 分布式控制器 (8), 观测器增益矩阵  $H^m = (P^m)^{-1}Y^m$  和控制器增益矩阵  $K_i^m = (J_i^m)^{-1}F_i^m$  下, 如果在给定的正常数  $a^m, \gamma^m, \rho^m$  和任意的参数  $m \in M_o$  下, 存在正定矩阵  $P^m, Q^m, Y^m, J_i^m, F_i^m$  和正参数  $\alpha_0^m, \alpha^m, \beta_2^m$  使得如下的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Phi_3^m & L_D^m \otimes P^m C_0^m \\ * & -\alpha_0^m I \end{bmatrix} < 0, \quad (39a)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_4^m & (I \otimes Q^m) \mathbf{C}^m & \Phi_5^m & \rho^m (\mathbf{F}^m)^T \\ * & -\alpha^m I & 0 & 0 \\ * & * & -\mathbf{J}^m & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{J}^m \end{bmatrix} < 0, \quad (39b)$$

其中,  $\Phi_3^m = a^m L_D^m \otimes P^m + L_D^m \otimes (P^m A_0^m + (A_0^m)^T P^m) + \gamma^m \beta_2^m L_D^m \otimes I + \alpha_0^m (\kappa_0^m)^2 I - \gamma^m (L_D^m)^2 \otimes (Y^m + (Y^m)^T)$ ,  $\Phi_4^m = a^m I \otimes Q^m + (I \otimes Q^m) \mathbf{A}^m + (\mathbf{A}^m)^T (I \otimes Q^m) + \alpha^m \text{diag}([\kappa_1^m]^2, \dots, [\kappa_N^m]^2) \otimes I + \gamma^m L_D^m \otimes Q^m - \mathbf{B}^m \mathbf{F}^m - (\mathbf{B}^m \mathbf{F}^m)^T$ ,  $\Phi_5^m = \frac{1}{\rho^m} (\mathbf{B}^m \mathbf{J}^m - (I \otimes Q^m) \mathbf{B}^m)$ ,  $\beta_2^m \geq \lambda_{\max}(Q^m)$ , 那么, 在随机切换信号 (定义 1) 下, 异质非线性多智能体系统 (1) 和 (2) 实现了几乎必然指数型一致性跟踪.

**证明** 将观测器增益矩阵  $H^m = (P^m)^{-1}Y^m$ , 控制器增益矩阵  $K_i^m = (J_i^m)^{-1}F_i^m$  和组合变量  $\mathbf{A}_k^m$  代入公式 (30) 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{\Gamma}(t), \Gamma(t), t) &\leq \hat{\Gamma}^T(t) (2L_D^m \otimes P^m A_0^m - 2\gamma^m (L_D^m)^2 \otimes Y^m + \alpha_0^m (\kappa_0^m)^2 I + a^m L_D^m \otimes P^m \\ &\quad + \beta_2^m \gamma^m L_D^m \otimes I) \hat{\Gamma}(t) - \alpha_0^m (\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t))^T (\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t)) \\ &\quad + 2\hat{\Gamma}^T(t) (L_D^m \otimes P^m C_0^m) (\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t)) \\ &\quad + \omega \Gamma^T(t) (2(I \otimes Q^m) \mathbf{A}^m - 2(I \otimes Q^m) (\mathbf{B}^m (\mathbf{J}^m)^{-1} \mathbf{F}^m)) \\ &\quad + \alpha^m \text{diag}([\kappa_1^m]^2, \dots, [\kappa_N^m]^2) \otimes I + \gamma^m (L_D^m \otimes Q^m) + a^m (I \otimes Q^m) \Gamma(t) \\ &\quad + 2\omega \Gamma^T(t) (I \otimes Q^m) \mathbf{C}^m (\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t)) - \alpha^m \omega (\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t))^T (\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t)) \\ &\quad - a^m V(\hat{\Gamma}(t), \Gamma(t), t). \end{aligned} \quad (40)$$

令  $(I \otimes Q^m) (\mathbf{B}^m (\mathbf{J}^m)^{-1} \mathbf{F}^m) + (\mathbf{B}^m (\mathbf{J}^m)^{-1} \mathbf{F}^m)^T (I \otimes Q^m) = \text{sym}[(I \otimes Q^m) (\mathbf{B}^m (\mathbf{J}^m)^{-1} \mathbf{F}^m)]$ , 可以推导出:

$$-\text{sym}[(I \otimes Q^m) (\mathbf{B}^m (\mathbf{J}^m)^{-1} \mathbf{F}^m)] = \text{sym}[(\mathbf{B}^m \mathbf{J}^m - (I \otimes Q^m) \mathbf{B}^m) (\mathbf{J}^m)^{-1} \mathbf{F}^m - \mathbf{B}^m \mathbf{F}^m]. \quad (41)$$

通过引入正参数  $\rho^m$  以及利用杨氏不等式, 进一步推导公式 (41) 可得

$$\begin{aligned} & \text{sym}[(\mathbf{B}^m \mathbf{J}^m - (I \otimes Q^m) \mathbf{B}^m)(\mathbf{J}^m)^{-1} \mathbf{F}^m - \mathbf{B}^m \mathbf{F}^m] \\ & \leq \frac{1}{(\rho^m)^2} (\mathbf{B}^m \mathbf{J}^m - (I \otimes Q^m) \mathbf{B}^m)(\mathbf{J}^m)^{-1} (\mathbf{B}^m \mathbf{J}^m - (I \otimes Q^m) \mathbf{B}^m)^T \\ & \quad + (\rho^m)^2 (\mathbf{F}^m)^T (\mathbf{J}^m)^{-1} \mathbf{F}^m - \text{sym}[\mathbf{B}^m \mathbf{F}^m]. \end{aligned} \quad (42)$$

将公式 (42) 代入 (40) 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{\Gamma}(t), \Gamma(t), t) & \leq \hat{\Gamma}^T(t) (2L_D^m \otimes P^m A_0^m - 2\gamma^m (L_D^m)^2 \otimes Y^m + \alpha_0^m (\kappa_0^m)^2 I + a^m L_D^m \otimes P^m \\ & \quad + \beta_2^m \gamma^m L_D^m \otimes I) \hat{\Gamma}(t) - \alpha_0^m (\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t))^T (\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t)) \\ & \quad + 2\hat{\Gamma}^T(t) (L_D^m \otimes P^m C_0^m) (\bar{\mathbf{f}}_0(t) - \mathbf{f}_0(t)) \\ & \quad + \omega \Gamma^T(t) (2(I \otimes Q^m) \mathbf{A}^m + (\rho^m)^2 (\mathbf{F}^m)^T (\mathbf{J}^m)^{-1} \mathbf{F}^m - \text{sym}[\mathbf{B}^m \mathbf{F}^m]) \\ & \quad + \frac{1}{(\rho^m)^2} (\mathbf{B}^m \mathbf{J}^m - (I \otimes Q^m) \mathbf{B}^m)(\mathbf{J}^m)^{-1} (\mathbf{B}^m \mathbf{J}^m - (I \otimes Q^m) \mathbf{B}^m)^T \\ & \quad + \alpha^m \text{diag}([\kappa_1^m]^2, \dots, [\kappa_N^m]^2) \otimes I + \gamma^m (L_D^m \otimes Q^m) + a^m (I \otimes Q^m) \Gamma(t) \\ & \quad + 2\omega \Gamma^T(t) (I \otimes Q^m) \mathbf{C}^m (\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t)) - \alpha^m \omega (\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t))^T (\mathbf{f}(t) - \bar{\mathbf{f}}(t)) \\ & \quad - a^m V(\hat{\Gamma}(t), \Gamma(t), t). \end{aligned} \quad (43)$$

利用舒尔补 (Schur) 定理, 并在条件 (39) 下, 进一步估计公式 (43) 可得:

$$\dot{V}(\hat{\Gamma}(t), \Gamma(t), t) \leq -a^m V(\hat{\Gamma}(t), \Gamma(t), t). \quad (44)$$

证明的余下部分类似于定理 1. 至此, 证明完毕.

本文在新设计的李雅普诺夫函数 (16) 中引入了自由参数  $\omega$  以及在证明过程中引入了自由参数  $\rho^m$ , 它们均有助于本文获得可行的线性矩阵不等式条件. 即, 本文通过引入它们降低了所获条件的保守性. 此外, 为了进一步分析理论 1 和 2 的优势, 本文与现有的研究成果进行了差异性对比. 在切换规则上, 本文采用了一种更为一般的切换方式, 即 TP-based MDADT 切换. 相比于基于 DT 切换或马尔可夫切换所获得的结果, 本文的结果更具普适性. 在目标模型上, 本文考虑了具有非线性切换异质特征的一般性模型, 且输入信号对于跟踪者而言是未知的, 以及目标状态不受界的限制, 而文献 [12, 13, 15] 关注于低阶目标, 文献 [14, 16~18] 则对高阶目标感兴趣. 虽然文献 [19~21] 致力于追踪一般性目标, 但文献 [19, 21] 侧重于探讨无控制输入且无切换特征的一般线性系统, 即  $\dot{x}_0 = A_0 x_0$ , 文献 [20] 则未考虑目标的输入项且目标状态受界的限制. 在跟踪类型上, 文献 [12~20] 关注于准一致性跟踪, 而本文对一致性跟踪感兴趣. 此外, 文献 [20, 21] 考虑了 LF 切换系数  $\mu > 1$  ( $V(t_k^+) < \mu V(t_k^-)$ ), 这将使工作 [20, 21] 需要额外的时间去抵消切换时刻 LF 值跳高所带来的负面作用, 而本文则通过连续型分析 (31)~(37) 替换多重李雅普诺夫函数在切换时刻所进行的离散型分析降低了结果的保守性.

## 5 仿真算例

因为蔡氏电路能够产生丰富的非线性动力学行为 (如混沌现象), 且受工作 [26, 27] 的启发, 所以本节将不确定目标建模为切换异质蔡氏电路模型, 其示意图如图 1 所示.

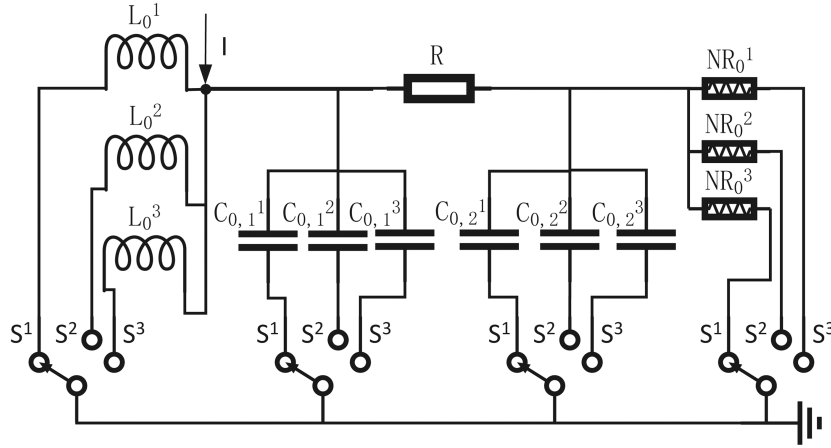


图 1 切换的蔡氏电路示意图

Figure 1 Schematic diagram of a switched Chua's circuit

在基尔霍夫 (Kirchhoff) 定律下, 可以将此不确定目标建模为

$$\begin{cases} C_{0,1}^m \frac{dv_{c_{0,1}}^m}{dt} = \frac{1}{R}(v_{c_{0,2}}^m(t) - v_{c_{0,1}}^m(t)) - I_{NR_0}^m(t), \\ C_{0,2}^m \frac{dv_{c_{0,2}}^m}{dt} = \frac{1}{R}(v_{c_{0,1}}^m(t) - v_{c_{0,2}}^m(t)) + I_{L_0}^m(t) + I(t), \\ L_0^m \frac{dI_{L_0}^m}{dt} = -v_{c_{0,2}}^m(t), \end{cases} \quad (45)$$

其中,  $v_{c_{0,1}}^m(t)$  和  $v_{c_{0,2}}^m(t)$  分别表示电容器  $c_{0,1}^m$  和  $c_{0,2}^m$  的电压值;  $I_{NR_0}^m(t)$  和  $I_{L_0}^m(t)$  分别表示通过非线性电阻器  $NR_0^m$  和电感器  $L_0^m$  的电流;  $I(t)$  表示一个未知的外部输入电流.  $m = \{1, 2, 3\}$  表示切换信号, 其中, 当开关  $S^1$  闭合时,  $m = 1$ ; 当开关  $S^2$  闭合时,  $m = 2$ ; 当开关  $S^3$  闭合时,  $m = 3$ .

基于文献 [28] 的转换策略, 我们可以将不确定目标模型 (45) 转换为新模型 (46).

$$\dot{x}_0(\tau) = A_0^m x_0(\tau) + C_0^m f_0(m, x_0(\tau), \tau) + u_0(m, \tau), \quad m = \{1, 2, 3\}, \quad (46)$$

其中,  $\tau = \frac{t}{RC_{0,2}^m}$ ,  $x_{0,1} = \frac{v_{c_{0,1}}^m}{E_0}$ ,  $x_{0,2} = \frac{v_{c_{0,2}}^m}{E_0}$ ,  $x_{0,3} = \frac{RI_{L_0}^m}{E_0}$ ,  $C_0^m = \text{diag}(-a_0^m, 0, 0)$ ,  $f_0(m, x_0(\tau), \tau) = [\hat{f}_0(m, x_0(\tau), \tau), 0, 0]^T$ ,  $\hat{f}_0(m, x_0(\tau), \tau) = b_{0,1}^m x_{0,1}(\tau) + 0.5(b_{0,0}^m - b_{0,1}^m)(|x_{0,1}(\tau) + 1| - |x_{0,1}(\tau) - 1|)$ ,  $a_0^1 = 12$ ,  $d_0^1 = 14$ ,  $b_{0,0}^1 = -0.6$ ,  $b_{0,1}^1 = -0.7$ ,  $a_0^2 = 14$ ,  $d_0^2 = 15$ ,  $b_{0,0}^2 = -1.6$ ,  $b_{0,1}^2 = -1.1$ ,  $a_0^3 = 13$ ,  $d_0^3 = 10$ ,  $b_{0,0}^3 = -1.35$ ,  $b_{0,1}^3 = -2.1$ , 以及  $A_0^m = [-a_0^m, a_0^m, 0; 1, -1, 1; 0, -d_0^m, 0]$ ,  $u_0(m, \tau) = [0, 1, 0]^T v_0^m$ ,  $x_0(\tau) = [x_{0,1}(\tau)^T, x_{0,2}(\tau)^T, x_{0,3}(\tau)^T]^T$ .

为了展示不确定目标复杂的动态行为, 假定其未知的控制输入项为如下的非线性函数:

$$v_0^m = \begin{cases} 5(\sin(\tau) - \cos(\tau)), & m = 1, \\ 10 \cos(\tau), & m = 2, \\ 10 \sin(\tau), & m = 3. \end{cases} \quad (47)$$

基于公式 (47) 可知:  $r_0^1 = 5\sqrt{2}$ ,  $r_0^2 = r_0^3 = 10$ .

考虑 6 个跟踪者, 它们同样被建模为蔡氏电路, 形式如下:

$$\dot{x}_i(\tau) = A_i^m x_i(\tau) + C_i^m f_i(m, x_i(\tau), \tau) + u_i(m, \tau), \quad m = \{1, 2, 3\}, \quad i = \{1, \dots, 6\}, \quad (48)$$

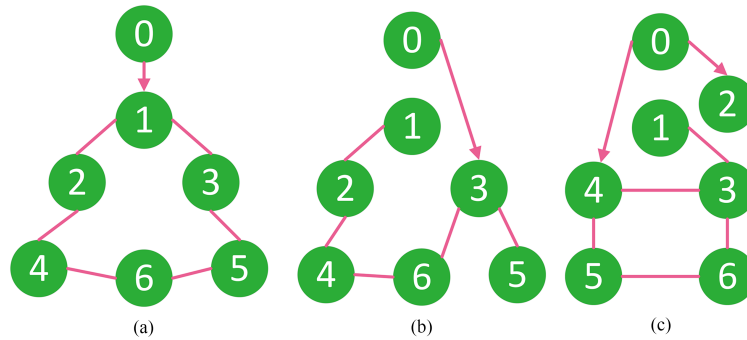


图 2 (网络版彩图) 依模态的通信网络

Figure 2 (Color online) Mode-dependent communication networks. (a)  $m = 1$ ; (b)  $m = 2$ ; (c)  $m = 3$

其中,  $C_i^m = \text{diag}(-a_i^m, 0, 0)$ ,  $f_i(m, x_i(\tau), \tau) = [\hat{f}_i(m, x_i(\tau), \tau), 0, 0]^T$ ,  $\hat{f}_i(m, x_i(\tau), \tau) = b_{i,1}^m x_{i,1}(\tau) + 0.5(b_{i,0}^m - b_{i,1}^m)(|x_{i,1}(\tau) + 1| - |x_{i,1}(\tau) - 1|)$ ,  $a_1^1 = 10$ ,  $d_1^1 = 7$ ,  $b_{1,0}^1 = -2$ ,  $b_{1,1}^1 = -1$ ,  $a_1^2 = 9$ ,  $d_1^2 = 6$ ,  $b_{1,0}^2 = -1.5$ ,  $b_{1,1}^2 = -2$ ,  $a_1^3 = 8$ ,  $d_1^3 = 11$ ,  $b_{1,0}^3 = -0.75$ ,  $b_{1,1}^3 = -0.6$ ,  $a_2^1 = 11$ ,  $d_2^1 = 8$ ,  $b_{2,0}^1 = -1.5$ ,  $b_{2,1}^1 = -3.1$ ,  $a_2^2 = 9$ ,  $d_2^2 = 6$ ,  $b_{2,0}^2 = -1.6$ ,  $b_{2,1}^2 = -1.1$ ,  $a_2^3 = 9$ ,  $d_2^3 = 4$ ,  $b_{2,0}^3 = -1.6$ ,  $b_{2,1}^3 = -1.1$ ,  $a_3^1 = 5.5$ ,  $d_3^1 = 6.1$ ,  $b_{3,0}^1 = -3.7$ ,  $b_{3,1}^1 = -2.1$ ,  $a_3^2 = 7.7$ ,  $d_3^2 = 2.7$ ,  $b_{3,0}^2 = -6.2$ ,  $b_{3,1}^2 = -4.7$ ,  $a_3^3 = 9.8$ ,  $d_3^3 = 8.8$ ,  $b_{3,0}^3 = -2.1$ ,  $b_{3,1}^3 = -1.8$ , 以及  $A_i^m = [-a_i^m, a_i^m, 0; 1, -1, 1; 0, -d_i^m, 0]$ ,  $x_i(\tau) = [x_{i,1}(\tau)^T, x_{i,2}(\tau)^T, x_{i,3}(\tau)^T]^T$ .

考虑跟踪者和不确定目标间切换的通信网络如图 2 所示.

令  $\kappa_0^m = |b_{0,0}^m| + |b_{0,1}^m|$ ,  $\kappa_i^m = |b_{i,0}^m| + |b_{i,1}^m|$ ,  $a^m = 0.1$ ,  $\gamma^m = 1$ ,  $\rho^m = 0.1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.05$ ,  $\varepsilon_2 = 0.1$ ,  $\varepsilon_3 = 0.03$ , 以及 TP 矩阵:

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \\ 0.65 & 0.35 & 0 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

基于上述给定的基本条件, 求解线性矩阵不等式 (39), 可以获得矩阵解  $P^m$ ,  $Q^m$ ,  $Y^m$ ,  $J_i^m$ ,  $F_i^m$  和参数解  $\alpha_0^m$ ,  $\alpha^m$ ,  $\beta_2^m$ . 在这些可行解下, 图 3 展示了真实状态  $x_i(\tau)$ , 估计状态  $s_{0,1}(\tau)$  和不确定目标状态  $x_0(\tau)$  的演化轨迹, 其中,  $i = 1, \dots, 6$ .

图 3 中的红色线条代表了不确定目标的演化轨迹. 图 3(a) 展示了跟踪者的第一维状态跟踪不确定目标第一维状态的演化过程; 图 3(b) 展示了跟踪者的第二维状态跟踪不确定目标第二维状态的演化过程; 图 3(c) 展示了跟踪者的第三维状态跟踪不确定目标第三维状态的演化过程. 每张图下方的子图展示了模态的切换过程,  $m = 1$  表示系统激活了模态 1,  $m = 2$  表示系统激活了模态 2,  $m = 3$  表示系统激活了模态 3, 且其切换过程是完全符合给定的 TP 和期望的 DT. 也即是说, 在给定的 TP 矩阵  $\Theta(49)$  下, 模态 1 切换至模态 2 的概率是大于切换至模态 3 的概率, 模态 2 切换至模态 3 的概率是大于切换至模态 1 的概率, 模态 3 切换至模态 1 的概率是大于切换至模态 2 的概率; 在给定的期望驻留时间下, 模态 2 的平均驻留时间是大于模态 1 的平均驻留时间, 模态 1 的平均驻留时间是大于模态 3 的平均驻留时间, 这些特征均能在图 3 中得到验证. 进一步地, 当下方子图的模态进行切换时, 上方子图的演化轨迹也会出现相应的切换折点. 随着时间的推移, 我们可以发现, 在本文给出的双层设计框架下, 切换异质的非线性多智能体系统 (48) 成功跟踪上了不确定的蔡氏电路 (46). 这意味着本文的结果可以为实际的一致性跟踪问题提供有力的理论支撑和科学的决策方法.

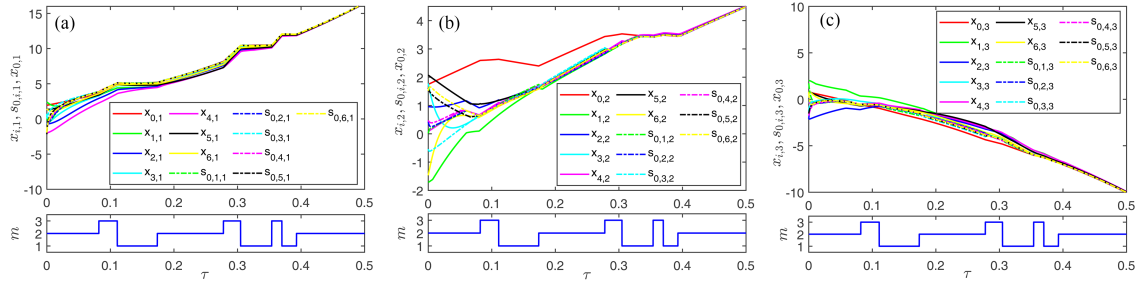


图 3 (网络版彩图) 不确定目标及其跟踪者的状态演化

**Figure 3** (Color online) State evolutions of the uncertain target and its trackers. (a)  $x_{0,1}, x_{i,1}, s_{0,i,1}$ ; (b)  $x_{0,2}, x_{i,2}, s_{0,i,2}$ ; (c)  $x_{0,3}, x_{i,3}, s_{0,i,3}$

## 6 结论

本文研究了随机切换和不确定目标下异质非线性多智能体系统的一致性跟踪问题. 具体地, 提出了一种包含观测器设计和控制器设计的依模态双层设计框架来克服目标输入信号未知, 非线性, 异质性以及随机切换特性所带来的难点; 通过引入依模态的自由矩阵和参数, 以及提出新的多重李雅普诺夫函数获得了一致性跟踪准则. 该准则移除了目标有界假设. 作为所提控制方案的一个应用, 数值仿真中将切换蔡氏电路考虑为待跟踪的不确定目标. 受工作 [29] 启发, 以后的工作将设计一种新的区间观测器来探讨随机切换和不确定目标下异质非线性多智能体系统的跟踪问题.

## 参考文献

- Li H Y, Wang Y, Yao D Y, et al. Robust adaptive sliding mode attitude control of MQAVs based on event-triggered mechanism (in Chinese). *Sci Sin Inform*, 2023, 53: 66–80 [李鸿一, 王琰, 姚得银, 等. 基于事件触发机制的多四旋翼无人机鲁棒自适应滑模姿态控制. *中国科学: 信息科学*, 2023, 53: 66–80]
- Fan L R, Wang F, Zhou C, et al. Adaptive event-triggered control for time-delay multi-agent systems with actuator faults and asymmetric error constraints (in Chinese). *Sci Sin Inform*, 2022, 52: 1287–1301 [范利蓉, 王芳, 周超, 等. 执行器故障和非对称误差约束下的时延多智能体系统自适应事件触发控制. *中国科学: 信息科学*, 2022, 52: 1287–1301]
- Wang T, Kang Y, Li P F. Adaptive event-triggered distributed model predictive control for tracking consensus of multiagent systems (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2023, 53: 1885–1894 [王涛, 康宇, 李鹏飞. 基于自适应事件触发分布式模型预测控制的多智能体系统跟踪一致性. *中国科学: 技术科学*, 2023, 53: 1885–1894]
- Tian L, Zhao Q L, Dong X W, et al. Time-varying output group formation tracking for heterogeneous multi-agent systems (in Chinese). *Acta Aeron Astron Sinica*, 2020, 41: 323727 [田磊, 赵启伦, 董希旺, 等. 异构多智能体系统分组输出时变编队跟踪控制. *航空学报*, 2020, 41: 323727]
- Wang Z W, Liu K, Guo J, et al. A multi-UAVs and multi-USVs formation cooperative mechanism based on leader-follower strategy (in Chinese). *Acta Aeron Astron Sinica*, 2023, 44: 729791 [王振威, 刘凯, 郭健, 等. 一种基于领导-跟随策略的多无人机-多无人艇编队协同机制. *航空学报*, 2023, 44: 729791]
- Hespanha J, Morse A. Stability of switched systems with average dwell-time. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision Control*, 1999. 2655–2660
- Zheng F Y, Shen Z M, Li Y Q, et al. Gain adaptive multi-mode switching control for coaxial high-speed helicopter (in Chinese). *Acta Aeron Astron Sinica*, 2024, 45: 529088 [郑峰婴, 沈志敏, 李雅琴, 等. 共轴高速直升机增益自适应多模式切换控制. *航空学报*, 2024, 45: 529088]
- Zhao X, Zhang L, Shi P, et al. Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time. *IEEE Trans Autom Control*, 2012, 57: 1809–1815
- Gao J, Li T B. Asynchronous control of switched systems with nonlinear perturbation: a mode-dependent average dwell time approach (in Chinese). *China Acad J Electron*, 2022, 39: 899–909 [高娟, 李同彬. 非线性扰动的切换系统

- 的异步控制: 模态依赖的平均驻留时间方法. 工程数学学报, 2022, 39: 899–909]
- 10 Yang X, Liu Y, Cao J, et al. Synchronization of coupled time-delay neural networks with mode-dependent average dwell time switching. *IEEE Trans Neural Netw Learn*, 2020, 31: 5483–5496
  - 11 Yang X, Feng G, He C, et al. Event-triggered dynamic output quantization control of switched T-S fuzzy systems with unstable modes. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2022, 30: 4201–4210
  - 12 Zhang R, Li S, Ahn C K, et al. Fully distributed adaptive fuzzy consensus for heterogeneous switched nonlinear multiagent systems under state-dependent switchings. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2024, 32: 607–620
  - 13 Guo S, Zhao X, Wang H, et al. Distributed consensus of heterogeneous switched nonlinear multiagent systems with input quantization and DoS attacks. *Appl Math Comput*, 2023, 456: 128127
  - 14 Yoo S J. Distributed consensus tracking of a class of asynchronously switched nonlinear multi-agent systems. *Automatica*, 2018, 87: 421–427
  - 15 Zhang H, Zhao X, Zong G, et al. Fully distributed consensus of switched heterogeneous nonlinear multi-agent systems with bouc-wen hysteresis input. *IEEE Trans Network Sci Eng*, 2022, 9: 4198–4208
  - 16 Lv M, Yu W, Cao J, et al. A separation-based methodology to consensus tracking of switched high-order nonlinear multiagent systems. *IEEE Trans Neural Networks Learning Syst*, 2022, 33: 5467–5479
  - 17 Zou W, Shi P, Xiang Z, et al. Consensus tracking control of switched stochastic nonlinear multiagent systems via event-triggered strategy. *IEEE Trans Neural Networks Learning Syst*, 2020, 31: 1036–1045
  - 18 Wang N, Wang Y. Fuzzy adaptive quantized tracking control of switched high-order nonlinear systems: a new fixed-time prescribed performance method. *IEEE Trans Circuit Syst II Express Brief*, 2022, 69: 3279–3283
  - 19 Li X, Long L. Distributed event-triggered fuzzy control of heterogeneous switched multi-agent systems under switching topologies. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2024, 32: 574–585
  - 20 Feng J, Wu Y, Wang J, et al. Leader-following quasi-consensus of heterogeneous multiagent systems with switched cooperative-competitive interactions. *Phys D Nonlinear Phenom*, 2023, 443: 133567
  - 21 Guo S, You R, Ahn C K. Adaptive consensus for multi-agent systems with switched nonlinear dynamics and switching directed topologies. *Nonlinear Dyn*, 2023, 111: 1285–1299
  - 22 Zou W, Ahn C K, Xiang Z. Fuzzy-approximation-based distributed fault-tolerant consensus for heterogeneous switched nonlinear multiagent systems. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2021, 29: 2916–2925
  - 23 Wang B. A time-varying observer design for synchronization with an uncertain target and its applications in coordinated mission rendezvous. *Automatica*, 2022, 136: 109931
  - 24 Liu W, Yan S, Wang X B, et al. Consensus control of multi-agent systems with uncertain communication networks (in Chinese). *J Beijing Univ Aeronaut Astronaut*, 2024, 50: 1463–1473 [刘伟, 闫实, 王希彬, 等. 不确定通信网络下多智能体系统一致性控制. 北京航空航天大学学报, 2024, 50: 1463–1473]
  - 25 Liu K, Duan P, Duan Z, et al. Leader-following consensus of multi-agent systems with switching networks and event-triggered control. *IEEE Trans Circuit Syst I Reg Paper*, 2018, 65: 1696–1706
  - 26 Fortuna L, Frasca M, Xibilia M G. *Chua's Circuit Implementations: Yesterday, Today and Tomorrow*. Singapore: World Scientific, 2009
  - 27 Burbano-L D A, Yaghouti S, Petrarca C, et al. Synchronization in multiplex networks of Chua's circuits: theory and experiments. *IEEE Trans Circuit Syst I Reg Paper*, 2020, 67: 927–938
  - 28 Sun Y, Yang X, Shi P, et al. Consensus tracking of switched heterogeneous nonlinear systems with uncertain target. *IEEE Trans Circuit Syst I Reg Paper*, 2024, doi: 10.1109/TCSI.2024.3376531
  - 29 Wang X, Su H, Zhang F, et al. A robust distributed interval observer design for LTI systems. *IEEE Trans Autom Control*, 2023, 68: 1337–1352

## Consensus tracking control of heterogeneous nonlinear multi-agent systems with random switching and uncertain targets

Yaping SUN<sup>1</sup>, Xinsong YANG<sup>1\*</sup> & Housheng SU<sup>2,3</sup>

1. *College of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China;*

2. *School of Artificial Intelligence and Automation, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China;*

3. *Key Laboratory of Image Processing and Intelligent Control (Huazhong University of Science and Technology), Ministry of Education, Wuhan 430074, China*

\* Corresponding author. E-mail: xinsongyang@scu.edu.cn

**Abstract** This paper investigates the consensus tracking problem of heterogeneous switched nonlinear multi-agent systems with uncertain targets, where the target contains unknown input signals, and its states are not limited by bounded assumptions. Moreover, random switching not only considers the transition probability but also focuses on the dwell time. Mainly because the target is uncertain, nonlinear, heterogeneous, and randomly switched, the consensus tracking problem is rather difficult to solve by existing methods. As such, a novel mode-dependent dual-design framework for consensus tracking problems is developed. Then, a new multiple Lyapunov function is proposed by introducing free matrices and parameters. Subsequently, the criteria are given, under which heterogeneous switched nonlinear multi-agent systems can almost surely track uncertain targets with exponential consistency. Finally, a simulation case is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed control scheme.

**Keywords** multi-agent systems, consensus tracking, nonlinear, random switching, uncertain