



有输出约束的二阶切换系统固定时间输出反馈镇定

林相泽^{1*}, 黄景新¹, 程佳妮¹, 李世华^{2*}

1. 南京农业大学人工智能学院, 南京 210031

2. 东南大学自动化学院, 南京 210096

* 通信作者. E-mail: xzlin@njau.edu.cn, lsh@seu.edu.cn

收稿日期: 2024-02-02; 修回日期: 2024-04-19; 接受日期: 2024-08-16; 网络出版日期: 2024-11-08

国家自然科学基金面上项目 (批准号: 62173185, 61773216) 和 2024 年江苏省科研创新计划 (批准号: KYCX24.0931) 资助

摘要 本文研究了具有输出约束的二阶切换非线性系统的固定时间输出反馈镇定问题. 构造降阶切换状态观测器以估计未测量状态, 并与设计的切换状态反馈控制器相结合, 实现了闭环切换系统的固定时间输出反馈镇定. 利用正切型障碍 Lyapunov 函数保证闭环切换系统在固定时间稳定的同时满足输出约束. 由于构造的障碍 Lyapunov 函数当约束趋向于无穷时可退化为无约束的公共 Lyapunov 函数形式, 因此, 本文提出的方法适用于具有或没有输出约束两种情况, 而无需改变所设计的切换控制器和观测器结构, 具有一定的普适性. 利用双极限齐次方法证明了文中结论. 数值例子和连续搅拌釜式反应器的固定时间控制验证了文中所提方法的有效性.

关键词 切换非线性系统, 固定时间, 输出反馈, 输出约束, 双极限齐次方法

1 引言

在实际应用和工程中, 保证机器设备正常运行和操作人员人身安全的约束非常重要, 如全驱海洋水面舰船^[1], 机器人操纵器^[2], 变长起重机系统边界振动控制^[3], 航天器协同交会对接^[4], 柔性梁的振动控制^[5]和五自由度塔式吊车^[6]等. 在过去的三十年中, 研究者们已经提出了多种方法来处理约束, 如集合不变性^[7,8], 参考调控器^[9]和模型预测控制^[10]等. 然而, 上述几种方法都存在一定的不足, 主要表现为本质上是数值算法, 且计算复杂, 应用困难. 为了克服这一难题, 学者们提出了障碍 Lyapunov 函数方法^[11~19]. 其原理是当参数接近某一极值时, 障碍 Lyapunov 函数值将变为无穷大. 障碍 Lyapunov 函数方法在解决约束问题上引起了众多学者的关注且取得了不少成果, 如文献^[13~16].

切换系统是一种混合系统, 包括一系列子系统和协调这些子系统的切换规则^[20~23]. 切换系统稳定分析的反馈镇定问题一直是控制理论的研究热点之一^[17,18,24~29], 如文献^[17]针对带有输出约束的切换系统, 解决了该系统的有限时间输出反馈镇定问题, 文献^[18]研究了切换系统的渐近稳定的输出

引用格式: 林相泽, 黄景新, 程佳妮, 等. 有输出约束的二阶切换系统固定时间输出反馈镇定. 中国科学: 信息科学, 2024, 54: 2642–2656, doi: 10.1360/SSI-2024-0045

Lin X Z, Huang J X, Cheng J N, et al. Fixed-time output feedback stabilization for second-order switched systems with output constraints (in Chinese). Sci Sin Inform, 2024, 54: 2642–2656, doi: 10.1360/SSI-2024-0045

反馈镇定问题, Huang 等 [24] 在任意切换下, 采用状态反馈解决了切换随机非线性切换系统的有限时间镇定问题. 然而, 上述关于切换系统的研究大多讨论状态或输出反馈 Lyapunov 渐近稳定和有限时间稳定问题.

有限时间稳定是一个比 Lyapunov 渐近稳定更实用的概念, 有助于研究闭环系统在可能很短的有限时间间隔内的行为, 因此, 只要希望或要求系统状态在短时间内收缩到某个小阈值, 如避免饱和或激发未知非线性动态, 就会用到有限时间稳定. 但是, 有限时间稳定的稳定时间与系统的初始状态有关 [30,31], 如 Liu 等 [30] 研究了具有全状态约束的非线性系统的有限时间反馈镇定问题, 系统的有限时间稳定时间与系统初值有关. 类似地, Sun 等 [31] 采用快速有限时间稳定的方法, 解决了非线性系统的自适应镇定问题, 但是, 该稳定时间仍然与系统初值有关, 为了克服这一缺点, 人们提出了固定时间稳定性的概念 [32~34], 其可以不依赖于初始值而估计出稳定时间的上界. 近年来关于固定时间稳定性的研究引起了关注 [35~42], 如 Polyakov 等 [34] 基于隐式 Lyapunov 函数方法给出了非线性系统有限时间稳定和固定时间稳定定理, Wang 等 [35] 研究了非严格反馈切换非线性系统的动态事件触发自适应固定时间模糊控制, Tian 等 [39] 针对双积分系统, 提出了一种固定时间输出反馈镇定策略.

由上述分析可知, 切换系统是一个复杂的本质非线性系统, 对于具有输出约束的切换系统的固定时间反馈镇定问题, 尤其是输出反馈镇定问题, 相关报道很少, 需进一步研究. 因此, 本文基于双极限齐次方法, 讨论了一类具有输出约束的二阶切换非线性系统的固定时间输出反馈镇定问题. 本文的主要贡献和优势至少体现在以下几个方面: 1) 构造了固定时间稳定降阶切换观测器以估计未测量状态, 与状态反馈镇定相比, 这是输出反馈镇定的一大难点; 2) 设计了固定时间稳定状态反馈切换控制器, 并与上述设计切换观测器相结合, 实现了切换系统的固定时间输出反馈镇定; 3) 引入了一种具有双正切型函数的公共 Lyapunov 函数, 能够保证闭环切换系统在固定时间稳定的同时满足输出约束. 这个具有双正切型函数的公共 Lyapunov 函数当约束趋向于无穷时可退化为无约束的公共 Lyapunov 函数, 因此, 本文提出的方法具有一定的普适性, 能够适用于具有或没有输出约束两种情况, 而无需改变所设计的切换控制器和观测器结构.

2 预备和问题陈述

考虑如下二阶非线性切换系统;

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_1 &= \chi_2^{p_1} + f_{\sigma(t),1}(\chi_1), \\ \dot{\chi}_2 &= u_{\sigma(t)}^{p_{\sigma(t),2}} + f_{\sigma(t),2}(\chi_1, \chi_2), \\ y &= \chi_1,\end{aligned}\quad (1)$$

其中 $\chi = (\chi_1, \chi_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $y = \chi_1 \in \mathbb{R}$, $u_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}$ 分别为切换系统状态, 输出和输入, $\sigma(t) \in S = \{1, 2, \dots, S_N\}$ 是切换信号, S_N 为子系统的数量, 系统状态的幂 p_1 和 $p_{\sigma(t),2} \in \mathbb{R}_{\geq 1}^{odd} := \{q \in \mathbb{R}_{\geq 1} | q = q_1/q_2, q_1 \text{ 和 } q_2 \text{ 均为正奇数}\}$, 非线性项 $f_{\sigma(t),1}(\chi_1)$ 和 $f_{\sigma(t),2}(\chi_1, \chi_2)$ 连续, $f_{\sigma(t),1}(0) = 0$, $f_{\sigma(t),2}(0, 0) = 0$, 输出约束 $|y| < \phi$ 是预先设置的, $\phi > 0$.

文中系统的切换是任意的, 但是在有限时间段内只有有限次切换, 不能有芝诺现象发生. 另外, 在切换时间点系统状态是连续的, 不会发生跳变. 上述假设也是常用的假设, 如文献 [20, 21].

本文的主要目的是设计一个合适的固定时间输出反馈控制器, 使具有输出约束的切换系统 (1) 在固定时间内收敛到平衡点并保持稳定.

下面给出相应定义和一些必要的引理, 便于稳定性分析和控制设计.

定义1 ([33]) 考虑非线性系统 $\dot{\chi} = g(\chi)$, $g(0) = 0$, $\chi \in \mathbb{R}^n$, 其中非线性函数 $g(\chi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 可以连续亦可非连续. 如果该系统是全局渐近稳定且在某个有限时刻 $T(\chi_0)$ 收敛到平衡点, 那么该系统是全局有限时间稳定的, 其中 $T(\chi_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ 是稳定时间函数. 进一步来说, 如果稳定时间函数 $T(\chi_0)$ 存在一个与状态变量无关的确定上界, 则称该系统是固定时间稳定的.

定义2 ([25, 43]) 齐次性相关定义如下.

(1) 函数齐次性: 对于任意给定常数 $\epsilon > 0$, 如果函数 $g(\chi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足 $g(\epsilon^\gamma \chi) = g(\epsilon^{\gamma_1} \chi_1, \dots, \epsilon^{\gamma_n} \chi_n) = \epsilon^d g(\chi)$, 那么 $g(\chi)$ 是齐次函数, 其中 $d \in \mathbb{R}$ 为齐次度, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_i > 0, i = 1, \dots, n$ 是权重.

(2) 系统齐次性: 如果向量场 $g(\chi)$ 的第 i 个元素 $g_i(\chi)$ 是齐次度为 $\gamma_i + d$ 的齐次函数, 那么向量场 $g(\chi)$ 是齐次的, $d \in \mathbb{R}$ 为齐次度, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_i > 0, i = 1, \dots, n$ 是权重. 如果向量场 $g(\chi)$ 是齐次的, 那么系统 $\dot{\chi} = g(\chi)$, $g(0) = 0$, $\chi \in \mathbb{R}^n$ 也是齐次的.

(3) ρ ($\rho = 0$ 或 $\rho = \infty$)- 极限齐次性: 如果函数 $g(\chi)$ 连续, $g^\rho(\chi)$ 连续且不恒为零, 对于紧集 $D \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\lim_{\epsilon \rightarrow \rho} \max_{\chi \in D} \left(\frac{g(\epsilon^{\gamma_\rho, 1} \chi_1, \dots, \epsilon^{\gamma_\rho, n} \chi_n)}{\epsilon^{d_\rho}} - g^\rho(\chi) \right) = 0$ 成立, 则称 $g(\chi)$ 关于 $(\gamma_\rho, d_\rho, g^\rho)$ 是 ρ - 极限齐次的, 其中 $\gamma_\rho, d_\rho, g^\rho$ 分别是权重向量, 自由度标量和近似函数. 对于向量场 $g(\chi)$ 及其近似向量场 $g^\rho(\chi)$, 如果向量场 $g(\chi)$ 的第 i 个元素 $g_i(\chi)$ 关于 $(\gamma_\rho, d_\rho + \gamma_{\rho, i}, g^\rho)$ 是 ρ 极限齐次的, 其中 $d_\rho + \gamma_{\rho, i} > 0$, 那么称向量场 $g(\chi)$ 关于 $(\gamma_\rho, d_\rho, g^\rho)$ 是 ρ 极限齐次的.

(4) 双向极限齐次: 如果函数 $g(\chi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 或向量场 $g(\chi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 既是 0- 极限齐次的又是 ∞ - 极限齐次的, 则称其是双极限齐次的.

由文献 [43] 的定理 2.20 和推论 2.24 可得如下引理, 为行文完整性, 其证明罗列如下.

引理1 如果向量场 $g(\chi)$ 关于 (γ_0, d_0, g^0) 和 $(\gamma_\infty, d_\infty, g^\infty)$ 是双极限齐次的, 系统 $\dot{\chi} = g(\chi)$, $\dot{\chi} = g^0(\chi)$ 和 $\dot{\chi} = g^\infty(\chi)$ 全局渐近稳定且 $d_\infty > 0 > d_0$, 那么系统 $\dot{\chi} = g(\chi)$ 是固定时间稳定的.

证明 引理 1 的证明分为两个部分, 第一部分证明如果向量场 $g(\chi)$ 关于 (γ_0, d_0, g^0) 和 $(\gamma_\infty, d_\infty, g^\infty)$ 是双极限齐次的, 系统 $\dot{\chi} = g(\chi)$, $\dot{\chi} = g^0(\chi)$ 和 $\dot{\chi} = g^\infty(\chi)$ 全局渐近稳定且 $d_\infty > 0 > d_0$; 第二部分在第一部分成立的情况下, 证明系统 $\dot{\chi} = g(\chi)$ 是固定时间稳定的.

第一部分. 这一部分的证明分为三步. 首先定义三个 Lyapunov 函数 V_0, V_m, V_∞ . 然后用这三个函数构建一个新 Lyapunov 函数, 最后, 证明这个函数沿系统 $\dot{\chi} = g(\chi)$, $\dot{\chi} = g^0(\chi)$ 和 $\dot{\chi} = g^\infty(\chi)$ 向量的导数及其齐次近似是负定的.

第一步. 根据文献 [43] 中命题 2.18 的证明, 存在一个正定实数 λ_∞ 和一个 C^1 正定的恰当的齐次函数 $V_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, 其权重 γ_∞ 和自由度 d_{V_∞} 满足文献 [43] 中的 (D.2). 同样地, 存在一个正定实数 λ_0 和一个 C^1 正定的恰当的齐次函数 $V_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, 其权重 γ_0 和自由度 d_{V_0} 满足

$$\frac{\partial V_0}{\partial \chi}(\chi)g(\chi) < 0, \forall \chi : 0 < |\chi|_{\gamma_0} \leq \lambda_0. \tag{2}$$

最后, 系统 $\dot{\chi} = g(\chi)$ 的全局渐近稳定性意味着存在一个 C^1 正定的恰当的齐次函数 $V_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ 满足

$$\frac{\partial V_m}{\partial \chi}(\chi)g(\chi) < 0, \forall \chi \neq 0. \tag{3}$$

第二步. 从函数 V_m, V_0 , 和 V_∞ 中构建一个函数 V . 为此, 采用文献 [44] 中 Mazenc 使用的一个技术. 令 v_∞ 和 v_0 是两个严格正实数使得 $v_0 < v_\infty$ 以及

$$v_\infty \geq \max_{\chi: |\chi|_{\gamma_\infty} \leq \lambda_\infty} V_m(\chi), v_0 \leq \max_{\chi: |\chi|_{\gamma_0} \geq \lambda_0} V_m(\chi).$$

这意味着

$$\begin{aligned} \{\chi \in \mathbb{R}^n : V_m(\chi) \geq v_\infty\} &\subseteq \{\chi \in \mathbb{R}^n : |\chi|_{r_\infty} \geq \lambda_\infty\}, \\ \{\chi \in \mathbb{R}^n : V_m(\chi) \leq v_0\} &\subseteq \{\chi \in \mathbb{R}^n : |\chi|_{r_0} \leq \lambda_0\}. \end{aligned}$$

令 ω_0 和 ω_∞ 定义为如下形式:

$$\omega_0 = \min_{\chi: \frac{1}{2}v_0 \leq V_m(\chi) \leq v_0} \frac{V_m(\chi)}{V_0(\chi)}, \quad \omega_\infty = \max_{\chi: v_\infty \leq V_m(\chi) \leq 2v_\infty} \frac{V_m(\chi)}{V_\infty(\chi)}.$$

可得

$$\begin{aligned} \omega_\infty V_\infty(\chi) - V_m(\chi) &\geq 0 \quad \forall \chi : v_\infty \leq V_m(\chi) \leq 2v_\infty, \\ V_m(\chi) - \omega_0 V_0(\chi) &\geq 0 \quad \forall \chi : \frac{1}{2}v_0 \leq V_m(\chi) \leq v_0. \end{aligned}$$

令

$$V(\chi) = \omega_\infty \varphi_\infty(V_m(\chi))V_\infty(\chi) + [1 - \varphi_\infty(V_m(\chi))] \varphi_0(V_m(\chi))V_m(\chi) + \omega_0 [1 - \varphi_0(V_m(\chi))] V_0(\chi),$$

其中 φ_0 和 φ_∞ 是 C^1 非递减函数且满足

$$\varphi_0(s) = 0, \quad \forall s \leq \frac{1}{2}v_0, \quad \varphi_0(s) = 1, \quad \forall s \geq v_0, \tag{4}$$

$$\varphi_\infty(s) = 0, \quad \forall s \leq v_\infty, \quad \varphi_\infty(s) = 1, \quad \forall s \geq 2v_\infty. \tag{5}$$

函数 V 是 C^1 , 正定的, 恰当的. 进一步, 构造如下:

$$V(\chi) = \begin{cases} \omega_0 V_0(\chi), & \forall \chi : V_m(\chi) \leq \frac{1}{2}v_0, \\ \varphi_0(V_m(\chi))V_m(\chi) + \omega_0 [1 - \varphi_0(V_m(\chi))]V_0(\chi), \\ \forall \chi : \frac{1}{2}v_0 \leq V_m(\chi) \leq v_0, \\ V_m(\chi), & \forall \chi : v_0 \leq V_m(\chi) \leq v_\infty, \\ \omega_\infty \varphi_\infty(V_m(\chi))V_\infty(\chi) + [1 - \varphi_\infty(V_m(\chi))]V_m(\chi), \\ \forall \chi : v_\infty \leq V_m(\chi) \leq 2v_\infty, \\ \omega_\infty V_\infty(\chi), & \forall \chi : V_m(\chi) \geq 2v_\infty. \end{cases}$$

因此, 对于每一个 $i = 1, \dots, n$, 下式成立:

$$\frac{\partial V}{\partial \chi_i}(\chi) = \omega_\infty \frac{\partial V_\infty}{\partial \chi_i}(\chi), \quad \forall \chi : V_m(\chi) > 2v_\infty, \tag{6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \chi_i}(\chi) = \omega_0 \frac{\partial V_0}{\partial \chi_i}(\chi), \quad \forall \chi : V_m(\chi) < 2v_0. \tag{7}$$

由于 $\frac{\partial V_\infty}{\partial \chi_i}$ 和 $\frac{\partial V_0}{\partial \chi_i}$ 在标准意义下是齐次的, 这表明了对于每一个 $i = 1, \dots, n$, $\frac{\partial V}{\partial \chi_i}$ 是双极限齐次的, 其权重为 γ_0 和 γ_∞ , 自由度为 $d_{V_0} + \gamma_{0,i}$ 和 $d_{V_\infty} + \gamma_{\infty,i}$.

第三步. 需要证明 V 沿 g 的 Lie 导数是负定的. 为此, 注意到, 对于所有使 $\frac{1}{2}v_0 \leq V_m(\chi) \leq v_0$ 的 χ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \chi}(\chi)g(\chi) &= \varphi_0'(V_m(\chi))[V_m(\chi) - \omega_0 V_0(\chi)] \frac{\partial V_m}{\partial \chi}(\chi)g(\chi) \\ &\quad + \omega_0 [1 - \varphi_0(V_m(\chi))] \frac{\partial V_0}{\partial \chi}(\chi)g(\chi) + \varphi_0(V_m(\chi)) \frac{\partial V_m}{\partial \chi}(\chi)g(\chi) \end{aligned}$$

和对于所有使 $\frac{1}{2}v_\infty \leq V_m(\chi) \leq v_\infty$ 的 χ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}(\chi)f(\chi) &= \varphi'_\infty(V_m(\chi))[\omega_\infty V_\infty(\chi) - V_m(\chi)] \frac{\partial V_m}{\partial \chi}(\chi)g(\chi) \\ &\quad + \omega_\infty \varphi_\infty(V_m(\chi)) \frac{\partial V_\infty}{\partial \chi}(\chi)g(\chi) + [1 - \varphi_\infty(V_m(\chi))] \frac{\partial V_m}{\partial \chi}(\chi)f(\chi). \end{aligned}$$

通过文献 [43] 中的 (D.2), (2), (3), (4) 和 (5), 可得

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\chi)g(\chi) < 0, \quad \forall \chi \neq 0.$$

综上所述, 第一部分证明完毕.

第二部分. 首先, 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, 可得

$$|d_0| = -d_0 \leq \min_{1 \leq i \leq n} -\gamma_{0,i} \leq \max_{1 \leq i \leq n} -\gamma_{0,i} < d_{V_0}.$$

然后, 令 V 是第一部分证明中给定的函数, 因为 $d_0 < 0 < d_\infty$, 所以, 函数 $\phi(\chi) = V(\chi)^{\frac{d_{V_0}+d_0}{d_{V_0}}} + V(\chi)^{\frac{d_{V_\infty}+d_\infty}{d_{V_\infty}}}$ 是双极限齐次的, 其权重为 γ_0 和 γ_∞ , 自由度为 $d_{V_0} + d_0$ 和 $d_{V_\infty} + d_\infty$, 近似函数为 $V(\chi)^{\frac{d_{V_0}+d_0}{d_{V_0}}}$ 和 $V(\chi)^{\frac{d_{V_\infty}+d_\infty}{d_{V_\infty}}}$. 此外, 函数 $\zeta(\chi) = -\frac{\partial V}{\partial \chi}(\chi)g(\chi)$ 是双极限齐次的, 和函数 $\phi(\chi)$ 具有相同的权重和自由度. 更进一步, 因为函数 $\zeta(\chi)$ 和它的齐次近似是正定的, 文献 [43] 的推论 2.15 中得到一个严格正定实数 c , 使得

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\chi)g(\chi) \leq -c \left(V(\chi)^{\frac{d_{V_0}+d_0}{d_{V_0}}} + V(\chi)^{\frac{d_{V_\infty}+d_\infty}{d_{V_\infty}}} \right) \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^n. \quad (8)$$

令 χ_{ic} 是系统 $\dot{\chi} = g(\chi)$ 的一个解的初始值, $V_{\chi_{ic}}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 由 V 沿着这个解的值给出的一个时间函数, 可知

$$\dot{V}_{\chi_{ic}}(t) \leq -cV_{\chi_{ic}}(t)^{\frac{d_{V_\infty}+d_\infty}{d_{V_\infty}}}, \quad \forall t \geq 0,$$

因此可得

$$V_{\chi_{ic}}(t) \leq \frac{1}{\left(\frac{d_\infty}{d_{V_\infty}} ct + V(\chi_{ic})^{-\frac{d_\infty}{d_{V_\infty}}} \right)^{\frac{d_{V_\infty}}{d_\infty}}} \leq \frac{1}{\left(\frac{d_\infty}{d_{V_\infty}} ct \right)^{\frac{d_{V_\infty}}{d_\infty}}}, \quad \forall t > 0.$$

因此, 可得稳定时间 $T_1 = \frac{d_{V_\infty}}{cd_\infty}$, 进一步可得

$$V_{\chi_{ic}}(t) \leq 1, \quad \forall t \geq T_1, \quad \forall \chi_{ic} \in \mathbb{R}^n.$$

另外,

$$\dot{V}_{\chi_{ic}}(t) \leq -cV_{\chi_{ic}}(t)^{\frac{d_{V_0}-|d_0|}{d_{V_0}}}, \quad \forall t \geq 0.$$

可得

$$\begin{aligned} V_{\chi_{ic}}(t) &\leq \max \left\{ \left(-\frac{|d_0|}{d_{V_0}} c(t - T_1) + V_{\chi_{ic}}(T_1)^{\frac{|d_0|}{d_{V_0}}} \right)^{\frac{d_{V_0}}{|d_0|}}, 0 \right\} \\ &\leq \max \left\{ \left(1 - \frac{|d_0|}{d_{V_0}} c(t - T_1) \right)^{\frac{d_{V_0}}{|d_0|}}, 0 \right\}, \quad \forall t \geq T_1. \end{aligned}$$

因此, 可得稳定时间 $T_2 = \frac{d_{V_0}}{c|d_0|}$, 进一步可得

$$V_{\chi_{ic}}(t) = 0 \quad \forall t \geq T_1 + T_2 = \frac{1}{c} \left(\frac{d_{V_\infty}}{d_\infty} + \frac{d_{V_0}}{|d_0|} \right), \quad \forall \chi_{ic} \in \mathbb{R}^n.$$

至此, 第二部分证明完成.

结合第一部分和第二部分的证明, 引理 1 的证明完成.

引理2 ([32]) 对于系统

$$\dot{\chi} = g(\chi) + \hat{g}(\chi), \quad \chi \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

如果 $g(\chi)$ 关于 (γ_0, d_0, g^0) 和 $(\gamma_\infty, d_\infty, g^\infty)$ 是双极限齐次的, $\hat{g}(0) = 0$. 假设 $\chi = 0$ 是系统 $\dot{\chi} = g(\chi)$ 的一个渐近稳定的平衡点, 如果 $(\rho = 0$ 或 $\rho = \infty)$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \rho} \frac{\hat{g}(\epsilon^{\gamma_{\rho,1}} \chi_1, \dots, \epsilon^{\gamma_{\rho,n}} \chi_n)}{\epsilon^{d_\rho + \gamma_{\rho,i}}} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \forall \chi \neq 0, \tag{10}$$

那么 $\chi = 0$ 是系统 (9) 的局部固定时间稳定平衡点.

3 主要结果

3.1 输出反馈切换控制器和观测器的构造

不失一般性, 令 $\sigma(t) = k$, 构造如下输出反馈切换控制器

$$u_{k,w} = -(\zeta_1 \varphi_1(\mu_1) \chi_1^{\beta_1} + \zeta_2 \hat{\chi}_2^{\beta_1} + \eta_1 \varphi_2(\mu_1) \chi_1^{\beta_2} + \eta_2 \hat{\chi}_2^{\beta_2})^{\frac{1}{p_{k,2}}}, \tag{11}$$

其中 $\varphi_1(\mu_1) = \sec^2(\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_1+1}}{2\phi^{\beta_1+1}})$, $\varphi_2(\mu_1) = \sec^2(\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_2+1}}{2\phi^{\beta_2+1}})$.

构造如下降阶切换观测器

$$\dot{\xi} = -b_1 \hat{\chi}_2^{\beta_3} - b_2 \hat{\chi}_2^{\beta_4} - \varrho f_{k,1}(\chi_1), \tag{12}$$

其中 $\hat{\chi}_2 = \xi + \varrho \chi_1$ 是状态 χ_2 的估计值, $\zeta_1, \zeta_2, \eta_1, \eta_2, b_1, b_2$ 和 ϱ 是正定常数, 选择待设计参数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 和 β_4 满足如下条件: $\beta_1 = \frac{p_1 - (p_1 + 1)\beta}{p_1^2}$, $\beta_2 = \frac{p_1 - \beta}{p_1}$, $\beta_3 = \frac{p_1 - \beta}{p_1}$, $\beta_4 = \frac{2p_1 - \beta}{p_1 + 1}$, 其中 $0 < \beta < p_1 / (p_1 + 1)$.

3.2 坐标变换

令 $\mu_1 = \chi_1, \mu_2 = \chi_2$ 和 $\mu_3 = \hat{\chi}_2$, 将 (11) 和 (12) 代入切换系统 (1), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= \mu_2^{p_1} + f_{k,1}(\mu_1), \\ \dot{\mu}_2 &= -(\zeta_1 \varphi_1(\mu_1) \mu_1^{\beta_1} + \zeta_2 \mu_3^{\beta_1} + \eta_1 \varphi_2(\mu_1) \mu_1^{\beta_2} + \eta_2 \mu_3^{\beta_2}) + f_{k,2}(\mu_1, \mu_2), \\ \dot{\mu}_3 &= -b_1 \mu_3^{\beta_3} - b_2 \mu_3^{\beta_4} + \varrho \mu_2^{p_1}, \\ y &= \mu_1. \end{aligned} \tag{13}$$

令 $\mu = [\mu_1, \mu_2, \mu_3]^T$, 闭环切换系统 (13) 可以表示为

$$\dot{\mu} = g_k(\mu) + \hat{g}_k(\mu), \tag{14}$$

其中

$$g_k(\mu) = [\mu_2^{p_1}, -\zeta_1\varphi_1(\mu_1)\mu_1^{\beta_1} - \zeta_2\mu_3^{\beta_1} - \eta_1\varphi_2(\mu_1)\mu_1^{\beta_2} - \eta_2\mu_3^{\beta_2}, -b_1\mu_3^{\beta_3} - b_2\mu_3^{\beta_4} + \varrho\mu_2^{p_1}]^T, \quad (15)$$

$$\hat{g}_k(\mu) = [f_{k,1}(\mu_1), f_{k,2}(\mu_1, \mu_2), 0]^T. \quad (16)$$

3.3 固定时间稳定性分析

下面, 将给出两个定理来完成对固定时间稳定的分析. 定理 1 将证明, 在不考虑非线性项 $f_{k,1}(\mu_1)$ 和 $f_{k,2}(\mu_1, \mu_2)$ 的情况下, 本文所构造的切换控制器和观测器可以保证闭环切换系统局部固定时间稳定. 定理 2 则进一步指出, 即使存在非线性项 $f_{k,1}(\mu_1)$ 和 $f_{k,2}(\mu_1, \mu_2)$, 本文所构造的切换控制器和观测器也能保证切换系统局部固定时间稳定.

定理 1 在不考虑非线性项 $f_{k,1}(\mu_1)$ 和 $f_{k,2}(\mu_1, \mu_2)$ 的情况下, 选择合适参数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 和 β_4 , 在输出反馈切换控制器和观测器 (11) 和 (12) 作用下, 闭环切换系统 (14) 局部固定时间稳定且满足输出约束.

证明 在不考虑 $\hat{g}_k(\mu)$ 的情况下, 闭环切换系统 (14) 简化为 $\dot{\mu} = g_k(\mu)$. 定理 1 的证明可分为两部分: 第一部分证明 $g_k(\mu)$ 关于 (γ_0, d_0, g_k^0) 和 $(\gamma_\infty, d_\infty, g_k^\infty)$ 是双极限齐次的; 第二部分证明切换系统 $\dot{\mu} = g_k(\mu)$, $\dot{\mu} = g_k^0(\mu)$ 和 $\dot{\mu} = g_k^\infty(\mu)$ 局部渐近稳定.

第一部分: $\dot{\mu} = g_k(\mu)$ 的双极限齐次性.

令

$$g_k^0(\mu) = \begin{bmatrix} \mu_2^{p_1} \\ -(\zeta_1\varphi_1(\mu_1)\mu_1^{\beta_1} + \zeta_2\mu_3^{\beta_1}) \\ -b_1\mu_3^{\beta_3} + \varrho\mu_2^{p_1} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

选择 $\gamma_0 = (\gamma_{0,1}, \gamma_{0,2}, \gamma_{0,3}) = (p_1, (p_1 - \beta)/p_1, p_1)$ 和 $d_0 = -\beta$, 则下列等式成立:

$$\begin{aligned} \gamma_{0,2}p_1 &= d_0 + \gamma_{0,1}, \\ \gamma_{0,1}\beta_1 &= \gamma_{0,3}\beta_1 = d_0 + \gamma_{0,2}, \\ \gamma_{0,3}\beta_3 &= \gamma_{0,2}p_1 = d_0 + \gamma_{0,3}. \end{aligned} \quad (18)$$

可得

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{g_{k,1}(\epsilon^{\gamma_{0,1}}\mu_1, \epsilon^{\gamma_{0,2}}\mu_2, \epsilon^{\gamma_{0,3}}\mu_3)}{\epsilon^{d_0 + \gamma_{0,1}}} - g_{k,1}^0(\mu) \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{(\epsilon^{\gamma_{0,2}}\mu_2)^{p_1}}{\epsilon^{d_0 + \gamma_{0,1}}} - \mu_2^{p_1} \right) = 0, \quad (19)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{g_{k,2}(\epsilon^{\gamma_{0,1}}\mu_1, \epsilon^{\gamma_{0,2}}\mu_2, \epsilon^{\gamma_{0,3}}\mu_3)}{\epsilon^{d_0 + \gamma_{0,2}}} - g_{k,2}^0(\mu) \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{-(\zeta_1(\epsilon^{\gamma_{0,1}}\mu_1)^{\beta_1} + \zeta_2(\epsilon^{\gamma_{0,3}}\mu_3)^{\beta_1})}{\epsilon^{d_0 + \gamma_{0,2}}} - (-\zeta_1\mu_1^{\beta_1} - \zeta_2\mu_3^{\beta_1}) \right) = 0, \quad (20)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{g_{k,3}(\epsilon^{\gamma_{0,1}}\mu_1, \epsilon^{\gamma_{0,2}}\mu_2, \epsilon^{\gamma_{0,3}}\mu_3)}{\epsilon^{d_0 + \gamma_{0,3}}} - g_{k,3}^0(\mu) \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{-b_1(\epsilon^{\gamma_{0,3}}\mu_3)^{\beta_3} + \varrho(\epsilon^{\gamma_{0,2}}\mu_2)^{p_1}}{\epsilon^{d_0 + \gamma_{0,3}}} - (-b_1\mu_3^{\beta_3} + \varrho\mu_2^{p_1}) \right) = 0. \quad (21)$$

因此, 由定义 2 可知, $g_k(\mu)$ 关于 (γ_0, d_0, g_k^0) 是 0- 极限齐次的.

令

$$g_k^\infty(\mu) = \begin{bmatrix} \mu_2^{p_1} \\ -(\eta_1\varphi_2(\mu_1)\mu_1^{\beta_2} + \eta_2\mu_3^{\beta_2}) \\ -b_2\mu_3^{\beta_4} + \varrho\mu_2^{p_1} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

选择 $\gamma_\infty = (\gamma_{\infty,1}, \gamma_{\infty,2}, \gamma_{\infty,3}) = (p_1, (2p_1 - \beta)/(p_1 + 1), p_1)$ 和 $d_\infty = (p_1^2 - (1 + \beta)p_1)/(p_1 + 1)$, 可知

$$\begin{aligned} \gamma_{\infty,2}p_1 &= d_\infty + \gamma_{\infty,1}, \\ \gamma_{\infty,1}\beta_2 &= \gamma_{\infty,3}\beta_2 = d_\infty + \gamma_{\infty,2}, \\ \gamma_{\infty,3}\beta_4 &= \gamma_{\infty,2}p_1 = d_\infty + \gamma_{\infty,3}. \end{aligned} \tag{23}$$

同样, 由定义 2 可得, $g_k(\mu)$ 关于 $(\gamma_\infty, d_\infty, g_k^\infty)$ 是 ∞ - 极限齐次的. 进一步, 由定义 2 可得, $g_k(\mu)$ 关于 (γ_0, d_0, g_k^0) 和 $(\gamma_\infty, d_\infty, g_k^\infty)$ 是双极限齐次的.

第二部分: 切换系统 $\dot{\mu} = g_k(\mu)$, $\dot{\mu} = g_k^0(\mu)$ 和 $\dot{\mu} = g_k^\infty(\mu)$ 局部渐近稳定.

为切换系统 $\dot{\mu} = g_k(\mu)$ 构造如下公共 Lyapunov 函数:

$$V(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = V_1(\mu_1) + V_2(\mu_2, \mu_3), \tag{24}$$

其中 $V_1(\mu_1) = \frac{2\zeta_1\phi^{\beta_1+1}}{(\beta_1+1)\pi} \tan(\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_1+1}}{2\phi^{\beta_1+1}}) + \frac{2\eta_1\phi^{\beta_2+1}}{(\beta_2+1)\pi} \tan(\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_2+1}}{2\phi^{\beta_2+1}})$ 是精心构造的障碍 Lyapunov 函数, 以防止系统违反输出约束, $V_2(\mu_2, \mu_3) = \frac{1}{p_1+1}|\mu_2|^{p_1+1} + \frac{\zeta_2}{\varrho(\beta_1+1)}|\mu_3|^{\beta_1+1} + \frac{\eta_2}{\varrho(\beta_2+1)}|\mu_3|^{\beta_2+1}$.

对 (24) 求导可得

$$\dot{V} = \zeta_1\varphi_1(\mu_1)\mu_1^{\beta_1}\dot{\mu}_1 + \eta_1\varphi_2(\mu_1)\mu_1^{\beta_2}\dot{\mu}_1 + \mu_2^{p_1}\dot{\mu}_2 + \frac{\zeta_2}{\varrho}\mu_3^{\beta_1}\dot{\mu}_3 + \frac{\eta_2}{\varrho}\mu_3^{\beta_2}\dot{\mu}_3. \tag{25}$$

将 (15) 代入 (25) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \zeta_1\varphi_1(\mu_1)\mu_1^{\beta_1}\dot{\mu}_1 + \eta_1\varphi_2(\mu_1)\mu_1^{\beta_2}\dot{\mu}_1 + \dot{\mu}_1(-\zeta_1\varphi_1(\mu_1)\mu_1^{\beta_1} - \zeta_2\mu_3^{\beta_1} \\ &\quad - \eta_1\varphi_2(\mu_1)\mu_1^{\beta_2} - \eta_2\mu_3^{\beta_2}) + \frac{\zeta_2}{\varrho}\mu_3^{\beta_1}\dot{\mu}_3 + \frac{\eta_2}{\varrho}\mu_3^{\beta_2}\dot{\mu}_3 \\ &= -(\zeta_2\mu_3^{\beta_1} + \eta_2\mu_3^{\beta_2})(\dot{\mu}_1 - \frac{\dot{\mu}_3}{\varrho}) \\ &= -\frac{1}{\varrho}(\zeta_2\mu_3^{\beta_1} + \eta_2\mu_3^{\beta_2})(b_1\mu_3^{\beta_3} + b_2\mu_3^{\beta_4}) \\ &= -\frac{\zeta_2b_1}{\varrho}|\mu_3|^{\beta_1+\beta_3} - \frac{\zeta_2b_2}{\varrho}|\mu_3|^{\beta_1+\beta_4} - \frac{\eta_2b_1}{\varrho}|\mu_3|^{\beta_2+\beta_3} - \frac{\eta_2b_2}{\varrho}|\mu_3|^{\beta_2+\beta_4}. \end{aligned} \tag{26}$$

根据以上讨论和本文 3.1 小节可得, $\dot{V} \leq 0$. 事实上, $\dot{V} = 0$ 意味着 $\mu_3 = 0$, 进一步从 (15) 可以得出 $\mu_1 = 0$ 和 $\mu_2 = 0$. 当 $\mu_3 \neq 0$, $\dot{V} < 0$, 这表明, 当 $t \rightarrow \infty$, $\mu_1 \rightarrow 0$ 和 $\mu_2 \rightarrow 0$. 由于系统输出约束的存在, 因此, 系统 $\dot{\mu} = g_k(\mu)$ 关于原点是局部渐近稳定的.

为系统 $\dot{\mu} = g_k^0(\mu)$ 构造如下公共 Lyapunov 函数:

$$V_0(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \frac{2\zeta_1\phi^{\beta_1+1}}{(\beta_1+1)\pi} \tan(\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_1+1}}{2\phi^{\beta_1+1}}) + \frac{1}{p_1+1}|\mu_2|^{p_1+1} + \frac{\zeta_2}{\varrho(\beta_1+1)}|\mu_3|^{\beta_1+1}. \tag{27}$$

对其求导可得

$$\dot{V}_0 = -\frac{\zeta_2b_1}{\varrho}|\mu_3|^{\beta_1+\beta_3}. \tag{28}$$

为系统 $\dot{\mu} = g_k^\infty(\mu)$ 构造如下公共 Lyapunov 函数

$$V_\infty(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \frac{2\eta_1\phi^{\beta_2+1}}{(\beta_2+1)\pi} \tan(\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_2+1}}{2\phi^{\beta_2+1}}) + \frac{1}{p_1+1}|\mu_2|^{p_1+1} + \frac{\eta_2}{\varrho(\beta_2+1)}|\mu_3|^{\beta_2+1}. \tag{29}$$

对其求导可得

$$\dot{V}_\infty = -\frac{\zeta_2b_2}{\varrho}|\mu_3|^{\beta_1+\beta_4}. \tag{30}$$

以类似的方式, 很容易验证切换系统 $\dot{\mu} = g_k^0(\mu)$ 和 $\dot{\mu} = g_k^\infty(\mu)$ 也是局部渐近稳定的.

从以上两部分的证明可得, 切换系统 $g_k(\mu)$ 关于 (γ_0, d_0, g_k^0) 和 $(\gamma_\infty, d_\infty, g_k^\infty)$ 是双极限齐次的, 且切换系统 $g_k(\mu)$, $\dot{\mu} = g_k^0(\mu)$ 和 $\dot{\mu} = g_k^\infty(\mu)$ 局部渐近稳定, 其中 $d_\infty > 0 > d_0$. 根据引理 1, 不考虑非线性项 $f_{k,1}(\mu_1)$ 和 $f_{k,2}(\mu_1, \mu_2)$ 情况下, 闭环切换系统 (14) 局部固定时间稳定且满足输出约束.

定理 2 在考虑非线性项 $f_{k,1}(\mu_1)$ 和 $f_{k,2}(\mu_1, \mu_2)$ 的情况下, 选择合适参数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 和 β_4 , 在输出反馈切换控制器 (11) 和 (12) 作用下, 闭环切换系统 (14) 局部固定时间稳定且不违反输出约束.

证明 对于闭环切换系统 (14), 显然, $\hat{g}_k(0) = 0$. 应用中值定理, 可得

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{g}_{k,1}(\epsilon^{\gamma_0,1} \mu_1, \epsilon^{\gamma_0,2} \mu_2, \epsilon^{\gamma_0,3} \mu_3)}{\epsilon^{d_0+\gamma_0,1}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f_{k,1}(\epsilon^{\gamma_0,1} \mu_1)}{\epsilon^{d_0+\gamma_0,1}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{O(\epsilon^{\gamma_0,1})}{\epsilon^{d_0+\gamma_0,1}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon^{-d_0}) = 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{g}_{k,2}(\epsilon^{\gamma_0,1} \mu_1, \epsilon^{\gamma_0,2} \mu_2, \epsilon^{\gamma_0,3} \mu_3)}{\epsilon^{d_0+\gamma_0,2}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f_{k,2}(\epsilon^{\gamma_0,1} \mu_1, \epsilon^{\gamma_0,2} \mu_2)}{\epsilon^{d_0+\gamma_0,2}} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{O(\epsilon^{\gamma_0,1}) + O(\epsilon^{\gamma_0,2})}{\epsilon^{d_0+\gamma_0,2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon^{\gamma_0,1(1-\beta_1)}) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon^{-d_0}) = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\hat{g}_{k,1}(\epsilon^{\gamma_\infty,1} \mu_1, \epsilon^{\gamma_\infty,2} \mu_2, \epsilon^{\gamma_\infty,3} \mu_3)}{\epsilon^{d_\infty+\gamma_\infty,1}} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{f_{k,1}(\epsilon^{\gamma_\infty,1} \mu_1)}{\epsilon^{d_\infty+\gamma_\infty,1}} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{O(\epsilon^{\gamma_\infty,1})}{\epsilon^{d_\infty+\gamma_\infty,1}} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} (\epsilon^{-d_\infty}) = 0, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\hat{g}_{k,2}(\epsilon^{\gamma_\infty,1} \mu_1, \epsilon^{\gamma_\infty,2} \mu_2, \epsilon^{\gamma_\infty,3} \mu_3)}{\epsilon^{d_\infty+\gamma_\infty,2}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{f_{k,2}(\epsilon^{\gamma_\infty,1} \mu_1, \epsilon^{\gamma_\infty,2} \mu_2)}{\epsilon^{d_\infty+\gamma_\infty,2}} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{O(\epsilon^{\gamma_\infty,1}) + O(\epsilon^{\gamma_\infty,2})}{\epsilon^{d_\infty+\gamma_\infty,2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} (\epsilon^{\gamma_\infty,1(1-\beta_1)}) + \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} (\epsilon^{-d_\infty}) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

综上所述, 由引理 2 和定理 1 可知, 考虑带有非线性项 $f_{k,1}(\mu_1)$ 和 $f_{k,2}(\mu_1, \mu_2)$ 的闭环切换系统 (14) 局部固定时间稳定且满足输出约束.

注释 1 对于定理 1 和定理 2, 有以下几点需做详细说明.

(1) 构造的函数 $V_1(\chi_1) = V_1(\mu_1)$ 对于处理输出约束起着决定性作用. 为更好验证其对系统满足输出约束的作用, 详细说明如下: 对于 $-\phi < \chi_1(0) < \phi$, $t \geq 0$, 显然, $0 < V_1(\mu_1(t)) < V(\mu_1, \mu_2, \mu_3) < V(\mu_1(0), \mu_2(0), \mu_3(0))$. 因此, $\forall t \geq 0$, $\frac{2\zeta_1 \phi^{\beta_1+1}}{(\beta_1+1)\pi} \tan(\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_1+1}}{2\phi^{\beta_1+1}}) + \frac{2\eta_1 \phi^{\beta_2+1}}{(\beta_2+1)\pi} \tan(\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_2+1}}{2\phi^{\beta_2+1}}) < V(\mu_1(0), \mu_2(0), \mu_3(0))$. 计算可得, $\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_1+1}}{2\phi^{\beta_1+1}} < \tan^{-1}(\frac{\pi}{\phi^{\beta_1+1}} V(\mu_1(0), \mu_2(0), \mu_3(0))) < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_2+1}}{2\phi^{\beta_2+1}} < \tan^{-1}(\frac{\pi}{\phi^{\beta_2+1}} V(\mu_1(0), \mu_2(0), \mu_3(0))) < \frac{\pi}{2}$. 从以上分析可知: 对于 $t \geq 0$, $-\phi < y(t) = \chi_1(t) = \mu_1(t) < \phi$.

(2) 定理 1 和定理 2 中, 局部固定时间稳定是因为输出约束的原因使得系统只能在 $(-\phi, \phi) \times R^{n-1}$ 区域内运行, 但是当输出约束边界趋近于无穷大时, 系统退化为无约束的情况, 根据洛必达法则, $\lim_{\phi \rightarrow \infty} V_1(\mu_1) = \frac{2\zeta_1 \phi^{\beta_1+1}}{(\beta_1+1)\pi} \tan(\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_1+1}}{2\phi^{\beta_1+1}}) + \frac{2\eta_1 \phi^{\beta_2+1}}{(\beta_2+1)\pi} \tan(\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_2+1}}{2\phi^{\beta_2+1}}) = \frac{1}{\beta_1+1} |\mu_1|^{\beta_1+1} + \frac{1}{\beta_2+1} |\mu_1|^{\beta_2+1}$, 因此, 该障碍 Lyapunov 函数亦可处理无约束的情况而无需重新设计切换控制器与观测器.

(3) 相关参数的选择, 可参考如下策略: 首先, 由于 $0 < \beta < p_1/(p_1+1)$, 因此 β 应选择在 $(0, 1)$ 或更小的范围内, 以便系统能获得更快的瞬态响应. 但是, 过小的 β 会使连续输出反馈切换控制器抖动太频繁. 然后, 较大的 $\zeta_1, \zeta_2, \eta_1, \eta_2$ 可以获得更快的收敛速度, 但如果过大, 在实际工程中很难实现. 一般来说, 参数选择有以下原则: ζ_1 和 ζ_2 大于 η_1 和 η_2 . 最后, 基于相同的选择原则调整参数 b_1, b_2 和 ρ .

4 仿真实验

下面利用一个数值例子和连续搅拌釜式反应器 (continuous stirred tank reactor, CSTR)^[45, 46] 的固定时间控制来验证本文的主要结论.

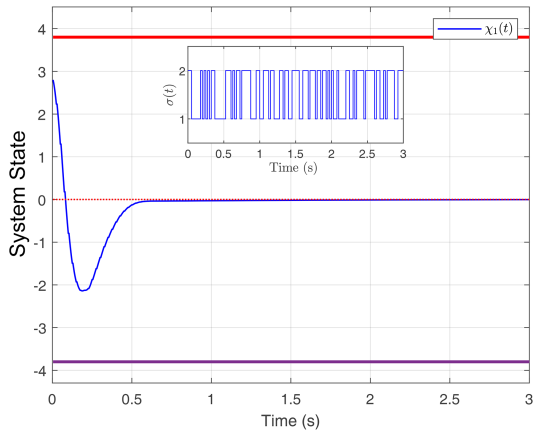


图 1 (网络版彩图) 状态 χ_1 的响应

Figure 1 (Color online) Response of state $\chi_1(t)$

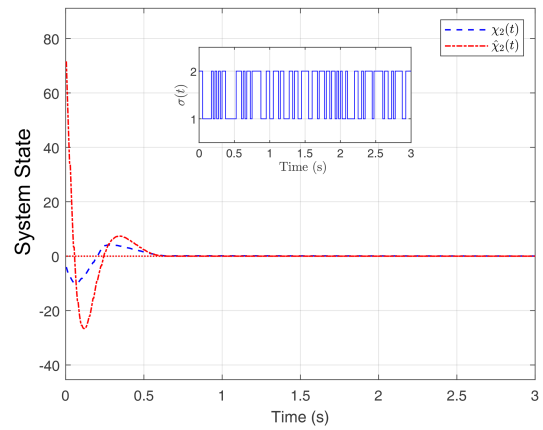


图 2 (网络版彩图) 状态 χ_2 及其估计 $\hat{\chi}_2(t)$ 的响应

Figure 2 (Color online) Response of state χ_2 and its estimation $\hat{\chi}_2(t)$

4.1 数值算例

考虑如下二阶切换系统:

$$\begin{aligned} S_1 : \dot{\chi}_1 &= \chi_2^{p_1} + f_{1,1}(\chi_1), \dot{\chi}_2 = u_1^{p_1} + f_{1,2}(\chi_1, \chi_2), \\ S_2 : \dot{\chi}_1 &= \chi_2^{p_{1,2}} + f_{2,1}(\chi_1), \dot{\chi}_2 = u_2^{p_{2,2}} + f_{2,2}(\chi_1, \chi_2), \end{aligned} \quad (35)$$

其中 $p_1 = 5/3$, $p_{1,2} = 7/5$, $f_{1,1}(\chi_1) = 0$, $f_{1,2}(\chi_1, \chi_2) = \sin(\chi_1)^2 \chi_2^{17/21}$; $p_{2,2} = 7/3$, $f_{2,1}(\chi_1) = \chi_1^{9/7} \cos(\chi_1)$, $f_{2,2}(\chi_1, \chi_2) = \sin(\chi_2)/(1 + \chi_1^2)$.

构造固定时间输出反馈切换控制器和观测器

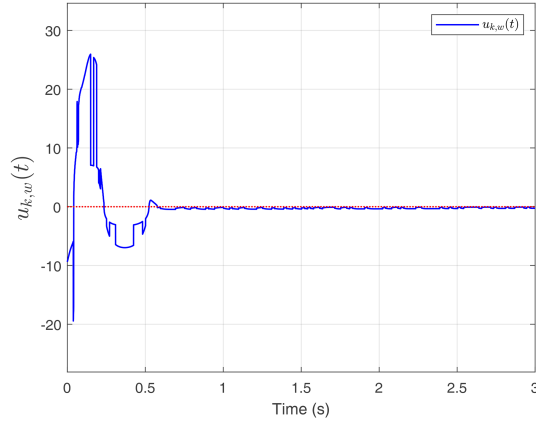
$$u_{k,w} = -(\zeta_1 \varphi_1(\mu_1) \chi_1^{\beta_1} + \zeta_2 \hat{\chi}_2^{\beta_1} + \eta_1 \varphi_2(\mu_1) \chi_1^{\beta_2} + \eta_2 \hat{\chi}_2^{\beta_2})^{\frac{1}{p_{k,2}}}, \quad (36)$$

$$\dot{\xi} = -b_1 \hat{\chi}_2^{\beta_3} - b_2 \hat{\chi}_2^{\beta_4} - \varrho f_{k,1}(\chi_1), \quad (37)$$

其中 $\hat{\chi}_2 = \xi + \varrho \chi_1$ 是状态 χ_2 的估计, $\varphi_1(\mu_1) = \sec^2(\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_1+1}}{2\phi^{\beta_1+1}})$, $\varphi_2(\mu_1) = \sec^2(\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_2+1}}{2\phi^{\beta_2+1}})$, $\phi = 3.8$ 是预先设定的输出约束, $\zeta \in S = 1, 2$.

令 $\zeta_1 = 22$, $\zeta_2 = 28.9$, $\eta_1 = 1.2$, $\eta_2 = 0.09$, $b_1 = 33$, $b_2 = 8$ 和 $\varrho = 22$. 由于 $\beta_1 = \frac{p_1 - (p_1 + 1)\beta}{p_1^2}$, $\beta_2 = \frac{p_1 - \beta}{p_1}$, $\beta_3 = \frac{p_1 - \beta}{p_1}$, $\beta_4 = \frac{2p_1 - \beta}{p_1 + 1}$, 其中 $0 < \beta < p_1/(p_1 + 1)$, $p_1/(p_1 + 1) = 5/8$, 因此 $\beta = 0.5$, $\beta_1 = 3/25$, $\beta_2 = 7/10$, $\beta_3 = 7/10$, $\beta_4 = 17/16$.

令初始值 $(\chi_1(0), \chi_2(0), \xi(0))^T = (2.8, -4, 10)^T$, 则系统状态的响应如图 1 和图 2 所示, 其中图 1 表示系统状态 χ_1 的响应曲线, 图 2 表示系统状态 χ_2 及其估计 $\hat{\chi}_2$ 的响应曲线. 仿真结果表明, 系统状态均在固定时间内收敛到平衡点, 同时系统输出满足约束条件 $-3.8 < y(t) = \chi_1(t) < 3.8$. 图 3 表示控制器 (36) 的变化曲线.

图 3 (网络版彩图) 控制输入 $u_{k,w}(t)$ Figure 3 (Color online) Control input $u_{k,w}(t)$

4.2 连续搅拌釜式反应器

考虑一种在化工生产中广泛使用的设备, 连续搅拌釜式反应器. 其可化为以下切换系统:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{C}}_A &= \frac{\bar{q}_\sigma}{V}(\bar{C}_{Af\sigma} - \bar{C}_A) - a_0 e^{-\frac{E}{RT}} \bar{C}_A, \\ \dot{\bar{T}} &= \frac{\bar{q}_\sigma}{V}(\bar{T}_{f\sigma} - \bar{T}) - a_1 e^{-\frac{E}{RT}} \bar{C}_A + a_2(\bar{T}_c - \bar{T}),\end{aligned}\quad (38)$$

其中 \bar{C}_A , \bar{T} 分别是反应物 A 的浓度, 单位为 (mol/L) 和反应器的温度 (K), T_c 是冷却剂温度 (K), 系统 (38) 中的其他标称参数参见文献 [45] 中的表 1.

系统 (38) 的流程如图 4 所示. 基于文献 [45] 表 2 中连续搅拌釜式反应器的参数, 它的两种工作模式的不稳定平衡点为 $\bar{T}^* = 350$ K, $\bar{C}_A^* = 0.5$ mol/L, $\bar{T}_c^* = 300$ K. CSTR 的约束可以来自特定的反应物浓度要求或安全要求. 在这种情况下, 没有考虑监督机制的作用, 假设选择阀的位置是由任意切换决定的.

如文献 [45, 46] 所示, 通过状态反馈线性化可得

$$\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{\bar{q}_k}{V}(\bar{C}_{Af k} - \bar{C}_A^*) - a_0 e^{-\frac{E/R}{x_2 + T^*}}(x_1 + \bar{C}_A^*) \end{bmatrix},$$

其中 $x_1 = \bar{C}_A - \bar{C}_A^*$, $x_2 = \bar{T} - \bar{T}^*$, $u = \bar{T}_c - \bar{T}_c^*$, 系统 (38) 可以转化成如下形式:

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_1 &= \chi_2^{p_1} + f_{k,1}(\chi_1), \\ \dot{\chi}_2 &= u_k^{p_{k,2}}, \\ y &= \chi_1,\end{aligned}\quad (39)$$

其中 $k \in \{1, 2\}$, y 是输出, $f_{1,1}(\chi_1) = 0.5\chi_1$, $f_{2,1}(\chi_1) = 2\chi_1$, $p_1 = p_{1,2} = p_{2,2} = 1$.

构造固定时间输出反馈切换控制器和观测器

$$u_k = -(\zeta_1 \varphi_1(\mu_1) \chi_1^{\beta_1} + \zeta_2 \hat{\chi}_2^{\beta_1} + \eta_1 \varphi_2(\mu_1) \chi_1^{\beta_2} + \eta_2 \hat{\chi}_2^{\beta_2})^{\frac{1}{p_{k,2}}}, \quad (40)$$

$$\dot{\hat{\chi}} = -b_1 \hat{\chi}_2^{\beta_3} - b_2 \hat{\chi}_2^{\beta_4} - \varrho f_{k,1}(\chi_1), \quad (41)$$

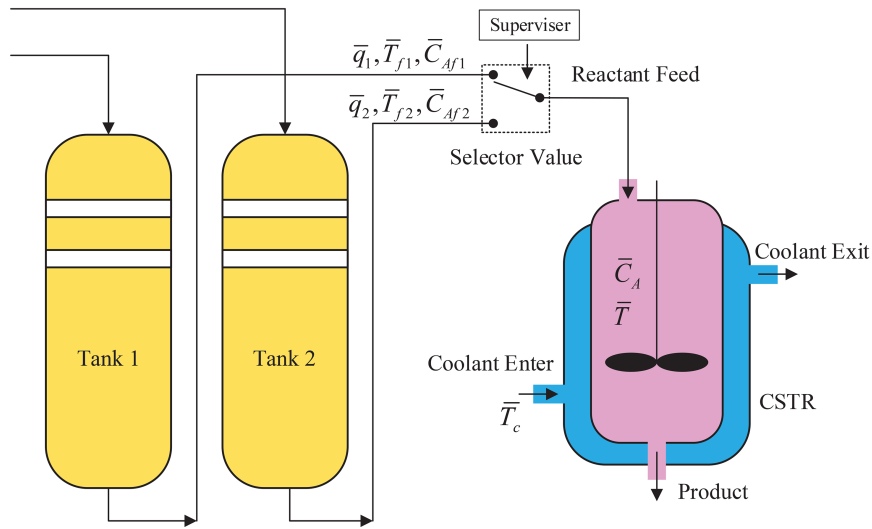


图 4 (网络版彩图) CSTR 的工作流程
Figure 4 (Color online) Working process of CSTR

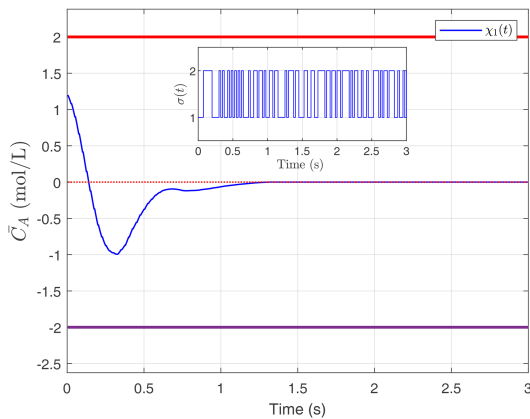


图 5 (网络版彩图) 状态 χ_1 的响应
Figure 5 (Color online) Response of state χ_1

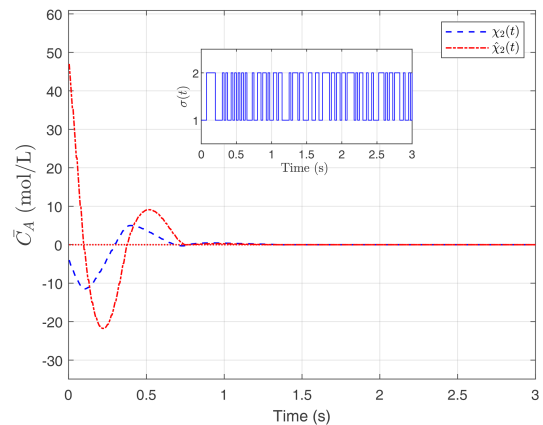


图 6 (网络版彩图) 状态 χ_2 及其估计 $\hat{\chi}_2$ 的响应
Figure 6 (Color online) Response of state χ_2 and its estimation $\hat{\chi}_2$

其中 $\hat{\chi}_2 = \xi + \varrho\chi_1$ 是状态 χ_2 的估计, $\varphi_1(\mu_1) = \sec^2(\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_1+1}}{2\phi^{\beta_1+1}})$, $\varphi_2(\mu_1) = \sec^2(\frac{\pi|\mu_1|^{\beta_2+1}}{2\phi^{\beta_2+1}})$, $\phi = 2$ 是预先设定的输出约束。

选择参数 $\zeta_1 = 15$, $\zeta_2 = 7$, $\eta_1 = 0.3$, $\eta_2 = 0.2$, $b_1 = 23$, $b_2 = 4$ 和 $\varrho = 32$ 。由于 $\beta_1 = \frac{p_1 - (p_1 + 1)\beta}{p_1^2}$, $\beta_2 = \frac{p_1 - \beta}{p_1}$, $\beta_3 = \frac{p_1 - \beta}{p_1}$, $\beta_4 = \frac{2p_1 - \beta}{p_1 + 1}$, 其中 $0 < \beta < p_1 / (p_1 + 1)$, $p_1 / (p_1 + 1) = 1/2$, 因此选择 $\beta = 0.4$, $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.6$, $\beta_3 = 0.6$, $\beta_4 = 0.8$ 。

选择初始值 $(\chi_1(0), \chi_2(0), \xi(0))^T = (1.2, -4, 5)^T$, 系统状态的响应如图 5 和图 6 所示, 其中图 5 表示系统状态 χ_1 的响应曲线, 图 6 表示系统状态 χ_2 及其估计 $\hat{\chi}_2$ 的响应曲线, 仿真结果表明, 系统状态均在固定时间内收敛到平衡点, 同时系统输出满足约束条件 $-2 < y(t) = \chi_1(t) < 2$ 。图 7 表示控制器 (40) 的变化曲线。

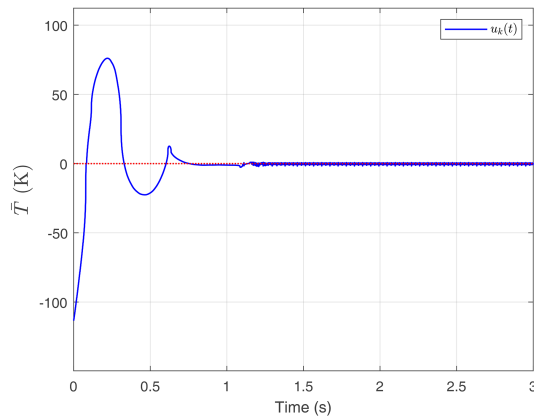


图 7 (网络版彩图) 控制输入 u_k
 Figure 7 (Color online) Control input u_k

5 结论

本文利用输出反馈实现了一类具有输出约束的二阶切换非线性系统的局部固定时间镇定. 基于双极限齐次方法, 设计了降阶切换观测器以估计未知状态, 实现了输出反馈切换控制, 使得闭环切换系统局部固定时间镇定. 同时, 构造的具有双正切型函数的公共 Lyapunov 函数, 能够防止系统状态违反输出约束. 所提出的控制策略可以在不改变切换控制器和观测器结构的情况下适用于有输出约束或无输出约束两种情况, 且设计的输出反馈切换控制器结构相对简单, 具有较强的鲁棒性.

参考文献

- 1 Zhao Z, He W, Ge S S. Adaptive neural network control of a fully actuated marine surface vessel with multiple output constraints. *IEEE Trans Control Syst Technol*, 2014, 22: 1536–1543
- 2 He W, Huang H F, Ge S S. Adaptive neural network control of a robotic manipulator with time-varying output constraints. *IEEE Trans Cybern*, 2017, 47: 3136–3147
- 3 He X Y, He W, Shi J, et al. Boundary vibration control of variable length crane systems in two-dimensional space with output constraints. *IEEE ASME Trans Mechatron*, 2017, 22: 1952–1962
- 4 Sun L. Saturated adaptive output-constrained control of cooperative spacecraft rendezvous and docking. *IEEE/CAA J Automatica Sinica*, 2019, 6: 1462–1470
- 5 He W, Ge S S. Vibration control of a flexible beam with output constraint. *IEEE Trans Ind Electron*, 2015, 62: 5023–5030
- 6 Liu Z Q, Sun N, Wu Y M, et al. Multi-objective trajectory planning for 5-DOF underactuated tower cranes with state constraints. *Sci Sin Inform*, 2022, 52: 521–538 [刘卓清, 孙宁, 吴易鸣, 等. 考虑状态约束的五自由度塔式吊车多目标最优轨迹规划. *中国科学: 信息科学*, 2022, 52: 521–538]
- 7 Gilber E G, Tan K T. Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Trans Autom Control*, 1991, 36: 1008–1020
- 8 Blanchini F. Set invariance in control. *Automatica*, 1999, 35: 1747–1767
- 9 Bemporad A. Reference governor for constrained nonlinear systems. *IEEE Trans Autom Control*, 1998, 43: 415–419
- 10 Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 2000, 36: 789–814
- 11 Ngo K B, Mahony R, Jiang Z P. Integrator backstepping using barrier functions for systems with multiple state constraints. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, 2005. 8306–8312
- 12 Tee K P, Ge S S, Tay E H. Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems.

- Automatica, 2009, 45: 918–927
- 13 Chen C C, Sun Z Y. A unified approach to finite-time stabilization of high-order nonlinear systems with an asymmetric output constraint. *Automatica*, 2020, 111: 108581
 - 14 Wu Y, Xie X J. A new analysis approach to the output constraint and its application in high-order nonlinear systems. *Sci China Inf Sci*, 2023, 66: 195206
 - 15 Chen C C, Sun Z Y. Output feedback finite-time stabilization for high-order planar systems with an output constraint. *Automatica*, 2020, 114: 108843
 - 16 Ding S H, Park J H, Chen C C. Second-order sliding mode controller design with output constraint. *Automatica*, 2020, 112: 108704
 - 17 Lin X Z, Chen C C. Finite-time output feedback stabilization of planar switched systems with/without an output constraint. *Automatica*, 2021, 131: 109728
 - 18 Lin X Z, Chen C C, Qian C J. Smooth output feedback stabilization of a class of planar switched nonlinear systems under arbitrary switchings. *Automatica*, 2017, 82: 314–318
 - 19 Chen J, Lyu Z L, Huang X Y, et al. Safety analysis and safety-critical control of nonlinear systems: Barrier function approach. *Act Autom Sin*, 2023, 49: 567–579 [陈杰, 吕梓亮, 黄鑫源, 等. 非线性系统的安全分析与控制: 障碍函数方法. *自动化学报*, 2023, 49: 567–579]
 - 20 Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Syst Mag*, 1999, 19: 59–70
 - 21 Liberzon D. *Switching in Systems and Control*. New York: Springer, 2003
 - 22 Shorten R, Shorten F, Mason O, et al. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Rev*, 2007, 49: 545–592
 - 23 Lin H, Antsaklis P J. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE Trans Autom Control*, 2009, 54: 308–322
 - 24 Huang S P, Xiang Z R. Finite-time stabilization of a class of switched stochastic nonlinear systems under arbitrary switching. *Int J Robust Nonlinear Control*, 2016, 26: 2136–2152
 - 25 Orlov Y. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM J Control Optim*, 2004, 43: 1253–1271
 - 26 Lin X Z, Huang J X, Park J H. Adaptive nonsmooth state-feedback stabilization of cascade output-constrained uncertain switched systems. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2023, 53: 6921–6930
 - 27 Huang S P, Xiang Z R. Finite-time stabilization of switched stochastic nonlinear systems with mixed odd and even powers. *Automatica*, 2016, 73: 130–137
 - 28 Zhao X D, Shi P, Yin Y F, et al. New results on stability of slowly switched systems: A multiple discontinuous Lyapunov function approach. *IEEE Trans Autom Control*, 2017, 62: 3502–3509
 - 29 Niu B, Zhao P, Liu J D, et al. Global adaptive control of switched uncertain nonlinear systems: An improved MDADT method. *Automatica*, 2020, 115: 108872
 - 30 Liu J W, Yan X, Zhang L, et al. Finite-time stabilization control of nonlinear systems with full-state constraints. *IET Control Theory Appl*, 2024, doi:10.1049/cth2.12655
 - 31 Sun Z Y, Bai Y, Chen C C, et al. Fast finite-time adaptive stabilizing strategy of uncertain nonlinear system with output constraints and its application in liquid-level system. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2024, 54: 4413–4424
 - 32 Yao Q J. Fixed-time output feedback stabilization of a class of high-order planar nonlinear systems. *Int J Robust Nonlinear Control*, 2022, 32: 6574–6585
 - 33 Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Trans Autom Control*, 2012, 57: 2106–2110
 - 34 Polyakov A, Polyakov D, Perruquetti W. Finite-time and fixed-time stabilization: implicit Lyapunov function approach. *Automatica*, 2015, 51: 332–340
 - 35 Wang F L, Long L J. Dynamic event-triggered fixed-time adaptive fuzzy control of nonstrict-feedback switched nonlinear systems. *Int J Robust Nonlinear Control*, 2022, 32: 4072–4096
 - 36 Polyakov A, Efimov D, Ping X B. Consistent discretization of homogeneous finite/fixed-time controllers for LTI systems. *Automatica*, 2023, 155: 111118
 - 37 Zekraoui S, Espitia N, Perruquetti W. Finite/fixed-time stabilization of a chain of integrators with input delay via

- PDE-based nonlinear backstepping approach. *Automatica*, 2023, 155: 111095
- 38 Gong P, Han Q L. Distributed fixed-time optimization for second-order nonlinear multiagent systems: state and output feedback designs. *IEEE Trans Autom Control*, 2024, 69: 3198–3205
- 39 Tian B L, Zuo Z Y, Yan X M, et al. A fixed-time output feedback control scheme for double integrator systems. *Automatica*, 2017, 80: 17–24
- 40 Su Y X, Zheng C H. Global fixed-time output feedback stabilization for a class of double integrator systems. *IEEE Trans Circuit Syst II Express Briefs*, 2020, 67: 1954–1958
- 41 Gao F Z, Zhu C L, Huang J C, et al. Global fixed-time output feedback stabilization for a class of double integrator systems. *IEEE Trans Circuit Syst II Express Briefs*, 2021, 68: 707–711
- 42 Hu X F, Wang L M, Zhang C K, et al. Fixed-time stabilization of discontinuous spatiotemporal neural networks with time-varying coefficients via aperiodically switching control. *Sci China Inf Sci*, 2023, 66: 152204
- 43 Andrieu V, Praly L, Astolfi A. Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback. *SIAM J Control Optim*, 2008, 47: 1814–1850
- 44 Liu W S, Chitour Y, Sontag E. On finite-gain stabilizability of linear systems subject to input saturation. *SIAM J Control Optim*, 1996, 34: 1190–1291
- 45 Yazdi M B, Jahed-Motlagh M R. Stabilization of a CSTR with two arbitrarily switching modes using modal state feedback linearization. *Chem Eng J*, 2009, 155: 838–843
- 46 Ma R C, Zhao J. Backstepping design for global stabilization of switched nonlinear systems in lower triangular form under arbitrary switchings. *Automatica*, 2010, 46: 1819–1823

Fixed-time output feedback stabilization for second-order switched systems with output constraints

Xiangze LIN^{1*}, Jingxin HUANG¹, Jiani CHENG¹ & Shihua LI^{2*}

1. *College of Artificial Intelligence, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210031, China;*

2. *School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China*

* Corresponding author. E-mail: xzlin@njau.edu.cn, lsh@seu.edu.cn

Abstract In this paper, the problem of fixed-time output feedback stabilization for second-order switched nonlinear systems with output constraints is investigated. Reduced-order switched state observers are constructed deliberately to estimate the unmeasured state, and by combining the switched observers with the elaborately designed switched state feedback controllers, fixed-time output feedback stabilization of the closed-loop switched systems is realized. The tangent-type barrier Lyapunov function is applied to ensure that the closed-loop switched systems can satisfy the output constraints while being stable in a fixed time. As the output constraint tends to infinity, the constructed barrier Lyapunov function degenerates into a common Lyapunov function for the case without constraints. Therefore, the method proposed in a unified framework in this paper applies to both cases with or without output constraints, with no need to change the designed structure of the switched controllers and observers. The main results in this study are proved by the bi-limit homogeneous method. Numerical simulations and fixed-time control of continuously stirred tank reactors verify the effectiveness of the proposed method.

Keywords switched nonlinear systems, fixed-time, output feedback, output constraints, bi-limit homogeneous method