SCIENTIA SINICA Informationis





# 量子生成对抗网络抗噪优化的容错量子隐形传态 系统

李嘉鑫,史尚尚,尚瑞敏,李亚男,王志敏\*,顾永建\*

中国海洋大学信息科学与工程学部,青岛 266100

\* 通信作者. E-mail: wangzhimin@ouc.edu.cn, yjgu@ouc.edu.cn

收稿日期: 2024-01-11; 接受日期: 2024-03-25; 网络出版日期: 2024-06-11

山东省自然科学基金 (批准号: ZR2021ZD19) 和国家自然科学基金 (批准号: 12005212) 资助项目

**摘要** 量子生成对抗网络 (quantum generative adversarial networks, QGAN) 在图像处理、金融分析 等领域应用中展现出了优越的性能.本文首次提出了一种基于量子生成对抗网络的量子拓扑码解码器, 并应用于优化容错量子隐形传态系统.在本文中,首先构建并测试了 QGAN 算法的量子线路,搭建了 拓扑码解码器训练模型.其次,针对拓扑码本征值数据集,设计了算法的输入输出,并训练得到高效率 的解码模型.最后,构建了带有 QGAN 解码器的拓扑码优化量子隐形传态系统,相较于原始系统展现 出更好的容错性能.在码距 d=3 及 d=5 的解码实验表明,本模型纠错成功率可以达到 99.887%.在 实验中,本 QGAN 解码器的保真度阈值约为 P=0.1706,相较经典解码模型阈值约为 P=0.1099,有 了明显提升.另外,量子隐形传态系统在 d=3 拓扑码优化抗噪下,在非极化噪声阈值 P < 0.0607 范 围内具有明显的保真度提升;在 d=5 拓扑码优化抗噪下,在非极化噪声阈值 P < 0.0778 范围内具有 明显的保真度提升.本文提出的 QGAN 解码模型,结合了量子隐形传态方法,为量子深度学习的应用 提供了新思路,并可应用于其他非均匀噪声处理领域.

关键词 量子生成对抗网络, 拓扑码, 解码器, 非极化噪声, 量子隐形传态, 保真度

# 1 引言

以深度学习为代表的人工智能为许多科学技术领域实现了技术突破. 生成对抗网络 (generative adversarial networks, GAN) 是经典深度学习的强大工具,由生成器和鉴别器构成<sup>[1]</sup>. 生成器和鉴别器经过一个对抗博弈的学习过程,最终达到一个纳什平衡点. 量子生成对抗网络 (quantum generative adversarial networks, QGAN) 是经典 GAN 的量子版本<sup>[2~4]</sup>. 在 2018 年, Lloyd 等<sup>[2]</sup>提出了 3 种 QGAN 的模型,证明了在比特消耗以及时间复杂度等方面, QGAN 比经典 GAN 具有更好的性能表现.

**引用格式:** 李嘉鑫, 史尚尚, 尚瑞敏, 等. 量子生成对抗网络抗噪优化的容错量子隐形传态系统. 中国科学: 信息科学, 2024, 54: 1541–1557, doi: 10.1360/SSI-2024-0015

Li J X, Shi S S, Shang R M, et al. A fault-tolerant quantum teleportation system with the anti-noise optimization of quantum generative adversarial networks (in Chinese). Sci Sin Inform, 2024, 54: 1541–1557, doi: 10.1360/SSI-2024-0015

© 2024《中国科学》杂志社

QGAN 在金融预测、图像生成以及态制备等应用领域展现出了显著的优势<sup>[5~8]</sup>.例如,在 2019 年, Zoufal 等<sup>[9]</sup>提出了一种近似量子态加载的 QGAN,使用量子模拟以及 IBM Q Experience 提供的 实际量子处理器对其进行了测试,并用量子模拟演示了 QGAN 在股市期权定价的预测应用. 2021 年, Huang 等<sup>[10]</sup>的工作展现了 QGAN 的高维图像生成能力. 2022 年, Rudolph 等<sup>[11]</sup>实现了一个 QGAN 来学习和生成高质量图像,在数据集数量具有显著优势的情况下达到经典 GAN 的生成效果.

量子通信是量子信息科学领域的重要研究方向,多年来在本领域学者的广泛研究下不断发展.量子通信在量子通信协议的规则下实现信息的交互.量子隐形传态 (Quantum teleportation)<sup>[12]</sup> 是量子通讯中的经典协议.2017 年,潘建伟院士团队<sup>[13]</sup> 实现了单光子地面到卫星距离长达 1.4 公里的量子隐形传态.然而由于量子态的脆弱性以及通信过程中由于噪声等干扰对于量子态的破坏,容错的量子隐形传态方法仍然需要被进一步研究.

量子纠错码 (quantum error correction codes, QECCs)<sup>[14~16]</sup> 是解决量子通信噪声干扰的问题、提 升量子系统容错性能的重要手段.量子拓扑码由于具有高实验可行性和良好性能,被认为是最有前途 的 QECCs 之一<sup>[17~19]</sup>.量子拓扑码是高度简并的<sup>[20]</sup>,即纠正一种错误综合征有多个策略,因此需要 一个解码器选择最优的纠错策略.寻找高效的量子拓扑码解码器一直是许多研究的主题.例如,最小权 值完美匹配 (minimum weight perfect matching, MWPM)<sup>[21,22]</sup> 通过寻找综合征的全局最短纠错路径 来确定最优的解码策略. 然而经研究发现,在提高拓扑码容错性能上,基于深度学习的解码器具有更 好的发展潜力<sup>[23~28]</sup>.例如,在 2019 年, Andreasson 等<sup>[29]</sup>提出了一种基于深度强化学习的拓扑码解 码器,具有相当于 MWPM 的容错性能.在 2022 年, Wang 等<sup>[30]</sup>提出了一种基于经典 GAN 的拓扑码 解码器,解码后的逻辑量子态保真度可以达到 98%,优于传统 MWPM 的容错性能.

本文提出了基于 QGAN 解码器优化抗噪的容错量子隐形传态方法.利用基于 QGAN 解码器的 量子拓扑码,在不破坏逻辑态的情况下纠正错误,提高量子隐形传态系统的容错性能.在 QGAN 解码 器中,一个变分量子线路 (variational quantum circuit, VQC)<sup>[31]</sup> 作为量子生成器,另一个 VQC 作为量 子鉴别器.我们对于  $d = 3 \ \pi d = 5$ 的二维拓扑表面码进行了数值实验.实验结果表明,本模型相较于 MWPM 的全局量子位遍历算法,具有更高的保真度阈值和更好的解码效果.同时,在带有 QGAN 解 码器的拓扑码优化量子隐形传态实验中,优化系统相较于原系统具有更好的容错性能和保真度表现.

本文的提纲如下. 第2节对于 QGAN、VQC、量子门、量子隐形传态和拓扑表面码作出简短而完整的背景介绍. 第3节介绍了算法模型结构和基本原理的详细描述. 第4节实验评估部分给出了模型的实验结果和与类似工作的对比分析. 最后, 我们讨论总结了本工作的优势与展望.

#### 2 基本概念

# 2.1 QGAN, VQC 及量子门

QGAN 基本结构与经典 GAN 类似. 在经典 GAN 中, 生成器和鉴别器通常由两个神经网络构成, 通过对抗学习调整网络参数, 试图找到一个最优的输出. 在量子的情况下, 鉴别器和生成器至少其中 之一是一个 VQC. VQC 是一种参数化的量子线路, 其中包含一些可调节的参数. 这些参数可以在训 练过程中进行优化, 以最小化损失函数. VQC 的输出通常用于计算损失函数和梯度, 并与经典优化算 法结合使用, 以更新量子线路的参数. 图 1 展示了 QGAN 的基本模型, 一个量子生成器模仿目标数据 集 x<sub>t</sub> 的数据分布, 生成尽可能类似于目标数据集的生成数据 x<sub>g</sub>, 而量子鉴别器则试图区分 x<sub>t</sub> 和 x<sub>g</sub>. 经过迭代训练, 对量子生成器和鉴别器进行优化.



图 1 (网络版彩图) QGAN 结构图. 一个 QGAN 网络由一个量子生成器和一个量子鉴别器构成. 量子生成器生成样本数据. 量子鉴别器区分生成数据和数据源

Figure 1 (Color online) QGAN structure diagram. A QGAN network consists of a quantum generator and a quantum discriminator. The QG generates sample data. The QD distinguishes between generated data and data source

VQC 通过量子门实现对量子比特最基本的酉正操作. 量子门的操作可用对量子比特的 Hilbert 空间的基矢作用定义,常见单比特的量子门操作有 X 门、Z 门、Y 门以及 H (Hadamard) 门. 这些量子门的矩阵表示分别为

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

另外, CNOT 门也是构成 VQC 的重要量子门之一. CNOT 是一种典型的受控操作, 有两个输入量子比特, 即控制量子比特和目标量子比特. 在计算上, CNOT 门由  $|c\rangle |t\rangle \rightarrow |c\rangle |t \oplus c\rangle$  给出, 其中  $t, c \in \{0, 1\}$ . 也就是说, 如果控制量子比特为  $|1\rangle$ , 则对目标量子比特执行 X 门, 否则目标量子比特不执行任何操作.

#### 2.2 量子隐形传态

量子隐形传态算法是一种用于传递量子态的量子通信方法. 假设 Alice 希望给 Bob 发送量子态  $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ ,由两个基态以未知概率叠加.首先, Alice 和 Bob 制备一对 EPR (Einstein-Podolsky-Rosen)的粒子.如图 2 所示,粒子 a 和 b 组成了纠缠态  $|\beta_{00}\rangle = 1/\sqrt{2}(|00\rangle + |11\rangle)$ . Alice 持有 a 和  $|\psi\rangle$ , Bob 持有 b. 经过量子隐形传态算法的操作可以将  $|\psi\rangle$  传递到粒子 b. 具体操作概括为以下三步:

(1) Alice 以  $|\psi\rangle$  为控制量子比特, 以 a 为目标量子比特, 执行 CNOT 门. 由于 a 和 b 是 EPR 对, 此时 a, b 和  $|\psi\rangle$  一同形成了三粒子纠缠系统.

(2) Alice 对 a 执行 H 门, 并测量 a 和 b, 得到 4 种可能的测量结果 |00>, |01>, |10>, |11>, 并将结果 发送给 Bob.

(3) 测量后  $|\psi\rangle$  的概率信息转移到 b. Bob 根据测量结果不执行操作或执行 X 门、Z 门、Y 门其 中之一得到的目标态.



图 2 (网络版彩图)量子隐形传态. 粒子 a 和 b 是 EPR 对的两个粒子. Alice 持有粒子 a. Bob 持有粒子 b. 灰色长方形表示量子操作.  $|\psi\rangle$  所携带的信息在三步量子操作后传递到粒子 b

Figure 2 (Color online) Quantum teleportation. Particles a and b are the two particles of the EPR pair. Alice holds particle a. Bob holds particle b. Gray rectangles represent quantum operations. The information carried by  $|\psi\rangle$  is transferred to particle b after three steps of quantum operations

# 2.3 量子拓扑码

在本系统中,利用一种优化的量子拓扑码提升量子隐形传态的抗噪能力.具体是通过训练一种高 保真度的拓扑码解码器实现.在这里我们选择了量子表面码.量子表面码是量子拓扑码的一种,其拓 扑结构在连续变形下保持不变的空间性质,基本原理是用"同源自由度"<sup>[32,33]</sup>对信息进行编码.编码 后的量子态具备对噪声误差的纠错能力.表面码的基本结构可以用一个具有周期性边界的正方形晶格 表示,量子比特排列在给定的封闭晶格中.由于直接测量破坏量子态,因此稳定器也被周期性地排列 其中,用于量子表面码的无损测量.

对于一个码距为 *d* 的表面码, 晶格 *C* 的大小为  $d \times d$ , 具有面算子 *f*、边算子 *e*、点算子 *v* 这 3 个主要特征. 对于 *C*, 一个对偶晶格 *C*\* 被构造. 其思想是将原始晶格的面映射到对偶晶格中的顶 点 *v*\*, 边映射到对偶边 *e*\*, 顶点映射到对偶面 *f*\*. 这里有  $v \in C \Leftrightarrow f^* \in C^*$ ,  $f \in C \Leftrightarrow v^* \in C^*$ ,  $e \in C \Leftrightarrow e^* \in C^*$ . 表面码的数据量子比特位于 *C* 和 *C*\* 的边. 位于  $v \in C$  ( $f^* \in C^*$ ) 的算子为 Z 稳定 器, 位于  $f \in C$  ( $v^* \in C^*$ ) 的算子为 X 稳定器, 分别记为  $Z_v$ ,  $X_f$ ,

$$Z_v = \prod_{e|v\in\partial_1 e} Z_e, \ X_f = \prod_{e\in\partial_2 f} X_e, \tag{1}$$

其中,  $\partial_1 e$  表示顶点  $\forall e$  的集合,  $\partial_2 f$  表示  $\forall f$  的边的集合. 由于 Pauli X 和 Pauli Z 反对易, 顶点和面算 子相互对易, 因此他们组合而成了量子表面码的稳定器. 对稳定器统一测量后, 会得到所有量子比特 的本征值数据, 也称为综合征, 用于判断量子态的噪声误差. 一个码距为 *d* 的表面码具有  $V = F = d^2$ ,  $2d^2$  个量子比特, 以及  $2d^2 - 2$  个稳定器.

# 3 方法

#### 3.1 纠错方法

对于服从一个概率分布  $p = \{p_{c,c^*}\}$  的 Pauli 误差  $E = X_c Z_{c^*}$ , 纠错的第一步是测量表面码的稳定器. 稳定器  $Z_v$  和  $X_f$  的作用分别为检测数据量子比特的 X 错误和 Z 错误. 当量子比特发生错误时,

对应的稳定器本征值会由 +1 变为 -1,即在晶格的顶点上产生一对 -1 的缺陷. 在一个  $d \times d$  晶格上 有  $d^2 - 1$  个线性无关的算子,即不可能存在一个单独的 -1 本征值. 获得一个给定综合征 ( $\partial c, \partial^* c^*$ )的 概率是

$$P(\partial c, \partial^* c^*) = \sum_{e \in X_c} \sum_{e^* \in Z_{c^*}} P(c + e, c + e^*).$$
(2)

这个综合征是简并的.为了进行纠错,我们需要选择一组校正量子比特,以成对消除综合征中的缺陷. 当校正量子比特和错误量子比特形成一个平凡环,表面码的量子态将返回到原始状态.相反,如果校 正量子比特和错误量子比特构成了一个围绕环面的非平凡环,这时纠错失败.因为这样虽然成对消除 了缺陷,但也改变了量子态的原始状态.一个最优的解码器应该选择有着最小纠错量子比特的链.这 种最优策略的成功概率为

$$P_{\text{succ}} = \sum_{\partial c, \partial^* c^*} \max_{(e, e^*) \in E} P(c + e, c + e^*).$$
(3)

在一个晶格的极限下, 当噪声低于一个临界阈值时,  $P_{succ} \rightarrow 1$ . 对于不相干噪声模型, 临界阈值  $P_c \approx 0.11$ . 对于  $d \rightarrow \infty$ . 这意味着低于这个阈值时这个最优策略的纠错量子比特和错误量子比特一定会形成平凡环. 图 3 展示了具有周期性边界的量子表面码的示意图. 图 3 直观地说明了表面码量子比特和稳定器的关系, 并针对一个由一串比特误码引发的缺陷给出了成功纠错和失败纠错的示例.

一个有效的量子表面码解码器通过生成平凡环纠正综合征中的缺陷.标准的 MWPM 是一种全局 解码算法,其工作原理是将综合征缺陷成对匹配,选择总距离最小的匹配路径,对应于与综合征相匹 配的最小错误量.然而,MWPM 解码器的高复杂度影响了解码开销和运行时间.本文基于 QGAN 解 码器通过学习表面码综合征数据,经过迭代训练,直接生成缺陷匹配消除的结果.这里我们考虑非相 干噪声模型,X 错误和 Z 错误以独立的概率 *P* 发生,*Y* = -*iX Z* 错误以概率 *P*<sup>2</sup> 发生.在晶格 *C* 上纠 正独立 X 错误和在对偶晶格 *C*\* 上纠正独立 Z 错误是完全等价的.本 QGAN 解码器中重点考虑的是 生成缺陷匹配消除的结果,因此训练一种错误的解码模型就足够了.

#### 3.2 QGAN 解码模型

通过训练一个 QGAN 模型来解码表面码的量子比特矩阵. 在这个 QGAN 解码器中, 量子生成器 和量子鉴别器采用了具有单比特旋转门  $R_x(\theta)$  和  $R_z(\theta)$  以及双比特控制相位门 CZ 的 VQC. 其中

$$R_{x}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, R_{z}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}, CZ(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}.$$
 (4)

QGAN 算法的线路图如图 4 所示. 量子生成器和量子鉴别器的 VQC 都是由 k 层幺正操作构成的. 这里参数 k 称为 VQC 的深度. 对于量子生成器, 在线路的末端测量所有量子比特, 收集测量结果, 形成一个 n 位的本征值样本. 对于量子鉴别器, 目标数据和生成数据分别作为输入, 同样在线路末端测量所有量子比特, 得到的测量结果用于计算损失和梯度.

图 4(b) 显示了一层 n 量子比特酉正操作的门排列. 3 个旋转操作首先应用在每个量子比特上. 这 个过程被表示为

$$\prod_{i=1}^{N} R_z^i\left(\theta_{k,3}^i\right) R_x^i\left(\theta_{k,2}^i\right) R_z^i\left(\theta_{k,1}^i\right),\tag{5}$$



图 3 (网络版彩图)量子表面码示意图. (a) 具有 X 稳定器和 Z 稳定器的量子表面码及其测量线路. 稳定器的周围 是 4 个存储信息的数据量子比特,中心是用于测量综合征的辅助量子比特.当一个数据量子比特产生错误,对应的稳 定器本征值的测量结果变为 -1. (b) 红色路径表示产生了误差量子比特构成的误差链. (c) 绿色纠错链与误码链形 成非平凡环,表示纠错失败. (d) 蓝色纠错链与误差链形成平凡环,表示纠错成功

Figure 3 (Color online) Schematic diagram of a quantum surface code. (a) A surface code with X and Z stabilizers. Surrounding the stabilizer is four data qubits that store information, and in the center is an ancilla qubit used to measure the syndrome. When an error occurs in a data qubit, the measurement of the corresponding stabilizer eigenvalue becomes -1. (b) The green error correction chain and error chain form a non-trivial loop, indicating error correction failure. (d) The blue error correction chain and the error chain form a trivial loop, indicating successful error correction

其中下标 *i* 表示第 *i* 个量子比特, 下标 *k* 表示第 *k* 层. 接下来, CZ 门用于纠缠所有的量子比特, 这个 过程被表示为

$$\prod_{i=1}^{N} \operatorname{CZ}_{(i \mod N)+1}^{i},\tag{6}$$

其中下标 *i* 表示控制量子比特的序号, 下标 (*i* mod *N*) + 1 表示目标量子比特的序号. 在这个过程中, 每个量子比特执行 3 个参数化单量子比特旋转门和 1 个参数化双量子受控门. 这个组合被选择是因为任何单量子比特酉正都可以分解为这个算子的序列<sup>[34]</sup>. 显然, 在这个线路中, 每一层酉正操作具有 4*n* 个参数. 在深度为 *k* 的 VQC 中, 一共具有 4*kn* 个参数. 与增加经典深度神经网络的层数类似, 增加深度 *k* 能够表示更复杂的 VQC 结构并增加参数的数量.

如图 5 所示,系统通过在经典计算机和量子计算机之间的迭代切换来运行.综合征数据经过量子 编码电路加载为量子数据.经典计算机初始化生成器和鉴别器参数并生成量子电路.随后量子计算机 加载这个电路并根据数据集优化生成器和鉴别器.通过比较两个量子态之间的相似性来测量生成量子 态的保真度.测量结果被传回经典计算机用于计算每个门相对于目标函数的梯度.最后,量子生成器和 量子鉴别器的参数根据梯度更新.如果该系统被用于生成样本,那么量子计算机将从生成器中采样得



图 4 (网络版彩图) QGAN 算法线路图. (a) 量子生成器和量子鉴别器的 VQC 由 k 层酉正操作表示. 量子生成器的末端执行测量生成样本. 量子鉴别器的末端执行测量计算损失和梯度. (b) 一层酉正操作的门排列, 由  $R_z(\theta)$ ,  $R_x(\theta)$ , CZ 三种门实现

Figure 4 (Color online) Circuit diagram of the QGAN algorithm. (a) The VQCs of the quantum generator and the quantum discriminator are represented by k-layer unitary operations. The end of the quantum generator performs measurements to generate samples. The end of the quantum discriminator performs the measurement to compute the loss and gradient. (b) The gate arrangement of one-layer unitary operation, which is realized by  $R_z(\theta)$ ,  $R_x(\theta)$ , and CZ

到测量结果, 而不是返回保真度. QGAN 系统在特定的次数上反复迭代, 直到损失函数收敛.

# 3.3 容错量子隐形传态方法

使带有 QGAN 解码器的容错方法优化量子隐形传态, 主要分为 3 个过程. (1) 初始化过程, 所描述的是通讯前的初始化量子态制备; (2) 传态过程, 所描述的是使用了优化容错方法的传态操作; (3) 纠错过程, 所描述的是基于 QGAN 解码器对于传输数据的错误检测及纠正.

#### 3.3.1 初始化过程

当一个发送者 Alice 希望给接收方 Bob 传递秘密信息时,首先向服务器发送申请. 接收到 Alice 的申请后,服务器根据用户列表判断通讯双方身份的合法性. 若用户合法,服务器制备 2L<sup>2</sup> 个 EPR 量子纠缠态

$$|\Psi\rangle_{\rm AB}^{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |00\rangle_{\rm ab}^{i} + |11\rangle_{\rm ab}^{i} \right),\tag{7}$$

其中 L = d, 等同于量子表面码的码距,  $i = 1, 2, ..., 2L^2$ . 此后 a 粒子和 b 粒子分别被分发给 Alice 和 Bob. 称 Alice 持有的  $2L^2$  个 a 粒子为系统 A, 称 Bob 持有的  $2L^2$  个 b 粒子为系统 B, 量子信息基于 系统 A 和 B 进行传递.



图 5 (网络版彩图) QGAN 模型的运行流程图. 蓝色箭头为训练过程, 红色箭头为样本生成过程

Figure 5 (Color online) Training architecture of the QGAN model. The blue arrow is the training process, and the red arrow is the sample generation process

设传递的原始量子态为

$$|\phi\rangle = \bigotimes_{i=1}^{2} |\varphi_i\rangle = \bigotimes_{i=1}^{2} \left( \alpha_i \left| 0 \right\rangle + \beta_i \left| 1 \right\rangle \right), \tag{8}$$

其中  $|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = 1$ . 在 Alice 传递保密信息之前, 对  $|\phi\rangle$  进行表面码编码,

$$\left|\tilde{\phi}\right\rangle = \prod_{f \in C_{L \times L}} \frac{I + X_f}{2} \prod_{v \in C_{L \times L}} \frac{I + Z_v}{2} \left(\left|\phi\right\rangle \otimes \left|0\right\rangle_c\right) = \bigotimes_{i=1}^{2L^2} \left|\varphi_i\right\rangle_c = \bigotimes_{i=1}^{2L^2} \left(\alpha'_i \left|0\right\rangle + \beta'_i \left|1\right\rangle\right),\tag{9}$$

其中  $|0\rangle_c = \bigotimes_{i=1}^{2(L^2-1)} |0\rangle$  为  $2L^2 - 2$  个辅助量子比特.  $|\tilde{\phi}\rangle$  即为待传输的量子态.

#### 3.3.2 传态过程

Alice 传输编码后的量子态  $|\tilde{\phi}\rangle$  给 Bob.  $|\tilde{\phi}\rangle$  和  $2L^2$  个  $|\Psi\rangle^i_{AB}$  可以表示为直积态,

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{2L^2}} \otimes_{i=1}^{2L^2} \left[\alpha_i' \left|0\right\rangle \left(\left|00\right\rangle_{ab}^i + \left|11\right\rangle_{ab}^i\right) + \beta_i' \left|1\right\rangle \left(\left|00\right\rangle_{ab}^i + \left|11\right\rangle_{ab}^i\right)\right]. \tag{10}$$

首先, Alice 以  $|\tilde{\phi}\rangle$  中各量子比特为控制比特, 分别以对应系统 A 中各量子比特为目标比特, 作用 CNOT 门, 得到  $|\Psi_1\rangle$ ,

$$|\Psi_{1}\rangle = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{2L^{2}}} \otimes_{i=1}^{2L^{2}} \left[\alpha_{i}'|0\rangle \left(|00\rangle_{ab}^{i} + |11\rangle_{ab}^{i}\right) + \beta_{i}'|1\rangle \left(|10\rangle_{ab}^{i} + |01\rangle_{ab}^{i}\right)\right].$$
(11)

其次, Alice 对  $|\tilde{\phi}\rangle$  中各量子比特执行 H 门, 得到  $|\Psi_2\rangle$ :

$$|\Psi_{2}\rangle = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{2L^{2}}} \otimes_{i=1}^{2L^{2}} \left[\alpha_{i}'\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \left(|00\rangle_{ab}^{i} + |11\rangle_{ab}^{i}\right) + \beta_{i}'\left(|0\rangle - |1\rangle\right) \left(|10\rangle_{ab}^{i} + |01\rangle_{ab}^{i}\right)\right].$$
(12)

最后, Alice 分别对  $|\tilde{\phi}\rangle$  和系统 A 中各量子比特做测量, 得到观测值  $\{M_i\}, i = 1, 2, \dots, 2L^2$ . 每一个观测值都以 1/4 的概率得到  $\{00, 01, 10, 11\}$  中的一种结果. 将测量得到的  $2L^2$  个结果传输给 Bob.

the corresponding rest	1105			
$ arphi_i angle_c$	$ \psi_{a_{i}} angle$	$\{M_i\}$	$ \psi_{b_{i}} angle$	Gate
$ 0\rangle$	$ 0 angle^{i}_{a}$	$\{00\}$	$\alpha_i' \left  0 \right\rangle_b^i + \beta_i' \left  1 \right\rangle_b^i$	_
0 angle	$ 1 angle^{i}_{a}$	$\{01\}$	$\alpha_i' \left  1 \right\rangle_b^i + \beta_i' \left  0 \right\rangle_b^i$	X gate
1 angle	$ 0 angle^{i}_{a}$	$\{10\}$	$\alpha_i' \left  0 \right\rangle_b^i - \beta_i' \left  1 \right\rangle_b^i$	Z gate
1 angle	$ 1\rangle_a^i$	{11}	$lpha_i' \ket{1}_b^i - eta_i' \ket{0}_b^i$	Y gate

表 1 Alice 观测后量子系统的 4 种结果以及 Bob 根据相应结果需要执行的操作

**Table 1** Four results of the quantum system after Alice's observation, and the operations Bob needs to perform based onthe corresponding results

Alice 的观测会使  $|\Psi_2\rangle$  中的  $2L^2$  个系统以 1/4 的概率坍缩到表 1 中的 4 种情况之一. 同时, Bob 所持有的系统 B 中的  $2L^2$  个粒子, 也分别坍缩到表 1 中第 4 列的 4 种情况之一. 例如, Bob 收到第一 对测量结果为  $\{00\}$ , 则  $|\psi_{b_1}\rangle$  的状态为  $\alpha_1' |0\rangle_b^1 + \beta_1' |1\rangle_b^1$ ,  $|\psi_{b_1}\rangle = |\varphi_1\rangle_c$ . 类似地, 若 Bob 收到第一 对测量结果为  $\{01\}$ , 则  $|\psi_{b_1}\rangle$  的状态为  $\alpha_1' |1\rangle_b^1 + \beta_1' |0\rangle_b^1$ , 此时 Bob 执行 X 门后得到  $|\psi_{b_1}\rangle = |\varphi_1\rangle_c$ . 其他观测结果与 Bob 需要执行操作的对应情况见表 1.

当 Bob 根据值  $\{M_i\}$  分别对  $|\psi_{b_i}\rangle$  执行完相应操作后, Bob 将得到量子态:

$$\left|\tilde{\phi}\right\rangle' = \bigotimes_{i=1}^{2L^2} \left|\varphi_i\right\rangle_c'. \tag{13}$$

由于在传输过程中量子门作用、纠缠态退相干以及量子信道噪声等影响, 此处 Bob 持有的状态  $|\tilde{\phi}\rangle'$  与  $|\tilde{\phi}\rangle$  不完全相等, 需要进一步的纠错操作.

# 3.3.3 纠错过程

Bob 在完成接收过程后, 检测接收到的量子态  $|\tilde{\phi}\rangle'$  是否发生误码. 由于  $|\tilde{\phi}\rangle'$  经过拓扑稳定子的编码, 其中的任意量子比特  $|\varphi_i\rangle'_c$  在其临近 4 个稳定子和临近 4 个稳定子作用下, 可以得到

$$Z_v^1 Z_v^2 Z_v^3 Z_v^4 \left| \varphi_i \right\rangle_c' = \hat{Z} \left| \varphi_i \right\rangle_c', \tag{14}$$

$$X_f^1 X_f^2 X_f^3 X_f^4 |\varphi_i\rangle_c' = \hat{X} |\varphi_i\rangle_c'.$$
<sup>(15)</sup>

当传输过程中没有发生错误时,由于同种稳定子之间两两对易,  $Z_v$  和  $X_f$  的本征值不变,  $\hat{Z} = +1$ ,  $\hat{X} = +1$ .若传输过程中发生了错误,由于错误与稳定子之间的反对易关系,相邻的稳定子本征值将由 +1 变为 -1,即 $\hat{Z} = -1$ 或 $\hat{X} = -1$ .因此, Bob 通过观测态  $|\tilde{\phi}\rangle'$  中各量子比特的邻近稳定子,将会得 到两组分别针对 X 错误和 Z 错误的本征值测量结果  $(\bar{c}, \bar{c^*})$ . Bob 将态  $|\tilde{\phi}\rangle'$  作为 QGAN 解码器中生 成器的输入,随后得到解码后的逻辑态.

# 4 实验评估

#### 4.1 模型训练

令量子生成器表示为  $G_{\theta}$ , 量子鉴别器表示为  $D_{\phi}$ , 其中  $\theta$  和  $\phi$  分别为  $G_{\theta}$  和  $D_{\phi}$  的 VQC 参数. 数据集中的数据在输入到 VQC 前, 被转换为一个 n 量子比特输入态  $|\psi_{in}\rangle$ . 量子生成器被训练去转换  $|\psi_{in}\rangle$  到一个 n 量子比特输出态,

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = G_{\theta} |\psi_{\text{in}}\rangle = |g_{\theta}\rangle = \sum_{j=0}^{2^{n}-1} e^{i\varphi} \sqrt{p_{\theta}^{j}} |j\rangle, \qquad (16)$$

# 其中 $p_A^j$ 表示了结果 $|j\rangle$ 发生的概率.

QGAN 的优化可以通过多种方式定义. 在本项工作中, 我们考虑了非饱和损失<sup>[35]</sup>. 从量子生成器中生成 m 个样本  $g^i(\theta)$  (即生成器测量结果的期望值), 从数据集中随机选择 m 个样本  $y^i$ , 其中 i = 1, 2, ..., m. QGAN 模型的量子生成器的损失为

$$L_G(\phi, \theta) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left[ \log D_\phi \left( g^i(\theta) \right) \right], \tag{17}$$

量子鉴别器的损失为

$$L_D(\phi, \theta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[ \log D_\phi(y^i) + \log \left( 1 - D_\phi(g^i(\theta)) \right) \right], \tag{18}$$

其中  $D_{\phi}(y^{i})$  和  $D_{\phi}(g^{i}(\theta))$  表示数据输入鉴别器后测量结果的期望值.

训练 QGAN 的过程等价于寻找一个双人博弈的纳什均衡,

$$\max_{\theta} L_G(\phi, \theta), \ \max_{\phi} L_D(\phi, \theta).$$
(19)

交替训练优化量子生成器的参数 θ 和量子鉴别器的参数 φ.

在量子鉴别器中,一个辅助量子比特用于测量量子态的保真度.测量结果用于更新网络的参数.本系统通过梯度下降和量子门微分来更新网络参数.通过测量相对于生成器和目标数据的鉴别器的损失,以学习率 α 的速率提高性能.每个门的梯度下降基于参数化微分方程<sup>[36]</sup>:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left[ L \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) - L \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right], \tag{20}$$

其中 ∂θ 是参数 θ 的梯度, L 是式 (19) 和 (20) 所描述的损失函数.

#### 4.2 训练结果

本模型的量子生成器和量子鉴别器是通过 Qiskit <sup>[37]</sup> 实现的, 它允许在 IBQ Q Experience 提供的 量子模拟器和量子硬件上执行<sup>1)</sup>. 对于 d = 3 和 d = 5 的量子拓扑逻辑态样本, 一个 n = 9 和 n = 25的量子线路被应用. 实验中使用了 20000 个数据样本. 在每个训练阶段, 训练数据被打乱并分成大小 为 2000 的批次. 生成器的数据样本是通过测量生成器 2000 次而产生的. 所有参数在  $[-\pi, \pi]$  中均匀 地随机初始化. 为了计算  $\theta$  和  $\phi$  更新的解析梯度, 我们使用了 8000 个测量值来实现适当的精确的解 析梯度. 设置训练的初始学习率为 10<sup>-3</sup>. 然后, 利用批处理交替更新鉴别器和发生器的参数. 在所有 批处理的更新完成后, 开始一个新的 epoch.

接下来,我们展示在 IBM Q Experience 上运行 QGAN 模型训练的结果.我们在训练中利用了 第一和第二动量项,这是一种针对非平稳目标函数和有噪声梯度的鲁棒优化技术<sup>[38]</sup>.根据式 (19) 和 (20),我们用损失函数来反映本方法是否收敛.我们使用 Frechet Inception Distance (FID) 在特征空间 中计算目标样本和生成样本之间的距离.

$$FID(t,g) = \|\mu_t, \mu_g\| + Tr(C_t + C_g - 2(C_t C_g)^{1/2}),$$
(21)

其中  $\mu_t$  和  $\mu_g$  分别是目标数据和生成数据特征向量的均值,  $C_t$  和  $C_g$  分别是它们的协方差矩阵, Tr 表 示矩阵的迹,  $\|\cdot\|$  表示向量的 L2 范数.

<sup>1)</sup> IBM Q Experience. https://quantum<br/>experience.ng.bluemix.net/qx/experience.



图 6 (网络版彩图) QGAN 解码器的训练结果. (a) 在 d = 3 时量子生成器和量子鉴别器损失函数的收敛. (b) 在 d = 3 时生成的样本与目标样本之间的 FID. (c) 在 d = 5 时量子生成器和量子鉴别器损失函数的收敛. (d) 在 d = 5 时生成的样本与目标样本之间 FID 的变化

Figure 6 (Color online) Training results of QGAN decoder. (a) Convergence of quantum generator and quantum discriminator loss functions at d = 3. (b) FID between the sample generated at d = 3 and the target sample. (c) Convergence of quantum generator and quantum discriminator loss functions at d = 5. (d) Change in FID between the sample generated at d = 5 and the target sample

图 6 展示了 QGAN 解码器的训练结果. 其中, 图 6(a) 和 (c) 显示了量子生成器损失和量子鉴别器损失的收敛性. 对 d = 3 和 d = 5 量子表面码的 QGAN 解码器模型, 分别经过 600 次和 1200 次训 练迭代, 被认为得到了充分的训练. 此外, 图 6(b) 和 (d) 说明了 FID 随迭代的变化, 表现了生成的数据分布是如何向样本数据分布发展的. 对 d = 3 和 d = 5 分别进行 600 次和 1200 次训练迭代后, FID 趋近于零, 表明其收敛性, 生成的样本的分布接近于训练样本的分布.

进一步地,我们测试了深度  $k \in \{10, 20, 30\}$  时, d = 3 和 d = 5 量子表面码解码器的训练结果. 每 个设置重复训练了 10 次,以获得具有鲁棒性的结果. 表 2 显示综合了 10 次运行后 FID 结果的期望  $\mu_F$  和标准差  $\sigma_F$ . 数据表明, 增加量子线路的深度 k 可以提升训练效果和稳定性.

#### 4.3 模型评估

本系统基于非相干噪声进行训练和评估.非相干噪声模型的设置是一个单一的参数 p. 基于概率 p, 每个量子比特都独立且随机地被选择产生一个错误. 通过训练 d = 3 和 d = 5 的 QGAN 模型, 我们 得到了具有较高解码成功率的表面码解码器. 使用训练好的 QGAN 模型和 MWPM 模型对于码距为

Table 2 Stability test of QGAN decoder							
Size	Depth	$\mu_{ m F}$	$\sigma_{ m F}$				
	K = 10	0.3946	0.0206				
d = 3	K = 20	0.2373	0.0197				
	K = 30	0.2275	0.0213				
	K = 10	0.4318	0.0335				
d = 5	K = 20	0.3880	0.0228				
	K = 30	0.2989	0.0466				

表 2 QGAN 解码器的稳定性测试 Cable 2 Stability test of QGAN decode



图 7 (网络版彩图) 模型的评估. 对于系统大小 d = 3, 5, QGAN 的逻辑保真度 f 相对于位翻转错误率 p 的变化 趋势, 并与使用 MWPM 的相应结果进行比较 (d = 30 的 MWPM 解码器作为大规模距离 d 的参考) Figure 7 (Color online) Evaluation of the model. Logical fidelity f of QGAN versus bit flip error rate p for system size d = 3, 5 and compared to corresponding results using MWPM (the MWPM decoder for d = 30 is included as a reference for the approach to large d)

d = 3和 d = 5的表面码晶格进行误差校正的测试,测试结果如图 7 所示. 在错误率 p = 0.05的情况 下,本模型的纠错成功率分别可以达到 99.605%和 99.887%. 而相同设置下,MWPM 模型的成功率为 95.827%和 97.834%. 从图 7 中还可以看出,随着错误率 p 持续增加,纠错成功率明显下降. 码距对逻 辑保真度的影响取决于阈值. 当错误率 p 低于这个阈值时,码距的增加有利于提升解码的逻辑保真度. 但错误率 p 超过这个阈值时,码距的增加使逻辑保真度降低. 在对应于 d = 3和 d = 5量子表面码模 型测试中,MWPM 模型的逻辑保真度阈值约为 P = 0.1099, 而 QGAN 解码器模型的保真度阈值约为 P = 0.1706. 从整体逻辑保真度性能表现上看,QGAN 模型对于 d = 3和 d = 5表面码的解码性能优 于 MWPM 模型. 对于更大码距的测试,需要通过扩大量子网络的比特规模和线路深度.

进一步地,我们验证了带有 QGAN 解码器的优化 *d* = 3 和 *d* = 5 拓扑码量子隐形传态方法. 令算 法执行过程中所运用的所有量子操作带有非相干噪声.我们测试了在不同噪声情况下,基于拓扑码纠

Error rate $(\times 10^{-3})$	Original fidelity (%)	Number of failures at $d = 5$ (Shoot = 1024)					Optimizing fidelity (%)	
		1	2	3	4	5	Ave	Optimizing indenty (70)
5	99.52	0	0	0	0	0	0	100
10	99.11	1	0	0	0	0	0.2	99.97634
15	98.63	1	1	3	4	3	2.4	99.77508
20	97.97	6	2	5	5	3	4.2	99.58345
25	97.53	9	6	6	3	7	6.2	99.38673
30	96.98	11	8	2	13	9	8.6	99.16336
35	96.52	11	16	18	5	21	14.2	98.61583
40	95.97	22	23	20	21	18	20.8	97.97382
45	95.46	26	27	22	24	28	25.4	97.51796
50	94.95	29	31	33	28	30	30.2	97.04618
55	94.52	47	41	39	31	26	36.8	96.39785
60	93.95	34	45	53	43	44	46	95.51741
65	93.53	55	61	54	47	51	53.6	94.76015
70	93.14	72	78	67	53	61	66.2	93.53917
75	92.66	79	74	63	71	74	72.2	92.95038
80	92.23	61	76	94	86	95	82	91.99797

表 3 QGAN 解码器 d = 5 拓扑码的量子隐形传态的实验结果







# 图 8 (网络版彩图) 量子态的保真度和不可纠正错误数的变化趋势. 红色条形图为不可纠正错误在 Shoot = 1024 时的数量, 蓝色曲线为实验的保真度表现

Figure 8 (Color online) Fidelity of quantum states and the changing trend of the number of uncorrectable errors. The red bar graph is the number of uncorrectable errors when Shoot = 1024, and the blue curve is the fidelity performance of the experiment



图 9 (网络版彩图) 原始量子形传态和 QGAN 解码优化量子隐形传态的保真度变化曲线对比. 黑色实线为原始隐形传态的保真度表现, 红色实线为 d = 3 优化模型的保真度表现, 蓝色实线为 d = 5 优化模型的保真度表现. 黑色、红色、蓝色虚线为用于数据分析的拟合曲线

Figure 9 (Color online) Comparison of the fidelity change curves of original quantum teleportation and QGAN decodingoptimized quantum teleportation. The black solid line is the fidelity performance of the original teleportation, the red solid line is the fidelity performance of the d = 3 optimized model, and the blue solid line is the fidelity performance of the d = 5optimized model. The black, red, and blue dashed lines are the fitting curves used for data analysis

错的量子比特在量子线路中的保真度表现.如表 3 所示,在原始量子隐形传态保真度实验中,随着噪声的增加,量子态的保真度降低趋势更快.而在带有优化拓扑码的实验中,随着噪声的增加,量子态保 真度的降低产生了明显的缓解.

图 8 展示了实验中,当 d = 5, shoot = 1024 时,在错误率 0 < p < 0.05 的范围内,量子态的保真度以及纠错失败的测量数随噪声模型的错误率的变化情况.在实验中,当错误率  $p < 5 \times 10^{-3}$  时,优化后的模型可以提供绝对的可靠性保障.纠错失败的量子态将会被探测到并被拒绝接收.随着错误率 p 的增大,优化后的量子隐形传态保真度的下降趋势相较于原始量子隐形传态更加缓慢.

图 9 进一步对比了带有 QGAN 解码器的拓扑码对于隐形传态方法的优化. 从图 9 中可以看出, 在非极化噪声的实验中, 对于 *d* = 3 表面码的系统, 模型的容错阈值约为 0.0607; 对于带有 *d* = 5 表面 码的系统, 模型的容错阈值约为 0.0778. 这意味着本模型可以在噪声模型系统错误率低于阈值的量子 网络中保证有效的保真度提升.

# 5 总结与展望

本文基于 QGAN 算法训练并得到了相较于传统方法解码效果更好的量子表面码解码器,并基于此 解码器得到了优化的量子隐形传态方法. 对于  $3 \times 3$  和  $5 \times 5$  规模的表面码晶格,在错误率 p = 0.05 的情 况下,本模型的纠错成功率分别达到 99.605% 和 99.887%. 相较于 MWPM 模型 0.1099 的保真度阈值, 本模型的保真度阈值达到了 P = 0.1706,具有更好的容错效果.利用量子处理器在时间 O(poly(N)) 上对这些向量执行并行计算的能力, 在较短时间内训练出复杂的模型. 在拓扑码优化量子隐形传态系统中, 在非极化噪声 *p* < 0.0778 的噪声范围内, 可以得到有效的保真度优化.

尽管在小规模晶格的解码表现上 QGAN 展示出了一定优势,本模型仍然存在进一步优化的空间. 目前量子计算机技术还无法支持大规模量子比特的训练,因此只能训练小规模量子比特数据集.对于 更大规模量子表面码数据集,需要在未来的硬件支持下进行进一步的优化和验证.本文首次探讨了用 QGAN 算法实现拓扑码的解码,相较于经典神经网络,QGAN 基于量子线路,可以更加直接地处理量 子态信息,减少了量子数据与经典数据之间相互转换的过程,是一种不同于已有解码器的量子解码模 型.同时,本文 QGAN 解码器对于更多种类的非极化量子错误特征的输入和解码具有推广的潜力.在 未来,带有更大规模 QGAN 解码器的拓扑码优化量子隐形传态将带来更高的保真度提升.

#### 参考文献 -

- 1 Goodfellow I, Pouget-Abadie J, Mirza M, et al. Generative adversarial networks. Commun ACM, 2020, 63: 139–144
- 2 Lloyd S, Weedbrook C. Quantum generative adversarial learning. Phys Rev Lett, 2018, 121: 040502
- 3 Dallaire-Demers P L, Killoran N. Quantum generative adversarial networks. Phys Rev A, 2018, 98: 012324
- 4 Zeng J, Wu Y, Liu J G, et al. Learning and inference on generative adversarial quantum circuits. Phys Rev A, 2019, 99: 052306
- 5 Huang K, Wang Z A, Song C, et al. Quantum generative adversarial networks with multiple superconducting qubits. npj Quantum Inf, 2021, 7: 165
- Gao X, Zhang Z Y, Duan L M. A quantum machine learning algorithm based on generative models. Sci Adv, 2018,
   4: eaat9004
- 7 Situ H, He Z, Wang Y, et al. Quantum generative adversarial network for generating discrete distribution. Inf Sci, 2020, 538: 193–208
- 8 Shu R, Xu X, Yung M H, et al. Variational quantum circuits enhanced generative adversarial network. 2024. ArXiv:2402.01791
- 9 Zoufal C, Lucchi A, Woerner S. Quantum generative adversarial networks for learning and loading random distributions. npj Quantum Inf, 2019, 5: 1–9
- 10 Huang H L, Du Y, Gong M, et al. Experimental quantum generative adversarial networks for image generation. Phys Rev Appl, 2021, 16: 024051
- 11 Rudolph M S, Toussaint N B, Katabarwa A, et al. Generation of high-resolution handwritten digits with an ion-trap quantum computer. Phys Rev X, 2022, 12: 031010
- 12 Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. Phys Rev Lett, 1993, 70: 1895–1899
- 13 Ren J G, Xu P, Yong H L, et al. Ground-to-satellite quantum teleportation. Nature, 2017, 549: 70-73
- 14 Laflamme R, Miquel C, Paz J P, et al. Perfect quantum error correcting code. Phys Rev Lett, 1996, 77: 198–201
- 15 Lidar D A, Brun T A. Quantum Error Correction. Cambridge: Cambridge University Press, 2013
- 16 Babar Z, Chandra D, Nguyen H V, et al. Duality of quantum and classical error correction codes: design principles and examples. IEEE Commun Surv Tutorials, 2019, 21: 970–1010
- 17 Fowler A G, Mariantoni M, Martinis J M, et al. Surface codes: towards practical large-scale quantum computation. Phys Rev A, 2012, 86: 032324
- 18 Ueno Y, Kondo M, Tanaka M, et al. QECOOL: on-line quantum error correction with a superconducting decoder for surface code. In: Proceedings of the 58th ACM/IEEE Design Automation Conference (DAC), 2021. 451–456
- 19 Fujii K. Quantum Computation with Topological Codes: From Qubit to Topological Fault-Tolerance. Singapore: Springer, 2015
- 20 Bombín H. An introduction to topological quantum codes. 2013. ArXiv:1311.0277
- 21 Fowler A G. Minimum weight perfect matching of fault-tolerant topological quantum error correction in average O(1) parallel time. 2013. ArXiv:1307.1740
- 22 Bravyi S, Suchara M, Vargo A. Efficient algorithms for maximum likelihood decoding in the surface code. Phys Rev

A, 2014, 90: 032326

- 23 Torlai G, Melko R G. Neural decoder for topological codes. Phys Rev Lett, 2017, 119: 030501
- 24 Varsamopoulos S, Criger B, Bertels K. Decoding small surface codes with feedforward neural networks. Quantum Sci Technol, 2017, 3: 015004
- 25 Baireuther P, O'Brien T E, Tarasinski B, et al. Machine-learning-assisted correction of correlated qubit errors in a topological code. Quantum, 2018, 2: 48
- 26 Breuckmann N P, Ni X. Scalable neural network decoders for higher dimensional quantum codes. Quantum, 2018,
   2: 68
- 27 Chamberland C, Ronagh P. Deep neural decoders for near term fault-tolerant experiments. Quantum Sci Technol, 2018, 3: 044002
- 28 Maskara N, Kubica A, Jochym-O'Connor T. Advantages of versatile neural-network decoding for topological codes. Phys Rev A, 2019, 99: 052351
- 29 Andreasson P, Johansson J, Liljestrand S, et al. Quantum error correction for the toric code using deep reinforcement learning. Quantum, 2019, 3: 183
- 30 Wang H, Song Z, Wang Y, et al. Target-generating quantum error correction coding scheme based on generative confrontation network. Quantum Inf Process, 2022, 21: 280
- 31 Sim S, Johnson P D, Aspuru-Guzik A. Expressibility and entangling capability of parameterized quantum circuits for hybrid quantum-classical algorithms. Adv Quantum Tech, 2019, 2: 1900070
- 32 Bombin H. Topological subsystem codes. Phys Rev A, 2010, 81: 032301
- 33 Dennis E, Kitaev A, Landahl A, et al. Topological quantum memory. J Math Phys, 2002, 43: 4452-4505
- 34 Nielsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge: Cambridge University Press, 2010
- 35 Fedus W, Rosca M, Lakshminarayanan B, et al. Many paths to equilibrium: GANs do not need to decrease a divergence at every step. 2017. ArXiv:1710.08446
- 36 Wierichs D, Izaac J, Wang C, et al. General parameter-shift rules for quantum gradients. Quantum, 2022, 6: 677
- Wille R, van Meter R, Naveh Y. IBM's Qiskit tool chain: working with and developing for real quantum computers.
   In: Proceedings of Design, Automation & Test in Europe Conference & Exhibition (DATE), 2019. 1234–1240
- 38 Kingma D, Ba J. Adam: a method for stochastic optimization. In: Proceedings of the International Conference on Learning Representations (ICLR), 2014

# A fault-tolerant quantum teleportation system with the antinoise optimization of quantum generative adversarial networks

Jiaxin LI, Shangshang SHI, Ruimin SHANG, Yanan LI, Zhimin WANG<sup>\*</sup> & Yongjian GU<sup>\*</sup>

College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China \* Corresponding author. E-mail: wangzhimin@ouc.edu.cn, yjgu@ouc.edu.cn

Abstract Quantum generative adversarial networks (QGANs) have demonstrated superior performance when applied to image processing, financial analysis, and other fields. This paper proposes a quantum topological code decoder based on QGANs, which is applied to optimize fault-tolerant quantum teleportation systems. In this study, we first construct and test the quantum circuit of a QGAN algorithm, establishing a topological code decoder training model. Subsequently, algorithms are designed for the input and output of the topological code eigenvalue dataset, and an efficient decoder is trained. Finally, a topological-code-optimized quantum teleportation system with a QGAN decoder is constructed, exhibiting better fault-tolerance performance compared to the original system. Decoding experiments with a code distance d = 3 and d = 5 show that the error correction success rate of this model reaches 99.887%. The QGAN decoder demonstrates a fidelity threshold of P = 0.1706, significantly higher than the classical decoder threshold, which is approximately P = 0.1099. Furthermore, the quantum teleportation system, optimized for noise resistance under a topological code with d = 3, shows a noticeable fidelity improvement within the non-polarized noise threshold range of P < 0.0607, while under a topological code optimization with d = 5, there is a significant fidelity improvement within the non-polarized noise threshold range of P < 0.0778. The proposed QGAN decoding model, combined with quantum teleportation methods, provides a novel approach for the application of quantum deep learning, whose principles can be applied to other areas of non-uniform noise processing.

Keywords QGAN, topological code, decoder, depolarizing noise, quantum teleportation, fidelity