



基于参数优化和补偿信号的非线性广义预测控制方法

肖振飞¹, 刘宁¹, 张亚军^{1*}, 柴天佑^{1,2*}

1. 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室, 沈阳 110819

2. 国家冶金自动化工程技术研究中心, 沈阳 110819

* 通信作者. E-mail: yajunzhang@mail.neu.edu.cn, tychai@mail.neu.edu.cn

收稿日期: 2023-12-26; 修回日期: 2024-04-15; 接受日期: 2024-07-22; 网络出版日期: 2024-09-09

国家自然科学基金 (批准号: 61991402, 62173170, 62333004) 资助项目

摘要 针对一类存在干扰和未知不确定性的复杂非线性被控过程的跟踪控制问题, 将广义预测控制和信号补偿法相结合, 提出了补偿信号驱动的非线性广义预测控制方法. 采用低阶线性模型和未知非线性项来表示被控对象, 未知非线性项表示系统建模误差及干扰等不确定性. 采用低阶线性模型设计广义预测控制器, 根据广义预测控制闭环系统可获得未知非线性项对系统影响的跟踪误差, 引入最小化跟踪误差和控制量波动的一步最优控制设计补偿信号, 抵消未知非线性项对被控对象的影响, 改善系统动态性能. 所提方法将以往要求未知非线性项全局有界的条件放宽为 Lipschitz 条件, 证明了闭环系统的稳定性和收敛性. 为了进一步提升系统动态性能, 提出了基于梯度下降法的控制器加权参数的优化方法. 仿真对比实验验证了所提算法的有效性.

关键词 预测控制, 补偿信号, 一步最优控制, Lipschitz 条件, 梯度下降

1 引言

在国际自动控制联合会 (International Federation of Automatic Control, IFAC) 工业委员会对各种控制技术和方法的调查报告中, 模型预测控制 (model predictive control, MPC) 得到了很高的关注, 多数专家认为 MPC 在实际应用中具有高影响力, MPC 通过反复求解最优控制问题来计算控制输入, 是面向工业过程的行之有效的有限时域优化控制方法^[1,2]. 作为 MPC 基本算法之一, 广义预测控制 (generalized predictive control, GPC) 通过引入自适应调节思想进一步改善了系统鲁棒性, 在理论研究和实际应用中都得到了广泛关注^[3~5]. 预测控制依赖精确的模型对未来时刻的系统响应进行预测, 但随着现代生产设备和工艺变得愈加复杂, 系统的精确建模非常具有挑战性. 尤其是机理建模, 其需要

引用格式: 肖振飞, 刘宁, 张亚军, 等. 基于参数优化和补偿信号的非线性广义预测控制方法. 中国科学: 信息科学, 2024, 54: 2240–2262, doi: 10.1360/SSI-2023-0413

Xiao Z F, Liu N, Zhang Y J, et al. Nonlinear generalized predictive control method based on parameter optimization and compensation signal (in Chinese). Sci Sin Inform, 2024, 54: 2240–2262, doi: 10.1360/SSI-2023-0413

对物理系统或生物及化学反应的内部原理和机制进行深入理解,通过数学建模方法得到能够反映本质规律和因果关系的模型,进而精确地描述被控对象的动态行为、各个部分之间的相互作用以及随时间演变的过程.由于实际工业系统本身的各种复杂性,常常难以得到精确的数学模型,所以预测控制在发展早期是建立在脉冲响应和阶跃响应上的非参数模型,无需进一步辨识可直接用来设计控制器,结构简单且易于应用,但是依赖专业知识和经验.随着自适应控制的发展,基于辨识模型并带有自校正的预测控制算法出现,采用辨识模型的机制使得控制系统的分析与设计更具备理论基础,并增强了系统鲁棒性.计算机技术的进步和对非线性系统控制理论的研究,使得能够更好地描述系统动态特性的非线性、时变以及具有不确定性的系统模型得到进一步的研究^[2,6].系统外部的干扰以及建模误差等内部的不确定性,都不可避免地影响实际系统的运行状态和输出.尽管滚动优化的方式使得 MPC 本身具有一定的鲁棒性,但并不足以消除这些影响.

随着人工智能以及大数据技术的发展,通过数据进行学习并与控制方法相结合的方式进入人们的视野.而现今工业生产设备在运行过程中会产生大量数据,充分利用这些数据信息学习系统模型、对不可直接测量的变量进行估计或对控制中的相关参数进行学习等,将会进一步提升预测和控制效果^[7~10].文献[7]利用工业大数据,将系统辨识和自适应深度学习相结合,提出了一种智能预测方法.文献[8]采用数据驱动方法设计了一种新的虚拟未建模动态增量估计算法以及针对该估计值的非线性补偿器,提出了一种非线性 GPC 方法.此外,基于观测器的 MPC^[11,12]、自适应 MPC^[13~15]、滑模 MPC^[16,17],以及鲁棒 MPC^[18,19]等都是处理系统中存在的干扰或内部不确定性的重要方法.文献[11]通过对未知干扰进行观测并将扰动引入到滚动优化的预测模型中,提高系统的抗干扰能力.文献[15]提出了一种基于递推最小二乘算法的在线未知参数和不确定性估计策略,以此构造满足鲁棒约束的预测控制算法.

上述文献通过利用数据信息进行建模或估计^[7~10],对扰动进行观测^[11,12]或对系统参数进行辨识^[13~15],其得到的数值与真实值存在的误差会引入系统,影响预测和控制性能.利用滑模技术^[16,17]增强控制系统干扰抑制能力需已知干扰上界,且存在抖振问题.鲁棒 MPC^[18,19]通常要求干扰有界并约束在一个紧集中,求解结果保守.此外,上述 MPC 文献中的控制器加权参数都是人工试凑,而加权参数在改善系统动态性能,提高系统稳定性和鲁棒性上具有重要作用,但是人工试凑依赖于操作人员的工作经验,费时费力且可能难以取得令人满意的控制效果.文献[20,21]总结了一系列 MPC 控制器加权参数整定规则,但基于规则进行参数选择依赖预定义的人工规则,无法充分利用系统的动态特性,可能难以达到最优的控制效果.文献[22,23]分别采用多目标优化方法和粒子群算法对 MPC 中控制器加权参数进行优化整定.但文献[22]未考虑系统中存在的不确定性,文献[23]需通过辨识技术获得扰动模型,而辨识误差会引入系统,影响参数整定以及预测控制效果.因此,如何克服上述文献方法的局限性,进一步降低建模误差及干扰等不确定性对系统的影响,提高系统性能以及对系统数据的利用就是本文关注的焦点.

文献[24~26]根据工业运行过程的特点,将被控对象描述为确定性的线性模型和未知非线性项的形式,通过未知非线性项描述建模误差以及干扰等不确定性,依据所得数据对其进行精确补偿,避免了估计误差造成的影响,从而得到了较好的动态性能,并成功应用于电熔镁砂熔炼、工业换热过程等.然而,该方法要求系统中的未知非线性项全局有界,且处理最小相位系统和非最小相位系统时需要分别设计.故,如何克服文献[24~26]中信号补偿法的局限性也是本文关注的重点.

本文结合文献[8~10,24~26]所提的控制思想,针对存在干扰和未知不确定性的非线性被控对象的跟踪控制问题,将未知非线性项补偿算法与 GPC 相结合,提出了补偿信号驱动的非线性 GPC 方法.将被控对象描述为低阶线性模型与未知非线性项之和的控制器设计模型,其中低阶线性模型参数

通过历史数据离线辨识获得, 将建模误差及干扰等不确定性全部归为未知非线性项. 利用低阶线性模型设计广义预测控制器, 根据广义预测控制闭环系统可知未知非线性项对系统的影响可由跟踪误差准确反映, 通过引入一步超前最优控制指标来最小化跟踪误差和控制输入波动获得补偿信号, 从而设计了基于补偿信号的非线性广义预测控制器, 使系统具有更好的动态性能. 为进一步优化控制性能, 提出基于梯度下降法的广义预测控制器加权参数和补偿信号加权参数优化整定方法. 同时, 本文将以往未知非线性项全局有界的要求放宽为 Lipschitz 条件, 增强了算法的普适性. 在此基础上, 证明了跟踪误差的收敛性以及闭环系统的稳定性. 最后通过仿真对比实验验证了所提方法的有效性.

2 问题描述

考虑如下—类受扰动影响的单输入单输出被控对象:

$$y(k+1) = f(y(k), \dots, y(k-n_y), u(k), \dots, u(k-n_u), d(k), \dots, d(k-n_d)), \quad (1)$$

其中, $y(k) \in \mathbb{R}$, $u(k) \in \mathbb{R}$ 和 $d(k) \in \mathbb{R}$ 分别是系统输出、输入和未知有界干扰, k 是采样时刻, $n_y \in \mathbb{Z}^+$, $n_u \in \mathbb{Z}^+$, $n_d \in \mathbb{Z}^+$ 分别是未知的输出、输入和干扰的阶次, 且 $n_y \geq n_u$, $f(\cdot)$ 是未知的光滑非线性函数.

为便于控制器设计, 并利用工业过程运行在工作点附近的特点, 将被控对象 (1) 在工作点附近表示为如下低阶线性模型与未知非线性项之和的形式^[27]:

$$A(z^{-1})y(k+1) = B(z^{-1})u(k) + v(k), \quad (2)$$

其中,

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}, \quad (3)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} v(k) &= f(y(k), \dots, y(k-n_a+1), u(k), \dots, u(k-n_b), \omega(k)) \\ &\quad + a_1 y(k) + \dots + a_{n_a} y(k-n_a+1) - b_0 u(k) - \dots - b_{n_b} u(k-n_b) \\ &:= F(\mathbf{X}(k), \omega(k)), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{X}(k) = [y(k), \dots, y(k-n_a+1), u(k), \dots, u(k-n_b)]^T \in \mathbb{R}^{n_a+n_b+1}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \omega(k) &= [y(k-n_a), \dots, y(k-n_y), u(k-n_b-1), \dots, u(k-n_u), \\ &\quad d(k), \dots, d(k-n_d)] \in \mathbb{R}^{n_y+n_u+n_d+2-n_a-n_b}, \end{aligned} \quad (7)$$

a_i ($i = 1, 2, \dots, n_a$) 和 b_j ($j = 0, 1, \dots, n_b$) 是指定阶次的参数, 可通过最小二乘法获得, n_a 和 n_b 是指定的系统阶次, 且 $0 < n_a < n_y$, $0 < n_b < n_u$, $n_a \geq n_b$, $v(k)$ 是由被控对象的建模误差以及干扰等不确定性所构成的未知非线性项. 控制目标:

(1) 针对式 (1) 所描述的被控对象, 设计基于补偿信号的非线性广义预测控制器, 在扰动和设定值频繁变化的情况下, 系统输出尽可能地跟踪设定值, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} |e(k)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |y_{sp}(k) - y(k)| = 0$, 其中, $e(k) \in \mathbb{R}$ 是跟踪误差, 定义为 $e(k) = y_{sp}(k) - y(k)$, $y_{sp}(k)$ 是预先给定的设定值.

(2) 为提高控制性能, 提出基于梯度下降法的控制器加权参数 λ_1 和 λ_3 的优化整定方法, 其中 λ_1 是广义预测控制器加权参数, λ_3 是补偿信号的加权参数.

注释1 本文的控制方法要求被控对象 (1) 是可控的, 输入输出数据是可观测的. 在实际工业应用中, 大部分系统都可以采用一阶或二阶系统来近似描述^[28]. 本文为了增加模型表达的普适性, 所以并没有直接将低阶线性模型设为一阶或二阶系统. 低阶线性模型阶次的设定可以通过赤池信息量准则 (Akaike information criterion, AIC) 获得, AIC 准则是评估统计模型复杂度和衡量统计模型拟合数据优良的一种标准, 可以在模型阶次复杂度和此模型下数据拟合度之间找到一个平衡点, 即找出可以最好拟合数据的最低模型阶次^[29].

3 基于参数优化和补偿信号的非线性广义预测控制

3.1 广义预测控制

为设计广义预测控制器 $u_1(k)$, 引入如下性能指标 J_1 ^[3]:

$$\begin{aligned} J_1(N_p, N_u, \lambda_1) &= \sum_{j=1}^{N_p} [y(k+j) - y_{sp}(k+j)]^2 + \lambda_1 \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u_1(k+j-1)]^2 \\ &= [\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}_{sp}(k+1)]^T [\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}_{sp}(k+1)] + \lambda_1 \Delta \mathbf{u}_1^T(k) \Delta \mathbf{u}_1(k), \end{aligned} \quad (8)$$

其中, N_p 是预测时域, N_u 是控制时域, $N_p \geq N_u$, λ_1 是控制器加权参数, $\Delta = 1 - z^{-1}$ 是差分算子, $\mathbf{y}(k+1) = [y(k+1), y(k+2), \dots, y(k+N_p)]^T$, $\mathbf{y}_{sp}(k+1) = [y_{sp}(k+1), y_{sp}(k+2), \dots, y_{sp}(k+N_p)]^T$, $\Delta \mathbf{u}_1(k) = [\Delta u_1(k), \Delta u_1(k+1), \dots, \Delta u_1(k+N_u-1)]^T$. 为设计 $u_1(k)$, 需首先获得系统输出的预测值, 因此引入如下 Diophantine 方程^[2]:

$$1 = E_j(z^{-1})\bar{A}(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}), \quad (9)$$

$$E_j(z^{-1})B(z^{-1}) = G_j(z^{-1}) + z^{-j}H_j(z^{-1}), \quad (10)$$

其中, $\bar{A}(z^{-1}) = \Delta A$, $j = 1, 2, \dots, N_p$, $E_j(z^{-1}) = e_0 + e_1 z^{-1} + \dots + e_{j-1} z^{-j+1}$, $F_j(z^{-1}) = f_{j,0} + f_{j,1} z^{-1} + \dots + f_{j,n_a} z^{-n_a}$, $G_j(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{j-1} z^{-j+1}$, $H_j(z^{-1}) = h_{j,0} + h_{j,1} z^{-1} + \dots + h_{j,n_b-1} z^{-n_b+1}$. 由于未来时刻的未知非线性项的增量 $\Delta v(k)$ 未知, 所以由式 (2), (9) 和 (10) 可得 $y(k)$ 在 k 时刻对未来 $k+j$ 时刻的预测为

$$\hat{y}(k+j|k) = G_j(z^{-1})\Delta u_1(k+j-1) + H_j(z^{-1})\Delta u_1(k-1) + F_j(z^{-1})y(k). \quad (11)$$

进一步将式 (11) 写为以下向量形式:

$$\hat{\mathbf{y}}(k+1) = \mathbf{G}\Delta \mathbf{u}_1(k) + \mathbf{H}(z^{-1})\Delta \mathbf{u}_1(k-1) + \mathbf{F}(z^{-1})y(k), \quad (12)$$

其中, $\hat{\mathbf{y}}(k+1) = [\hat{y}(k+1|k), \hat{y}(k+2|k), \dots, \hat{y}(k+N_p|k)]^T$, $\mathbf{H}(z^{-1}) = [H_1(z^{-1}), \dots, H_{N_p}(z^{-1})]^T$, $\mathbf{F}(z^{-1}) =$

$[F_1(z^{-1}), \dots, F_{N_p}(z^{-1})]^T$,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 & & & & & & & \\ g_1 & g_0 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\ g_{N_u-1} & g_{N_u-2} & \cdots & g_0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & \\ g_{N_p-1} & g_{N_p-2} & \cdots & g_{N_p-N_u} & & & & \end{bmatrix}_{N_p \times N_u}, \quad (13)$$

用 $\hat{\mathbf{y}}(k+1)$ 替换式 (8) 中 $\mathbf{y}(k+1)$, 通过极值的必要条件 $\frac{\partial J_1}{\partial \Delta \mathbf{u}_1(k)} = 0$ 可得 [8]

$$\Delta \mathbf{u}_1(k) = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda_1 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T [\mathbf{y}_{sp}(k+1) - \mathbf{F}(z^{-1})\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(z^{-1})\Delta \mathbf{u}_1(k-1)], \quad (14)$$

其中, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N_u \times N_u}$. 进一步令

$$\mathbf{P}^T = \mathbf{I}_{\lambda_1} (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda_1 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T = [p_1, p_2, \dots, p_{N_p}], \quad (15)$$

其中, $\mathbf{I}_{\lambda_1} = [1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{N_u}$. 整理可得广义预测控制器 $u_1(k)$ 为

$$(1 - z^{-1})H_c(z^{-1})u_1(k) + F_c(z^{-1})y(k) = P_c(z^{-1})y_{sp}(k + N_p), \quad (16)$$

其中, $H_c(z^{-1}) = 1 + z^{-1} \sum_{k=1}^{N_p} p_k H_k(z^{-1}) = 1 + z^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{H}(z^{-1})$, $F_c(z^{-1}) = \sum_{k=1}^{N_p} p_k F_k(z^{-1})$, $P_c(z^{-1}) = \mathbf{P}^T \cdot [z^{-N_p+1}, z^{-N_p+2}, \dots, 1]^T = p_{N_p} + p_{N_p} z^{-1} + \dots + p_1 z^{-N_p+1}$. 将式 (16) 带入式 (2) 可得 GPC 闭环系统方程为

$$\begin{aligned} & [(1 - z^{-1})A(z^{-1})H_c(z^{-1}) + z^{-1}B(z^{-1})F_c(z^{-1})]y(k+1) \\ & = B(z^{-1})P_c(z^{-1})y_{sp}(k + N_p) + (1 - z^{-1})H_c(z^{-1})v(k). \end{aligned} \quad (17)$$

由式 (17) 可知, 系统输出 $y(k+1)$ 会受到未知非线性项 $v(k)$ 和设定值 $y_{sp}(k)$ 的影响, 当 $v(k)$ 和 $y_{sp}(k)$ 频繁变化时, 系统输出波动增大, 性能下降, 难以稳定跟踪设定值.

3.2 基于补偿信号的非线性广义预测控制

为解决上述问题, 本文引入补偿信号实现在设定值和未知非线性项频繁变化下的控制性能优化, 将补偿信号与广义预测控制器相叠加, 得到补偿信号驱动的非线性广义预测控制器 $u(k)$ 为

$$u(k) = u_1(k) + u_2(k), \quad (18)$$

其中, $u_1(k)$ 是广义预测控制器, $u_2(k)$ 是补偿信号. 为设计补偿信号 $u_2(k)$, 先将式 (16) 和 (18) 带入式 (2), 可得跟踪误差 $e(k+1)$ 为

$$\begin{aligned} & [(1 - z^{-1})A(z^{-1})H_c(z^{-1}) + z^{-1}B(z^{-1})F_c(z^{-1})]e(k+1) \\ & = [(1 - z^{-1})A(z^{-1})H_c(z^{-1}) + z^{-1}B(z^{-1})F_c(z^{-1})]y_{sp}(k+1) - B(z^{-1})P_c(z^{-1})y_{sp}(k + N_p) \\ & \quad - B(z^{-1})H_c(z^{-1})(1 - z^{-1})u_2(k) - (1 - z^{-1})H_c(z^{-1})v(k-1) - (1 - z^{-1})H_c(z^{-1})\Delta v(k), \end{aligned} \quad (19)$$

其中,

$$v(k-1) = A(z^{-1})y(k) - B(z^{-1})u(k-1), \quad (20)$$

$$\Delta v(k) = v(k) - v(k-1). \quad (21)$$

通过式(19)可以看出,未知非线性项 $v(k)$ 和设定值 $y_{sp}(k)$ 对系统的影响可反映至跟踪误差 $e(k+1)$,因此以式(19)作为补偿信号 $u_2(k)$ 的设计模型.为使跟踪误差 $e(k+1)$ 和补偿信号 $u_2(k)$ 的波动最小,引入一步最优控制性能指标 J_2 ^[24]:

$$J_2 = [e(k+1)]^2 + [\lambda_2(1-z^{-1})u_2(k)]^2, \quad (22)$$

其中, λ_2 是加权参数.为得到跟踪误差 $e(k)$ 的预测值,引入如下Diophantine方程:

$$(1-z^{-1})A(z^{-1})H_c(z^{-1}) + z^{-1}B(z^{-1})F_c(z^{-1}) + z^{-1}K_c(z^{-1}) = 1, \quad (23)$$

其中, $K_c(z^{-1}) = k_{c_0} + k_{c_1}z^{-1} + \dots + k_{c_{n_a+n_b}}z^{-(n_a+n_b)}$.将Diophantine方程式(23)带入式(19)可得

$$\begin{aligned} e(k+1) &= y_{sp}(k+1) - K_c(z^{-1})y(k) - B(z^{-1})P_c(z^{-1})y_{sp}(k+N_p) - B(z^{-1})H_c(z^{-1})(1-z^{-1})u_2(k) \\ &\quad - (1-z^{-1})H_c(z^{-1})v(k-1) - (1-z^{-1})H_c(z^{-1})\Delta v(k). \end{aligned} \quad (24)$$

由于当前时刻的未知非线性项增量 $\Delta v(k)$ 未知,故对 $e(k+1)$ 的一步预测为

$$\begin{aligned} \hat{e}(k+1|k) &= y_{sp}(k+1) - K_c(z^{-1})y(k) - B(z^{-1})P_c(z^{-1})y_{sp}(k+N_p) \\ &\quad - B(z^{-1})H_c(z^{-1})(1-z^{-1})u_2(k) - (1-z^{-1})H_c(z^{-1})v(k-1). \end{aligned} \quad (25)$$

为求取补偿信号 $u_2(k)$,运用极值原理,使 $\frac{\partial J_2}{\partial u_2(k)} = 0$ 可得^[26]

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial u_2(k)} &= 2e(k+1)\frac{\partial e(k+1)}{\partial u_2(k)} + 2\lambda_2^2(1-z^{-1})u_2(k) \\ &= 2e(k+1)(-b_0) + 2\lambda_2^2(1-z^{-1})u_2(k) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

将 $e(k+1)$ 用预测值 $\hat{e}(k+1|k)$ 所替代,并设加权参数 $\lambda_3 = -\frac{\lambda_2^2}{b_0}$,上式可写为

$$\hat{e}(k+1|k) + \lambda_3(1-z^{-1})u_2(k) = 0. \quad (27)$$

将 $\hat{e}(k+1|k)$ 带入式(27),整理可得补偿信号 $u_2(k)$ 为

$$\begin{aligned} &(1-z^{-1})[H_c(z^{-1})B(z^{-1}) - \lambda_3]u_2(k) \\ &= y_{sp}(k+1) - K_c(z^{-1})y(k) - B(z^{-1})P_c(z^{-1})y_{sp}(k+N_p) - (1-z^{-1})H_c(z^{-1})v(k-1). \end{aligned} \quad (28)$$

注释2 令Diophantine方程式(23)中的 $(1-z^{-1})A(z^{-1})H_c(z^{-1}) + z^{-1}B(z^{-1})F_c(z^{-1}) = T(z^{-1})$,可得 $T(z^{-1}) = 1 + t_1z^{-1} + \dots + t_{n_a+n_b+1}z^{-(n_a+n_b+1)}$ 是首1多项式,且与 $z^{-1}K_c(z^{-1})$ 中的 z^{-1} 项只有公因子1,即互质,所以式(23)一定有解. $K_c(z^{-1})$ 的阶次为 n_{K_c} ,系数未知,由式(23)可知构成的方程组中未知数个数 $n_{K_c} + 1$,方程个数为 $n_a + n_b + 1$,式(23)存在唯一解的条件是 $n_{K_c} + 1 = n_a + n_b + 1$,所以 $K_c(z^{-1})$ 的阶次为 $n_a + n_b$.

3.3.2 动态性能分析

下面分析所提控制方法不仅能保证闭环系统稳定,而且可以减少跟踪误差的波动.通过 GPC 闭环系统方程式 (17) 可得跟踪误差为

$$\begin{aligned} & [(1-z^{-1})A(z^{-1})H_c(z^{-1})+z^{-1}B(z^{-1})F_c(z^{-1})]e_{\text{gpc}}(k+1) \\ & = [(1-z^{-1})A(z^{-1})H_c(z^{-1})+z^{-1}B(z^{-1})F_c(z^{-1})]y_{\text{sp}}(k+1) \\ & \quad - B(z^{-1})P_c(z^{-1})y_{\text{sp}}(k+N_p) - (1-z^{-1})H_c(z^{-1})v(k). \end{aligned} \quad (35)$$

进一步整理式 (35) 可得

$$[e_{\text{gpc}}(k)]^2 = [\tilde{e}(k) - H_c(z^{-1})\Delta^2 v(k-1)]^2 \leq 2[\tilde{e}(k)]^2 + 2[H_c(z^{-1})\Delta^2 v(k-1)]^2, \quad (36)$$

其中,

$$\tilde{e}(k) = y_{\text{sp}}(k) - K_c(z^{-1})y(k-1) - B(z^{-1})P_c(z^{-1})y_{\text{sp}}(k+N_p-1) - H_c(z^{-1})\Delta v(k-2), \quad (37)$$

$$\Delta^2 v(k-1) = \Delta v(k-1) - \Delta v(k-2). \quad (38)$$

本文通过引入补偿信号式 (28) 来降低频繁变化的 $y_{\text{sp}}(k)$ 和 $v(k)$ 对系统的影响,减小跟踪误差.将基于补偿信号的非线性广义预测控制器式 (18) 带入式 (2) 并整理可得跟踪误差为

$$[e(k)]^2 = [M(z^{-1})\tilde{e}(k) - H_c(z^{-1})\Delta^2 v(k-1)]^2 \leq 2[M(z^{-1})\tilde{e}(k)]^2 + 2[H_c(z^{-1})\Delta^2 v(k-1)]^2, \quad (39)$$

其中,

$$M(z^{-1}) = \frac{-\lambda_3}{H_c(z^{-1})B(z^{-1}) - \lambda_3}. \quad (40)$$

通过对比式 (36) 和 (39) 可以看出,选择适当的加权参数 λ_3 使 $M(z^{-1})$ 的 H_∞ 范数^[31] 满足 $\|M(z^{-1})\|_\infty < 1$,则本文基于补偿信号的非线性广义预测控制方法相较于传统 GPC 方法具有更好的控制性能,跟踪误差的波动更小.

3.4 加权参数优化

将式 (18) 带入被控对象可得闭环系统方程为

$$\begin{aligned} & [H_c(z^{-1})B(z^{-1}) - \lambda_3(1 - z^{-1}K_c(z^{-1}))]y(k) \\ & = H_c(z^{-1})B(z^{-1})y_{\text{sp}}(k) - \lambda_3 H_c(z^{-1})\Delta v(k-2) - \lambda_3 B(z^{-1})P_c(z^{-1})y_{\text{sp}}(k+N_p-1) \\ & \quad - [\lambda_3 - H_c(z^{-1})B(z^{-1})]H_c(z^{-1})\Delta^2 v(k-1). \end{aligned} \quad (41)$$

从闭环方程式 (41) 可以看出,系统输出受到加权参数 λ_1 和 λ_3 的影响.为进一步提高系统的动态性能,减小系统跟踪误差,下面对 λ_1 和 λ_3 进行优化整定.由于在大部分工业过程中 $\Delta^2 v(k-1)$ 是波动在零附近的非常小的量,可以忽略不计,所以在进行参数优化时未考虑该项.将式 (41) 进一步写为以下跟踪误差方程:

$$[H_c(z^{-1})B(z^{-1}) - \lambda_3]e(k)$$

$$= -\lambda_3 y_{sp}(k) + \lambda_3 K_c(z^{-1})y(k-1) + \lambda_3 B(z^{-1})P_c(z^{-1})y_{sp}(k+N_p-1) + \lambda_3 H_c(z^{-1})\Delta v(k-2). \quad (42)$$

从式 (42) 可以看出, 跟踪误差 $e(k)$ 与给定的设定值 $y_{sp}(k)$, 以及过去时刻的系统输出 $y(k)$ 和未知非线性项的增量 $\Delta v(k)$ 有关, 因此本文利用这些数据通过梯度下降算法对加权参数进行优化, 优化后的控制器加权参数表示为 λ_1^* 和 λ_3^* . 为此, 先定义以下函数:

$$\Gamma_1(\lambda_1, \lambda_3) = \|\mathbf{C}^T\|_p \|\Psi_E^T\|_p - \left| 1 - \frac{b_0 \rho_{e_0}}{b_0 - \lambda_3} \right|, \quad (43)$$

$$\Gamma_2(\lambda_1, \lambda_3) = \left\| \frac{\rho_{u_1}}{b_0 - \lambda_3} \right\| (1 + \delta_W L_0) + \left| 1 - \frac{b_0 \rho_{e_0}}{b_0 - \lambda_3} \right| + \delta_W L_0 \|\Psi_E^T\|_p - 1. \quad (44)$$

令 $\Gamma(\lambda_1, \lambda_3) = [\Gamma_1(\lambda_1, \lambda_3), \Gamma_2(\lambda_1, \lambda_3)]^T$, 可知闭环系统稳定的条件为 $\Gamma(\lambda_1, \lambda_3) < 0$. 将式 (42) 展开并整理可得

$$\begin{aligned} e(k) &= \eta_1[\varphi_1(k-1) + b_0 \varphi_3(k-1)] + \eta_1 \eta_2 \varphi_2(k-1) + b_0 \eta_1 \eta_2 \varphi_4(k-1) - \eta_2 \varphi_4(k-1) - \varphi_3(k-1) \\ &= \bar{\eta} \bar{\varphi}(k-1) - \varphi_3(k-1), \end{aligned} \quad (45)$$

其中,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{b_0 - \lambda_3}, \quad \eta_2 = \mathbf{P}^T, \quad \varphi_1(k-1) = -B_c(z^{-1})e(k-1), \\ B_c(z^{-1}) &= b_1 + b_2 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b+1}, \quad \varphi_2(k-1) = \mathbf{H}(z^{-1})[-b_0 - z^{-1}B_c(z^{-1})]e(k-1), \\ \varphi_3(k-1) &= K_c(z^{-1})y(k-1) - y_{sp}(k) + \Delta v(k-2), \\ \varphi_4(k-1) &= \mathbf{H}(z^{-1})\Delta v(k-3) + [z^{-N_p+1}, z^{-N_p+2}, \dots, 1]^T B(z^{-1})\Delta y_{sp}(k+N_p-1), \\ \bar{\eta} &= [\eta_1, \eta_2, \eta_1 \eta_2], \\ \bar{\varphi}(k-1) &= [\varphi_1(k-1) + b_0 \varphi_3(k-1), -\varphi_4(k-1), \varphi_2(k-1) + b_0 \varphi_4(k-1)]^T. \end{aligned} \quad (46)$$

为使跟踪误差尽可能小, 构造以 $\bar{\eta}$ 为决策变量的控制器参数选择优化指标^[26]:

$$\min_{\bar{\eta}} J_3 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [e(j)]^2 \quad (47)$$

$$\text{s.t. } e(k) = \bar{\eta} \bar{\varphi}(k-1) - \varphi_3(k-1), \quad \Gamma(\lambda_1, \lambda_3) < 0. \quad (48)$$

利用随机梯度下降法的思想, $\bar{\eta}$ 的更新方式为

$$\bar{\eta}(k) = \bar{\eta}(k-1) - \alpha \frac{2}{k} e(k) \bar{\varphi}(k-1), \quad (49)$$

其中, α 是学习率. 参数优化停止条件为

$$\|\bar{\eta}(k) - \bar{\eta}(k-1)\| < \mu_1, \quad \frac{1}{N} \sum_{j=k-N+1}^k [e(j)]^2 < \mu_2, \quad (50)$$

其中, μ_1 和 μ_2 分别是 $\bar{\eta}(k)$ 和 J_3 的收敛界, N 是收敛时长, $k > N$, 均基于经验选取. 满足上述条件时, 可得 $\bar{\eta}^* = \bar{\eta}(k)$, 以及

$$\lambda_3^* = b_0 - \frac{1}{\eta_1^*}, \quad (\mathbf{P}^T)^* = \eta_2^*. \quad (51)$$

进一步根据式 (15) 可得优化后的 λ_1^* 为

$$\lambda_1^* = [(P^T)^* G(G^T G)^{-1}]^+ [I_{\lambda_1} - (P^T)^* G(G^T G)^{-1} (G^T G)], \quad (52)$$

其中, 上标 “+” 表示求矩阵伪逆.

注释3 根据凸函数的性质可得式 (47) 为凸函数, 由文献 [32] 可知通过梯度下降法得到式 (49) 梯度为零的驻点, 该驻点即是全局最优点, 表明梯度下降法求出的参数能够使得性能指标式 (47) 达到最优, 即选择出的参数能够达到该性能指标. 当其为非凸函数时, 可以通过添加随机扰动和噪声, 或以不同的初值进行学习以及逐步减小学习率的方式, 避免梯度下降法陷入局部最优 [33].

4 仿真实验

下面通过与非线性 GPC [8]、自适应 MPC [14] 以及基于 Nelder-Mead 优化方法的非线性 MPC [6] 进行仿真对比实验, 验证本文所提方法的有效性. 在结果对比中采用如下误差绝对值累积和 (sum of absolute error, SAE) 以及均方误差 (mean-square error, MSE) 作为性能评价指标,

$$\text{SAE} = \sum_{k=1}^{\bar{N}} |y_{\text{sp}}(k) - y(k)|, \quad (53)$$

$$\text{MSE} = \frac{1}{\bar{N}} \sum_{k=1}^{\bar{N}} [y_{\text{sp}}(k) - y(k)]^2, \quad (54)$$

其中, \bar{N} 表示采样个数.

仿真 1. 采用文献 [8] 的仿真模型

$$\begin{aligned} y(k+1) = & 2.6y(k) - 1.2y(k-1) + u(k) + 0.7u(k-1) \\ & + 0.1y(k) \sin(u(k) + u(k-1) + y(k) + y(k-1)). \end{aligned} \quad (55)$$

设定值为

$$y_{\text{sp}}(k) = 3\text{sign}(\sin(\pi/k)). \quad (56)$$

采用本文所提出的基于参数优化和补偿信号的非线性广义预测控制方法, 首先进行参数选择, 设 $\alpha = 0.0001$, $\mu_1 = 0.001$, $\mu_2 = 0.01$, $N = 1000$, λ_1 和 λ_3 的初值为 18 和 -20, $\bar{\eta}$ 中参数 η_1 , η_2 以及 J_3 的迭代结果如图 1 所示. 根据参数优化结果以及式 (51) 和 (52) 可得优化后的控制器加权参数为 $\lambda_1^* = 10.0046$, $\lambda_3^* = -18.5442$.

将本文所提方法与文献 [8] 中的方法进行比较, 在相同预测时域和控制时域条件下, 文献 [8] 采用的广义预测控制器加权参数 $\lambda = 7$, 本文采用经过优化后的加权参数 λ_1^* 和 λ_3^* , 针对式 (55) 所示的被控对象所得到的系统输出和输入曲线分别如图 2 和 3 所示. 图 4 验证了本文针对未知非线性项所提出的假设 1 中的 Lipschitz 条件, 可以看出 $|\Delta v(k)|$ 与 $\|\Delta \mathbf{X}(k)\|_p$ 的比值有界, 即存在 Lipschitz 常数 L_0 使得本文假设条件成立. 采用式 (53) 和 (54) 所示的 SAE 和 MSE 指标对控制性能进行评价, 结果见表 1. 从图 2 和 3 可以看出, 本文所提方法相较于文献 [8], 系统输出响应更快, 跟踪误差更小, 可以达到更好的跟踪效果, 这是由于文献 [8] 对未知非线性项进行估计时引起的估计误差会引入被控系统,

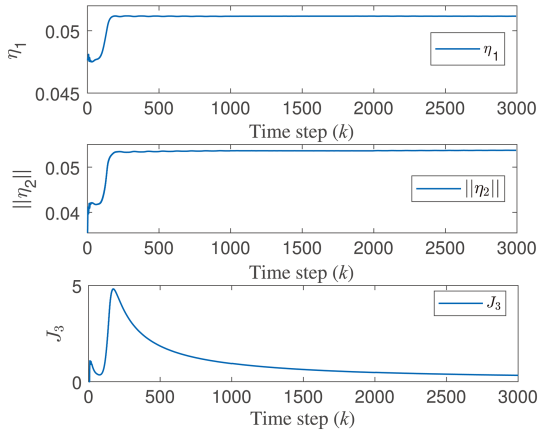


图 1 (网络版彩图) η_1 , η_2 和 J_3 的迭代曲线
 Figure 1 (Color online) Iteration curves of η_1 , η_2 and J_3

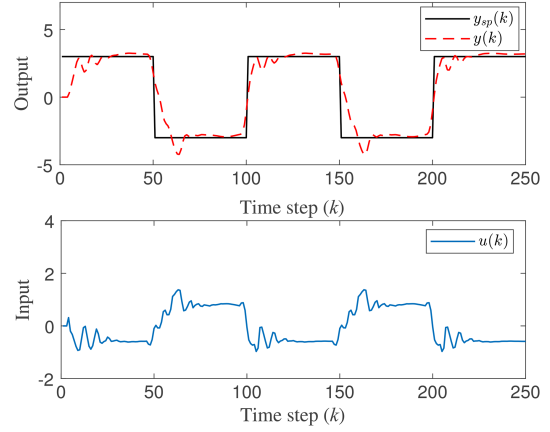


图 2 (网络版彩图) 文献 [8] 方法的输出和输入曲线
 Figure 2 (Color online) Curves of output and input with the method in [8]

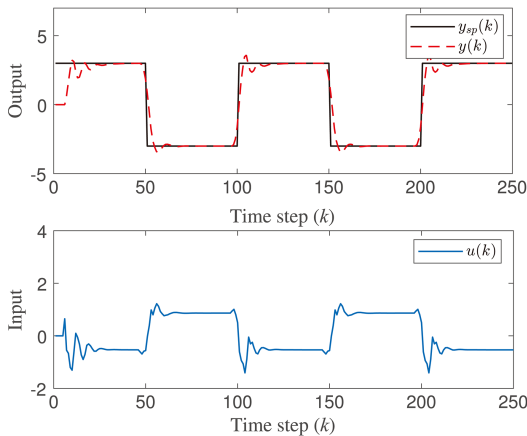


图 3 (网络版彩图) 本文方法在优化后加权参数下的输出和输入曲线
 Figure 3 (Color online) Curves of output and input with the proposed method under optimized weighting parameters

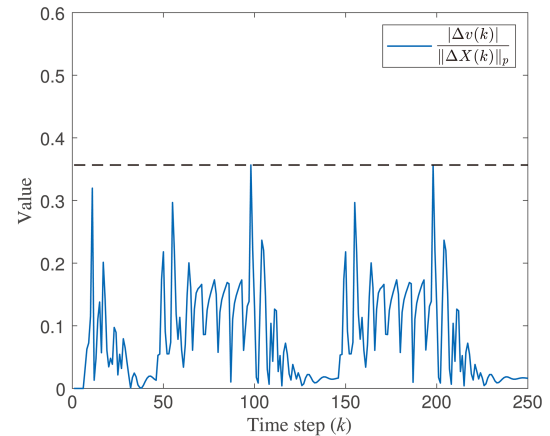


图 4 (网络版彩图) Lipschitz 条件验证
 Figure 4 (Color online) Lipschitz condition verification

影响控制性能, 并且控制器加权参数为试凑, 并未进行优化整定. 此外, 从表 1 的数据统计中可以得到评价指标 SAE 和 MSE 分别下降了 50.09% 和 45.59%, 进一步说明了本文所提方法的有效性.

图 5 是本文控制方法使用加权参数初值时的系统输入输出响应曲线, 通过对比采用初值加权参数以及经过梯度下降法优化后的加权参数的系统响应曲线图 3 和 5 可以看出, 初始加权参数下的系统输出波动非常大, 无法稳定跟踪设定值, 优化后的加权参数可以快速且稳定地实现对设定值的跟踪, 控制效果更好, 进而验证了使用梯度下降法的有效性.

表 1 性能评价指标对比 ($\bar{N} = 250$)Table 1 Comparison of performance evaluation indicators ($\bar{N} = 250$)

Control method	SAE	MSE
In [8]	121.4111	0.7754
This paper	60.5902	0.4219
Percentage decrease	↓50.09%	↓45.59%

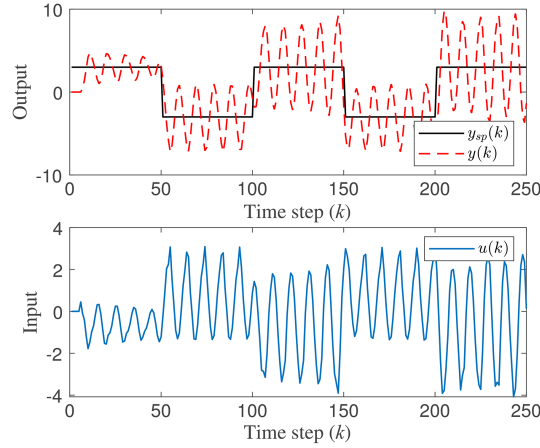


图 5 (网络版彩图) 本文方法在初始加权参数下的输出和输入曲线

Figure 5 (Color online) Curves of output and input with the proposed method under initial weighting parameters

仿真 2. 采用文献 [14] 的仿真模型

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ 0.46 & 0.36 & 1.54 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(k) = [1 \ 0 \ 0]\mathbf{x}(k). \quad (57)$$

系统参数 \mathbf{A} 存在不确定性, 在系统输出添加扰动 $d(k)$ 为

$$d(k) = 0.01 \cos(y(k)) + 0.01 \sin(0.5k) + 0.05 \cos(0.2k) + 0.02 \text{sign}(\cos(0.05k)). \quad (58)$$

进一步将上述系统转化为线性加未知非线性项的形式为

$$y(k+1) = 3.5282y(k) - 3.9719y(k-1) + 1.4594y(k-2) + 0.0015u(k) + 0.0065u(k-1) + 0.0018u(k-3) + v(k), \quad (59)$$

其中,

$$v(k) = 0.295y(k) - 0.543y(k-1) - 0.257y(k-2) + 0.0006u(k-1) + 0.0002u(k-2) + d(k). \quad (60)$$

设定值为

$$y_{\text{sp}}(k) = \begin{cases} 3, & 1 \leq k \leq 500, \\ 1, & 501 \leq k \leq 1000. \end{cases} \quad (61)$$

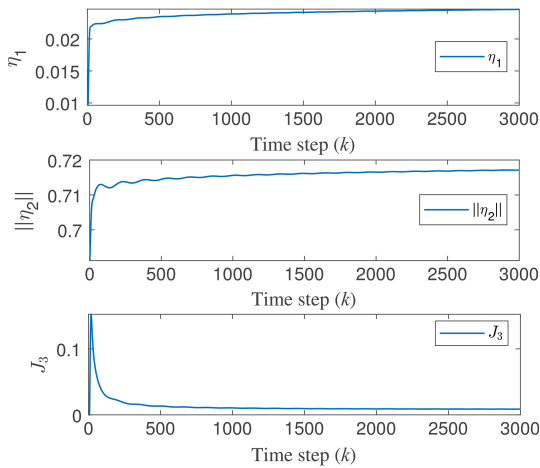


图 6 (网络版彩图) η_1 , η_2 和 J_3 的收敛曲线
 Figure 6 (Color online) Convergence curves of η_1 , η_2 and J_3

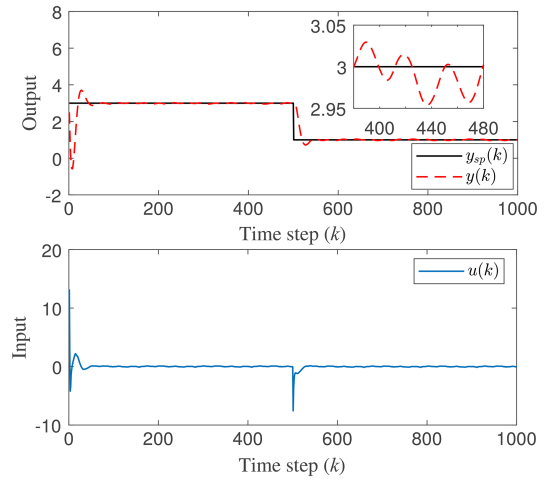


图 7 (网络版彩图) 采用文献 [14] 方法时系统输出和输入响应
 Figure 7 (Color online) Responses of the system output and input with the method in [14]

针对上述被控过程, 采用本文所提出的基于参数优化和补偿信号的非线性广义预测控制方法, 首先进行控制器加权参数选择. 设 $\alpha = 0.1$, $\mu_1 = 0.0001$, $\mu_2 = 0.001$, $N = 1000$, λ_1 和 λ_3 的初值为 0.1 和 -100 , $\bar{\eta}$ 中参数 η_1 , η_2 以及 J_3 的迭代结果如图 6 所示. 根据参数优化结果以及式 (51) 和 (52) 可得优化后的控制器加权参数为 $\lambda_1^* = 0.0465$, $\lambda_3^* = -40.5428$.

采用文献 [14] 方法和本文方法进行对比, 在相同的预测时域和控制时域参数设定下, 文献 [14] 在预测控制器加权参数 $R = 0.1$ 下与本文方法采用优化后加权参数的输入输出响应曲线如图 7 和 8 所示. 从图 9 中可以看出存在 Lipschitz 常数 L_0 使得本文中的假设 1 成立, 实现了对 Lipschitz 条件的验证. 表 2 是两种方法下跟踪误差的评价结果. 对比图 7, 8 和表 2 所示的实验结果不难看出, 本文所提控制方法具有更好的控制效果, 跟踪误差的波动更小, SAE 和 MSE 分别下降了 74.75% 和 87.51%. 这一性能提升是因为文献 [14] 存在系统模型参数辨识误差, 加权参数没有进行优化整定, 并且无法有效处理频繁变化的未知非线性项和设定值对系统跟踪误差所造成的影响, 本文则采用低阶线性模型加未知非线性项的形式, 通过闭环系统设计补偿信号来降低频繁变化的由建模误差以及干扰等组成的未知非线性项和设定值造成的影响, 且利用梯度下降法对控制器加权参数进行了优化整定. 为了能够快速跟踪设定值, 本文方法所给的控制输入存在小范围的波动, 但是波动范围的数值相较于文献 [14] 更小.

仿真 3. 采用文献 [6] 中的 Hammerstein 模型:

$$\begin{aligned} s(k) &= 0.396u(k) - 0.08u(k)^2, \\ y(k) &= 0.962y(k-1) + s(k-1), \end{aligned} \quad (62)$$

其中, $u(k)$ 是控制压力的控制输入, $s(k)$ 是轴杆位置, $y(k)$ 是通过阀门的流量, 即系统输出. 为验证本文所提方法的有效性, 引入如下扰动信号:

$$d(k) = 0.05 \cos(y(k-1)) + 0.05u(k-1) + 0.5 \sin(0.05k)$$

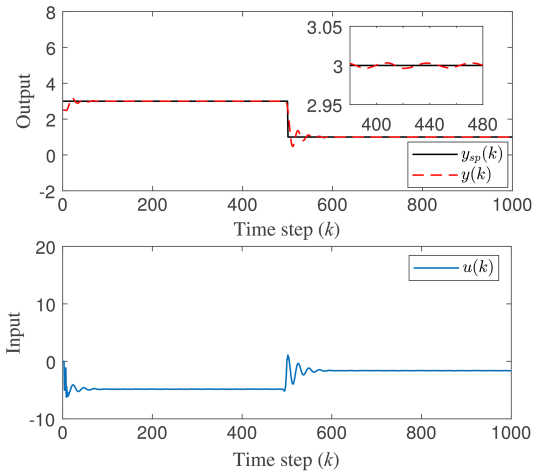


图 8 (网络版彩图) 采用本文所提方法时系统输出和输入响应

Figure 8 (Color online) Responses of the system output and input with the proposed method

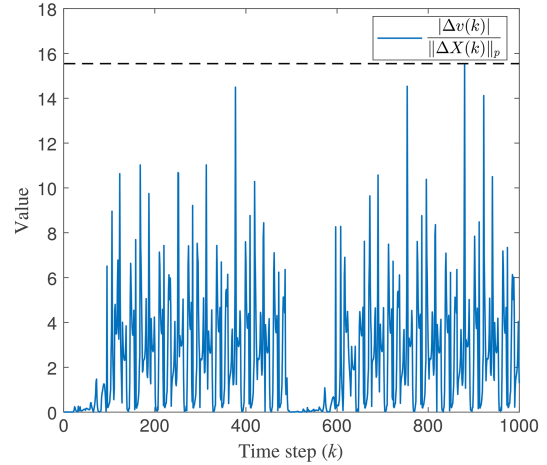


图 9 (网络版彩图) 对假设 1 中 Lipschitz 条件的验证

Figure 9 (Color online) Verification of the Lipschitz condition in Assumption 1

表 2 文献 [14] 方法与本文方法下的跟踪误差性能评价 ($\bar{N} = 1000$)

Table 2 Performance evaluation of the tracking error with the method in [14] and the proposed method ($\bar{N} = 1000$)

Control method	SAE	MSE
In [14]	96.7093	0.1602
This paper	24.4130	0.0203
Percentage decrease	↓74.75%	↓87.51%

$$+ 0.2 \cos(0.02k) + 0.1 \text{sign}(\cos(0.05k)). \tag{63}$$

将非线性仿真模型式 (62) 写为式 (2) 所示的形式:

$$y(k+1) = 0.962y(k) + 0.396u(k) + v(k), \tag{64}$$

其中, $v(k) = 0.396d(k) - 0.317u(k)^2$. 设定值为

$$y_{\text{sp}}(k) = \begin{cases} 2, & 1 \leq k \leq 250, \\ -2, & 251 \leq k \leq 500, \\ 2, & 501 \leq k \leq 750, \\ -2, & 751 \leq k \leq 1000. \end{cases} \tag{65}$$

针对上述被控过程, 采用本文所提出的非线性广义预测控制方法, 设计补偿信号并进行参数优化. 设 $\alpha = 0.01$, $\mu_1 = 0.0001$, $\mu_2 = 0.0001$, $N = 500$, 选择 λ_1 和 λ_3 的初值分别为 20 和 -50, $\bar{\eta}$ 中参数 η_1 , η_2 以及性能指标 J_3 的迭代结果如图 10 所示. 根据迭代停止结果及式 (51) 和 (52) 可得优化后的控制器加权参数为 $\lambda_1^* = 0.4884$, $\lambda_3^* = -88.7211$.

为了验证本文方法的有效性, 在相同预测时域和控制时域下, 将本文方法与文献 [6] 中所提的基于 Nelder-Mead 优化方法的非线性 MPC 进行比较, 本文方法采用优化后的加权参数, 文献 [6] 采用的

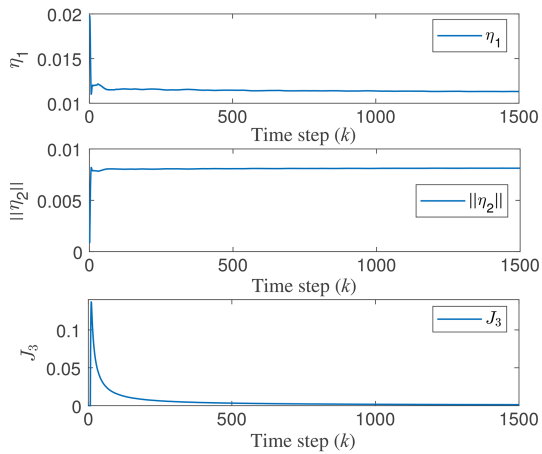


图 10 (网络版彩图) 参数 η_1 , η_2 和性能指标 J_3 的迭代结果

Figure 10 (Color online) Iteration results for parameters η_1 , η_2 and performance index J_3

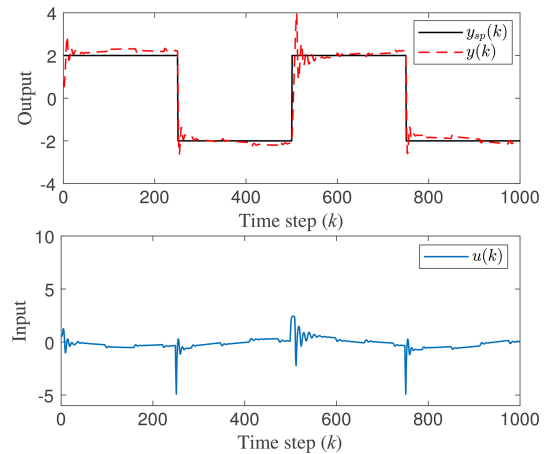


图 11 (网络版彩图) 采用文献 [6] 方法的系统输出和输入轨迹

Figure 11 (Color online) Trajectories of the system output and input with the method in [6]

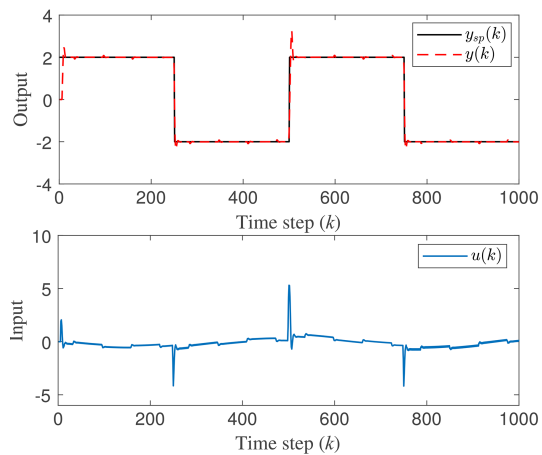


图 12 (网络版彩图) 采用本文所提方法的系统输出和输入轨迹

Figure 12 (Color online) Trajectories of the system output and input with the proposed method

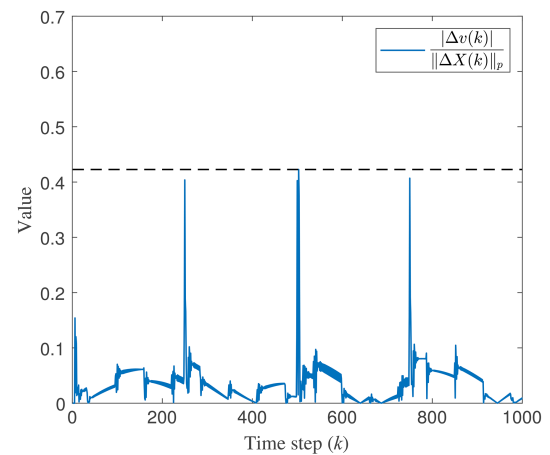


图 13 (网络版彩图) Lipschitz 条件验证结果

Figure 13 (Color online) Results of the Lipschitz condition verification

加权参数为 $\lambda = 2$, 两种方法下的系统输出和输入分别如图 11 和 12 所示, 图 13 是对 Lipschitz 条件的验证, 表 3 是两种方法下跟踪误差的性能评价指标统计结果. 通过图 11, 12 和表 3 可以看出, 在本文所提控制方法下, 系统输出可以更加快速且稳定地跟踪设定值, 系统输出的超调量和震荡更小, 跟踪误差更小, 具有更好的控制效果, SAE 指标和 MSE 指标分别下降了 82.75% 和 75.63%, 反映出文献 [6] 在面临频繁变化的未知非线性项和设定值时, 无法得到最优的控制输入并降低其影响, 而本文所提方法可以有效地减小未知非线性项对闭环系统跟踪误差的影响, 提升系统控制性能.

综合上述 3 个仿真实验的结果可以看出, 本文所提的方法相较于文献 [6, 8, 14] 具有更好的控制效

表 3 两种方法下性能评价指标结果 ($\bar{N} = 1000$)Table 3 Results of performance evaluation indicators under the two methods ($\bar{N} = 1000$)

Control method	SAE	MSE
In [6]	178.1515	0.0997
This paper	30.7256	0.0243
Percentage decrease	↓82.75%	↓75.63%

果. 利用低阶线性模型加未知非线性项的形式进行控制器设计, 并通过跟踪误差闭环方程引入一步最优控制设计补偿信号, 可以有效补偿频繁变化的未知非线性项和设定值所造成的跟踪误差, 消除了未知非线性项的估计误差以及参数辨识误差对系统的影响, 同时相较于文献 [6] 也具有更好的优化效果. 并且, 仿真 1 中不同加权参数的实验对比结果也表明了优化后的广义预测控制器加权参数和补偿信号加权参数进一步提高了系统的动态性能.

5 结论

本文提出了一种新的基于控制器加权参数优化和补偿信号的非线性广义预测控制方法, 在未知非线性项满足 Lipschitz 条件的情况下, 通过设计广义预测控制器、补偿信号以及基于梯度下降法的控制器加权参数优化算法, 有效解决了具有干扰和未知不确定性的复杂非线性被控对象的跟踪控制问题. 证明了跟踪误差的收敛性和闭环系统输入输出信号的有界性, 并给出了闭环系统的动态性能分析. 通过仿真对比实验表明了所提方法的有效性.

参考文献

- Samad T, Bauer M, Bortoff S, et al. Industry engagement with control research: perspective and messages. *Annu Rev Control*, 2020, 49: 1–14
- Xi Y G. Predictive Control. 2nd ed. Beijing: National Defense Industry Press, 2013 [席裕庚. 预测控制. 第二版. 北京: 国防工业出版社, 2013]
- Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S. Generalized predictive control-Part I. The basic algorithm. *Automatica*, 1987, 23: 137–148
- Ding B C, Xi Y G. Stability analysis of generalized predictive control based on Kleinman's controllers. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2004, 47: 458
- Wang T, Guo L, Wang K, et al. Generalized predictive current control for dual-three-phase PMSM to achieve torque enhancement through harmonic injection. *IEEE Trans Power Electron*, 2023, 38: 6422–6433
- Chagra W, Degachi H, Ksouri M. Nonlinear model predictive control based on Nelder Mead optimization method. *Nonlinear Dyn*, 2018, 92: 127–138
- Liu Y, Chai T. Demand peak forecasting of the fused magnesia furnace group with model prediction and adaptive deep learning. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2023. doi: 10.1109/TNNLS.2023.3290185
- Zhang Y, Lu S, Chen Z. Nonlinear generalized predictive control with virtual unmodeled dynamics decomposition compensation and data driven. *J Process Control*, 2023, 125: 19–27
- Zhang Y, Niu H, Chen X, et al. A switching control scheme with increment estimate of unmodeled dynamics. *IEEE Trans Ind Inf*, 2021, 17: 6054–6061
- Zhang Y, Niu H, Tao J, et al. Novel data and neural network-based nonlinear adaptive switching control method. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2022, 33: 789–797
- Song H, Shi H, Su C, et al. Multivariable non-minimum state space model predictive control based on disturbance observer. *ISA Trans*, 2020, 102: 23–32

- 12 Wang D W, Fu Y. Model predict control method based on higher-order observer and disturbance compensation control. *Act Autom Sin*, 2020, 46: 1220–1228 [王东委, 富月. 基于高阶观测器和干扰补偿控制的模型预测控制方法. *自动化学报*, 2020, 46: 1220–1228]
- 13 Zheng H Y, Wang P, Zou T, et al. A framework for multi-variable, semi-adaptive predictive control system. *Sci Sin Inform*, 2019, 49: 57–73 [郑洪宇, 王鹏, 邹涛, 等. 多变量半自适应预测控制系统架构. *中国科学: 信息科学*, 2019, 49: 57–73]
- 14 Zhu B, Zheng Z, Xia X. Constrained adaptive model-predictive control for a class of discrete-time linear systems with parametric uncertainties. *IEEE Trans Automat Contr*, 2020, 65: 2223–2229
- 15 Zhang K, Shi Y. Adaptive model predictive control for a class of constrained linear systems with parametric uncertainties. *Automatica*, 2020, 117: 108974
- 16 Zhu H, Shen J, Lee K Y, et al. Multi-model based predictive sliding mode control for bed temperature regulation in circulating fluidized bed boiler. *Control Eng Pract*, 2020, 101: 104484
- 17 Rubagotti M, Incremona G P, Raimondo D M, et al. Constrained nonlinear discrete-time sliding mode control based on a receding horizon approach. *IEEE Trans Automat Contr*, 2020, 66: 3802–3809
- 18 Mayne D Q, Seron M M, Raković S V. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances. *Automatica*, 2005, 41: 219–224
- 19 Deng L, Shu Z, Chen T. Event-triggered robust model predictive control with stochastic event verification. *Automatica*, 2022, 146: 110638
- 20 Bagheri P, Sedigh A K. Robust tuning of dynamic matrix controllers for first order plus dead time models. *Appl Math Model*, 2015, 39: 7017–7031
- 21 Klopotek T, Skupin P, Metzger M, et al. Tuning strategy for dynamic matrix control with reduced horizons. *ISA Trans*, 2018, 76: 145–154
- 22 Yamashita A S, Zanin A C, Odloak D. Tuning the model predictive control of a crude distillation unit. *ISA Trans*, 2016, 60: 178–190
- 23 Gong Z F, Li L J. Predictive controller parameter tuning strategy based on performance diagnostics. *Comput Eng Design*, 2022, 43: 88–93 [龚正锋, 李丽娟. 基于性能诊断的预测控制器参数整定策略. *计算机工程与设计*, 2022, 43: 88–93]
- 24 Jia Y, Chai T, Wang H, et al. A signal compensation based cascaded PI control for an industrial heat exchange system. *Control Eng Pract*, 2020, 98: 104372
- 25 Wei C, Chai T, Xin X, et al. A signal compensation-based robust swing-up and balance control method for the pendubot. *IEEE Trans Ind Electron*, 2022, 69: 3007–3016
- 26 Wang W Z, Chai T Y, Wang H, et al. Signal-compensation-based adaptive PID control for fused magnesia smelting processes. *IEEE Trans Ind Electron*, 2023, 70: 9441–9451
- 27 Chi R, Hui Y, Huang B, et al. Active disturbance rejection control for nonaffined globally Lipschitz nonlinear discrete-time systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2021, 66: 5955–5967
- 28 Chen J, Ma D, Xu Y, et al. Delay robustness of PID control of second-order systems: pseudoconcavity, exact delay margin, and performance tradeoff. *IEEE Trans Automat Contr*, 2022, 67: 1194–1209
- 29 Akaike H. A new look at the statistical model identification. *IEEE Trans Automat Contr*, 1974, 19: 716–723
- 30 Hou Z, Xiong S. On model-free adaptive control and its stability analysis. *IEEE Trans Automat Contr*, 2019, 64: 4555–4569
- 31 Huang Y X. Analytical algorithm for the computation of the H_∞ -norm of polynomials. *Act Autom Sin*, 1996, 22: 379–381 [黄永宣. 多项式 H_∞ 范数的一种解析算法. *自动化学报*, 1996, 22: 379–381]
- 32 Boyd S P, Vandenberghe L. *Convex Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- 33 Shi J R, Wang D, Shang F H, et al. Research advances on stochastic gradient descent algorithms. *Act Autom Sin*, 2021, 47: 2103–2119 [史加荣, 王丹, 尚凡华, 等. 随机梯度下降算法研究进展. *自动化学报*, 2021, 47: 2103–2119]

附录 A 附录 定理 1 证明

首先根据式 (16) 中 $u_1(k)$ 和式 (28) 中 $u_2(k)$ 得到基于补偿信号的非线性广义预测控制器 $u(k)$, 并利用 Diophantine

方程 (9) 和 (23) 进行适当的拆分可得

$$\begin{aligned} & (1 - z^{-1})H_c(z^{-1})[(1 - z^{-1})H_c(z^{-1})B(z^{-1}) - \lambda_3]u(k) \\ & = H_c(z^{-1})\Delta y_{sp}(k + 1) - \lambda_3 P_{Ec}(z^{-1})A(z^{-1})\Delta y_{sp}(k + N_p) + [H_c(z^{-1})A_c(z^{-1}) + H_c(z^{-1})H_{c_1}(z^{-1}) \\ & \quad + z^{-1}H_c(z^{-1})H_{c_1}(z^{-1})A_c(z^{-1}) - H_c(z^{-1})H_c(z^{-1})A(z^{-1})]\Delta y(k) + [H_c(z^{-1}) - \lambda_3 F_c(z^{-1})]e(k), \end{aligned} \quad (A1)$$

其中, $P_{Ec}(z^{-1}) = \sum_{j=1}^{N_p} E_j(z^{-1})P_c(z^{-1})$, $A_c(z^{-1}) = a_1 + a_2 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a+1}$, $H_{c_1}(z^{-1}) = \sum_{k=1}^{N_p} p_k H_k(z^{-1}) = P^T H(z^{-1})$. 令

$$\begin{aligned} \rho_y(z^{-1}) & = H_c(z^{-1})A_c(z^{-1}) + H_c(z^{-1})H_{c_1}(z^{-1}) + z^{-1}H_c(z^{-1})H_{c_1}(z^{-1})A_c(z^{-1}) - H_c(z^{-1})H_c(z^{-1})A(z^{-1}) \\ & = \rho_{y_0} + \rho_{y_1} z^{-1} + \dots + \rho_{y_{n_a+2n_b}} z^{-(n_a+2n_b)}. \end{aligned} \quad (A2)$$

根据式 (32), (33) 以及 (A2), 式 (A1) 可以写为

$$\begin{aligned} u(k) & = -\theta_{u_1} u(k - 1) - \theta_{u_2} u(k - 2) - \dots - \theta_{u_{3n_b+2}} u(k - 3n_b - 2) - \theta_{y_0} \Delta y(k) - \theta_{y_1} \Delta y(k - 1) \\ & \quad - \dots - \theta_{y_{n_a+2n_b}} \Delta y(k - n_a - 2n_b) + \Psi_E^T \mathbf{E}(k) + Y_{sp}(k), \end{aligned} \quad (A3)$$

其中,

$$\theta_{u_1} = \frac{\rho_{u_1}}{b_0 - \lambda_3}, \theta_{u_2} = \frac{\rho_{u_2}}{b_0 - \lambda_3}, \dots, \theta_{u_{3n_b+2}} = \frac{\rho_{u_{3n_b+2}}}{b_0 - \lambda_3}, \theta_{y_0} = \frac{\rho_{y_0}}{b_0 - \lambda_3}, \theta_{y_1} = \frac{\rho_{y_1}}{b_0 - \lambda_3}, \dots, \theta_{y_{n_a+2n_b}} = \frac{\rho_{y_{n_a+2n_b}}}{b_0 - \lambda_3}, \quad (A4)$$

$$\mathbf{E}(k) = [e(k), e(k - 1), \dots, e(k - n_a)]^T \in \mathbb{R}^{n_a+1}, \quad (A5)$$

$$Y_{sp}(k) = \frac{1}{b_0 - \lambda_3} [H_c(z^{-1})\Delta y_{sp}(k + 1) - \lambda_3 P_{Ec}(z^{-1})A(z^{-1})\Delta y_{sp}(k + N_p)]. \quad (A6)$$

然后, 根据式 (2) 和 (A3) 中所示 $\mathbf{E}(k)$ 的形式可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(k + 1) & = \Psi_I \mathbf{E}(k) + \mathbf{I}_1 \Delta y_{sp}(k + 1) + \mathbf{I}_1 a_1 \Delta y(k) + \mathbf{I}_1 a_2 \Delta y(k - 1) + \dots + \mathbf{I}_1 a_{n_a} \Delta y(k - n_a + 1) - \mathbf{I}_1 b_0 u(k) \\ & \quad + \mathbf{I}_1 (b_0 - b_1) u(k - 1) + \dots + \mathbf{I}_1 (b_{n_b-1} - b_{n_b}) u(k - n_b) + \mathbf{I}_1 b_{n_b} u(k - n_b - 1) - \mathbf{I}_1 \Delta v(k), \end{aligned} \quad (A7)$$

其中,

$$\Psi_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}_{(n_a+1) \times (n_a+1)}, \quad \mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(n_a+1) \times 1}. \quad (A8)$$

因此, 进一步结合式 (A3) 所示 $u(k)$ 的形式, 定义

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}}(k) & = [u(k), u(k - 1), \dots, u(k - n_b - 1), u(k - n_b - 2), \dots, u(k - 3n_b - 2), \Delta y(k), \Delta y(k - 1), \dots, \\ & \quad \Delta y(k - n_a + 1), \Delta y(k - n_a), \dots, \Delta y(k - n_a - 2n_b)]^T \in \mathbb{R}^{n_a+5n_b+4}, \end{aligned} \quad (A9)$$

$$\mathbf{C} = [-b_0, b_0 - b_1, \dots, b_{n_b}, 0, \dots, 0, a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{n_a+5n_b+4}. \quad (A10)$$

则有

$$\mathbf{E}(k + 1) = \Psi_I \mathbf{E}(k) + \mathbf{I}_1 \Delta y_{sp}(k + 1) - \mathbf{I}_1 \Delta v(k) + \mathbf{I}_1 \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{X}}(k). \quad (A11)$$

接下来通过构建 $\tilde{\mathbf{X}}(k)$ 和 $\tilde{\mathbf{X}}(k - 1)$ 的关系来建立 $\mathbf{E}(k)$ 和 $\mathbf{E}(k - 1)$ 的关系, 将式 (A3) 带入 $\tilde{\mathbf{X}}(k)$ 可得

$$\tilde{\mathbf{X}}(k) = \mathbf{R}_1 \mathbf{K}_1(k) + \mathbf{I}_2 Y_{sp}(k) + \mathbf{I}_2 \Psi_E^T \mathbf{E}(k), \quad (A12)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1(k) & = [u(k - 1), \dots, u(k - n_b - 1), u(k - n_b - 2), \dots, u(k - 3n_b - 2), \Delta y(k), \Delta y(k - 1), \dots, \\ & \quad \Delta y(k - n_a + 1), \Delta y(k - n_a), \dots, \Delta y(k - n_a - 2n_b), u(k - 3n_b - 3)]^T \in \mathbb{R}^{n_a+5n_b+4}, \end{aligned} \quad (A13)$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} -\theta_{u_1} & \dots & -\theta_{u_{3n_b+2}} & -\theta_{y_0} & -\theta_{y_1} & \dots & -\theta_{y_{n_a+2n_b}} & 0 \\ 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}_{(n_a+5n_b+4) \times (n_a+5n_b+4)}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(n_a+5n_b+4) \times 1}. \quad (\text{A14})$$

为简化矩阵范数运算难度, 改变 $\Delta y(k)$ 和 $u(k-3n_b-3)$ 的位置, 可得

$$\mathbf{K}_1(k) = \mathbf{R}_2 \mathbf{K}_2(k), \quad (\text{A15})$$

其中,

$$\mathbf{K}_2(k) = [u(k-1), \dots, u(k-n_b-1), u(k-n_b-2), \dots, u(k-3n_b-2), u(k-3n_b-3), \Delta y(k-1), \dots, \Delta y(k-n_a+1), \Delta y(k-n_a), \dots, \Delta y(k-n_a-2n_b), \Delta y(k)]^T \in \mathbb{R}^{n_a+5n_b+4}, \quad (\text{A16})$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}_{(n_a+5n_b+4) \times (n_a+5n_b+4)}. \quad (\text{A17})$$

根据系统模型 (2) 可以得到 $\Delta y(k)$, 将 $\Delta y(k)$ 带入 $\mathbf{K}_2(k)$ 可得

$$\mathbf{K}_2(k) = \mathbf{R}_3 \tilde{\mathbf{X}}(k-1) + \mathbf{I}_3 \Delta v(k-1), \quad (\text{A18})$$

其中,

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \\ b_0 & \dots & -b_{n_b} & 0 & \dots & 0 & -a_1 & \dots & -a_{n_a} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n_a+5n_b+4) \times (n_a+5n_b+4)}, \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{(n_a+5n_b+4) \times 1}. \quad (\text{A19})$$

根据式 (A12), (A15) 和 (A18) 可得

$$\tilde{\mathbf{X}}(k) = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \tilde{\mathbf{X}}(k-1) + \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{I}_3 \Delta v(k-1) + \mathbf{I}_2 Y_{sp}(k) + \mathbf{I}_2 \Psi_E^T \mathbf{E}(k). \quad (\text{A20})$$

将式 (A20) 带入式 (A11) 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(k+1) &= \Psi_{I1} \mathbf{E}(k) + \mathbf{I}_1 \Delta y_{sp}(k+1) - \mathbf{I}_1 \Delta v(k) + \mathbf{I}_1 \mathbf{C}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \tilde{\mathbf{X}}(k-1) \\ &\quad + \mathbf{I}_1 \mathbf{C}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{I}_3 \Delta v(k-1) - b_0 \mathbf{I}_1 Y_{sp}(k), \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

其中,

$$\Psi_{I1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{b_0 \rho e_0}{b_0 - \lambda_3} & -\frac{b_0 \rho e_1}{b_0 - \lambda_3} & \cdots & -\frac{b_0 \rho e_{n_a}}{b_0 - \lambda_3} \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(n_a+1) \times (n_a+1)}. \quad (\text{A22})$$

为计算 $\|\mathbf{E}(k+1)\|_p$, 首先给出 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ 和 \mathbf{R}_3 的范数. 为此, 将矩阵 \mathbf{R}_1 拆写为以下形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{12} \\ &= \begin{bmatrix} -\theta_{u_1} & \cdots & -\theta_{u_{3n_b+2}} & -\theta_{y_0} & -\theta_{y_1} & \cdots & -\theta_{y_{n_a+2n_b}} & 0 \\ 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A23})$$

因此由引理 1 可知, 存在任意小的正常数 ϵ 使得

$$\|\mathbf{R}_1\|_p \leq \|\mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{12}\|_p \leq \|\mathbf{R}_{11}\|_p + \|\mathbf{R}_{12}\|_p \leq s(\mathbf{R}_{11}) + \epsilon + s(\mathbf{R}_{12}) + \epsilon \leq |\theta_{u_1}| + \epsilon := d_1 + \epsilon. \quad (\text{A24})$$

对于矩阵 \mathbf{R}_2 和 \mathbf{R}_3 , 由引理 1 可知

$$\|\mathbf{R}_2\|_p \leq s(\mathbf{R}_2) + \epsilon = 1 + \epsilon, \quad \|\mathbf{R}_3\|_p \leq s(\mathbf{R}_3) + \epsilon = 1 + \epsilon. \quad (\text{A25})$$

因此, $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3$ 的范数为

$$\|\mathbf{R}_1\|_p \|\mathbf{R}_2\|_p \|\mathbf{R}_3\|_p \leq (d_1 + \epsilon)(1 + \epsilon)(1 + \epsilon) = d_1 + ((d_1 + 1) + d_1)\epsilon + (d_1 + 2)\epsilon^2 + \epsilon^3 := d_2. \quad (\text{A26})$$

当控制器参数满足式 (31) 可知 $d_1 < 1$, 且由于式 (A26) 中带 ϵ 的项为任意小的量, 因此可得 $d_2 < 1$. 由式 (5) 和微分中值定理可得^[27]

$$\begin{aligned} \Delta v(k) &= F(\mathbf{X}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) - F(\mathbf{X}(k-1), \boldsymbol{\omega}(k-1)) \\ &= F(\mathbf{X}(k), \boldsymbol{\omega}(k)) - F(\mathbf{X}(k-1), \boldsymbol{\omega}(k)) + F(\mathbf{X}(k-1), \boldsymbol{\omega}(k)) - F(\mathbf{X}(k-1), \boldsymbol{\omega}(k-1)) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}(k)} \bigg|_{\mathbf{X}(k)=\boldsymbol{\varsigma}(k)} \right)^T \Delta \mathbf{X}(k) + \xi(k), \end{aligned} \quad (\text{A27})$$

其中, $\boldsymbol{\varsigma}(k) \in (\mathbf{X}(k-1), \mathbf{X}(k))$, $\xi(k) = F(\mathbf{X}(k-1), \boldsymbol{\omega}(k)) - F(\mathbf{X}(k-1), \boldsymbol{\omega}(k-1))$. 由文献 [27] 可知, $\xi(k)$ 有界, 即 $|\xi(k)| \leq \delta_\xi$, $\delta_\xi > 0$ 为常数. 由假设 1 和 $\tilde{\mathbf{X}}(k)$ 的形式可得

$$|\Delta v(k)| \leq L_0 \|\Delta \mathbf{X}(k)\|_p + \delta_\xi \leq L_0 \|\mathbf{W} \tilde{\mathbf{X}}(k)\|_p + \delta_\xi = L_0 \|\mathbf{W}\|_p \|\tilde{\mathbf{X}}(k)\|_p + \delta_\xi, \quad (\text{A28})$$

其中, 矩阵 \mathbf{W} 如式 (34) 所示. 根据引理 1 有 $\|\mathbf{W}\|_p \leq s(\mathbf{W}) + \epsilon \leq \delta_W + \epsilon$. 因此可得

$$|\Delta v(k)| \leq (\delta_W + \epsilon) L_0 \|\tilde{\mathbf{X}}(k)\|_p + \delta_\xi. \quad (\text{A29})$$

令 $d_3 = \|\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{I}_3\|_p$, 由式 (A24) 和 (A25) 可知 $d_3 \leq d_1 + (d_1 + 1)\epsilon + \epsilon^2 < 1$. 根据式 (A26) 和 (A29) 可得 $\tilde{\mathbf{X}}(k)$ 的范数为

$$\|\tilde{\mathbf{X}}(k)\|_p \leq d_2 \|\tilde{\mathbf{X}}(k-1)\|_p + |Y_{sp}(k)| + d_3 (\delta_W + \epsilon) L_0 \|\tilde{\mathbf{X}}(k-1)\|_p + d_3 \delta_\xi + \|\Psi_E^T\|_p \|\mathbf{E}(k)\|_p$$

$$\leq d_4^{k-1} \|\tilde{\mathbf{X}}(1)\|_p + \|\Psi_E^T\|_p \sum_{i=1}^{k-1} d_4^{k-i-1} \|\mathbf{E}(i+1)\|_p + \sum_{i=1}^{k-1} d_4^{k-i-1} (|Y_{sp}(i+1)| + d_3 \delta_\xi), \quad (\text{A30})$$

其中, $d_4 = d_2 + d_3(\delta_W + \epsilon)L_0$. 根据式 (A29) 和 (A30), 可得 $\|\mathbf{E}(k+1)\|_p$ 为

$$\|\mathbf{E}(k+1)\|_p \leq |\Delta y_{sp}(k+1)| + b_0 |Y_{sp}(k)| + (d_2 \|\mathbf{C}^T\|_p + (\delta_W + \epsilon)L_0 d_4 + d_3 \|\mathbf{C}^T\|_p (\delta_W + \epsilon)L_0) \|\tilde{\mathbf{X}}(k-1)\|_p + \delta_\xi + (\delta_W + \epsilon)L_0 |Y_{sp}(k)| + (\delta_W + \epsilon)L_0 d_3 \delta_\xi + d_3 \|\mathbf{C}^T\|_p \delta_\xi + (\|\Psi_{I1}\|_p + (\delta_W + \epsilon)L_0 \|\Psi_E^T\|_p) \|\mathbf{E}(k)\|_p. \quad (\text{A31})$$

令

$$d_5 = \|\Psi_{I1}\|_p + (\delta_W + \epsilon)L_0 \|\Psi_E^T\|_p, \quad (\text{A32})$$

$$d_6 = d_2 \|\mathbf{C}^T\|_p + (\delta_W + \epsilon)L_0 d_4 + d_3 \|\mathbf{C}^T\|_p (\delta_W + \epsilon)L_0, \quad (\text{A33})$$

$$\bar{Y}_{sp}(k) = |\Delta y_{sp}(k+1)| + b_0 |Y_{sp}(k)| + (\delta_W + \epsilon)L_0 |Y_{sp}(k)| + (\delta_W + \epsilon)L_0 d_3 \delta_\xi + d_3 \|\mathbf{C}^T\|_p \delta_\xi + \delta_\xi. \quad (\text{A34})$$

进一步可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}(k+1)\|_p &\leq d_5^{k-1} \|\mathbf{E}(2)\|_p + \sum_{i=1}^{k-1} d_5^{k-i-1} \bar{Y}_{sp}(i+1) + d_6 \|\Psi_E^T\|_p \sum_{i=1}^{k-1} d_5^{k-i-1} \sum_{j=1}^{i-1} d_4^{i-j-1} \|\mathbf{E}(j+1)\|_p \\ &\quad + d_6 \sum_{i=1}^{k-1} d_5^{k-i-1} \sum_{j=1}^{i-1} d_4^{i-j-1} |Y_{sp}(j+1)| + d_3 \delta_\xi d_6 \sum_{i=1}^{k-1} d_5^{k-i-1} \sum_{j=1}^{i-1} d_4^{i-j-1} \\ &\quad + (d_5^{k-2} + d_5^{k-3} d_4 + \dots + d_4^{k-2}) d_6 \|\tilde{\mathbf{X}}(1)\|_p. \end{aligned} \quad (\text{A35})$$

令

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(k+1) &= d_5^{k-1} \|\mathbf{E}(2)\|_p + d_6 \|\Psi_E^T\|_p \sum_{i=1}^{k-1} d_5^{k-i-1} \sum_{j=1}^{i-1} d_4^{i-j-1} \|\mathbf{E}(j+1)\|_p + (d_5^{k-2} + d_5^{k-3} d_4 + \dots + d_4^{k-2}) d_6 \|\tilde{\mathbf{X}}(1)\|_p, \\ \zeta(k+1) &= \sum_{i=1}^{k-1} d_5^{k-i-1} \bar{Y}_{sp}(i+1) + d_6 \sum_{i=1}^{k-1} d_5^{k-i-1} \sum_{j=1}^{i-1} d_4^{i-j-1} |Y_{sp}(j+1)| + d_3 \delta_\xi d_6 \sum_{i=1}^{k-1} d_5^{k-i-1} \sum_{j=1}^{i-1} d_4^{i-j-1}, \end{aligned} \quad (\text{A36})$$

可得

$$\|\mathbf{E}(k+1)\|_p \leq \mathcal{G}(k+1) + \zeta(k+1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (\text{A37})$$

其中, $\mathcal{G}(2) = \|\mathbf{E}(2)\|_p$ 为初始状态, 通过式 (A5) 可得 $\mathbf{E}(2) = [e(2), e(1), 0, \dots, 0]^T$. 为了证明跟踪误差的有界性和收敛性, 首先给出 $\mathcal{G}(k+2)$ 为

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(k+2) &= d_5^k \|\mathbf{E}(2)\|_p + d_6 \|\Psi_E^T\|_p \sum_{i=1}^k d_5^{k-i} \sum_{j=1}^{i-1} d_4^{i-j-1} \|\mathbf{E}(j+1)\|_p + (d_5^{k-1} + d_5^{k-2} d_4 + \dots + d_4^{k-1}) d_6 \|\tilde{\mathbf{X}}(1)\|_p \\ &= d_5 \mathcal{G}(k+1) + d_6 \|\Psi_E^T\|_p \zeta(k) + \bar{h}(k), \end{aligned} \quad (\text{A38})$$

其中,

$$\bar{h}(k) = d_6 \|\Psi_E^T\|_p \sum_{j=1}^{k-2} d_4^{k-j-1} \|\mathbf{E}(j+1)\|_p + d_6 \|\Psi_E^T\|_p |\mathcal{G}(k)| + d_4^{k-1} d_6 \|\tilde{\mathbf{X}}(1)\|_p. \quad (\text{A39})$$

由式 (30) 可得

$$\begin{aligned} d_6 \|\Psi_E^T\|_p &= [d_2 \|\mathbf{C}^T\|_p + (\delta_W + \epsilon)L_0 d_4 + d_3 \|\mathbf{C}^T\|_p (\delta_W + \epsilon)L_0] \|\Psi_E^T\|_p \\ &\leq \|\Psi_{I1}\|_p [d_2 + d_3(\delta_W + \epsilon)L_0] + (\delta_W + \epsilon)L_0 \|\Psi_E^T\|_p d_2 + (\delta_W + \epsilon)^2 L_0^2 \|\Psi_E^T\|_p d_3 = d_4 d_5. \end{aligned} \quad (\text{A40})$$

因此, $\bar{h}(k)$ 可以写为

$$\begin{aligned} \bar{h}(k) &\leq d_6 \|\Psi_E^T\|_p \sum_{j=1}^{k-2} d_4^{k-j-1} \|\mathbf{E}(j+1)\|_p + d_4^{k-1} d_6 \|\tilde{\mathbf{X}}(1)\|_p + d_4 d_5 [d_5^{k-2} \|\mathbf{E}(2)\|_p \\ &\quad + d_6 \|\Psi_E^T\|_p \sum_{i=1}^{k-2} d_5^{k-i-2} \sum_{j=1}^{i-1} d_4^{i-j-1} \|\mathbf{E}(j+1)\|_p + (d_5^{k-3} + d_5^{k-4} d_4 + \dots + d_4^{k-3}) d_6 \|\tilde{\mathbf{X}}(1)\|_p] = d_4 \mathcal{G}(k+1). \end{aligned} \quad (\text{A41})$$

将式 (A41) 带入式 (A38) 可得

$$\mathcal{G}(k+2) \leq (d_4 + d_5)\mathcal{G}(k+1) + d_6\|\Psi_E^T\|_p\zeta(k). \quad (\text{A42})$$

再将式 (A42) 带入式 (A37) 可得

$$\|\mathbf{E}(k+1)\|_p \leq (d_4 + d_5)\mathcal{G}(k) + d_6\|\Psi_E^T\|_p\zeta(k-1) + \zeta(k+1), \quad (\text{A43})$$

其中,

$$\begin{aligned} d_4 + d_5 &= d_2 + d_3(\delta_W + \epsilon)L_0 + \|\Psi_{I1}\|_p + (\delta_W + \epsilon)L_0\|\Psi_E^T\|_p \\ &= |\theta_{u1}|(1 + \delta_W L_0) + \left|1 - \frac{b_0\rho e_0}{b_0 - \lambda_3}\right| + \delta_W L_0\|\Psi_E^T\|_p + [(d_1 + 1) + d_1]\epsilon + \epsilon^3 + (d_1 + 1 + 1)\epsilon^2 \\ &\quad + d_3 L_0 \epsilon + \epsilon\|\Psi_E^T\|_p L_0 + \delta_W L_0(d_1 + 1)\epsilon + \delta_W L_0 \epsilon^2. \end{aligned} \quad (\text{A44})$$

上式 (A44) 中 $\|\Psi_{I1}\|_p$ 的求解类似于矩阵 \mathbf{R}_1 , 即进行拆分求解, 且由于带 ϵ 的项皆为高阶无穷小项, 所以当控制器参数满足式 (31) 时有

$$d_4 + d_5 < 1. \quad (\text{A45})$$

由于 $\Delta y_{\text{sp}}(k)$ 有界, 且 $b_0 - \lambda_3 \neq 0$, 所以式 (A3) 中 $Y_{\text{sp}}(k)$ 有界, 即 $|Y_{\text{sp}}(k)| \leq \delta_{Y_{\text{sp}}}$, $\delta_{Y_{\text{sp}}} > 0$ 为常数. 因此, 式 (A34) 可得

$$\bar{Y}_{\text{sp}}(k) \leq |\Delta y_{\text{sp}}(k+1)| + b_0\delta_{Y_{\text{sp}}} + (\delta_W + \epsilon)L_0\delta_{Y_{\text{sp}}} + (\delta_W + \epsilon)L_0d_3\delta_\xi + d_3\|\mathbf{C}^T\|_p\delta_\xi + \delta_\xi := \delta_{\bar{Y}_{\text{sp}}}, \quad (\text{A46})$$

其中, $\delta_{\bar{Y}_{\text{sp}}} > 0$ 为常数. 由式 (A45) 可知 $d_4 < 1$ 和 $d_5 < 1$, 因此, 式 (A36) 中 $\zeta(k+1)$ 满足

$$\begin{aligned} \zeta(k+1) &\leq \delta_{\bar{Y}_{\text{sp}}} \sum_{i=1}^{k-1} d_5^{k-i-1} + d_6\delta_{Y_{\text{sp}}} \sum_{i=1}^{k-1} d_5^{k-i-1} \sum_{j=1}^{i-1} d_4^{i-j-1} + d_3\delta_\xi d_6 \sum_{i=1}^{k-1} d_5^{k-i-1} \sum_{j=1}^{i-1} d_4^{i-j-1} \\ &\leq \frac{\delta_{\bar{Y}_{\text{sp}}}}{1-d_5} + \frac{d_6\delta_{Y_{\text{sp}}} + d_3\delta_\xi d_6}{(d_5-d_4)(d_4-1)} := \delta_\zeta, \end{aligned} \quad (\text{A47})$$

其中, $\delta_\zeta > 0$ 为常数. 所以, $\|\mathbf{E}(k+1)\|_p$ 可以进一步写为

$$\|\mathbf{E}(k+1)\|_p \leq (d_4 + d_5)^{k-1}\|\mathbf{E}(2)\|_p + d_6\|\Psi_E^T\|_p\delta_\zeta \frac{1 - (d_4 + d_5)^{k-1}}{1 - (d_4 + d_5)} + \delta_\zeta. \quad (\text{A48})$$

由式 (A45) 和 (A48) 可得

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{E}(k)\|_p \leq \frac{d_6\|\Psi_E^T\|_p\delta_\zeta}{1 - (d_4 + d_5)} + \delta_\zeta := \delta_1, \quad (\text{A49})$$

即当 $k \rightarrow \infty$ 时, 跟踪误差 $\|\mathbf{E}(k)\|_p$ 有界, $\limsup_{k \rightarrow \infty} |e(k)| \leq \delta_1$, $\delta_1 > 0$ 为常数.

由于设定值 $y_{\text{sp}}(k)$ 有界, 跟踪误差 $e(k)$ 有界, 所以系统输出 $y(k)$ 有界. 又由于 $u(k) = \mathbf{I}_2^T \tilde{\mathbf{X}}(k)$, 因此可得

$$\begin{aligned} |u(k)| &\leq \|\mathbf{I}_2^T\|_p \|\tilde{\mathbf{X}}(k)\|_p \\ &\leq \|\tilde{\mathbf{X}}(1)\|_p + \frac{d_3\delta_\xi + \delta_{Y_{\text{sp}}} + \|\Psi_E^T\|_p\delta_\zeta}{1-d_4} + \frac{\|\Psi_E^T\|_p\|\mathbf{E}(2)\|_p}{d_5} + \frac{d_6\|\Psi_E^T\|_p^2\delta_\zeta}{(1-(d_4+d_5))(1-d_4)} := \delta_u, \end{aligned} \quad (\text{A50})$$

其中, $\delta_u > 0$ 为常数. 综上, $u(k)$ 有界, $y(k)$ 有界, 即闭环系统稳定.

Nonlinear generalized predictive control method based on parameter optimization and compensation signal

Zhenfei XIAO¹, Ning LIU¹, Yajun ZHANG^{1*} & Tianyou CHAI^{1,2*}

1. *State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110819, China;*

2. *National Engineering Research Center of Metallurgy Automation, Shenyang 110819, China*

* Corresponding author. E-mail: yajunzhang@mail.neu.edu.cn, tychai@mail.neu.edu.cn

Abstract For the tracking control problem of a class of complex nonlinear controlled processes with disturbances and unknown uncertainties, a compensation signal-driven nonlinear generalized predictive control method is proposed by combining the generalized predictive control and signal compensation techniques. The controlled object is represented by a low-order linear model and an unknown nonlinear term, which represents uncertainties such as system modeling errors and disturbances. A low-order linear model is used to design the generalized predictive controller. The tracking error affected by the unknown nonlinear term can be obtained from the generalized predictive control closed-loop system. A compensation signal is designed by introducing the one-step ahead optimal control to minimize the tracking error and the fluctuation of the control input, thereby eliminating the effect of the unknown nonlinear term on the controlled object and improving the dynamic performance of the system. The proposed method relaxes the previous condition that the unknown nonlinear term is globally bounded to the Lipschitz condition, which proves the stability and convergence of the closed-loop system. To further improve the dynamic performance of the system, an optimization method based on gradient descent for the weighting parameters of the controller is proposed. The effectiveness of the proposed method is verified by simulation comparison experiments.

Keywords predictive control, compensation signal, one-step ahead optimal control, Lipschitz condition, gradient descent