中国科学: 信息科学 2024 年 第 54 卷 第 7 期: 1588–1603
SCIENTIA SINICA Informationis
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

理论计算机科学专题 · 论文

# 优先 $k$- 设施选址问题的近似算法

张震[1,2], 冯启龙[3,2*], 徐雪松[1,2], 彭晗[1,2*], 刘利枚[1,2], 石峰[3,2]

1. 湖南工商大学前沿交叉学院, 长沙 410205
2. 湘江实验室, 长沙 410205
3. 中南大学计算机学院, 长沙 410083
* 通信作者. E-mail: csufeng@mail.csu.edu.cn, Han.Peng@hutb.edu.cn

收稿日期: 2023–12–24; 修回日期: 2024–02–26; 接受日期: 2024–02–29; 网络出版日期: 2024–07–09

国家自然科学基金 (批准号: 62202161, 62172446, 62376092)、国家重点研发计划 (批准号: 2022YFC3302302)、湖南省自然科学基金 (批准号: 2023JJ40240)、湖南省教育厅科学研究项目 (批准号: 23B0597, 23B0592) 和湘江实验室开放课题 (批准号: 22XJ02002) 资助项目

**摘要** 给定度量空间中的一个设施集合与一个带有最低服务级别要求的用户集合, 优先 $k$- 设施选址问题的目标是开设最多 $k$ 个设施, 在每个开设设施上安置不同级别的服务, 并将每个用户连接到一个能满足其服务级别要求的开设设施上, 使得设施开设费用、服务安置费用与用户连接费用之和最小. 本文利用拉格朗日 (Lagrange) 松弛技术求解优先 $k$- 设施选址问题, 针对用户的服务级别要求提出了新的确定化舍入方法, 并基于此给出了多项式时间的 $(7.9533+\varepsilon)$- 近似算法. 这是关于该问题的第一个常数近似算法.

**关键词** 设施选址, 近似算法, 拉格朗日松弛

## 1 引言

设施选址 (facility location) 问题要求在给定的设施集合中开设一组设施, 并将给定的每个用户连接到一个开设设施上, 使得设施开设费用与用户连接费用之和最小. 设施选址问题是一种 NP- 难问题 [1]. 鉴于此, 人们基于原始 – 对偶 [2]、对偶 – 拟合 [3]、局部搜索 [4,5]、线性规划舍入 [6,7] 等技术为设施选址问题提出了一系列近似算法.

设施选址问题的很多应用领域都涉及服务级别要求. 例如, 在网络中计算数据传输可行路径时, 每个数据源都有特定的服务质量需求. 针对这些应用, Ravi 和 Sinha [8] 提出了优先设施选址 (priority facility location) 问题, 其中, 每个用户都有一个最低服务级别要求; 在设施上安置不同级别的服务需要支付不同的安置费用. 该问题要求确定开设设施集合, 在开设设施上安置服务, 并将每个用户连接到一个能满足其服务级别要求的开设设施上, 使得设施开设费用、服务安置费用与用户连接费用之和

**引用格式:** 张震, 冯启龙, 徐雪松, 等. 优先 $k$- 设施选址问题的近似算法. 中国科学: 信息科学, 2024, 54: 1588–1603, doi: 10.1360/SSI-2023-0407
Zhang Z, Feng Q L, Xu X S, et al. On approximation algorithms for the priority $k$-facility location problem (in Chinese). Sci Sin Inform, 2024, 54: 1588–1603, doi: 10.1360/SSI-2023-0407

最小. 近年来, 优先设施选址问题在网络优化 [9,10]、数据布局 [11,12] 等领域发挥重要作用, 其近似算法的设计受到了人们的广泛关注. Ravi 和 Sinha [8] 基于线性规划舍入技术为优先设施选址问题提出了一个 7- 近似算法. Mahdian [13] 利用原始 – 对偶方法提出了一个 3- 近似算法. 随后, Li 等 [14] 和 Wang 等 [15] 基于贪婪增广技术将该算法的近似比改进为 1.8526. 这是目前关于优先设施选址问题的最好近似结果. 针对需要处理噪声数据的应用领域, 王颖等 [16] 研究了带次模惩罚的优先设施选址问题, 利用原始 – 对偶和贪婪增广技术为该问题提出了一个 2.375- 近似算法.

本文研究优先 $k$- 设施选址 (priority $k$-facility location) 问题, 其定义如下.

**定义1** (优先 $k$- 设施选址) 优先 $k$- 设施选址问题的一个实例 $\mathcal{I}=(d,\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{P},k,f,h_c,g)$ 包含一个以 $d$ 为距离函数的度量空间、该空间中的一个用户集合 $\mathcal{C}$ 与一个设施集合 $\mathcal{F}$、一个优先级集合 $\mathcal{P}=\{1,2,\ldots,|\mathcal{P}|\}$ 和一个正整数 $k$, 其中, 每个设施 $i\in\mathcal{F}$ 都有一个大于 0 的开设费用 $f(i)$, 每个用户 $j\in\mathcal{C}$ 都有一个优先级 $h_c(j)\in\mathcal{P}$, 每个优先级 $p\in\mathcal{P}$ 都有一个大于 0 的服务安置费用 $g(p)$, 且不等式 $g(p_1)\geqslant g(p_2)$ 对于 $\mathcal{P}$ 中任意两个满足 $p_1>p_2$ 的优先级 $p_1$ 和 $p_2$ 都成立. 实例 $\mathcal{I}$ 的一个可行解 $(\mathcal{S},h_f,\tau)$ 开设一个规模不超过 $k$ 的设施集合 $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{F}$, 在每个设施 $i\in\mathcal{S}$ 上安置优先级为 $h_f(i)$ 的服务, 并将每个用户 $j\in\mathcal{C}$ 连接到一个满足 $h_c(j)\leqslant h_f(\tau(j))$ 的设施 $\tau(j)\in\mathcal{S}$ 上. 该可行解的费用为 $\sum_{i\in\mathcal{S}}(f(i)+g(h_f(i)))+\sum_{j\in\mathcal{C}}d(j,\tau(j))$. 优先 $k$- 设施选址问题的目标是为实例找到一个费用最小的可行解.

优先 $k$- 设施选址问题要求可行解中开设设施的数量不超过 $k$. 该约束条件使得优先 $k$- 设施选址问题求解算法的设计相较于开设设施数量没有上限的优先设施选址问题更为困难. Kumar 和 Sabharwal [17] 研究了带有相似约束条件的优先 $k$- 中值问题 (该问题与优先 $k$- 设施选址问题的主要区别在于: 在中值问题中, 每个设施上安置的服务级别是给定的), 基于线性规划舍入技术提出了一个常数近似算法. 然而, 该算法只能处理服务级别不超过两种的特殊情况. 当以开设设施数量上限 $k$ 作为固定参数时, Feng 等 [18] 通过构造小规模解搜索空间为优先 $k$- 中值问题提出了近似比为 $3+\varepsilon$ 的固定参数时间近似算法. 在高维欧氏空间中, Zhang 等 [19] 通过压缩实例规模将该问题的固定参数近似结果改进为 $1+\varepsilon$. Zhang 等 [20] 在每个设施的开设费用都相等的情况下, 为优先 $k$- 设施选址问题提出了 $(6.6742+\varepsilon)$- 近似算法. 在不满足该条件的实例中, 是否存在关于优先 $k$- 设施选址问题的常数近似算法尚未明确.

### 1.1 主要结果

本文为优先 $k$- 设施选址问题提出了近似比为 $7.9533+\varepsilon$ 的多项式时间近似算法. 这是关于该问题的第一个常数近似结果.

**定理1** 给定任意常数 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在关于优先 $k$- 设施选址问题的多项式时间 $(7.9533+O(\varepsilon))$- 近似算法.

本文利用拉格朗日松弛技术求解优先 $k$- 设施选址问题. 给定优先 $k$- 设施选址问题的一个实例 $\mathcal{I}=(d,\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{P},k,f,h_c,g)$, 本文首先松弛施加于开设设施数量的上限约束, 并通过求解松弛实例得到一个开设设施数量小于 $k$ 的可行解 $\mathcal{H}_1$ 和一个开设设施数量大于 $k$ 的不可行解 $\mathcal{H}_2$. $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 的一个凸组合是问题实例的一个费用较低的分数解. 本文需要将该分数解调整为整数解.

现有的舍入算法在有开设设施数量上限的问题实例中调整与设施对应的分数变量时, 为了保证开设设施数量不超过上限, 通常将一部分变量向上取整为 1, 将另一部分变量向下取整为 0, 开设所对应变量取值为 1 的设施, 并将每个用户连接到一个距离较近的开设设施上. 然而, 用户的服务级别要求

使这些算法无法被直接应用在优先 $k$- 设施选址问题中. 例如, 给定一个优先级为 $h_c(j)$ 的用户 $j$, 当 $j$ 被连接到设施 $i$ 时, 为了满足 $j$ 的服务级别要求, 我们需要在 $i$ 上安置优先级不低于 $h_c(j)$ 的服务. 因此, 当一个设施对应的变量被向下取整为 0 且其所连接的用户需要被重新连接时, 我们可能需要提高很多开设设施上所安置服务的优先级并支付对应的安置费用, 以满足被重新连接的用户所需求的服务级别. 最近, Zhang 等 [20] 挖掘设施之间的图结构, 基于优先 $k$- 设施选址问题的分数解构造了用户连接费用和服务安置费用较低的整数解. 然而, 他们提出的算法需要在图结构中选取一组关键节点作为开设设施, 在每个设施的开设费用不同的情况下无法产生常数近似解.

本文针对优先 $k$- 设施选址问题提出了一个新的确定化舍入方法. 令 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 分别表示 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 中的开设设施集合. 令 $a$ 表示满足 $a|\mathcal{S}_1|+(1-a)|\mathcal{S}_2|=k$ 和 $a\in(0,1)$ 的实数. 本文证明了 $\mathcal{H}_1$ 费用的一个上限与 $a$ 的取值成反比 (不等式 (12)). 由此可知, $\mathcal{H}_1$ 在 $a$ 接近于 1 的情况下是一个费用较低的可行解. 在 $a$ 接近于 0 的情况下, $\mathcal{H}_1$ 的费用较高, 因此, 本文在该情况下基于一个贪心方法从 $\mathcal{S}_2$ 中选取开设设施. 当 $a$ 属于 $(0,1)$ 内的一个给定区间时, 本文将 $\mathcal{H}_2$ 作为问题实例的初始解, 在 $\mathcal{S}_2$ 中关闭一定数量的设施并从 $\mathcal{S}_1$ 中选取少量设施开设, 以将初始解调整为可行解.

综上所述, 本文根据 $a$ 的取值选取开设设施, 所提出的舍入方法如下所示, 其中, $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 是满足 $\sigma_1\in(0,\sigma_2)$ 和 $\sigma_2\in(\sigma_1,1)$ 的两个给定常数.

情况 (1): $a\in[\sigma_2,1)$. $\mathcal{H}_1$ 在该情况下的费用较低. 本文将 $\mathcal{H}_1$ 作为问题实例的解.

情况 (2): $a\in(0,\sigma_1]$. 本文选取 $\mathcal{S}_2$ 的一个子集作为开设设施集合. 本文证明了在 $a$ 较小的情况下可以基于该集合构造一个费用较低的解.

情况 (3): $a\in(\sigma_1,\sigma_2)$. 在该情况下, 本文通过降低开设设施数量将 $\mathcal{H}_2$ 调整为问题实例的可行解, 并通过求解一个线性规划 (linear programming, LP) 最小化 $\mathcal{H}_2$ 在该过程中增加的费用.

### 1.2 其他相关工作

本文所研究的优先 $k$- 设施选址问题在 $k$- 设施选址 ($k$-facility location) 问题中引入额外的服务安置费用与服务级别要求 (后者允许将每个用户连接到任意开设设施上, 其目标是最小化设施开设费用与用户连接费用之和). 近年来, 人们根据实际应用中的约束扩展 $k$- 设施选址问题, 从近似算法的角度研究了考虑用户信息不确定性的随机 $k$- 设施选址 (stochastic $k$-facility location) 问题 [21]、在每个开设设施所连接的用户数量上施加上限的容量受限 $k$- 设施选址 (capacitated $k$-facility location) 问题 [22, 23]、要求每个开设设施所连接的用户数量超过给定下限的最小负载受限 $k$- 设施选址 (lower-bounded $k$-facility location) 问题 [24]、移除部分离群用户并支付其惩罚费用的惩罚 $k$- 设施选址 (prize-collecting $k$-facility location) 问题 [25] 等诸多更一般化的问题. 由于这些问题假设所有用户有相同的服务需求, 其求解思路无法被直接应用在优先 $k$- 设施选址问题中. 本文在拉格朗日松弛技术框架下提出了新的舍入方法, 在用户服务级别要求不同的情况下构造了常数近似解.

## 2 基本定义

令 $\mathcal{I}=(d,\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{P},k,f,h_c,g)$ 表示优先 $k$- 设施选址问题的一个实例. 令 $\varepsilon$ 表示一个大于 0 的常数. 本文用以下整数规划 (integer programming, IP) 描述实例 $\mathcal{I}$:

$$\min \quad \sum_{i\in\mathcal{F},j\in\mathcal{C}} d(i,j)x(i,j)+\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}}(f(i)+g(p))y(i,p) \qquad \text{IP1}$$

**表 1　符号与定义**

**Table 1**　Notations and definitions

| Notation | Definition |
|---|---|
| $\mathrm{opt}(\nu)$ | The cost of an optimal solution to LP2($\nu$) |
| $C(\mathcal{H})$ | $\sum_{i\in\mathcal{F},j\in\mathcal{C}} d(i,j)x(i,j)$, the client-connection cost of solution $\mathcal{H}=(x,y)$ |
| $F(\mathcal{H})$ | $\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}} f(i)y(i,p)$, the facility-opening cost of solution $\mathcal{H}=(x,y)$ |
| $P(\mathcal{H})$ | $\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}} g(p)y(i,p)$, the service-installation cost of solution $\mathcal{H}=(x,y)$ |
| $v_1/v_2$ | $3F(\mathcal{H}_1)+3P(\mathcal{H}_1)+C(\mathcal{H}_1)/3F(\mathcal{H}_2)+3P(\mathcal{H}_2)+C(\mathcal{H}_2)$ |
| $v_f$ | $av_1+bv_2$ |
| $\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2$ | The set of facilities opened by $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_2$ |
| $h_1(i)/h_2(i)$ | The highest priority associated with $i$ in $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_2$ |
| $\tau_1(j)/\tau_2(j)$ | The facility nearest to $j$ from $\{i\in\mathcal{S}_1: h_1(i)\geqslant h_c(j)\}/\{i\in\mathcal{S}_2: h_2(i)\geqslant h_c(j)\}$ |
| $d_1(j)/d_2(j)$ | $d(j,\tau_1(j))/d(j,\tau_2(j))$ |
| $\kappa_1(i)/\kappa_2(i)$ | The facility nearest to $i$ from $\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2$ |
| $\eta(i)$ | $\{j\in\mathcal{C}:\tau_2(j)=i\}$ |
| $\eta(\mathcal{Z})$ | $\bigcup_{i\in\mathcal{Z}}\eta(i)$ |
| $\delta(i)$ | The facility nearest to $\kappa_1(i)$ from $\mathcal{S}_2$ |
| $\mathcal{S}_2^{\dagger}$ | $\{\kappa_2(i): i\in\mathcal{S}_1\}$ |
| $\Delta(i)$ | $\sum_{j\in\eta(i)} 2(d_1(j)+d_2(j))$ |
| $\mathcal{S}_2^{\ddagger}$ | The set of $k-\lvert\mathcal{S}_2^{\dagger}\rvert$ facilities $i\in\mathcal{S}_2\backslash\mathcal{S}_2^{\dagger}$ with the largest values of $\Delta(i)$ |
| $\mathcal{K}_i$ | $\{i'\in\mathcal{S}_2:\kappa_1(i')=i\}$ |
| $\Delta_2(i)$ | $\sum_{j\in\eta(i)}(d_2(j)+d_1(j))$ |
| $\Delta_1(i)$ | $\sum_{i'\in\mathcal{K}_i}\Delta_2(i')$ |
| $\mathcal{J}_0/\mathcal{J}_1$ | $\{i\in\mathcal{S}_1:\theta^*(i)=0\}/\{i\in\mathcal{S}_1:\theta^*(i)=1\}$ |

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i\in\mathcal{F}} x(i,j)=1,\qquad \forall j\in\mathcal{C}, \tag{1}$$

$$x(i,j)\leqslant \sum_{p\in\mathcal{P}\,\wedge\, p\geqslant h_c(j)} y(i,p),\qquad \forall i\in\mathcal{F},\ j\in\mathcal{C}, \tag{2}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}} y(i,p)\leqslant k, \tag{3}$$

$$x(i,j),\ y(i,p)\in\{0,1\},\qquad \forall i\in\mathcal{F},\ j\in\mathcal{C},\ p\in\mathcal{P}. \tag{4}$$

在整数规划 IP1 中, 每对设施 $i\in\mathcal{F}$ 和用户 $j\in\mathcal{C}$ 都对应一个变量 $x(i,j)$, 每对设施 $i\in\mathcal{F}$ 和优先级 $p\in\mathcal{P}$ 都对应一个变量 $y(i,p)$, 其中, $x(i,j)=1$ 表示将用户 $j$ 连接到设施 $i$ 上, $y(i,p)=1$ 表示开设设施 $i$ 并将优先级为 $p$ 的服务安置在设施 $i$ 上. 约束条件 (1) 要求将每个用户都连接到一个设施上. 约束条件 (2) 要求每个用户所连接的设施都被开设且能满足该用户的服务级别要求. 约束条件 (3) 要求开设设施的数量不能超过 $k$. 可以看出, IP1 的某些可行解会将级别不同的多个服务安置在同一个设施上 (即存在满足 $\sum_{p\in\mathcal{P}} y(i,p)>1$ 的设施 $i$). 通过关闭在设施上开设的级别较低的服务, 可以在不增加费用的前提下将这种解调整为 $\mathcal{I}$ 的可行解. 令 opt 表示 IP1 最优解的费用. 表 1 中总结了后文所使用的主要定义.

## 3 优先 $k$- 设施选址问题的分数解

本文松弛 IP1 中的整数约束以得到以下线性规划:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i\in\mathcal{F},j\in\mathcal{C}} d(i,j)x(i,j) + \sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}} (f(i)+g(p))y(i,p) && \text{LP1} \\ \text{s.t.} \quad & (1),\ (2),\ \text{和}\ (3), \\ & x(i,j),\ y(i,p) \geqslant 0,\quad \forall i\in\mathcal{F},\ j\in\mathcal{C},\ p\in\mathcal{P}. && (5) \end{aligned}$$

本文将 LP1 松弛为以下线性规划 (LP2($\nu$)), 其中 $\nu \geqslant 0$. 该线性规划移除约束条件 (3), 并将违反约束条件 (3) 的惩罚费用添加到目标函数中.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i\in\mathcal{F},j\in\mathcal{C}} d(i,j)x(i,j) + \sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}} (f(i)+g(p))y(i,p) + \nu\left(\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}} y(i,p) - k\right) && \text{LP2}(\nu) \\ \text{s.t.} \quad & (1),\ (2),\ \text{和}\ (5). \end{aligned}$$

LP2($\nu$) 的对偶问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j\in\mathcal{C}} \alpha(j) - \nu k && && \text{DUAL}(\nu) \\ \text{s.t.} \quad & \alpha(j) \leqslant d(i,j) + \beta(i,j), && \forall i\in\mathcal{F},\ j\in\mathcal{C}, && (6) \\ & \sum_{j\in\mathcal{C}\,\wedge\, h_c(j)\leqslant p} \beta(i,j) \leqslant f(i)+g(p)+\nu, && \forall i\in\mathcal{F},\ p\in\mathcal{P}, && (7) \\ & \alpha(j),\ \beta(i,j) \geqslant 0, && \forall i\in\mathcal{F},\ j\in\mathcal{C}. && (8) \end{aligned}$$

令 opt($\nu$) 表示 LP2($\nu$) 的一个最优解的费用. 给定 LP2($\nu$) 的一个解 $\mathcal{H}=(x,y)$, 令 $C(\mathcal{H}) = \sum_{i\in\mathcal{F},j\in\mathcal{C}} d(i,j)x(i,j)$, $F(\mathcal{H}) = \sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}} f(i)y(i,p)$, $P(\mathcal{H}) = \sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}} g(p)y(i,p)$. LP2($\nu$) 是优先设施选址问题的线性规划 [8,13]. 基于 Mahdian [13] 提出的原始 – 对偶算法, 可以为 LP2($\nu$) 构造满足以下性质的整数解.

**引理1** (Mahdian, 2004 [13], 定理 3.12) 给定任意实数 $\nu \geqslant 0$, 可以在多项式时间内为 LP2($\nu$) 构造满足 $3(F(\mathcal{H}) + P(\mathcal{H}) + \nu\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}} y(i,p)) + C(\mathcal{H}) \leqslant 3\sum_{j\in\mathcal{C}} \alpha(j)$ 的整数解 $\mathcal{H}=(x,y)$ 及其对偶解 $(\alpha,\beta)$.

以下引理说明, 可以基于引理 1 在有限时间内构造实例 $\mathcal{I}$ 的 3- 近似解或该实例松弛线性规划的两个整数解, 其中, 两个整数解的一个凸组合是 LP1 的费用较低的分数解.

**引理2** 给定任意常数 $\varepsilon \in (0,1)$, 可以在多项式时间内找到实例 $\mathcal{I}$ 的 3- 近似解或两个非负实数 $\nu_1$ 和 $\nu_2$ 以及 LP2($\nu_1$) 的整数解 $\mathcal{H}_1 = (x_1,y_1)$ 和 LP2($\nu_2$) 的整数解 $\mathcal{H}_2 = (x_2,y_2)$, 使得 $\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}} y_1(i,p) = k_1 < k$, $\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}} y_2(i,p) = k_2 > k$, 且 $a(3F(\mathcal{H}_1)+3P(\mathcal{H}_1)+C(\mathcal{H}_1)) + b(3F(\mathcal{H}_2)+3P(\mathcal{H}_2)+C(\mathcal{H}_2)) \leqslant (3+O(\varepsilon))\text{opt}$, 其中, $a = \frac{k_2-k}{k_2-k_1}$, $b = \frac{k-k_1}{k_2-k_1}$.

**证明** 令 $\mathcal{H}=(x,y)$ 表示基于引理 1 为 LP2($\nu$) 构造的整数解, 令 $(\alpha,\beta)$ 表示对应的对偶解, 其中, $\nu$ 为任意非负实数. 由引理 1 可知,

$$3F(\mathcal{H}) + 3P(\mathcal{H}) + C(\mathcal{H}) \leqslant 3\left(\sum_{j\in\mathcal{C}} \alpha(j) - \nu \sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}} y(i,p)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\left(\sum_{j\in\mathcal{C}}\alpha(j)-\nu k+\nu\left(k-\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}}y(i,p)\right)\right)\\
&\leqslant 3\left(\mathrm{opt}(\nu)+\nu\left(k-\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}}y(i,p)\right)\right)\\
&\leqslant 3\left(\mathrm{opt}+\nu\left(k-\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}}y(i,p)\right)\right),
\end{aligned}\tag{9}
$$

其中, 第 3 步根据 DUAL($\nu$) 和 $\sum_{j\in\mathcal{C}}\alpha(j)-\nu k$ 分别是 LP2($\nu$) 的对偶问题和对偶目标函数这一事实得出, 第 4 步根据 LP2($\nu$) 是 LP1 的松弛问题这一事实得到.

令 $\mathcal{H}_0=(x_0,y_0)$ 表示基于引理 1 为 LP2(0) 构造的整数解. 如果 $\mathcal{H}_0$ 满足约束条件 (3), 则 $\mathcal{H}_0$ 为 IP1 的可行解. 由不等式 (9) 可知 $\mathcal{H}_0$ 的费用不超过 3opt. 这说明利用引理 1 求解 LP2(0) 可以得到实例 $\mathcal{I}$ 的一个 3- 近似解.

下面分析 $\mathcal{H}_0$ 不满足约束条件 (3) 的情况. 令 $g_{\max}=\max_{p\in\mathcal{P}}g(p)$ 和 $g_{\min}=\min_{p\in\mathcal{P}}g(p)$ 分别表示实例中最高和最低的服务安置费用. 令 $f_{\max}=\max_{i\in\mathcal{F}}f(i)$ 和 $f_{\min}=\min_{i\in\mathcal{F}}f(i)$ 分别表示实例中最高和最低的设施开设费用. 此外, 令 $d_{\max}=\max_{i,j\in\mathcal{C}\cup\mathcal{F}}d(i,j)$ 和 $d_{\min}=\min_{i,j\in\mathcal{C}\cup\mathcal{F}}d(i,j)$ 分别表示集合 $\mathcal{C}\cup\mathcal{F}$ 中点之间的最大距离和最小距离. 由不等式 (9) 可知, 对于任意实数 $\nu\geqslant 0$, 引理 1 为 LP2($\nu$) 给出的解 $(x,y)$ 都满足 $\mathrm{opt}+\nu(k-\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}}y(i,p))\geqslant 0$. 因此, 在 $\nu>\mathrm{opt}$ 的情况下, $(x,y)$ 满足 $k-\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}}y(i,p)\geqslant-\frac{\mathrm{opt}}{\nu}>-1$. 该不等式与 $(x,y)$ 是整数解的事实说明, 当 $\nu=|\mathcal{C}|d_{\max}+k(f_{\max}+g_{\max})+1$ ($>\mathrm{opt}$) 时, 引理 1 为 LP2($\nu$) 给出的解满足约束条件 (3), 即 $k-\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}}y(i,p)\geqslant 0$. 结合这一事实与 LP2(0) 的解 $\mathcal{H}_0$ 不满足约束条件 (3) 的假设可知, 本文可以在区间 $[0,|\mathcal{C}|d_{\max}+k(f_{\max}+g_{\max})+1]$ 内基于二分查找得到满足 $0<\nu_1-\nu_2\leqslant\varepsilon(d_{\min}+f_{\min}+g_{\min})\frac{1}{|\mathcal{F}|}$ 的两个实数 $\nu_1$ 和 $\nu_2$, 使得引理 1 为 LP2($\nu_1$) 给出的解满足约束条件 (3)、为 LP2($\nu_2$) 给出的解不满足约束条件 (3) (如果在二分查找的过程中找到了一个实数 $\nu'$, 使得引理 1 为 LP2($\nu'$) 给出的解对应的约束条件 (3) 取等号, 则由不等式 (9) 可知, 这个解是 IP1 的一个 3- 近似解). 可以看出, 该二分查找的过程需要将引理 1 中的算法调用 $O(\log\frac{|\mathcal{C}||\mathcal{F}|k(d_{\max}+f_{\max}+g_{\max})}{\varepsilon(d_{\min}+f_{\min}+g_{\min})})$ 次. 这一调用次数是关于问题实例位复杂度的多项式.

令 $\mathcal{H}_1=(x_1,y_1)$ 和 $\mathcal{H}_2=(x_2,y_2)$ 分别表示基于引理 1 为 LP2($\nu_1$) 和 LP2($\nu_2$) 构造的解, 令 $(\alpha_1,\beta_1)$ 和 $(\alpha_2,\beta_2)$ 表示对应的对偶解. 定义 $\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}}y_1(i,p)=k_1$, $\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}}y_2(i,p)=k_2$, 其中, $k_1<k<k_2$. 令 $v_1=3F(\mathcal{H}_1)+3P(\mathcal{H}_1)+C(\mathcal{H}_1)$, $v_2=3F(\mathcal{H}_2)+3P(\mathcal{H}_2)+C(\mathcal{H}_2)$. 可以得出

$$
\begin{aligned}
v_2&\leqslant 3\left(\sum_{j\in\mathcal{C}}\alpha_2(j)-\nu_2k_2\right)=3\left(\sum_{j\in\mathcal{C}}\alpha_2(j)-\nu_1k_2\right)+3(\nu_1-\nu_2)k_2\\
&\leqslant 3\left(\sum_{j\in\mathcal{C}}\alpha_2(j)-\nu_1k_2\right)+\varepsilon\frac{3k_2}{|\mathcal{F}|}(d_{\min}+f_{\min}+g_{\min})\leqslant 3\left(\sum_{j\in\mathcal{C}}\alpha_2(j)-\nu_1k_2\right)+\varepsilon\frac{3k_2}{|\mathcal{F}|}\mathrm{opt}\\
&\leqslant 3\left(\sum_{j\in\mathcal{C}}\alpha_2(j)-\nu_1k_2\right)+O(\varepsilon)\mathrm{opt},
\end{aligned}\tag{10}
$$

其中, 第 1 步基于引理 1 得到, 第 3 步基于不等式 $\nu_1-\nu_2\leqslant\varepsilon(d_{\min}+f_{\min}+g_{\min})\frac{1}{|\mathcal{F}|}$ 得到. 令 $a=\frac{k_2-k}{k_2-k_1}$, $b=1-a$. 对于每个设施 $i\in\mathcal{F}$ 和用户 $j\in\mathcal{C}$, 定义两个对偶变量 $\tilde{\alpha}(j)=a\alpha_1(j)+b\alpha_2(j)$ 和

$\tilde{\beta}(i,j)=a\beta_1(i,j)+b\beta_2(i,j)$. 由引理 1 和不等式 (10) 可知,

$$\begin{aligned}av_1+bv_2&\leqslant 3a\left(\sum_{j\in\mathcal{C}}\alpha_1(j)-\nu_1k_1\right)+3b\left(\sum_{j\in\mathcal{C}}\alpha_2(j)-\nu_1k_2\right)+O(\varepsilon)\text{opt}\\&=3\left(\sum_{j\in\mathcal{C}}(a\alpha_1(j)+b\alpha_2(j))-\nu_1(ak_1+bk_2)\right)+O(\varepsilon)\text{opt}\\&=3\left(\sum_{j\in\mathcal{C}}\tilde{\alpha}(j)-\nu_1k\right)+O(\varepsilon)\text{opt}.\end{aligned}\tag{11}$$

由 $\nu_1-\nu_2>0$ 这一事实可知, 对偶解 $(\alpha_2,\beta_2)$ 是 DUAL$(\nu_1)$ 的可行解. 因此, $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ 是 DUAL$(\nu_1)$ 的两个可行解的凸组合且满足 DUAL$(\nu_1)$ 的约束条件. $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ 对于 DUAL$(\nu_1)$ 的费用为 $\sum_{j\in\mathcal{C}}\tilde{\alpha}(j)-\nu_1k$. DUAL$(\nu_1)$ 是 LP1 松弛问题的对偶问题这一事实说明, $\sum_{j\in\mathcal{C}}\tilde{\alpha}(j)-\nu_1k\leqslant\text{opt}$. 基于该不等式与不等式 (11) 可知, $av_1+bv_2\leqslant(3+O(\varepsilon))\text{opt}$. 因此, 引理 2 成立.

## 4 优先 $k$- 设施选址问题的舍入方法

给定常数 $\varepsilon\in(0,1)$, 令 $\nu_1$ 和 $\nu_2$ 表示基于引理 2 确定的两个非负实数, 并分别令 $\mathcal{H}_1=(x_1,y_1)$ 和 $\mathcal{H}_2=(x_2,y_2)$ 表示引理 2 中的方法调用引理 1 为 LP2$(\nu_1)$ 和 LP2$(\nu_2)$ 构造的整数解, 其中, $\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}}y_1(i,p)=k_1<k$, $\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}}y_2(i,p)=k_2>k$. 本节的目标是将 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 的一个凸组合调整为实例 $\mathcal{I}$ 的整数解. 下面给出本节中使用的一些定义. 令 $v_1=3F(\mathcal{H}_1)+3P(\mathcal{H}_1)+C(\mathcal{H}_1)$, $v_2=3F(\mathcal{H}_2)+3P(\mathcal{H}_2)+C(\mathcal{H}_2)$, $v_f=av_1+bv_2$, 其中, $a=\frac{k_2-k}{k_2-k_1}$, $b=1-a$. 引理 2 说明 $v_f\leqslant(3+O(\varepsilon))\text{opt}$. 令 $\mathcal{S}_1=\{i\in\mathcal{F}:\sum_{p\in\mathcal{P}}y_1(i,p)\geqslant1\}$ 和 $\mathcal{S}_2=\{i\in\mathcal{F}:\sum_{p\in\mathcal{P}}y_2(i,p)\geqslant1\}$ 分别表示 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 中的开设设施集合. 可以看出, $|\mathcal{S}_1|\leqslant\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}}y_1(i,p)=k_1$, $|\mathcal{S}_2|\leqslant\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}}y_2(i,p)=k_2$. 在 $|\mathcal{S}_2|\leqslant k$ 的情况下, 我们可以通过取消 $\mathcal{H}_2$ 在开设设施中安置的多余服务构造 $\mathcal{I}$ 的可行解. 引理 2 说明, 在该可行解与 $\mathcal{H}_1$ 之间存在一个费用较低的解. 因此, 本文可以假设 $|\mathcal{S}_2|>k$. 对于每个设施 $i\in\mathcal{S}_1$, 令 $h_1(i)=\max_{p\in\mathcal{P}\wedge y_1(i,p)=1}p$ 表示 $\mathcal{H}_1$ 在设施 $i$ 上安置的最高服务级别. 同样地, 对于每个设施 $i\in\mathcal{S}_2$, 定义 $h_2(i)=\max_{p\in\mathcal{P}\wedge y_2(i,p)=1}p$. 对于每个用户 $j\in\mathcal{C}$, 令 $\tau_1(j)$ 和 $\tau_2(j)$ 分别表示集合 $\{i\in\mathcal{S}_1:h_1(i)\geqslant h_c(j)\}$ 和 $\{i\in\mathcal{S}_2:h_2(i)\geqslant h_c(j)\}$ 中与其距离最近的设施, 并定义 $d_1(j)=d(j,\tau_1(j))$, $d_2(j)=d(j,\tau_2(j))$. 可以看出, $\sum_{j\in\mathcal{C}}d_1(j)\leqslant C(\mathcal{H}_1)$, $\sum_{j\in\mathcal{C}}d_2(j)\leqslant C(\mathcal{H}_2)$. 对于每个设施 $i\in\mathcal{S}_2$, 令 $\kappa_1(i)$ 表示集合 $\mathcal{S}_1$ 中与 $i$ 距离最近的设施, 并令 $\eta(i)=\{j\in\mathcal{C}:\tau_2(j)=i\}$. 对于每个设施集合 $\mathcal{Z}\subseteq\mathcal{S}_2$, 令 $\eta(\mathcal{Z})=\bigcup_{i\in\mathcal{Z}}\eta(i)$. 对于每个设施 $i\in\mathcal{S}_1$, 令 $\kappa_2(i)$ 表示集合 $\mathcal{S}_2$ 中与 $i$ 距离最近的设施.

本文基于 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 构造问题实例的解. 给定满足 $\sigma_1\in(0,\sigma_2)$ 和 $\sigma_2\in(\sigma_1,1)$ 的两个实数 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$, 本文考虑以下 3 种情况: (1) $a\in[\sigma_2,1)$; (2) $a\in(0,\sigma_1]$; (3) $a\in(\sigma_1,\sigma_2)$. 下面分别在这 3 种情况中给出解的构造方法.

**情况 (1):** $a\in[\sigma_2,1)$**.** 在 $a\in[\sigma_2,1)$ 的情况下, 由引理 2 可知,

$$v_1<\frac{1}{a}(av_1+bv_2)=\frac{1}{a}v_f\leqslant\frac{1}{\sigma_2}v_f\leqslant\frac{1}{\sigma_2}(3+O(\varepsilon))\text{opt}.\tag{12}$$

由不等式 $\sum_{i\in\mathcal{F},p\in\mathcal{P}}y_1(i,p)<k$ 可知, $\mathcal{H}_1$ 是 IP1 的一个可行解. 因此, 不等式 (12) 说明, 在情况 (1) 中, $\mathcal{H}_1$ 是 IP1 的 $\frac{1}{\sigma_2}(3+O(\varepsilon))$- 近似解.

$\mathcal{H}_1$ 在剩余的两种情况中费用较高. 本文在这两种情况下从 $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ 中选取开设设施, 根据 $a$ 的取值为问题实例构造不同的解.

**情况 (2):** $a \in (0, \sigma_1]$. 给定一个设施 $i \in \mathcal{S}_2$, 令 $\delta(i)$ 表示 $\mathcal{S}_2$ 中距离 $\kappa_1(i)$ 最近的设施. 可以得出, 每个用户 $j \in \mathcal{C}$ 都满足不等式

$$\begin{aligned} d(j, \delta(\tau_2(j))) &\leqslant d(j, \kappa_1(\tau_2(j))) + d(\kappa_1(\tau_2(j)), \delta(\tau_2(j))) \leqslant d(j, \kappa_1(\tau_2(j))) + d(\kappa_1(\tau_2(j)), \tau_2(j)) \\ &\leqslant d_2(j) + 2d(\kappa_1(\tau_2(j)), \tau_2(j)) \leqslant d_2(j) + 2d(\tau_1(j), \tau_2(j)) \leqslant 3d_2(j) + 2d_1(j), \end{aligned} \tag{13}$$

其中, 第 1 步、第 3 步和第 5 步基于三角不等式得出, 第 2 步基于 $\delta$ 的定义得出, 第 4 步基于 $\kappa_1$ 的定义得出. 令 $\mathcal{S}_2^{\dagger} = \{\kappa_2(i) : i \in \mathcal{S}_1\}$. 对于每个设施 $i \in \mathcal{S}_2 \backslash \mathcal{S}_2^{\dagger}$, 令 $\Delta(i) = \sum_{j \in \eta(i)} 2(d_1(j) + d_2(j))$. 令 $\mathcal{S}_2^{\ddagger} = \arg\max_{\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_2 \backslash \mathcal{S}_2^{\dagger} \wedge |\mathcal{S}| = k - |\mathcal{S}_2^{\dagger}|} \sum_{i \in \mathcal{S}} \Delta(i)$. 本文在情况 (2) 中按照以下方式为 $\mathcal{I}$ 构造一个可行解 $(\mathcal{S}, h_f, \tau)$.

- 令 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2^{\dagger} \cup \mathcal{S}_2^{\ddagger}$.
- 对于每个设施 $i \in \mathcal{S}$, 如果 $\delta^{-1}(i) \neq \emptyset$, 则令 $h_f(i) = \max_{i' \in \delta^{-1}(i) \cup \{i\}} h_2(i')$, 否则, 令 $h_f(i) = h_2(i)$.
- 对于每个用户 $j \in \mathcal{C}$, 如果 $\tau_2(j) \in \mathcal{S}$, 则令 $\tau(j) = \tau_2(j)$, 否则, 令 $\tau(j) = \delta(\tau_2(j))$.

由 $\tau_2$ 和 $h_f$ 的定义可知, 不等式 $h_c(j) \leqslant h_2(\tau_2(j)) \leqslant h_f(\tau(j))$ 对于每个用户 $j \in \mathcal{C}$ 都成立. 此外, $\mathcal{S}_2^{\dagger}$ 和 $\mathcal{S}_2^{\ddagger}$ 的定义说明, $|\mathcal{S}| = |\mathcal{S}_2^{\dagger}| + |\mathcal{S}_2^{\ddagger}| = k$. 由此可知, $(\mathcal{S}, h_f, \tau)$ 是 $\mathcal{I}$ 的可行解. 下面分析该解在情况 (2) 中的近似比.

**引理3** 不等式 $\sum_{i \in \mathcal{S}} (f(i) + g(h_f(i))) + \sum_{j \in \mathcal{C}} d(j, \tau(j)) < \max\{2, \frac{1+2\sigma_1}{1-\sigma_1}\}(3 + O(\varepsilon))\mathrm{opt}$ 在 $a \in (0, \sigma_1]$ 时成立.

**证明** 由 $\tau$ 的定义可知,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{C}} d(j, \tau(j)) &= \sum_{j \in \eta(\mathcal{S}_2^{\dagger} \cup \mathcal{S}_2^{\ddagger})} d_2(j) + \sum_{j \in \eta(\mathcal{S}_2 \backslash (\mathcal{S}_2^{\dagger} \cup \mathcal{S}_2^{\ddagger}))} d(j, \delta(\tau_2(j))) \\ &\leqslant \sum_{j \in \eta(\mathcal{S}_2^{\dagger} \cup \mathcal{S}_2^{\ddagger})} d_2(j) + \sum_{j \in \eta(\mathcal{S}_2 \backslash (\mathcal{S}_2^{\dagger} \cup \mathcal{S}_2^{\ddagger}))} (3d_2(j) + 2d_1(j)) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{C}} d_2(j) + \sum_{i \in \mathcal{S}_2 \backslash (\mathcal{S}_2^{\dagger} \cup \mathcal{S}_2^{\ddagger})} \Delta(i), \end{aligned} \tag{14}$$

其中, 第 2 步基于不等式 (13) 得出, 第 3 步基于 $\Delta(i)$ 的定义得到. 可以得出

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{S}_2 \backslash (\mathcal{S}_2^{\dagger} \cup \mathcal{S}_2^{\ddagger})} \Delta(i) &\leqslant \frac{|\mathcal{S}_2 \backslash (\mathcal{S}_2^{\dagger} \cup \mathcal{S}_2^{\ddagger})|}{|\mathcal{S}_2 \backslash \mathcal{S}_2^{\dagger}|} \sum_{i \in \mathcal{S}_2 \backslash \mathcal{S}_2^{\dagger}} \Delta(i) \leqslant \frac{k_2 - k}{k_2 - |\mathcal{S}_2^{\dagger}|} \sum_{i \in \mathcal{S}_2 \backslash \mathcal{S}_2^{\dagger}} \Delta(i) \leqslant \frac{k_2 - k}{k_2 - k_1} \sum_{i \in \mathcal{S}_2 \backslash \mathcal{S}_2^{\dagger}} \Delta(i) \\ &= a \sum_{i \in \mathcal{S}_2 \backslash \mathcal{S}_2^{\dagger}} \Delta(i) \leqslant a \sum_{i \in \mathcal{S}_2} \Delta(i) = 2a \sum_{j \in \mathcal{C}} d_1(j) + 2a \sum_{j \in \mathcal{C}} d_2(j), \end{aligned} \tag{15}$$

其中, 第 1 步基于等式 $\mathcal{S}_2^{\ddagger} = \arg\max_{\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_2 \backslash \mathcal{S}_2^{\dagger} \wedge |\mathcal{S}| = k - |\mathcal{S}_2^{\dagger}|} \sum_{i \in \mathcal{S}} \Delta(i)$ 得到, 第 3 步基于不等式 $|\mathcal{S}_2^{\dagger}| \leqslant k_1$ 得到, 第 6 步基于 $\Delta(i)$ 的定义得出. 由不等式 (14) 和 (15) 可知,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j \in \mathcal{C}} d(j, \tau(j))}{aC(\mathcal{H}_1) + bC(\mathcal{H}_2)} &\leqslant \frac{\sum_{j \in \mathcal{C}} d_2(j) + 2a \sum_{j \in \mathcal{C}} d_1(j) + 2a \sum_{j \in \mathcal{C}} d_2(j)}{aC(\mathcal{H}_1) + bC(\mathcal{H}_2)} \\ &\leqslant \frac{2aC(\mathcal{H}_1) + (1 + 2a)C(\mathcal{H}_2)}{aC(\mathcal{H}_1) + bC(\mathcal{H}_2)} = \max\left\{2, \frac{1 + 2a}{1 - a}\right\}. \end{aligned} \tag{16}$$

由 $h_f$ 的定义可知,

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathcal{S}} g(h_f(i)) &= \sum_{i\in\mathcal{S}\wedge\delta^{-1}(i)\neq\emptyset}\max_{i'\in\delta^{-1}(i)\cup\{i\}} g(h_2(i')) + \sum_{i\in\mathcal{S}\wedge\delta^{-1}(i)=\emptyset} g(h_2(i))\\ &\leqslant \sum_{i\in\mathcal{S}_2} g(h_2(j)) \leqslant P(\mathcal{H}_2).\end{aligned}\tag{17}$$

此外, 由 $\mathcal{S}=\mathcal{S}_2^{\dagger}\cup\mathcal{S}_2^{\ddagger}\subseteq\mathcal{S}_2$ 可知,

$$\sum_{i\in\mathcal{S}} f(i) \leqslant \sum_{i\in\mathcal{S}_2} f(i) \leqslant F(\mathcal{H}_2).\tag{18}$$

不等式 (16)~(18) 和 $a\in(0,\sigma_1]$ 的假设说明

$$\begin{aligned}\frac{1}{v_f}\left(\sum_{i\in\mathcal{S}}(f(i)+g(h_f(i)))+\sum_{j\in\mathcal{C}} d(j,\tau(j))\right) &= \frac{\sum_{i\in\mathcal{S}}(f(i)+g(h_f(i)))+\sum_{j\in\mathcal{C}} d(j,\tau(j))}{av_1+(1-a)v_2}\\ &< \max\left\{2,\frac{1+2a}{1-a}\right\} \leqslant \max\left\{2,\frac{1+2\sigma_1}{1-\sigma_1}\right\}.\end{aligned}\tag{19}$$

由不等式 (19) 和引理 2 可知, 引理 3 成立.

**情况 (3):** $a\in(\sigma_1,\sigma_2)$. 对于每个设施 $i\in\mathcal{S}_1$, 令 $\mathcal{K}_i=\{i'\in\mathcal{S}_2:\kappa_1(i')=i\}$. 由三角不等式和 $\kappa_1$ 的定义可知, 每个用户 $j\in\mathcal{C}$ 都满足

$$d(\tau_2(j),\kappa_1(\tau_2(j))) \leqslant d(\tau_2(j),\tau_1(j)) \leqslant d_2(j)+d_1(j).$$

该不等式与三角不等式说明

$$d(j,\kappa_1(\tau_2(j))) \leqslant d_2(j)+d(\tau_2(j),\kappa_1(\tau_2(j))) \leqslant 2d_2(j)+d_1(j).\tag{20}$$

在基于 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 构造 IP1 的解时, 本文首先开设 $\mathcal{S}_2$ 中的所有设施, 然后基于一个线性规划将开设设施的数量缩小为 $k$, 并最小化该过程产生的费用增量. 对于每个设施 $i'\in\mathcal{S}_2$, 本文将优先级为 $h_2(i')$ 的服务安置在 $i'$, 并将每个用户 $j\in\mathcal{C}$ 连接到 $\tau_2(j)$. 给定一个设施 $i\in\mathcal{S}_1$, 如果关闭一个设施 $i'\in\mathcal{K}_i$, 开设设施 $i$, 将优先级为 $h_2(i')$ 的服务安置在 $i$ 上, 并将每个用户 $j\in\eta(i')$ 重新连接到 $i$, 则由不等式 (20) 可知, 用户的连接费用最多增加 $\sum_{j\in\eta(i')}(d_2(j)+d_1(j))$. 此外, 如果开设设施 $i$, 将优先级为 $\max_{i'\in\mathcal{K}_i} h_2(i')$ 的服务安置在 $i$ 上, 关闭 $\mathcal{K}_i$ 中的所有用户, 并将每个用户 $j\in\eta(\mathcal{K}_i)$ 重新连接到 $i$, 则开设设施数量可以被减少 $|\mathcal{K}_i|-1$, 而用户的连接费用最多增加 $\sum_{j\in\eta(\mathcal{K}_i)}(d_2(j)+d_1(j))$. 对于每个设施 $i'\in\mathcal{S}_2$, 令 $\Delta_2(i')=\sum_{j\in\eta(i')}(d_2(j)+d_1(j))$. 对于每个设施 $i\in\mathcal{S}_1$, 令 $\Delta_1(i)=\sum_{j\in\eta(\mathcal{K}_i)}(d_2(j)+d_1(j))=\sum_{i'\in\mathcal{K}_i}\Delta_2(i')$. 本文通过求解以下线性规划最小化构造解的过程中增加的用户连接费用:

$$\begin{aligned}\min\quad & \sum_{i\in\mathcal{S}_1}\theta(i)\Delta_1(i) && \text{LP3}\\ \text{s.t.}\quad & \sum_{i\in\mathcal{S}_1}\theta(i)(|\mathcal{K}_i|-1)=|\mathcal{S}_2|-k, && (21)\\ & \theta(i)\in[0,1],\qquad \forall i\in\mathcal{S}_1. && (22)\end{aligned}$$

线性规划 LP3 与 Li 和 Svensson [26] 针对不考虑服务安置与设施开设费用的 $k$- 中值问题提出的背包型线性规划较为相似. 在 LP3 中, 每个设施 $i\in\mathcal{S}_1$ 都对应一个变量 $\theta(i)$, 其中, $\theta(i)=1$ 表示关闭 $\mathcal{K}_i$

中的所有设施, 开设设施 $i$, 将优先级为 $\max_{i'\in\mathcal{K}_i} h_2(i')$ 的服务安置在 $i$ 上, 并将每个用户 $j\in\eta(\mathcal{K}_i)$ 重新连接到 $i$. 由上述论证可知, $\theta(i)$ 取值为 1 最多会使 $\mathcal{H}_2$ 的用户连接费用增加 $\Delta_1(i)$, 并使开设设施数量降低 $|\mathcal{K}_i|-1$. 约束条件 (21) 表示开设设施的数量需要被缩小为 $k$.

令 $\mathcal{S}^\dagger=\{i\in\mathcal{S}_1:|\mathcal{K}_i|>1\}$. 本文按照 $\frac{1}{|\mathcal{K}_i|-1}\Delta_1(i)$ 的值对设施 $i\in\mathcal{S}^\dagger$ 进行升序排序. 对于每个实数 $t\in[|\mathcal{S}^\dagger|]$, 令 $i^t$ 表示该序列中的第 $t$ 个设施, 并定义 $\mathcal{S}^\dagger_t=\{i^{\tilde t}:1\leqslant\tilde t\leqslant t\}$. 令 $\mathcal{S}^\dagger_0=\emptyset$. 由 $\mathcal{S}^\dagger$ 的定义可知,

$$\sum_{i\in\mathcal{S}^\dagger}(|\mathcal{K}_i|-1)\geqslant\sum_{i\in\mathcal{S}_1}(|\mathcal{K}_i|-1)=|\mathcal{S}_2|-|\mathcal{S}_1|>|\mathcal{S}_2|-k.$$

该不等式说明, 存在一个整数 $s\in\{1,\ldots,|\mathcal{S}^\dagger|\}$, 使得

$$\sum_{i\in\mathcal{S}^\dagger_{s-1}}(|\mathcal{K}_i|-1)\leqslant|\mathcal{S}_2|-k<\sum_{i\in\mathcal{S}^\dagger_s}(|\mathcal{K}_i|-1). \tag{23}$$

令 $\varrho=i^s$. 可以看出, $\varrho\in\mathcal{S}^\dagger$. 本文按照以下方式构造 LP3 的一个解 $\theta^*$: 对于每个设施 $i\in\mathcal{S}^\dagger_{s-1}$, 令 $\theta^*(i)=1$; 对于每个设施 $i\in\mathcal{S}_1\backslash\mathcal{S}^\dagger_s$, 令 $\theta^*(i)=0$; 令 $\theta^*(\varrho)=\frac{1}{|\mathcal{K}_\varrho|-1}(|\mathcal{S}_2|-k-\sum_{i\in\mathcal{S}^\dagger_{s-1}}(|\mathcal{K}_i|-1))$ 以满足约束条件 (21). 由不等式 (23) 可知 $\theta^*(\varrho)\in[0,1)$.

**引理4** $\theta^*$ 是 LP3 的一个最优解.

**证明** 令 $\mathcal{Q}'_1=\{i\in\mathcal{S}_1:\theta^*(i)>0\}$, $\mathcal{Q}'_0=\{i\in\mathcal{S}_1:\theta^*(i)<1\}$. 由 $\theta^*$ 的定义可知, $\mathcal{Q}'_0\cap\mathcal{S}^\dagger$ 包含 $\Delta_1(i)/(|\mathcal{K}_i|-1)$ 取值最大的 $|\mathcal{Q}'_0\cap\mathcal{S}^\dagger|$ 个设施 $i\in\mathcal{S}^\dagger$, 而 $\mathcal{Q}'_1$ 包含 $\Delta_1(i)/(|\mathcal{K}_i|-1)$ 取值最小的 $|\mathcal{Q}'_1|$ 个设施 $i\in\mathcal{S}^\dagger$. 此外, $\theta^*$ 最多包含一个分数变量. 因此, $|\mathcal{Q}'_0\cap\mathcal{Q}'_1|\leqslant1$. 由此可知,

$$\min_{i\in\mathcal{Q}'_0\cap\mathcal{S}^\dagger}\frac{\Delta_1(i)}{|\mathcal{K}_i|-1}\geqslant\max_{i\in\mathcal{Q}'_1}\frac{\Delta_1(i)}{|\mathcal{K}_i|-1}. \tag{24}$$

给定 LP3 的一个可行解 $\theta$, 令 $\mathcal{Z}^+=\{i\in\mathcal{S}_1:\theta(i)>\theta^*(i)\}$, $\mathcal{Z}^-=\{i\in\mathcal{S}_1:\theta(i)<\theta^*(i)\}$. 由约束条件 (22) 可知, $\mathcal{Z}^+\subseteq\mathcal{Q}'_0$, $\mathcal{Z}^-\subseteq\mathcal{Q}'_1$. 此外, 约束条件 (21) 说明 $\sum_{i\in\mathcal{S}_1}\theta(i)(|\mathcal{K}_i|-1)=\sum_{i\in\mathcal{S}_1}\theta^*(i)(|\mathcal{K}_i|-1)$. 因此,

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in\mathcal{S}_1}\theta(i)(|\mathcal{K}_i|-1)-\sum_{i\in\mathcal{S}_1}\theta^*(i)(|\mathcal{K}_i|-1)\\&\quad=\sum_{i\in\mathcal{S}_1}(\theta(i)-\theta^*(i))(|\mathcal{K}_i|-1)\\&\quad=\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))(|\mathcal{K}_i|-1)-\sum_{i\in\mathcal{Z}^-}(\theta^*(i)-\theta(i))(|\mathcal{K}_i|-1)=0.\end{aligned} \tag{25}$$

$\theta^*$ 的定义说明不等式 $|\mathcal{K}_i|>1$ 对于每个设施 $i\in\mathcal{Q}'_1$ 都成立. 由该不等式与 $\mathcal{Z}^-\subseteq\mathcal{Q}'_1$ 这一事实可知, $\sum_{i\in\mathcal{Z}^-}(\theta^*(i)-\theta(i))(|\mathcal{K}_i|-1)\geqslant0$. 因此, 等式 (25) 说明, $\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))(|\mathcal{K}_i|-1)\geqslant0$. 本文分别分析以下两种情况: (i) $\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))(|\mathcal{K}_i|-1)=0$; (ii) $\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))(|\mathcal{K}_i|-1)>0$.

首先分析 $\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))(|\mathcal{K}_i|-1)=0$ 的情况. 在该情况中, 等式 (25) 说明 $\sum_{i\in\mathcal{Z}^-}(\theta^*(i)-\theta(i))(|\mathcal{K}_i|-1)=0$. 由该等式与每个设施 $i\in\mathcal{Z}^-$ 都满足 $\theta^*(i)>\theta(i)$ 和 $|\mathcal{K}_i|>1$ 这一事实可知, $\mathcal{Z}^-=\emptyset$. 因此,

$$\sum_{i\in\mathcal{S}_1}\Delta_1(i)\theta^*(i)-\sum_{i\in\mathcal{S}_1}\Delta_1(i)\theta(i)=\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta^*(i)-\theta(i))\Delta_1(i)+\sum_{i\in\mathcal{Z}^-}(\theta^*(i)-\theta(i))\Delta_1(i)$$

$$= \sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta^*(i)-\theta(i))\Delta_1(i)\leqslant 0, \tag{26}$$

其中, 第 2 步基于等式 $\mathcal{Z}^-=\emptyset$ 得出, 第 3 步基于 $\mathcal{Z}^+$ 的定义得出.

下面分析 $\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))(|\mathcal{K}_i|-1)>0$ 的情况. 在该情况中,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in\mathcal{S}_1}\Delta_1(i)\theta^*(i)-\sum_{i\in\mathcal{S}_1}\Delta_1(i)\theta(i)\\
&\quad=\sum_{i\in\mathcal{Z}^-}(\theta^*(i)-\theta(i))\Delta_1(i)-\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))\Delta_1(i)\\
&\quad=\left(\frac{\sum_{i\in\mathcal{Z}^-}(\theta^*(i)-\theta(i))\Delta_1(i)}{\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))(|\mathcal{K}_i|-1)}-\frac{\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))\Delta_1(i)}{\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))(|\mathcal{K}_i|-1)}\right)\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))(|\mathcal{K}_i|-1)\\
&\quad=\left(\frac{\sum_{i\in\mathcal{Z}^-}(\theta^*(i)-\theta(i))\Delta_1(i)}{\sum_{i\in\mathcal{Z}^-}(\theta^*(i)-\theta(i))(|\mathcal{K}_i|-1)}-\frac{\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))\Delta_1(i)}{\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))(|\mathcal{K}_i|-1)}\right)\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))(|\mathcal{K}_i|-1),
\end{aligned}\tag{27}$$

其中, 第 3 步基于等式 (25) 得到. 可以看出,

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))\Delta_1(i)}{\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))(|\mathcal{K}_i|-1)}&\geqslant\frac{\sum_{i\in\mathcal{Z}^+\cap\mathcal{S}^\dagger}(\theta(i)-\theta^*(i))\Delta_1(i)}{\sum_{i\in\mathcal{Z}^+\cap\mathcal{S}^\dagger}(\theta(i)-\theta^*(i))(|\mathcal{K}_i|-1)}\geqslant\min_{i\in\mathcal{Z}^+\cap\mathcal{S}^\dagger}\frac{\Delta_1(i)}{|\mathcal{K}_i|-1}\\
&\geqslant\min_{i\in\mathcal{Q}_0'\cap\mathcal{S}^\dagger}\frac{\Delta_1(i)}{|\mathcal{K}_i|-1}\geqslant\max_{i\in\mathcal{Q}_1'}\frac{\Delta_1(i)}{|\mathcal{K}_i|-1}\geqslant\max_{i\in\mathcal{Z}^-}\frac{\Delta_1(i)}{|\mathcal{K}_i|-1}\\
&\geqslant\frac{\sum_{i\in\mathcal{Z}^-}(\theta^*(i)-\theta(i))\Delta_1(i)}{\sum_{i\in\mathcal{Z}^-}(\theta^*(i)-\theta(i))(|\mathcal{K}_i|-1)},
\end{aligned}\tag{28}$$

其中, 第 1 步基于每个设施 $i\in\mathcal{Z}^+$ 都满足 $\theta(i)-\theta^*(i)>0$ 和每个设施 $i\in\mathcal{S}_1\backslash\mathcal{S}^\dagger$ 都满足 $|\mathcal{K}_i|-1\leqslant 0$ 这一事实得出, 第 2 步根据每个设施 $i\in\mathcal{Z}^+$ 都满足 $\theta(i)-\theta^*(i)>0$ 这一事实得出, 第 3 步根据 $\mathcal{Z}^+\subseteq\mathcal{Q}_0'$ 得出, 第 4 步基于不等式 (24) 得到, 第 5 步由 $\mathcal{Z}^-\subseteq\mathcal{Q}_1'$ 得出, 第 6 步由每个设施 $i\in\mathcal{Z}^-$ 都满足 $\theta^*(i)-\theta(i)>0$ 这一事实得出. 由 $\sum_{i\in\mathcal{Z}^+}(\theta(i)-\theta^*(i))(|\mathcal{K}_i|-1)>0$ 这一假设、不等式 (27) 和 (28) 可知,

$$\sum_{i\in\mathcal{S}_1}\Delta_1(i)\theta^*(i)\leqslant\sum_{i\in\mathcal{S}_1}\Delta_1(i)\theta(i). \tag{29}$$

不等式 (26) 和 (29) 说明, 引理 4 成立.

令 $\mathcal{J}_0=\{i\in\mathcal{S}_1:\theta^*(i)=0\}$, $\mathcal{J}_1=\{i\in\mathcal{S}_1:\theta^*(i)=1\}$. 如果 $\theta^*(\varrho)=0$, 则令 $\mathcal{K}^\dagger=\emptyset$, 否则, 令 $\mathcal{K}^\dagger=\arg\min_{\mathcal{K}\subseteq\mathcal{K}_\varrho,|\mathcal{K}|=\lceil\theta^*(\varrho)|\mathcal{K}_\varrho|\rceil}\sum_{i'\in\mathcal{K}}\Delta_2(i')$. 本文按照以下方式构造 IP1 的解.

• 如果 $\theta^*(\varrho)=0$, 则令 $\mathcal{S}=\mathcal{J}_1\cup(\bigcup_{i\in\mathcal{J}_0}\mathcal{K}_i)$, 否则, 令 $\mathcal{S}=\mathcal{J}_1\cup\{\varrho\}\cup(\mathcal{K}_\varrho\backslash\mathcal{K}^\dagger)\cup(\bigcup_{i\in\mathcal{J}_0}\mathcal{K}_i)$.

• 对于每个设施 $i\in\mathcal{J}_0$ 以及 $\mathcal{K}_i$ 中的每个设施 $i'$, 令 $h_f(i')=h_2(i')$. 此外, 对于每个用户 $j\in\eta(i')$, 令 $\tau(j)=i'$. 在 $\mathcal{K}_i$ 中的设施上支付的服务安置费用之和为 $\sum_{i'\in\mathcal{K}_i}g(h_2(i'))$, $\eta(\mathcal{K}_i)$ 中用户的连接费用之和为 $\sum_{j\in\eta(\mathcal{K}_i)}d_2(j)$.

• 对于每个设施 $i\in\mathcal{J}_1$, 令 $h_f(i)=\max_{i'\in\mathcal{K}_i}h_2(i')$. 此外, 对于每个用户 $j\in\eta(\mathcal{K}_i)$, 令 $\tau(j)=i$. 在设施 $i$ 上支付的服务安置费用为 $\max_{i'\in\mathcal{K}_i}g(h_2(i'))\leqslant\sum_{i'\in\mathcal{K}_i}g(h_2(i'))$. 此外, 由不等式 (20) 可知, $\eta(\mathcal{K}_i)$ 中用户的连接费用之和不超过 $\sum_{j\in\eta(\mathcal{K}_i)}(2d_2(j)+d_1(j))$.

• 如果 $\theta^*(\varrho)\neq 0$, 则令 $h_f(\varrho)=\max_{i'\in\mathcal{K}^\dagger}h_2(i')$, 对于每个用户 $j\in\eta(\mathcal{K}^\dagger)$, 令 $\tau(j)=\varrho$. 此外, 对于每个设施 $i'\in\mathcal{K}_\varrho\backslash\mathcal{K}^\dagger$, 令 $h_f(i')=h_2(i')$, 对于每个用户 $j\in\eta(i')$, 令 $\tau(j)=i'$. 在集合 $\{\varrho\}\cup(\mathcal{K}_\varrho\backslash\mathcal{K}^\dagger)$

中支付的服务安置费用之和为 $\max_{i'\in\mathcal{K}^\dagger} g(p_2(i')) + \sum_{i'\in\mathcal{K}_\varrho\backslash\mathcal{K}^\dagger} g(p_2(i')) \leqslant \sum_{i'\in\mathcal{K}_\varrho} g(p_2(i'))$. 此外, 不等式 (20) 说明, $\eta(\mathcal{K}_\varrho)$ 中用户的连接费用之和不超过 $\sum_{j\in\eta(\mathcal{K}^\dagger)}(2d_2(j)+d_1(j)) + \sum_{j\in\eta(\mathcal{K}_\varrho\backslash\mathcal{K}^\dagger)} d_2(j)$. 在 $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2\neq\emptyset$ 且 $\varrho\in\mathcal{K}_\varrho\backslash\mathcal{K}^\dagger$ 的情况下, 设施 $\varrho$ 上可能开设了多个不同级别的服务. 在这种情况下, 可以在不改变 $\eta(\mathcal{K}_\varrho)$ 中用户连接方式的前提下取消设施 $\varrho$ 上开设的较低级别服务.

**引理5**　$(\mathcal{S}, h_f, \tau)$ 是 $\mathcal{I}$ 的可行解.

**证明**　由 $\tau_2$ 和 $h_f$ 的定义可知, 每个用户 $j\in\mathcal{C}$ 都满足 $h_c(j)\leqslant h_2(\tau_2(j))\leqslant h_f(\tau(j))$. 下面证明不等式 $|\mathcal{S}|\leqslant k$. 如果 $\theta^*(\varrho)=0$, 则

$$|\mathcal{S}| = \sum_{i\in\mathcal{J}_0}|\mathcal{K}_i| + |\mathcal{J}_1|. \tag{30}$$

由约束条件 (21) 可知, $\sum_{i\in\mathcal{J}_1}|\mathcal{K}_i| - |\mathcal{J}_1| = |\mathcal{S}_2| - k$. 因此,

$$k = |\mathcal{S}_2| - \sum_{i\in\mathcal{J}_1}|\mathcal{K}_i| + |\mathcal{J}_1| = \sum_{i\in\mathcal{J}_0}|\mathcal{K}_i| + |\mathcal{J}_1|.$$

由该等式与等式 (30) 可知 $|\mathcal{S}|=k$.

如果 $\theta^*(\varrho)\neq 0$, 则 $\mathcal{S} = (\bigcup_{i\in\mathcal{J}_0}\mathcal{K}_i)\cup\mathcal{J}_1\cup\{\varrho\}\cup(\mathcal{K}_\varrho\backslash\mathcal{K}^\dagger)$. 因此,

$$|\mathcal{S}| \leqslant \sum_{i\in\mathcal{J}_0}|\mathcal{K}_i| + |\mathcal{J}_1| + 1 + (1-\theta^*(\varrho))|\mathcal{K}_\varrho|. \tag{31}$$

此外, 约束条件 (21) 说明,

$$k = |\mathcal{S}_2| - \sum_{i\in\mathcal{J}_1}|\mathcal{K}_i| + |\mathcal{J}_1| - \theta^*(\varrho)|\mathcal{K}_\varrho| + \theta^*(\varrho) = \sum_{i\in\mathcal{J}_0}|\mathcal{K}_i| + |\mathcal{J}_1| + (1-\theta^*(\varrho))|\mathcal{K}_\varrho| + \theta^*(\varrho).$$

由该等式与不等式 (31) 可知, $|\mathcal{S}|\leqslant k+1-\theta^*(\varrho)$. 因为 $\theta^*(\varrho)$ 是一个分数变量且 $|\mathcal{S}|$ 是一个整数, 所以 $|\mathcal{S}|\leqslant k$.

由上述论证可知, $(\mathcal{S}, h_f, \tau)$ 中支付的用户连接费用不超过 $\sum_{j\in\eta(\bigcup_{i\in\mathcal{J}_1}\mathcal{K}_i)\cup\eta(\mathcal{K}^\dagger)}(2d_2(j)+d_1(j)) + \sum_{j\in\eta(\bigcup_{i\in\mathcal{J}_0}\mathcal{K}_i)\cup\eta(\mathcal{K}_\varrho\backslash\mathcal{K}^\dagger)} d_2(j)$. $\Delta_1(i)$ 和 $\Delta_2(i)$ 的定义说明, 该费用不超过 $C(\mathcal{H}_2) + \sum_{i\in\mathcal{J}_1}\Delta_1(i) + \sum_{i\in\mathcal{K}^\dagger}\Delta_2(i)$. $(\mathcal{S}, h_f, \tau)$ 的服务安置费用不超过 $\sum_{i\in\mathcal{S}_1}\sum_{i'\in\mathcal{K}_i} g(h_2(i')) = \sum_{i'\in\mathcal{S}_2} g(h_2(i')) \leqslant P(\mathcal{H}_2)$. 由此可知,

$$\sum_{j\in\mathcal{C}} d(j,\tau(j)) \leqslant C(\mathcal{H}_2) + \sum_{i\in\mathcal{J}_1}\Delta_1(i) + \sum_{i\in\mathcal{K}^\dagger}\Delta_2(i), \tag{32}$$

且

$$\sum_{i\in\mathcal{S}} g(h_f(i)) \leqslant P(\mathcal{H}_2). \tag{33}$$

此外, 由 $\mathcal{S}\subset\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2$ 这一事实可知,

$$\sum_{i\in\mathcal{S}} f(i) \leqslant F(\mathcal{H}_1) + F(\mathcal{H}_2). \tag{34}$$

下面分析 $(\mathcal{S}, h_f, \tau)$ 与 $\mathcal{H}_2$ 之间用户连接费用的差值.

**引理6**　$\sum_{j\in\mathcal{C}} d(j,\tau(j)) - C(\mathcal{H}_2) < a\frac{2+a}{1+a}(C(\mathcal{H}_1)+C(\mathcal{H}_2))$.

**证明** 令 $\mathrm{opt}^\dagger=\sum_{i\in\mathcal{S}_1}\theta^*(i)\Delta_1(i)$ 表示 $\theta^*$ 对于 LP3 的费用. 可以得出

$$\frac{|\mathcal{S}_2|-k}{|\mathcal{S}_2|-|\mathcal{S}_1|}\sum_{i\in\mathcal{S}_1}(|\mathcal{K}_i|-1)=\frac{|\mathcal{S}_2|-k}{|\mathcal{S}_2|-|\mathcal{S}_1|}(|\mathcal{S}_2|-|\mathcal{S}_1|)=|\mathcal{S}_2|-k.$$

由此可知, 令每个设施 $i\in\mathcal{S}_1$ 对应的变量 $\theta(i)$ 都取值为 $\frac{|\mathcal{S}_2|-k}{|\mathcal{S}_2|-|\mathcal{S}_1|}$ 的解是 LP3 的可行解, 其费用为

$$\frac{|\mathcal{S}_2|-k}{|\mathcal{S}_2|-|\mathcal{S}_1|}\sum_{i\in\mathcal{S}_1}\Delta_1(i)\leqslant\frac{k_2-k}{k_2-k_1}\sum_{i\in\mathcal{S}_1}\Delta_1(i)=a\sum_{i\in\mathcal{S}_1}\Delta_1(i)<a(C(\mathcal{H}_1)+C(\mathcal{H}_2)),$$

其中, 第 1 步由不等式 $|\mathcal{S}_1|\leqslant k_1$ 和 $|\mathcal{S}_2|\leqslant k_2$ 得出, 第 3 步基于 $\Delta_1(i)$ 的定义得出. 由引理 4 可知, 令每个变量都取值为 $\frac{|\mathcal{S}_2|-k}{|\mathcal{S}_2|-|\mathcal{S}_1|}$ 的解对应的费用不小于 $\theta^*$ 的费用. 因此,

$$\mathrm{opt}^\dagger<a(C(\mathcal{H}_1)+C(\mathcal{H}_2)). \tag{35}$$

如果可以证明

$$\sum_{i\in\mathcal{J}_1}\Delta_1(i)+\sum_{i\in\mathcal{K}^\dagger}\Delta_2(i)\leqslant\mathrm{opt}^\dagger+\frac{a}{1+a}(C(\mathcal{H}_1)+C(\mathcal{H}_2)), \tag{36}$$

则由不等式 (32) 和 (35) 可知, $\sum_{j\in\mathcal{C}}d(j,\tau(j))-C(\mathcal{H}_2)<a\frac{2+a}{1+a}(C(\mathcal{H}_1)+C(\mathcal{H}_2))$. 该不等式说明引理 6 成立.

下面证明不等式 (36). 如果 $\theta^*(\varrho)=0$, 则 $\mathcal{K}^\dagger=\emptyset$, 且 $\sum_{i\in\mathcal{J}_1}\Delta_1(i)+\sum_{i\in\mathcal{K}^\dagger}\Delta_2(i)=\sum_{i\in\mathcal{J}_1}\Delta_1(i)$. 由 $\mathcal{J}_1$ 的定义可知 $\sum_{i\in\mathcal{J}_1}\Delta_1(i)=\mathrm{opt}^\dagger$. 因此, 不等式 (36) 在 $\theta^*(\varrho)=0$ 的情况下成立. 如果 $\theta^*(\varrho)\neq0$, 则由 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 的定义可知 $\mathrm{opt}^\dagger=\sum_{i\in\mathcal{J}_1}\Delta_1(i)+\theta^*(\varrho)\Delta_1(\varrho)$. 该等式说明

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathcal{J}_1}\Delta_1(i)+\sum_{i\in\mathcal{K}^\dagger}\Delta_2(i)-\mathrm{opt}^\dagger&=\sum_{i\in\mathcal{K}^\dagger}\Delta_2(i)-\theta^*(\varrho)\Delta_1(\varrho)\leqslant\frac{\lceil\theta^*(\varrho)|\mathcal{K}_\varrho|\rceil}{|\mathcal{K}_\varrho|}\Delta_1(\varrho)-\theta^*(\varrho)\Delta_1(\varrho)\\&=\frac{\lceil\theta^*(\varrho)|\mathcal{K}_\varrho|\rceil-\theta^*(\varrho)|\mathcal{K}_\varrho|}{|\mathcal{K}_\varrho|}\Delta_1(\varrho)<\frac{1}{|\mathcal{K}_\varrho|}\Delta_1(\varrho),\end{aligned} \tag{37}$$

其中, 第 2 步由 $\mathcal{K}^\dagger=\arg\min_{\mathcal{K}\subseteq\mathcal{K}_\varrho,|\mathcal{K}|=\lceil\theta^*(\varrho)|\mathcal{K}_\varrho|\rceil}\sum_{i'\in\mathcal{K}}\Delta_2(i')$ 和 $\Delta_1(\varrho)=\sum_{i'\in\mathcal{K}_\varrho}\Delta_2(i')$ 得出. 本文分析以下两种不同的情况: (iii) $\frac{1}{|\mathcal{K}_\varrho|}<\frac{a}{1+a}$; (iv) $\frac{1}{|\mathcal{K}_\varrho|}\geqslant\frac{a}{1+a}$.

首先分析情况 (iii). 可以在该情况中得出

$$\frac{1}{|\mathcal{K}_\varrho|}\Delta_1(\varrho)<\frac{a}{1+a}\Delta_1(\varrho)<\frac{a}{1+a}(C(\mathcal{H}_1)+C(\mathcal{H}_2)), \tag{38}$$

其中, 第 2 步基于 $\Delta_1(\varrho)$ 的定义得出. 由不等式 (37) 和 (38) 可知,

$$\sum_{i\in\mathcal{J}_1}\Delta_1(i)+\sum_{i\in\mathcal{K}^\dagger}\Delta_2(i)<\mathrm{opt}^\dagger+\frac{1}{|\mathcal{K}_\varrho|}\Delta_1(\varrho)<\mathrm{opt}^\dagger+\frac{a}{1+a}(C(\mathcal{H}_1)+C(\mathcal{H}_2)).$$

因此, 不等式 (36) 在情况 (iii) 中成立.

下面分析情况 (iv). 由 $\varrho\in\mathcal{S}^\dagger$ 可知 $|\mathcal{K}_\varrho|>1$. 因此,

$$\frac{1}{|\mathcal{K}_\varrho|}\Delta_1(\varrho)=\left(1-\frac{1}{|\mathcal{K}_\varrho|}\right)\frac{1}{|\mathcal{K}_\varrho|-1}\Delta_1(\varrho)\leqslant\frac{1}{(1+a)(|\mathcal{K}_\varrho|-1)}\Delta_1(\varrho), \tag{39}$$

其中, 第 2 步由情况 (iv) 中的假设条件得出. 由 $\theta^*(\varrho)$ 是满足 $|\mathcal{K}_\varrho| > 1$ 的分数变量这一事实可知, $\theta^*(\varrho)(|\mathcal{K}_\varrho|-1) > 0$. 约束条件 (21) 说明 $\theta^*(\varrho)(|\mathcal{K}_\varrho|-1) = |\mathcal{S}_2| - k - \sum_{i\in\mathcal{J}_1}(|\mathcal{K}_i|-1)$. 该等式说明 $\theta^*(\varrho)(|\mathcal{K}_\varrho|-1)$ 是一个整数, 因此 $\theta^*(\varrho)(|\mathcal{K}_\varrho|-1) \geqslant 1$. 由该不等式可知,

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathcal{J}_1}\Delta_1(i) + \sum_{i\in\mathcal{K}^\dagger}\Delta_2(i) - \mathrm{opt}^\dagger &< \frac{1}{|\mathcal{K}_\varrho|}\Delta_1(\varrho) \leqslant \frac{1}{(1+a)(|\mathcal{K}_\varrho|-1)}\Delta_1(\varrho)\\ &\leqslant \frac{1}{1+a}\theta^*(\varrho)\Delta_1(\varrho) \leqslant \frac{1}{1+a}\mathrm{opt}^\dagger < \frac{a}{1+a}(C(\mathcal{H}_1)+C(\mathcal{H}_2)),\end{aligned}$$

其中, 第 1 步基于不等式 (37) 得出, 第 2 步由不等式 (39) 得出, 第 3 步基于 $\theta_t^*(|\mathcal{K}_t|-1) \geqslant 1$ 得出, 第 5 步由不等式 (35) 得出. 因此, 不等式 (36) 在情况 (iv) 中成立.

下面基于引理 6 分析 $(\mathcal{S}, h_f, \tau)$ 的近似比.

**引理7**　不等式 $\sum_{j\in\mathcal{C}} d(j,\tau(j)) + \sum_{i\in\mathcal{S}}(f(i)+g(h_f(i))) < \max\{\frac{1}{3\sigma_1}, \frac{1}{3(1-\sigma_2)}, \frac{2+\sigma_2}{1+\sigma_2}, \frac{\sigma_2^2+3\sigma_2+1}{1-\sigma_2^2}\}(3+O(\varepsilon))\mathrm{opt}$ 在 $a\in(\sigma_1,\sigma_2)$ 时成立.

**证明**　由引理 6 可知,

$$\frac{\sum_{j\in\mathcal{C}} d(j,\tau(j))}{aC(\mathcal{H}_1)+bC(\mathcal{H}_2)} < \frac{a(2+a)C(\mathcal{H}_1)+(a^2+3a+1)C(\mathcal{H}_2)}{(1+a)(aC(\mathcal{H}_1)+(1-a)C(\mathcal{H}_2))}. \tag{40}$$

不等式 (33) 说明

$$\frac{\sum_{i\in\mathcal{S}} g(h_f(i))}{aP(\mathcal{H}_1)+bP(\mathcal{H}_2)} \leqslant \frac{P(\mathcal{H}_2)}{aP(\mathcal{H}_1)+(1-a)P(\mathcal{H}_2)}. \tag{41}$$

此外, 不等式 (34) 说明

$$\frac{\sum_{i\in\mathcal{S}} f(i)}{aF(\mathcal{H}_1)+bF(\mathcal{H}_2)} \leqslant \frac{F(\mathcal{H}_1)+F(\mathcal{H}_2)}{aP(\mathcal{H}_1)+(1-a)P(\mathcal{H}_2)}. \tag{42}$$

由不等式 (40)~(42) 和 $v_f$ 的定义可知,

$$\frac{1}{v_f}\sum_{j\in\mathcal{C}} d(j,\tau(j)) + \sum_{i\in\mathcal{S}}(f(i)+g(h_f(i))) \leqslant \max\left\{\frac{1}{3a}, \frac{1}{3(1-a)}, \frac{2+a}{1+a}, \frac{a^2+3a+1}{1-a^2}\right\}.$$

由该不等式与 $a\in(\sigma_1,\sigma_2)$ 这一假设可知,

$$\frac{1}{v_f}\sum_{j\in\mathcal{C}} d(j,\tau(j)) + \sum_{i\in\mathcal{S}}(f(i)+g(h_f(i))) \leqslant \max\left\{\frac{1}{3\sigma_1}, \frac{1}{3(1-\sigma_2)}, \frac{2+\sigma_1}{1+\sigma_1}, \frac{\sigma_2^2+3\sigma_2+1}{1-\sigma_2^2}\right\}.$$

由该不等式与引理 2 可知, 引理 7 成立.

不等式 (12)、引理 3 和 7 说明, 给定满足 $\sigma_1 \in (0,\sigma_2)$ 和 $\sigma_2 \in (\sigma_1, 1)$ 的两个实数 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$, 本文为 $\mathcal{I}$ 提出了近似比为 $\max\{\frac{1}{\sigma_2}, 2, \frac{1+2\sigma_1}{1-\sigma_1}, \frac{1}{3\sigma_1}, \frac{1}{3(1-\sigma_2)}, \frac{2+\sigma_1}{1+\sigma_1}, \frac{\sigma_2^2+3\sigma_2+1}{1-\sigma_2^2}\}(3+O(\varepsilon))$ 的近似算法. 当 $\sigma_1 \in [\frac{\sigma_2}{3}, \frac{1-\sigma_2}{1+2\sigma_2}]$, $\sigma_2 \approx 0.377203$ 时, 该近似比达到不超过 $7.9533+O(\varepsilon)$ 的最小值.

## 5　总结

本文基于拉格朗日松弛技术和一个新的确定化舍入方法为优先 $k$- 设施选址问题提出了多项式时间的 $(7.9533+\varepsilon)$- 近似算法. 此前, 只有在每个设施的开设费用都相等的情况下, 存在关于优先 $k$- 设施选址问题的常数近似算法.

## 参考文献


1 Guha S, Khuller S. Greedy strikes back: improved facility location algorithms. J Algorithms, 1999, 31: 228–248

2 Jain K, Vazirani V V. Approximation algorithms for metric facility location and $k$-median problems using the primal-dual schema and Lagrangian relaxation. J ACM, 2001, 48: 274–296

3 Jain K, Mahdian M, Markakis E, et al. Greedy facility location algorithms analyzed using dual fitting with factor-revealing LP. J ACM, 2003, 50: 795–824

4 Friggstad Z, Khodamoradi K, Rezapour M, et al. Approximation schemes for clustering with outliers. ACM Trans Algorithms, 2019, 15: 1–26

5 Arya V, Garg N, Khandekar R, et al. Local search heuristics for $k$-median and facility location problems. SIAM J Comput, 2004, 33: 544–562

6 Li S. A 1.488 approximation algorithm for the uncapacitated facility location problem. Inf Computation, 2013, 222: 45–58

7 Shmoys D B, Tardos E, Aardal K. Approximation algorithms for facility location problems. In: Proceedings of the 29th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC), 1997. 265–274

8 Ravi R, Sinha A. Multicommodity facility location. In: Proceedings of the 15th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 2004. 342–349

9 Hayrapetyan A, Swamy C, Tardos E. Network design for information networks. In: Proceedings of the 16th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 2005. 933–942

10 Kamal Z E H, Al-Fuqaha A I, Gupta A. Using Lagrangean relaxation for service location planning with QoS constraints in large-scale networks. In: Proceedings of the 14th IEEE International Conference on Communications (ICC), 2008. 424–428

11 Baev I D, Rajaraman R, Swamy C. Approximation algorithms for data placement problems. SIAM J Comput, 2008, 38: 1411–1429

12 Ahmadi A, Daliri M, Goharshady A K, et al. Efficient approximations for cache-conscious data placement. In: Proceedings of the 43rd ACM SIGPLAN International Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI), 2022. 857–871

13 Mahdian M. Facility location and the analysis of algorithms through factor-revealing problems. Dissertation for Ph.D. Degree. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2004

14 Li G D, Wang Z, Wu C C. Approximation algorithms for the stochastic priority facility location problem. Optimization, 2013, 62: 919–928

15 Wang F, Xu D C, Wu C C. Approximation algorithms for the priority facility location problem with penalties. J Syst Sci Complex, 2015, 28: 1102–1114

16 Wang Y, Wang F M, Xu D C, et al. Approximation algorithms for the priority facility location problem with submodular penalties. Oper Res Trans, 2015, 19: 1–14 [王颖, 王凤敏, 徐大川, 等. 带次模惩罚的优先设施选址问题的近似算法. 运筹学学报, 2015, 19: 1–14]

17 Kumar A, Sabharwal Y. The priority $k$-median problem. In: Proceedings of the 27th International Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science (FSTTCS), 2007. 71–83

18 Feng Q L, Zhang Z, Huang Z Y, et al. A unified framework of FPT approximation algorithms for clustering problems. In: Proceedings of the 31st International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC), 2020. 1–17

19 Zhang Z, Huang Z Y, Tian Z P, et al. On the budgeted priority p-median problem in high-dimensional Euclidean spaces. J Oper Res Soc China, 2024. doi: 10.1007/s40305-023-00533-w

20 Zhang Z, Feng Q L, Xu J H, et al. An approximation algorithm for k-median with priorities. Sci China Inf Sci, 2021, 64: 150104

21 Xu Y C, Hao C L, Wu C C, et al. On stochastic $k$-facility location. In: Proceedings of the 15th International Conference on Algorithmic Aspects in Information and Management (AAIM), 2021. 47–56

22 Han L, Xu D C, Du D L, et al. A local search approximation algorithm for the uniform capacitated $k$-facility location problem. J Comb Optim, 2018, 35: 409–423

23 Jiang Y J, Xu D C, Du D L, et al. An approximation algorithm for soft capacitated k-facility location problem. J Comb Optim, 2018, 35: 493–511

24 Han L, Hao C L, Wu C C, et al. Approximation algorithms for the lower-bounded $k$-median and its generalizations.

In: Proceedings of the 26th International Conference on Computing and Combinatorics (COCOON), 2020. 627–639
25 Wang Y S, Xu D C, Du D L, et al. An approximation algorithm for k-facility location problem with linear penalties using local search scheme. J Comb Optim, 2018, 36: 264–279
26 Li S, Svensson O. Approximating $k$-median via pseudo-approximation. SIAM J Comput, 2016, 45: 530–547

# On approximation algorithms for the priority *k*-facility location problem

Zhen ZHANG[1,2], Qilong FENG[3,2*], Xuesong XU[1,2], Han PENG[1,2*], Limei LIU[1,2] & Feng SHI[3,2]

1. *School of Advanced Interdisciplinary Studies, Hunan University of Technology and Business, Changsha* 410205*, China*;
2. *Xiangjiang Laboratory, Changsha* 410205*, China*;
3. *School of Computer Science, Central South University, Changsha* 410083*, China*
* Corresponding author. E-mail: csufeng@mail.csu.edu.cn, Han.Peng@hutb.edu.cn

**Abstract** Given a set of facilities and a set of clients associated with priorities in a metric space, the priority $k$-facility location problem aims to open a set of facilities, install services at the opened facilities, and connect each client to an opened facility where a service with the same or a higher priority is installed, such that the sum of the facility-opening, service-installation, and client-connection costs is minimized. In this paper we solve this problem using the technique of Lagrangian relaxation. We propose a deterministic rounding approach to deal with the priority constraints posed on instances of the problem, based on which a $(7.9533 + \varepsilon)$-approximation algorithm is given. This is the first constant-factor approximation guarantee for the problem.

**Keywords** facility location, approximation algorithms, Lagrangian relaxation