



# 变工况下不确定动态突变四旋翼飞行器系统的自适应湍流风扰动抑制技术

张雨杰, 文利燕\*, 姜斌, 齐瑞云

南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016

\* 通信作者. E-mail: wenliyan\_2017@nuaa.edu.cn

收稿日期: 2023-08-28; 修回日期: 2023-11-06; 接受日期: 2023-12-04; 网络出版日期: 2024-07-09

国家自然科学基金(批准号: 62173179, 62020106003)、江苏省自然科学基金项目(批准号: BK20222012)和民航飞机健康监测与智能维护重点实验室开放课题(批准号: XCA22036)资助项目

**摘要** 本文考虑四旋翼飞行过程中湍流风扰动的影响, 以及因变工况飞行而导致的不确定动态突变问题, 提出了基于输入-扰动双补偿器设计的自适应湍流风扰动抑制方案, 保证了四旋翼飞行器系统的稳定和输出渐近跟踪性能. 首先对风场环境下的四旋翼进行建模, 研究各不同工况下的动态特性, 并分析研究了四旋翼飞行器变工况飞行时的动态特性突变的表现形式以及所带来的控制难题. 进而设计了一种基于输入-扰动双补偿器的系统重构方案, 实现了动态系统重构, 解决了关联矩阵突变为非对角型时难以解耦控制, 以及相对阶结构突变时控制器结构发生突变的问题. 基于重构后的系统, 设计自适应的湍流风扰动抑制方案, 保证四旋翼飞行器的稳定、扰动抑制和渐近输出跟踪性能. 最后, 对所设计的控制器进行稳定性证明, 并通过仿真验证所提出控制算法的有效性.

**关键词** 四旋翼, 风扰动抑制, 动态特性突变, 系统重构, 自适应控制

## 1 引言

四旋翼具有体积小、结构简单、灵活性强等特点, 现已成为国内外研究热点, 但其动力学模型存在强非线性、强耦合、参数不确定等问题, 给四旋翼飞行器的控制设计带来诸多挑战, 特别是湍流风扰动环境下四旋翼飞行器的控制问题. 目前, 四旋翼飞行器的控制方法有很多, 其中 PID 控制算法因结构简单, 易于实现的特点, 在工程中应用最为广泛, 但其对于非线性系统控制效果欠佳, 且抗干扰能力十分有限, 当被控对象所处环境变化时, 需改变 PID 增益<sup>[1~3]</sup>. 文献 [4] 将 PID 与智能控制算法相结合, 对常规 PID 控制中比例、积分、微分参数对应的权重系数进行自动调整, 使其具有自学习和自适应能力. 此外, 在 PID 控制的基础上, 研究基于扩张观测器的自抗扰控制技术, 并将其应用于四旋翼的

**引用格式:** 张雨杰, 文利燕, 姜斌, 等. 变工况下不确定动态突变四旋翼飞行器系统的自适应湍流风扰动抑制技术. 中国科学: 信息科学, 2024, 54: 1730–1751, doi: 10.1360/SSI-2023-0251

Zhang Y J, Wen L Y, Jiang B, et al. Adaptive wind disturbance rejection technique of a quadrotor with uncertain dynamic mutations under varying operating conditions (in Chinese). Sci Sin Inform, 2024, 54: 1730–1751, doi: 10.1360/SSI-2023-0251

抗扰动控制中<sup>[5~7]</sup>. 文献[8]研究线性自抗扰控制技术, 简化了常规自抗扰控制器的结构, 减少了需调节的参数数量, 提高了其在实际工程中的实用性. 基于干扰观测器的控制方法也是四旋翼抗干扰控制的一个重要分支<sup>[9~12]</sup>, 文献[10]提出了基于LMI算法的全维与降维扰动观测器的设计方法, 通过将扰动观测器与常规控制律相结合达到扰动抑制的目的. 文献[13,14]基于强化学习理论设计前馈补偿器并应用于四旋翼的抗扰动控制中. 非线性控制方法能够更好地反映出系统的非线性特性, 而且一些非线性控制方法具有处理系统不确定性与干扰的能力, 可以提高系统的鲁棒性和稳定性, 在四旋翼控制中, 常用的非线性控制方法有: 反馈线性化<sup>[15~17]</sup>、反步控制<sup>[18~21]</sup>、滑模控制<sup>[22~27]</sup>等. 反馈线性化方法对系统模型精度要求较高, 易受参数变化影响, 鲁棒性较差, 而滑模控制能够使被控系统沿着滑模面运动, 通过选取适当的滑模面可以减小扰动的影响, 提升系统的鲁棒性, 因此为了实现四旋翼在湍流风扰动环境下的控制, 有许多研究将非线性控制方法进行组合, 或采取“鲁棒+非线性控制方法”、“自适应+非线性控制方法”的策略. 文献[17]设计了一种直接自适应反馈线性化控制器, 自适应策略的加入使得四旋翼在存在扰动或参数误差的情况下能更准确地跟踪控制. 文献[24,25]设计了鲁棒积分滑模控制器, 在系统存在输入乘性不确定性和未知、非线性扰动时实现了姿态渐近跟踪. 文献[27]设计了基于事件触发的鲁棒自适应滑模控制器, 解决了存在风扰动环境下多无人机交互与稳定控制问题. 文献[28~31]基于线性系统设计了自适应扰动补偿器对湍流风扰动进行补偿, 但其仅适用于单种工况下满足特定关联矩阵与相对阶结构条件下的情况, 并没有考虑动态突变的影响. 然而在四旋翼实际飞行过程中, 负载、飞行工况的改变使得系统的模型会发生突变, 参数变化的同时, 可能使系统的动态特性也发生突变, 而某些动态特性(如关联矩阵、高频增益矩阵、相对阶等)会对自适应控制器的设计带来很大的影响, 如当关联矩阵由对角型突变为非对角型时, 系统难以进行解耦控制, 原来的控制律将很难达到理想的控制效果. 此外, 即使解决了非对角关联矩阵情况下的控制问题, 通常也需要针对不同动态特性下的系统分别设计不同的自适应控制器, 无法保持控制器结构的一致性. 文献[32,33]针对动态特性突变问题, 提出了一种基于输入补偿器的方案, 使得补偿后的系统具有一致的动态特性, 进而设计统一的自适应控制器实现对所有常见工况下的控制, 但文中所考虑的模型过于理想化, 忽略了外部风扰动的影响. 目前基于四旋翼线性模型的模型参考自适应控制大多考虑动态特性不会突变的情形, 而对于系统结构特性发生不确定突变的四旋翼飞行器的风扰动抑制鲜有研究. 本文的主要创新与贡献如下所述.

(1) 建立风扰动环境下的四旋翼飞行器模型, 包括非线性和线性模型; 基于此模型, 深入分析了四旋翼飞行器系统因飞行工况改变而导致的系统结构的动态突变性, 含传递函数矩阵、关联矩阵、高频增益矩阵、相对阶等突变.

(2) 针对四旋翼飞行器因飞行工况改变而导致系统结构发生突变的问题, 采用输入-扰动双补偿器技术, 实现了动态系统重构, 其不仅解决了当关联矩阵为非对角型时难以进行解耦控制的问题, 而且使得重构后的系统在各种飞行工况下具有一致的动态结构特性, 从而使得四旋翼飞行器可以采用统一的控制器形式实现所有工况下的稳定控制.

(3) 针对输入-扰动双补偿后的飞行器系统, 设计了基于模型参考自适应控制的扰动抑制方法, 实现了闭环系统稳定, 风扰动抑制和渐近输出跟踪性能, 解决了变工况飞行四旋翼飞行器系统的动态突变问题; 并基于四旋翼飞行器模型, 开展了系统性的仿真研究, 证明了所提出方法的有效性.

本文后续内容安排如下: 第2节建立了风扰动环境下的四旋翼模型; 第3节分析了典型飞行工况下四旋翼的动态特性; 第4节设计了输入补偿器并对系统进行重构; 第5节进行了自适应跟踪控制器与扰动补偿器控制设计并给出了稳定性证明; 第6节进行了控制器仿真分析; 第7节对全文进行了总结.

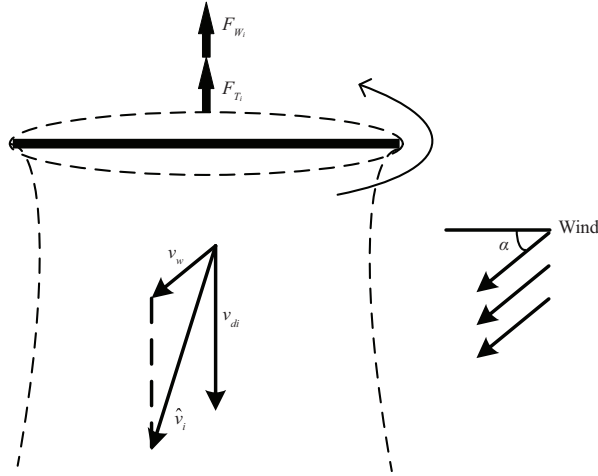


图 1 风场作用下旋翼的空气动力分析

Figure 1 Aerodynamic analysis of rotor under wind field

## 2 湍流风扰动下四旋翼飞行器模型

本节, 建立湍流风扰动作用下四旋翼飞行器的非线性模型和线性模型. 四旋翼由于螺旋桨的旋转使得叶面上下空气流速不同, 产生压强差, 从而为四旋翼提供了升力. 在有风的环境中, 风场会影响飞行器的相对来流速度, 改变旋翼上下叶面的压强差, 因此会对四旋翼的升力产生影响. 每个螺旋桨产生的风场力  $F_{W_i}$  与升力  $F_{T_i}$  方向相同, 均垂直于机体平面<sup>[34]</sup>, 如图 1 所示.

**动力学模型.** 在有风条件下, 可以将风扰动的影响与作用在四旋翼上的其他力隔离开来<sup>[35]</sup>, 运用牛顿-欧拉方程 (Newton-Euler equations) 对四旋翼进行平动与转动分析, 得到四旋翼的动力学模型:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_E \\ \ddot{y}_E \\ \ddot{z}_E \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \frac{F_{T_E}}{m} - \frac{c_t}{m} \dot{x}_E \\ (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \frac{F_{T_E}}{m} - \frac{c_t}{m} \dot{y}_E \\ \cos \phi \cos \theta \frac{F_{T_E}}{m} - g - \frac{c_t}{m} \dot{z}_E \\ qr \left( \frac{J_y - J_z}{J_x} \right) - \frac{1}{J_x} c_r p + \frac{T_{B_x}}{J_x} \\ pr \left( \frac{J_z - J_x}{J_y} \right) - \frac{1}{J_y} c_r q + \frac{T_{B_y}}{J_y} \\ pq \left( \frac{J_x - J_y}{J_z} \right) - \frac{1}{J_z} c_r r + \frac{T_{B_z}}{J_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中,  $m$  为四旋翼的质量,  $g$  为重力加速度;  $x_E, y_E, z_E$  为四旋翼在惯性坐标系下的位置;  $\phi, \theta, \psi$  分别为四旋翼的横滚角、俯仰角、偏航角,  $p, q, r$  分别为对应的角速度;  $c_t, c_r$  分别为平移、转动阻力系数;  $J_x, J_y, J_z$  分别为绕  $x, y, z$  轴旋转的转动惯量;  $F_{T_E} = \sum_{i=1}^4 F_{T_i}$  为四旋翼螺旋桨产生的升力,  $F_{T_i}$  对应着四旋翼第  $i$  个螺旋桨的作用力;  $T_{B_x}, T_{B_y}, T_{B_z}$  分别为横滚力矩、俯仰力矩、偏航力矩; 风对四旋翼的附加影响为

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_E^B [0, 0, F_{W_E}]^T / m \\ b(F_{W_2} - F_{W_4}) / J_x \\ b(-F_{W_1} + F_{W_3}) / J_y \\ c_m(-F_{W_1} + F_{W_2} - F_{W_3} + F_{W_4}) / J_z \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$F_{W_E} = \sum_{i=1}^4 F_{W_i}$  为风对四旋翼产生的升力,  $F_{W_i}$  对应着四旋翼第  $i$  个螺旋桨的作用力;  $b$  为螺旋桨到旋翼中心的力臂长度;  $R_E^B$  为坐标系旋转矩阵.

**运动学模型.** 当姿态角较小时, 可将角速度近似为欧拉角的一阶导数. 实际上描述四旋翼的角速度与欧拉角的一阶导数的运动学方程为

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p + q \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta, \\ \dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi, \\ \dot{\psi} = \frac{1}{\cos \theta} (q \sin \phi + r \cos \phi). \end{cases} \quad (3)$$

**四旋翼飞行器的非线性模型.** 选取系统状态向量为  $x_p = [x_E, y_E, z_E, \dot{x}_E, \dot{y}_E, \dot{z}_E, \phi, \theta, \psi, p, q, r]^T$ ; 系统的输出选取为四旋翼在惯性坐标系下的位置与偏航角:  $y_p = [z_E, y_E, x_E, \psi]^T$ ; 系统的 4 个输入信号选为四旋翼由于螺旋桨旋转所受到的升力、横滚力矩、俯仰力矩、偏航力矩:  $u_p(t) = [U_1(t), U_2(t), U_3(t), U_4(t)]^T = [F_{T_E}, T_{B_x}, T_{B_y}, T_{B_z}]^T$ ; 类似地, 扰动向量选取为  $d(t) = [d_1(t), d_2(t), d_3(t), d_4(t)]^T = [F_{W_E}, T_{W_x}, T_{W_y}, T_{W_z}]^T$ , 则扰动向量是随时间变化的函数, 其大小与风速  $v_w$ 、风与旋翼平面夹角  $\alpha$  相关. 将四旋翼的非线性模型 (1)~(3) 写为一般形式为

$$\dot{x}_p(t) = f(x_p(t), u_p(t), d(t), t). \quad (4)$$

**模型线性化.** 基于所得到的四旋翼非线性数学模型, 通过选取平衡点  $(x_o, u_o, d_o)$ , 可实现非线性模型的线性化<sup>[36]</sup>. 在平衡点  $(x_o, u_o, d_o)$  处进行线性化可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) = & f(x_o, u_o, d_o) + \partial f / \partial x_p|_{(x_o, u_o, d_o)} (x_p(t) - x_o) \\ & + \partial f / \partial u_p|_{(x_o, u_o, d_o)} (u_p(t) - u_o) + \partial f / \partial d|_{(x_o, u_o, d_o)} (d(t) - d_o) + \text{H.O.T.} \end{aligned} \quad (5)$$

其中 H.O.T 为高阶微分项 (其可略去). 重新选定系统的状态与输入, 令  $\Delta x_p(t) = x_p(t) - x_o$ ,  $\Delta u_p(t) = u_p(t) - u_o$ ,  $\Delta d(t) = d(t) - d_o$ , 有  $\dot{x}_p(t) = \Delta \dot{x}_p(t)$ , 则线性化后的系统表示为

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_p(t) = A_p(t) \Delta x_p(t) + B_p(t) \Delta u_p(t) + B_{d_p}(t) \Delta d(t), \\ \Delta y_p(t) = C_p \Delta x_p(t), \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $A_p(t) \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ ,  $B_p(t) \in \mathbb{R}^{12 \times 4}$ ,  $B_{d_p}(t) \in \mathbb{R}^{12 \times 4}$  为系统参数矩阵,  $C_p \in \mathbb{R}^{4 \times 12}$  为系统输出矩阵, 可分别描述为

$$A_p = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & -c_t I_{3 \times 3} & A_t & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & A_s & A_w \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & A_r \end{bmatrix}, \quad B_p = B_{d_p} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 3} \\ B_t & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & B_r \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} C_t & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & C_r & 0_{1 \times 3} \end{bmatrix}.$$

且子函数矩阵  $A_t, A_r, A_s, A_w, B_t, B_r$  直接与平衡点状态有关.

**变工况飞行的四旋翼系统模型.** 当四旋翼飞行器在不确定风场环境下进行变工况飞行时, 比如, 悬停、沿  $z_E$  轴垂直升降、沿  $x_E$  轴水平运动、沿  $y_E$  轴水平运动等, 系统平衡状态的选择是不同的. 这意味着当四旋翼在变工况飞行时, 其系统模型的动态函数矩阵会发生改变, 具体形式因篇幅原因将不给出. 下面, 将基于每种工况下的四旋翼线性模型, 具体分析不确定风场环境下四旋翼飞行器系统模型的动态结构特性.

### 3 变工况下四旋翼飞行器的动态结构特性分析

本节针对不确定风场环境下变工况飞行的四旋翼飞行器, 分析系统的动态结构特性, 如, 关联矩阵结构、高频增益矩阵、相对阶结构等, 主要考虑 4 种典型工况飞行: 悬停、沿  $z_E$  轴垂直升降、沿  $x_E$  轴水平运动、沿  $y_E$  轴水平运动.

#### 3.1 技术背景

本小节针对一般的多变量 LTI 系统, 给出相对阶、关联矩阵、高频增益矩阵的定义. 考虑如下多变量 LTI 系统:

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t) + B_{d_p} d(t), \quad y_p(t) = C_p x_p(t), \quad (7)$$

其中  $u_p, y_p \in \mathbb{R}^M$  为系统的输入和输出信号,  $x_p \in \mathbb{R}^n$  为系统状态向量,  $d \in \mathbb{R}^p$  为外部扰动信号.

**控制相对阶.** 与一般仿射非线性系统控制相对阶的定义一致<sup>[37]</sup>, 针对控制子系统  $(C_p, A_p, B_p)$ , 定义控制相对阶  $\rho_i, i = 1, 2, \dots, M$  需满足两个条件, 即 (i)  $C_{pi} A_p^k B_p = 0, k = 1, 2, \dots, \rho_i - 2, C_{pi} A_p^{\rho_i - 1} B_p \neq 0$ , 其中  $C_{pi}$  为  $C_p$  的第  $i$  行, 且 (ii) 控制增益矩阵  $K_s$  为非奇异的, 其中控制增益矩阵  $K_s$  为

$$K_s = \begin{bmatrix} C_{p1} A_p^{\rho_1 - 1} B_p \\ \vdots \\ C_{pM} A_p^{\rho_M - 1} B_p \end{bmatrix}. \quad (8)$$

**扰动相对阶.** 与控制相对阶的定义不同, 针对扰动子系统  $(C_p, A_p, B_{d_p})$ , 定义扰动相对阶  $\gamma_i, i = 1, 2, \dots, M$  需满足条件 (i)  $C_{pi} A_p^k B_{d_p} = 0, k = 1, 2, \dots, \gamma_i - 2, C_{pi} A_p^{\gamma_i - 1} B_{d_p} \neq 0$ .

**引理1** 对于一个  $M \times M$  的严格真且满秩的有理矩阵  $G(s)$ , 存在一个下三角多项式矩阵, 定义为左修正关联矩阵  $\xi_m(s)$ :

$$\xi_m(s) = \begin{bmatrix} d_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21}^m(s) & d_2(s) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ h_{M1}^m(s) & \cdots & h_{MM-1}^m(s) & d_M(s) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

使得系统的高频增益矩阵  $K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_m(s) G(s)$  是有限且非奇异的<sup>[38]</sup>, 其中  $h_{ij}^m(s)$  为多项式,  $i = 2, 3, \dots, M, j = 1, 2, \dots, M - 1, d_k(s)$  是阶次为  $l_i > 0$  的首一稳定多项式.

**推论1** 若控制增益矩阵  $K_s$  是非奇异的, 则系统存在对角关联矩阵:

$$\xi_m(s) = \text{diag} \{d_1(s), d_2(s), \dots, d_M(s)\}, \quad (10)$$

其中  $d_i(s)$  是阶次为  $\rho_i$  的首一稳定多项式, 且高频增益矩阵  $K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_m(s) G(s) = K_s$ .

**注释1** 对于 MIMO 系统而言, 系统控制相对阶的定义需要同时满足条件 (i) 和 (ii), 否则无法定义系统的控制相对阶. 然而, 扰动相对阶的定义则只需要满足条件 (i). 对于 SISO 线性系统而言, 其系统的控制相对阶、扰动相对阶分别为控制子系统传递函数、扰动子系统传递函数阶次; 而对于 MIMO 线性系统, 其扰动相对阶  $\gamma_i$  等于扰动传递函数矩阵第  $i$  行  $G_{di}(s)$  所有元素的最低阶次,  $\rho_i$  应大于等于传递函数矩阵第  $i$  行  $G_i(s)$  所有元素的最低阶次.

### 3.2 系统动态结构特性分析

本小节具体分析四旋翼飞行器系统在典型飞行工况下的动态结构特性.

**特殊悬停工况.** 在特殊悬停工况下, 可以控制四旋翼在任意位置处以任意偏航角实现悬停, 所有方向的速度、角速度均为 0. 选取系统的平衡点  $(x_{\text{hov}}, u_{\text{hov}}, d_{\text{hov}})$  为

$$\begin{aligned} x_{\text{hov}} &= [x_E, y_E, z_E, 0, 0, 0, 0, 0, \psi_e, 0, 0, 0]^T, \quad \psi_e \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ u_{\text{hov}} &= [mg, 0, 0, 0]^T, \quad d_{\text{hov}} = [0, 0, 0, 0]^T. \end{aligned} \quad (11)$$

此时系统的传递函数矩阵为

$$G_{\text{hov}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{ms(s+c_t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g \cos \psi_e}{s^2(s+c_t)(J_x s+c_r)} & \frac{g \sin \psi_e}{s^2(s+c_t)(J_y s+c_r)} & 0 \\ 0 & \frac{g \sin \psi_e}{s^2(s+c_t)(J_x s+c_r)} & \frac{g \cos \psi_e}{s^2(s+c_t)(J_y s+c_r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s(J_z s+c_r)} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

若系统存在对角关联矩阵  $\xi_m(s) = \text{diag}\{d_1(s), d_2(s), \dots, d_M(s)\}$ , 则该对角矩阵对角线元素  $d_i(s)$  的阶次必然等于传递函数矩阵第  $i$  行  $G_i(s)$  所有元素中的最小阶次, 且可以保证高频增益矩阵  $K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_m(s)G(s)$  是非奇异的. 然而, 若以此法选定的对角矩阵使得  $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_m(s)G(s)$  是奇异的, 则此工况下系统的关联矩阵是非对角型的.

在悬停工况下, 传递函数矩阵每一行的最小阶次分别为 2, 4, 4, 2, 若选取一个对角关联矩阵:

$$\xi_{m,\text{hov}}(s) = \text{diag}\{(s+1)^2, (s+1)^4, (s+1)^4, (s+1)^2\}. \quad (13)$$

此时计算高频增益矩阵  $K_{p,\text{hov}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_{m,\text{hov}}(s)G(s)$  存在且是非奇异的:

$$K_{p,\text{hov}} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g \cos \psi_e / J_x & g \sin \psi_e / J_y & 0 \\ 0 & g \sin \psi_e / J_x & g \cos \psi_e / J_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/J_z \end{bmatrix}. \quad (14)$$

因此在悬停工况下系统存在对角关联矩阵.

计算高频增益矩阵的各阶顺序主子式  $\Delta_i$ , 其符号是确定且非零的:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 < 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \Delta_4 < 0. \quad (15)$$

系统的控制相对阶与关联矩阵 (13) 对角线上的元素阶次相等, 为  $\rho_1 = 2, \rho_2 = \rho_3 = 4, \rho_4 = 2$ . 由扰动相对阶定义, 可以计算系统的扰动相对阶为  $\gamma_1 = 2, \gamma_2 = \gamma_3 = 4, \gamma_4 = 2$ . 此时系统的控制相对阶与扰动相对阶相等.

**沿  $z_E$  轴垂直升降工况.** 在沿  $z_E$  轴垂直升降工况下, 可以控制四旋翼在任意位置处以给定速度  $\dot{z}_o$  进行垂直升降, 且  $x_E, y_E$  方向的速度、所有姿态角、角速度均为 0. 选取系统的平衡点  $(x_{\text{ver}}, u_{\text{ver}}, d_{\text{ver}})$  为

$$\begin{aligned} x_{\text{ver}} &= [x_E, y_E, z_E, 0, 0, \dot{z}_o, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T, \\ u_{\text{ver}} &= [mg, 0, 0, 0]^T, \quad d_{\text{ver}} = [0, 0, 0, 0]^T. \end{aligned} \quad (16)$$

系统的传递函数矩阵为

$$G_{\text{ver}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{ms(s+c_t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g}{s^2(s+c_t)(J_x s+c_r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g}{s^2(s+c_t)(J_y s+c_r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s(J_z s+c_r)} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

在此工况下的关联矩阵亦为对角型:  $\xi_{m,\text{ver}}(s) = \text{diag}\{(s+1)^2, (s+1)^4, (s+1)^4, (s+1)^2\}$ . 系统高频增益矩阵为

$$K_{p,\text{ver}} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g/J_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g/J_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/J_z \end{bmatrix}. \quad (18)$$

高频增益矩阵顺序主子式符号与式 (15) 保持一致.

系统的控制相对阶与扰动相对阶与悬停工况时相同, 为  $\rho_1 = \gamma_1 = 2, \rho_2 = \gamma_2 = \rho_3 = \gamma_3 = 4, \rho_4 = \gamma_4 = 2$ .

**沿  $x_E$  轴水平运动工况.** 在沿  $x_E$  轴水平运动工况下, 可以控制四旋翼在任意位置, 以给定速度  $\dot{x}_o$ 、给定俯仰角  $\theta_o$  水平运动, 且  $y_E, z_E$  轴方向的速度、其他姿态角、所有角速度均为 0. 系统的平衡点  $(x_{\text{pit}}, u_{\text{pit}}, d_{\text{pit}})$  为

$$\begin{aligned} x_{\text{pit}} &= [x_E, y_E, z_E, \dot{x}_o, 0, 0, 0, \theta_o, 0, 0, 0]^T, \quad \theta_o \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ u_{\text{pit}} &= \left[\frac{mg}{\cos \theta_o}, 0, 0, 0\right]^T, \quad d_{\text{pit}} = [0, 0, 0, 0]^T. \end{aligned} \quad (19)$$

系统传递函数矩阵为

$$G_{\text{pit}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_o}{ms(s+c_t)} & 0 & -\frac{g \tan \theta_o}{s^2(s+c_t)(J_y s+c_r)} & 0 \\ 0 & -\frac{g}{s^2(s+c_t)(J_x s+c_r)} & 0 & \frac{g(\tan \theta_o - \sin \theta_o)}{\cos \theta_o s^2(s+c_t)(J_z s+c_r)} \\ \frac{\sin \theta_o}{ms(s+c_t)} & 0 & \frac{g}{s^2(s+c_t)(J_y s+c_r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\cos \theta_o s(J_z s+c_r)} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

与前述两种工况不同, 当沿  $x_E$  水平运动时, 系统的关联矩阵变为非对角型. 因为若取  $\xi_{m,\text{pit},\text{diag}}(s) = \text{diag}\{(s+1)^2, (s+1)^4, (s+1)^2, (s+1)^2\}$ , 则  $K_{p0,\text{pit}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_{m,\text{pit},\text{diag}}(s)G_{\text{pit}}(s)$  是奇异的:

$$K_{p0,\text{pit}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_o/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g/J_x & 0 & \frac{g \sin \theta_o(1-\cos \theta_o)}{J_z \cos^2 \theta_o} \\ \sin \theta_o/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/J_z \cos \theta_o \end{bmatrix}. \quad (21)$$

造成式 (21) 奇异性的原因在于其第 1 行与第 3 行是线性相关的, 且当  $\theta_o = 0$  时, 第 3 行为全零行.  $K_{p0,\text{pit}}$  矩阵第 3 行与第一行存在倍数关系:  $K_{p0,\text{pit}_3} = \tan \theta_o K_{p0,\text{pit}_1}$ , 所以关联矩阵第 3 行除对角

线元素外, 在其他位置处应有非零元素. 通过以下方法选取关联矩阵第 3 行, 直至其与矩阵 (21) 中的第 1 行线性无关. 关联矩阵的第 3 行选取为<sup>[39]</sup>

$$\xi_{m,\text{pit}}(s)_3 = (s+1)^\sigma \left( [0, 0, (s+1)^2, 0] - \tan \theta_o [(s+1)^2, 0, 0, 0] \right), \quad (22)$$

可以确定唯一的  $\sigma = 2$  使得  $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_{m,\text{pit}}(s)_3 G_{\text{pit}}(s)$  存在且与矩阵 (21) 的第 1 行线性无关, 因此沿  $x_E$  轴水平运动工况下系统的左修正关联矩阵选取为

$$\xi_{m,\text{pit}}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)^4 & 0 & 0 \\ -\tan \theta_o (s+1)^4 & 0 & (s+1)^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (s+1)^2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

此时高频增益矩阵为

$$K_{p,\text{pit}} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_o}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g}{J_x} & 0 & \frac{g(\tan \theta_o - \sin \theta_o)}{\cos \theta_o J_z} \\ 0 & 0 & \frac{g}{J_y \cos^2 \theta_o} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\cos \theta_o J_z} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

高频增益矩阵顺序主子式符号与式 (15) 保持一致.

系统的控制相对阶为  $\rho_1 = 2, \rho_2 = \rho_3 = 4, \rho_4 = 2$ , 扰动相对阶为  $\gamma_1 = 2, \gamma_2 = 4, \gamma_3 = \gamma_4 = 2$ . 此时系统的控制相对阶与前几种所述工况保持一致, 但扰动相对阶发生了突变, 出现了两种相对阶结构:  $\rho_i = \gamma_i, i = 1, 2, 4$  与  $\rho_i > \gamma_i, i = 3$ .

**沿  $y_E$  轴水平运动工况.** 在沿  $y_E$  轴水平运动工况下, 可以控制四旋翼在任意位置, 以给定速度  $\dot{y}_o$ 、给定滚转角  $\phi_o$  水平运动, 且  $x_E, z_E$  轴方向的速度、其他姿态角、所有角速度均为 0. 系统的平衡点  $(x_{\text{rol}}, u_{\text{rol}}, d_{\text{rol}})$  为

$$\begin{aligned} x_{\text{rol}} &= [x_E, y_E, z_E, 0, \dot{y}_o, 0, \phi_o, 0, 0, 0, 0, 0]^T, \quad \phi_o \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \\ u_{\text{rol}} &= \left[ \frac{mg}{\cos \phi_o}, 0, 0, 0 \right]^T, \quad d_{\text{rol}} = [0, 0, 0, 0]^T. \end{aligned} \quad (25)$$

系统的传递函数矩阵为

$$G_{\text{rol}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\cos \phi_o}{ms(s+c_t)} & -\frac{g \tan \phi_o}{s^2(s+c_t)(J_x s+c_r)} & 0 & 0 \\ -\frac{\sin \phi_o}{ms(s+c_t)} & -\frac{g}{\cos \phi_o s^2(s+c_t)(J_x s+c_r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g}{\cos \phi_o s^2(s+c_t)(J_y s+c_r)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin \phi_o}{s(J_y s+c_r)} & \frac{\cos \phi_o}{s(J_z s+c_r)} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

此时若选取对角关联矩阵  $\xi_{m,\text{rol,diag}}(s) = \text{diag} \{ (s+1)^2, (s+1)^2, (s+1)^4, (s+1)^2 \}$ , 则  $K_{p0,\text{rol}} =$



$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_{m,rol,diag}(s)G_{rol}(s)$  是奇异的:

$$K_{p0,rol} = \begin{bmatrix} \cos \phi_0/m & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \phi_0/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g/J_y \cos \phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \phi_0/J_y & \cos \phi_0/J_z \end{bmatrix}. \quad (27)$$

造成  $K_{p0,rol}$  奇异性的原因在于其第 1 行与第 2 行是线性相关的, 且当  $\phi_0 = 0$  时, 第 2 行为全零行. 与沿  $x_E$  轴水平运动工况类似, 对  $K_{p0,rol}$  的第 2 行进行修正, 选取左修正关联矩阵为

$$\xi_{m,rol}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ \tan \phi_0 (s+1)^4 & (s+1)^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (s+1)^2 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

此时高频增益矩阵为

$$K_{p,rol} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \phi_0}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g(1+\sin \phi_0 \tan \phi_0)}{\cos \phi_0 J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin \phi_0}{J_y} & \frac{\cos \phi_0}{J_z} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

高频增益矩阵顺序主子式符号亦与式 (15) 保持一致.

系统的控制相对阶依然为  $\rho_1 = 2, \rho_2 = \rho_3 = 4, \rho_4 = 2$ , 而扰动相对阶再次发生突变:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 4, \gamma_4 = 2$ .

**四旋翼飞行器的动态突变.** 由上述分析可知, 四旋翼飞行器在上述 4 种工况下切换飞行时, 系统 (6) 除了系统参数矩阵  $A_p(t) \in \mathbb{R}^{12 \times 12}, B_p(t) \in \mathbb{R}^{12 \times 4}, B_{d_p}(t) \in \mathbb{R}^{12 \times 4}, C_p(t)$  发生突变外, 系统的动态结构特性也会发生突变, 具体有如下表现.

(1) 系统的相对阶结构发生突变: 4 种工况下, 系统控制相对阶始终保持不变, 但扰动相对阶会发生突变, 进而导致出现了两种相对阶结构  $\rho_i = \gamma_i$  与  $\rho_i > \gamma_i$ .

(2) 关联矩阵结构突变: 关联矩阵  $\xi_m(s)$  可能由对角型 (非对角型) 突变为非对角型 (对角型).

(3) 高频增益矩阵突变: 在各工况下系统的高频增益矩阵会发生突变, 但其顺序主子式符号保持一致, 如式 (15) 所示.

**控制挑战.** 当系统动态结构发生突变时, 很难直接采用统一的控制器结构实现所有工况下的飞行控制. 系统相对阶结构的突变增加了风扰动抑制的难度, 不同的相对阶结构采用的风扰动补偿项结构是不同的; 当关联矩阵不一致时需要选取不同的参考模型, 且关联矩阵为对角型时控制器设计相对简单, 而非对角型时则很难进行解耦控制<sup>[28]</sup>; 虽然高频增益矩阵具有不确定性, 但顺序主子式符号是确定且一致的, 可利用矩阵分解技术实现自适应律设计.

#### 4 基于补偿器设计的系统重构

本节针对四旋翼飞行器系统在变工况飞行时所出现的关联矩阵突变为非对角型问题, 将设计输入

– 扰动双补偿器实现系统重构, 以保证四旋翼飞行器在变工况飞行时的系统关联矩阵结构始终是对角型的, 其对于后续控制器的设计尤为关键.

针对沿  $x_E, y_E$  轴水平运动工况下关联矩阵为非对角型而难以进行解耦控制的问题, 先通过设计补偿器, 使得各工况下均具有一致的对角关联矩阵, 并使补偿后的系统具有一致的相对阶结构.

以下引理给出了输入补偿器存在的充分条件.

**引理2** 对于任意  $M \times M$  严格正则且满秩的矩阵  $G_0(s)$ , 若其相对阶已知, 那么必然存在一个对角的多项式矩阵  $\xi_m(s)$  和一个稳定的对角非奇异输入补偿器  $W_c(s)$ , 使得输入补偿后的系统  $G_0(s)W_c(s)$  的高频增益矩阵  $K_{pc} = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_m(s)G_0(s)W_c(s)$  是非奇异的<sup>[40]</sup>.

**输入补偿器设计.** 由第 3 节分析可知, 在考虑的 4 种工况下, 系统的控制相对阶均已知且保持一致, 所以根据引理 2, 可以在系统的输入端设计一个补偿器, 实现对原系统的重构, 使得重构后的系统在各工况下均具有一致的对角关联矩阵. 设计的补偿器形式为

$$W_c(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{(s+b)^2}, 1, 1, 1 \right\}, \quad (30)$$

其中,  $b$  为大于零的常数.

经输入补偿后, 系统的传递函数矩阵变为

$$G(s) = G_0(s)W_c(s), \quad (31)$$

其中  $G_0(s)$  为原系统传递函数矩阵,  $G(s)$  为补偿后的系统传递函数矩阵.

输入补偿器使所有工况下的传递函数矩阵第 1 列元素提升两阶, 此时各工况下拥有一致的对角关联矩阵, 为

$$\xi_m(s) = \text{diag} \{ (s+1)^4, (s+1)^4, (s+1)^4, (s+1)^2 \}. \quad (32)$$

经补偿后, 尽管沿  $x_E, y_E$  水平运动工况下系统的高频增益矩阵发生改变, 但其顺序主子式符号依旧与式 (15) 保持一致.

**输入补偿后的系统结构特性.** 在控制输入端引入补偿器不会改变系统的扰动相对阶, 且经补偿后, 两种不同的相对阶结构依旧存在, 即  $\rho_i = \gamma_i$  与  $\rho_i > \gamma_i$ . 对于这两种相对阶结构均需要进行扰动补偿, 但二者补偿项的结构不同: 当控制相对阶  $\rho_i$  等于扰动相对阶  $\gamma_i$  时, 扰动补偿项与扰动项  $d(t)$  有关; 当控制相对阶大于扰动相对阶时, 扰动补偿项与扰动项及其导数  $\dot{d}(t), \dots, d^{(\rho_i - \gamma_i)}(t)$  有关<sup>[28]</sup>. 所以此时无法使用统一的扰动补偿项对不同工况下的风扰动进行补偿.

**输入 – 扰动双补偿器设计.** 为了解决上面仅输入补偿时系统所存在的问题, 可以在扰动输入端再引入一个补偿器, 以使得系统的扰动相对阶保持一致, 继而拥有一致的相对阶结构. 输入补偿器结构框图如图 2 所示. 对于新系统而言, 输入和扰动信号分别为  $v(t), d_c(t)$ , 且有

$$\Delta u_p(t) = W_c(s)[v](t), \quad d(t) = W_c(s)[d_c](t), \quad (33)$$

$$G(s) = G_0(s)W_c(s), \quad G_d(s) = G_{d0}(s)W_c(s). \quad (34)$$

重构后的系统记为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t) + B_d(t)d_c(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (35)$$

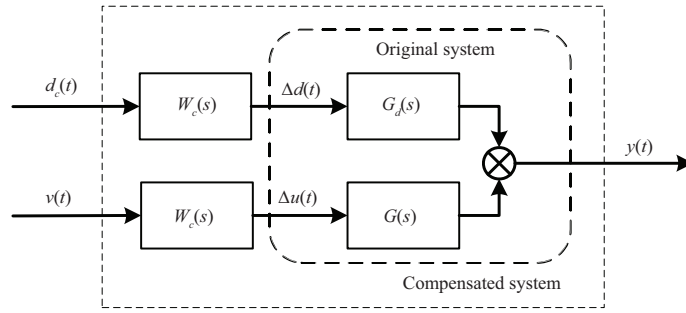


图 2 输入 - 扰动双补偿器设计结构框图

Figure 2 Structure block diagram of input-disturbance dual compensator

其中

$$x(t) = [\Delta x_p^T(t), \Delta u_1(t), \Delta \dot{u}_1(t), \Delta d_1(t), \Delta \dot{d}_1(t)]^T \in \mathbb{R}^{16}, \quad (36)$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{16 \times 4}$ ,  $B_d(t) \in \mathbb{R}^{16 \times 4}$  为系统未知的参数矩阵, 其在每种工况下是恒定不变的, 但在工况切换的瞬间可能会发生突变;  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 16}$  为已知的输出矩阵.

**输入 - 扰动双补偿后重构系统的动态特性.** 经重构后, 系统具有一致的对角关联矩阵, 如式 (32) 所示, 且高频增益矩阵顺序主子式符号保持一致, 如式 (15) 所示; 此外系统拥有一致的相对阶结构: 控制相对阶始终等于扰动相对阶. 这将大大减小后续自适应控制器的设计难度.

## 5 控制器设计

本节针对重构的系统 (35), 研究自适应湍流风扰动抑制技术. 首先, 针对系统参数与扰动均已知情况, 设计标称控制器, 然后, 针对这些参数与扰动均未知的情况, 设计自适应控制器.

### 5.1 控制问题

考虑经补偿后的系统为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t) + B_d(t)d_c(t), \quad y = Cx(t), \quad (37)$$

其中  $A(t) \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{16 \times 4}$ ,  $B_d(t) \in \mathbb{R}^{16 \times 4}$  为未知的系统矩阵, 其在每种工况下是恒定不变的, 但在工况切换的瞬间会发生突变.  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 16}$  为已知且恒定不变的输出矩阵.  $x(t) \in \mathbb{R}^{16}$ ,  $v(t) \in \mathbb{R}^4$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^4$  分别表示系统的状态向量、控制输入向量以及输出向量.  $d_c(t) \in \mathbb{R}^4$  为扰动向量:  $d_c(t) = [d_{c_1}(t), d_{c_2}(t), d_{c_3}(t), d_{c_4}(t)]^T$ , 第  $j$  行可以表示为

$$d_{c_j}(t) = d_{c_{j0}} + \sum_{k=1}^{q_j} d_{c_{jk}} f_{jk}(t), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (38)$$

其中  $d_{c_{j0}}$  和  $d_{c_{jk}}$  为常数,  $f_{jk}(t)$  为连续有界的基函数. 通过选取合适的参数与基函数, 式 (38) 可以近似地逼近所考虑的风扰动信号.

本文的控制目标为设计一个统一的自适应状态反馈控制信号  $v(t)$ , 使得系统在任何工况、任何风扰动环境下, 输出信号  $y(t)$  始终渐近跟踪参考信号  $y_m(t)$ , 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_m(t)) = 0$ . 参考信号由以下参考模型产生:

$$y_m(t) = W_m(s)[r](t), \quad W_m(s) = \xi_m^{-1}(s). \quad (39)$$

对于式 (35) 所示经输入与扰动补偿后的四旋翼系统, 在各种工况下以下条件均满足:

- (i)  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  所有零点都是稳定的, 且对于系统  $(A, B, C)$  是可稳定且可观测的;
- (ii)  $G(s)$  是严格满秩的, 且其具有对角关联矩阵;
- (iii) 系统高频增益矩阵顺序主子式符号已知, 且保持一致.

条件 (i)~(ii) 可以保证模型匹配条件, 条件 (iii) 可以保证自适应更新律的设计.

## 5.2 标称控制器设计

当系统参数与扰动均已知时, 设计标称状态反馈控制器结构如下:

$$v(t) = K_1^{*T}x(t) + K_2^*r(t) + K_3^*(t), \quad (40)$$

其中  $K_1^{*T}, K_2^*$  用于满足模型匹配条件实现渐近跟踪,  $K_3^*(t)$  用于抵消扰动作用.

**定理 1** 考虑系统参数和湍流风扰动均已知的四旋翼飞行器, 针对基于输入 - 扰动双补偿器后的四旋翼系统模型 (35), 其在各种工况下均具有相同的对角关联矩阵, 且相对阶始终满足  $\rho_i = \gamma_i, i = 1, 2, 3, 4$ , 则可设计一个标称的形如式 (40) 的状态反馈控制器, 使得闭环系统稳定且输出信号  $y(t)$  渐近跟踪参考信号  $y_m(t)$ .

**证明** 由于系统的控制目标是让系统的输出  $y$  随时间趋近于参考模型  $y_m$ , 由式 (39) 可知, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 有

$$y(t) = y_m(t) = \xi_m^{-1}(s)[r](t). \quad (41)$$

对于系统 (35), 其拥有对角关联矩阵  $\xi_m(s) = \text{diag}\{d_1(s), d_2(s), d_3(s), d_4(s)\}$ , 其中  $d_i(s)$  为稳定的首一多项式, 一般形式为

$$d_i(s) = s^{\rho_i} + a_{i\rho_i-1}^*s^{\rho_i-1} + \cdots + a_{i1}^*s + a_{i0}^*, \quad (42)$$

其中,  $\rho_i$  为控制相对阶. 代入式 (41) 可得

$$s^{\rho_i} [y_{mi}](t) + a_{i\rho_i-1}^*s^{\rho_i-1} [y_{mi}](t) + \cdots + a_{i1}^*s [y_{mi}](t) + a_{i0}^* [y_{mi}](t) = r_i(t). \quad (43)$$

将等式转化至时域进行分析, 即

$$y_{mi}^{(\rho_i)}(t) + a_{i\rho_i-1}^*y_{mi}^{(\rho_i-1)}(t) + \cdots + a_{i1}^*y_{mi}^{(1)}(t) + a_{i0}^*y_{mi}(t) = r_i(t). \quad (44)$$

对系统 (37) 的输出  $y_i$  求  $k$  阶导数可得

$$y_i^{(k)}(t) = \begin{cases} C_i A^k x(t), & k = 0, 1, \dots, \rho_i - 1, \\ C_i A^k x(t) + C_i A^{k-1} B v(t) + C_i A^{k-1} B_d d_c(t), & k = \rho_i. \end{cases} \quad (45)$$

由于系统的关联矩阵为对角型, 所以可以对系统进行解耦, 且系统高频增益矩阵  $K_p$  等于控制增益矩阵  $K_s$  (式 (8)). 令  $v(t) = K_p^{-1}w(t), w = [w_1, w_2, w_3, w_4]^T$ , 则式 (45) 的最后一个等式可改写为

$$y_i^{(\rho_i)}(t) = C_i A^{\rho_i} x(t) + w_i(t) + C_i A^{\rho_i-1} B_d d_c(t). \quad (46)$$

设计  $w_i$  为

$$w_i(t) = (-C_i A^{\rho_i} - a_{i\rho_i-1}^* C_i A^{\rho_i-1} - \cdots - a_{i1}^* C_i A - a_{i0}^* C_i) x(t) - C_i A^{\rho_i-1} B_d d_c(t) + r_i(t). \quad (47)$$

将  $w_i(t)$  代入式 (46), 并结合式 (45) 中的第一个等式可得

$$y_i^{(\rho_i)}(t) = -a_{i\rho_i-1}^* y_i^{(\rho_i-1)}(t) - \dots - a_{i1}^* y_i^{(1)}(t) - a_{i0}^* y_i(t) + r_i(t). \quad (48)$$

对比式 (44) 与 (48) 可知, 输出信号  $y_i(t)$  可以逼近参考输出  $y_{mi}(t)$ . 此时, 控制输入信号  $v(t) = K_p^{-1}w(t)$  为

$$\begin{aligned} v(t) &= K_p^{-1}K_0x(t) + K_p^{-1}r(t) + K_p^{-1}K_d d_c(t) \\ &\triangleq K_1^*x(t) + K_2^*r(t) + K_3^*(t), \end{aligned} \quad (49)$$

其中  $K_0, K_d$  的第  $i$  行分别为

$$\begin{aligned} K_{0i}^T &= -C_i A^{\rho_i} - a_{i\rho_i-1}^* C_i A^{\rho_i-1} - \dots - a_{i1}^* C_i A - a_{i0}^* C_i, \\ K_{di} &= -C_i A^{\rho_i-1} B_d. \end{aligned} \quad (50)$$

将控制输入信号 (49) 代入式 (37) 可得  $y(s) = y_m(s) = W_m(s)r(s)$ , 即系统的输出  $y(t)$  渐近跟踪参考模型输出  $y_m(t)$ .

### 5.3 自适应控制器设计

当系统的参数均未知时, 则设计自适应状态反馈控制器进行输出跟踪与扰动补偿. 首先对标称控制器 (40) 中扰动抑制项  $K_3^*$  进行参数化.

#### 5.3.1 扰动抑制项 $K_3^*$ 的参数化

基于式 (38), 将第  $j$  个扰动信号写为如下形式:

$$d_{c_j}(t) = d_{c_{j0}} + \sum_{k=1}^{q_j} d_{c_{jk}} f_{jk}(t) = \phi_j^{*T} f_j(t), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (51)$$

其中,

$$\begin{aligned} \phi_j^* &= [d_{j0}, d_{j1}, \dots, d_{jq_j}]^T \in \mathbb{R}^{q_j+1}, \\ f_j(t) &= [1, f_{j1}(t), \dots, f_{jq_j}(t)]^T \in \mathbb{R}^{q_j+1}. \end{aligned} \quad (52)$$

则扰动信号可表示为

$$d(t) = \phi^{*T} f(t), \quad (53)$$

其中,

$$\phi^{*T} = \begin{bmatrix} \phi_1^{*T} & 0_{q_2+1}^T & 0_{q_3+1}^T & 0_{q_4+1}^T \\ 0_{q_1+1}^T & \phi_2^{*T} & 0_{q_3+1}^T & 0_{q_4+1}^T \\ 0_{q_1+1}^T & 0_{q_2+1}^T & \phi_3^{*T} & 0_{q_4+1}^T \\ 0_{q_1+1}^T & 0_{q_2+1}^T & 0_{q_3+1}^T & \phi_4^{*T} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times q}, \quad (54)$$

$$f(t) = [f_1^T(t) \ f_2^T(t) \ f_3^T(t) \ f_4^T(t)]^T \in \mathbb{R}^q, \quad (55)$$

$f(t)$  向量的维度为  $q = q_1 + \dots + q_4 + 4$ .

令  $K_{3d}^* = [k_{3d1}^*, k_{3d2}^*, k_{3d3}^*, k_{3d4}^*] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ , 则可以将  $K_3^*$  参数化为

$$K_3^*(t) = K_{3d}^* d(t) = K_{3d}^* \phi^{*T} f(t) = \Theta_3^* f(t), \quad (56)$$

其中,  $\Theta_3^* = [\theta_{31}^*, \theta_{32}^*, \theta_{33}^*, \theta_{34}^*] \in \mathbb{R}^{4 \times q}$ ,  $\theta_{3j}^* = k_{3dj}^* \phi_j^{*T} \in \mathbb{R}^{4 \times (q_j+1)}$ .

### 5.3.2 控制器结构

当标称控制器中的参数未知时, 设计自适应控制器, 结构如下:

$$v(t) = K_1^T(t)x(t) + K_2(t)r(t) + K_3(t), \quad (57)$$

其中  $K_1^T(t)$ ,  $K_2(t)$  分别为对标称控制器理想参数  $K_1^{*T}$ ,  $K_2^*$  的估计值,  $K_3(t)$  为  $K_3^*(t)$  的估计值:

$$\begin{aligned} K_3(t) &= \Theta_3(t)f(t), \\ \Theta_3(t) &= [\theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33}, \theta_{34}]. \end{aligned} \quad (58)$$

### 5.3.3 误差方程

将式 (57) 所示控制器代入式 (37), 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK_1^{*T})x(t) + BK_2^*r(t) + BK_3^* + B_d d_c(t) \\ &\quad + B(\tilde{K}_1(t)x(t) + \tilde{K}_2(t)r(t) + \tilde{K}_3(t)), \end{aligned} \quad (59)$$

其中,

$$\tilde{K}_1(t) = K_1(t) - K_1^*, \quad \tilde{K}_2(t) = K_2(t) - K_2^*, \quad \tilde{K}_3(t) = K_3(t) - K_3^*(t). \quad (60)$$

系统的输出跟踪误差方程为

$$e(t) = y(t) - y_m(t) = W_m(s)K_p^* \left[ \tilde{\Theta}^T \omega \right] (t) + \delta(t), \quad K_p^* = K_2^{*-1}, \quad (61)$$

其中,

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}(t) &= \Theta(t) - \Theta^*, \quad \Theta^{*T}(t) = [K_1^{*T}, K_2^*, \Theta_3^*], \quad \Theta^T(t) = [K_1^T(t), K_2(t), \Theta_3(t)], \\ \omega(t) &= [x^T(t), r^T(t), f^T(t)]^T, \quad \delta(t) = Ce^{(A+BK_x^{*T})}x(0). \end{aligned} \quad (62)$$

由于  $A + BK_1^{*T}$  是稳定的,  $\delta(t)$  随时间指数衰减至 0.

LDS 分解对于补偿后的系统, 在各种工况下虽然拥有不同的高频增益矩阵, 但其顺序主子式符号保持一致, 如式 (15) 所示. 为了应对高频增益矩阵不确定性问题, 引入 LDS 矩阵分解技术, 将高频增益矩阵进行分解:

$$K_p = L_s D_s S, \quad (63)$$

其中  $L_s \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  为单位下三角矩阵,  $S \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  为正定矩阵,  $D_s \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  为对角矩阵. 当高频增益矩阵顺序主子式符号相同时, 则可令  $D_s$  矩阵保持一致,

$$D_s = \text{diag}\{s_1^*, s_2^*, \dots, s_4^*\} = \text{diag}\{\text{sign}[\Delta_1] \gamma_1, \text{sign}[\Delta_2] \gamma_2, \dots, \text{sign}[\Delta_4] \gamma_4\}, \quad (64)$$

$\Delta_i$  为高频增益矩阵顺序主子式符号,  $\gamma_i \geq 0$  为可任意选取的系数.

进行矩阵分解后, 将式 (63) 代入式 (61) 得

$$L_s^{-1} \xi_m(s)[e](t) = D_s S \tilde{\Theta}^T(t) \omega(t). \quad (65)$$

为了对未知矩阵  $L_s$  进行参数化, 引入矩阵  $\Theta_0^*$ :

$$\Theta_0^* = L_s^{-1} - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_{21}^* & 0 & 0 & 0 \\ \theta_{31}^* & \theta_{32}^* & 0 & 0 \\ \theta_{41}^* & \theta_{42}^* & \theta_{43}^* & 0 \end{bmatrix}. \quad (66)$$

代入式 (65), 得到新的跟踪误差方程为

$$\xi_m(s)[e](t) + \Theta_0^* \xi_m(s)[e](t) = D_s S \tilde{\Theta}^T(t) \omega(t). \quad (67)$$

引入一个滤波器:  $h(s) = 1/f_h(s)$ , 其中  $f_h(s)$  为一个稳定的多项式, 其阶次等于关联矩阵  $\xi_m(s)$  中元素的最高阶次. 对式 (67) 等式两边进行滤波, 得到滤波后的跟踪误差方程为

$$\bar{e}(t) + [0, \theta_2^{*T} \eta_2(t), \theta_3^{*T} \eta_3(t), \theta_4^{*T} \eta_4(t)]^T = D_s S h(s) [\tilde{\Theta}^T \omega](t), \quad (68)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{e}(t) &= \xi_m(s) h(s) [e](t) = [\bar{e}_1(t), \bar{e}_2(t), \bar{e}_3(t), \bar{e}_4(t)]^T, \\ \eta_i(t) &= [\bar{e}_1(t), \dots, \bar{e}_{i-1}(t)]^T, \quad i = 2, 3, 4, \\ \theta_i^* &= [\theta_{i1}^*, \dots, \theta_{ii-1}^*]^T, \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (69)$$

基于式 (68), 引入估计误差信号  $\varepsilon(t)$ :

$$\varepsilon(t) = \bar{e}(t) + [0, \theta_2^T(t) \eta_2(t), \theta_3^T(t) \eta_3(t), \theta_4^T(t) \eta_4(t)]^T + \psi(t) \xi(t), \quad (70)$$

其中  $\theta_i(t)$  为  $\theta_i^*$  的估计值,  $\psi(t)$  为  $\psi^* = D_s S$  的估计值;  $\zeta(t), \xi(t)$  定义如下:

$$\xi(t) = \Theta^T(t) \zeta(t) - h(s) [\Theta^T \omega](t), \quad \zeta(t) = h(s) [\omega](t). \quad (71)$$

由式 (68), (70) 和 (71) 可得到新的估计误差方程为

$$\varepsilon(t) = [0, \tilde{\theta}_2^T(t) \eta_2(t), \tilde{\theta}_3^T(t) \eta_3(t), \tilde{\theta}_4^T(t) \eta_4(t)]^T + D_s S \tilde{\Theta}^T \zeta(t) + \tilde{\psi}(t) \xi(t), \quad (72)$$

其中  $\tilde{\theta}_i(t) = \theta_i(t) - \theta_i^*$ ,  $\tilde{\psi}(t) = \psi(t) - \psi^*$ .

### 5.3.4 自适应律

基于误差模型 (72), 设计自适应律为

$$\dot{\Theta}(t) = -\frac{D_s \varepsilon(t) \zeta^T(t)}{m^2(t)}, \quad (73)$$

$$\dot{\theta}_i(t) = -\frac{\Gamma_{\theta_i} \varepsilon_i(t) \eta_i(t)}{m^2(t)}, \quad i = 2, 3, 4, \quad (74)$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\Gamma \varepsilon(t) \xi^T(t)}{m^2(t)}, \quad (75)$$

其中,

$$m^2(t) = 1 + \zeta^T(t) \zeta(t) + \xi^T(t) \xi(t) + \sum_{i=2}^4 \eta_i^T(t) \eta_i(t), \quad (76)$$

$\Gamma_{\theta_i} = \Gamma_{\theta_i}^T > 0, \Gamma = \Gamma^T > 0$  为自适应律的增益矩阵.

### 5.3.5 稳定性证明

本小节对系统信号有界性与稳定性进行分析.

**定理2** 考虑系统参数和湍流风扰动均未知的四旋翼飞行器, 针对基于输入-扰动双补偿后的四旋翼重构系统 (37), 其在各种工况下的高频增益矩阵顺序主子式符号保持一致, 则可设计自适应控制器 (57) 及自适应参数更新律 (73)~(75), 保证所有闭环系统信号有界, 且输出误差  $e(t) = y(t) - y_m(t)$  满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

**证明** 对于闭环系统信号有界性与输出跟踪性能的证明过程较为复杂, 受篇幅限制, 此处仅给出一般的证明框架. 选取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=2}^4 \tilde{\theta}_i^T \Gamma \tilde{\theta}_i + \text{tr} \left( \tilde{\psi}^T \Gamma^{-1} \tilde{\psi} \right) + \text{tr} \left( \tilde{\Theta} S \tilde{\Theta}^T \right) \right) > 0. \quad (77)$$

对 Lyapunov 函数求导并将式 (73)~(75) 代入得

$$\dot{V} = -\frac{\varepsilon^T(t)\varepsilon(t)}{m^2(t)} \leq 0. \quad (78)$$

由式 (77) 和 (78) 可得  $\theta_i(t) \in L^\infty$  ( $i = 2, 3, 4$ ),  $\Theta(t) \in L^\infty$ ,  $\psi(t) \in L^\infty$ ,  $\varepsilon(t)/m(t) \in L^2 \cap L^\infty$ , 又由式 (73)~(75) 可知  $\dot{\theta}_i(t) \in L^2 \cap L^\infty$  ( $i = 2, 3, 4$ ),  $\dot{\Theta}(t) \in L^2 \cap L^\infty$ ,  $\dot{\psi}(t) \in L^2 \cap L^\infty$ .

引入一个稳定的观测器:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bv(t) + B_d d_c(t) + Ly(t), \quad t \geq 0, \quad (79)$$

进而可以用观测器状态  $\hat{x}(t)$  来代替系统状态  $x(t)$ , 则式 (57) 中的输入信号可表示为

$$v(t) = \Theta_1^T(t)\omega_1(t) + \Theta_2^T(t)\omega_2(t) + \Theta_{3d}^T(t)\omega_3(t) + K_2(t)r(t) + \Theta_3^T(t)f(t), \quad (80)$$

其中  $\omega_1(t) = \frac{a(s)}{\Lambda(s)}[v](t)$ ,  $\omega_2(t) = \frac{a(s)}{\Lambda(s)}[y](t)$ ,  $\omega_3(t) = \frac{b(s)}{\Lambda(s)}[f](t)$ ,  $a(s) = [I_M, sI_M, \dots, s^{n-1}I_M]^T$ ,  $b(s) = [I_q, sI_q, \dots, s^{n-1}I_q]^T$ .

然后引入一系列稳定的虚拟滤波器, 经过一系列变换, 可以将系统的输出表示为

$$y(t) = G_1(s, \cdot)[\bar{y}](t) + G_2(s, \cdot)[r](t) + G_3(s, \cdot)[f](t) + G_4(s, \cdot)[f_p](t), \quad (81)$$

其中,  $\bar{y}(t) = h(s)[y](t)$  表示滤波后的输出信号,  $G_1(s, t), G_2(s, t), G_3(s, t), G_4(s, t)$  为稳定的时变运算符, 且  $\lim_{t \rightarrow \infty} f_p(t) = 0$ .

将系统的输入表示为

$$v(t) = G_5(s, \cdot)[\bar{y}](t) + G_6(s, \cdot)[r](t) + G_7(s, \cdot)[f](t) + G_8(s, \cdot)[f_p](t), \quad (82)$$

其中,  $G_5(s, t), G_6(s, t), G_7(s, t), G_8(s, t)$  为稳定的时变运算符. 进一步地, 可以得到滤波后的系统输出, 其可以描述为一个反馈结构的形式:

$$\|\bar{y}(t)\| \leq x_0 + \beta_1 \int_0^t e^{-\alpha_1(t-\tau)} x_1(\tau) \left( \int_0^\tau e^{-\alpha_2(\tau-w)} \|\bar{y}(w)\| dw \right) d\tau, \quad (83)$$

其中  $\beta_1, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ ,  $x_1(t) = \|\dot{\Theta}(t)\| + \|\varepsilon(t)\|m(t) \in L^2 \cap L^\infty$ . 对于式 (83) 应用小增益引理可得  $\bar{y}(t) \in L^\infty$ , 进而由式 (81) 和 (82) 可得  $y(t), v(t) \in L^\infty$ . 继而信号  $\omega(t), \zeta(t), \xi(t), \varepsilon(t) \in L^\infty$ , 且  $\xi(t) \in L^2, e(t) = y(t) - y_m(t) \in L^2$ . 因此, 误差信号  $e(t) = y(t) - y_m(t)$  随时间收敛至零.



表 1 四旋翼仿真参数

Table 1 Simulation parameters of the quadrotor

Symbol	Description	Value	Unit
$m$	Mass	2	kg
$g$	Gravity acceleration	9.8	kg/s <sup>2</sup>
$J_x$	Moment of inertia about the $x_B$ axis	0.005	kg·m <sup>2</sup>
$J_y$	Moment of inertia about the $y_B$ axis	0.005	kg·m <sup>2</sup>
$J_z$	Moment of inertia about the $z_B$ axis	0.009	kg·m <sup>2</sup>
$c_m$	Ratio between drag and thrust coefficients of a rotor	0.0025	m·s
$c_r$	Rotational drag coefficients	0.001	N·m·s
$c_t$	Translational drag coefficients	0.25	N·m·s

由于重构后系统的输出与原系统的输出保持一致 ( $y(t) = \Delta y_p(t)$ ), 且重构后系统的控制输入信号  $v(t)$  与原四旋翼系统的控制输入  $\Delta u_p(t)$  存在如下映射关系:  $\Delta u_p(t) = W_c(s)v(t)$ , 又因为  $W_c(s)$  是稳定的, 所以对于原来的四旋翼系统 (6) 而言, 存在有界的控制信号  $\Delta u_p(t)$ , 使得跟踪误差收敛至零.

## 6 仿真分析

本节通过 MATLAB/Simulink 对所提出的控制算法进行验证, 通过加入常值风扰动与时变风扰动, 分析四旋翼在多工况且存在风扰动情况下的跟踪特性. 仿真中四旋翼的参数如表 1 所示.

**场景 I: 常值扰动时四旋翼控制仿真.** 设置仿真中四旋翼的运动轨迹: 当  $t \in [0, 20)$  时, 四旋翼起飞, 垂直上升至 5 m 处并悬停; 当  $t \in [20, 80)$  时, 四旋翼的偏航角以正弦规律变化; 当  $t \in [80, 180)$  时, 四旋翼在地球坐标系水平面上以圆形轨迹飞行; 当  $t \in [180, 200]$  时, 四旋翼降落. 在飞行过程中, 四旋翼的横滚角、俯仰角均保持为 0.

在  $t \in [80, 170]$  时加入常值扰动:  $d(t) = [10, 0.05, 0.05, 0.01]^T$ , 根据式 (33), 可得当扰动为常值时, 经输入补偿器 (30) 作用后, 扰动信号与原扰动保持一致:  $d_c(t) = d(t)$ . 此时式 (53) 中的基函数  $f(t)$  为  $f(t) = [1, 1, 1, 1]^T$ . 系统的参考模型选取为  $W_m(s) = \text{diag}\{\frac{1}{(s+1)^4}, \frac{1}{(s+1)^4}, \frac{1}{(s+1)^4}, \frac{1}{(s+1)^2}\}$ , 控制器初始参数设置为标称值的 70%, 得到系统的输出跟踪曲线如图 3(a)~(d) 所示, 跟踪误差曲线如图 4 所示. 由图 3(a)~(d) 可知, 四旋翼从初始时刻开始即可很快地跟踪上参考输出信号. 在该场景下, 四旋翼沿  $x, y$  轴运动速度较小, 对应的俯仰角与偏航角近乎为 0, 因此在飞行过程中系统模型参数变化较小, 动态特性结构突变不显著, 在工况切换时, 系统的输出依然可以平滑地跟踪参考信号. 而在 80 s 时加入扰动, 此时产生瞬时跟踪误差, 但很快收敛至 0, 同样在 170 s 扰动消失的瞬间系统产生一个小的波动后, 亦可以继续回归到稳态实现跟踪控制. 说明所设计的扰动抑制算法能够很好地对常值扰动实现补偿.

**场景 II: 时变扰动时四旋翼控制仿真.** 设置仿真中四旋翼的运动轨迹: 当  $t \in [0, 100)$  时, 四旋翼起飞, 垂直上升至 5 m 处并悬停; 当  $t \in [100, 200)$  时, 四旋翼以  $\theta = 0.1\text{rad}$  的俯仰角、4 m/s 的速度沿  $x$  轴低速飞行; 当  $t \in [200, 300)$  时, 四旋翼以  $\theta = 0.3\text{rad}$  的俯仰角、14 m/s 的速度沿  $x$  轴高速飞行; 当  $t \in [300, 400)$  时, 四旋翼再次切换至沿  $x$  轴低速飞行状态; 当  $t \in [400, 500]$  时, 四旋翼在当前位置保持悬停.

扰动信号设为  $d(t) = [6 + 2 \sin(0.5t), 0.05, 0.05, 0.01]^T$ , 经输入补偿器 (30) 作用后, 扰动信号变为

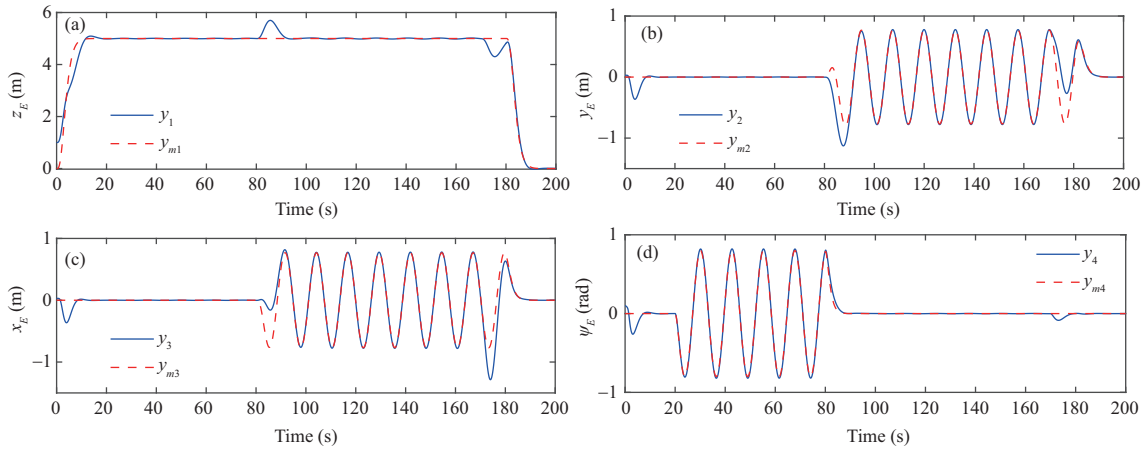


图 3 (网络版彩图) 常值扰动下四旋翼的输出响应

Figure 3 (Color online) Responses of a quadrotor with constant disturbance. (a)  $z_E$ ; (b)  $y_E$ ; (c)  $x_E$ ; (d)  $\psi_E$

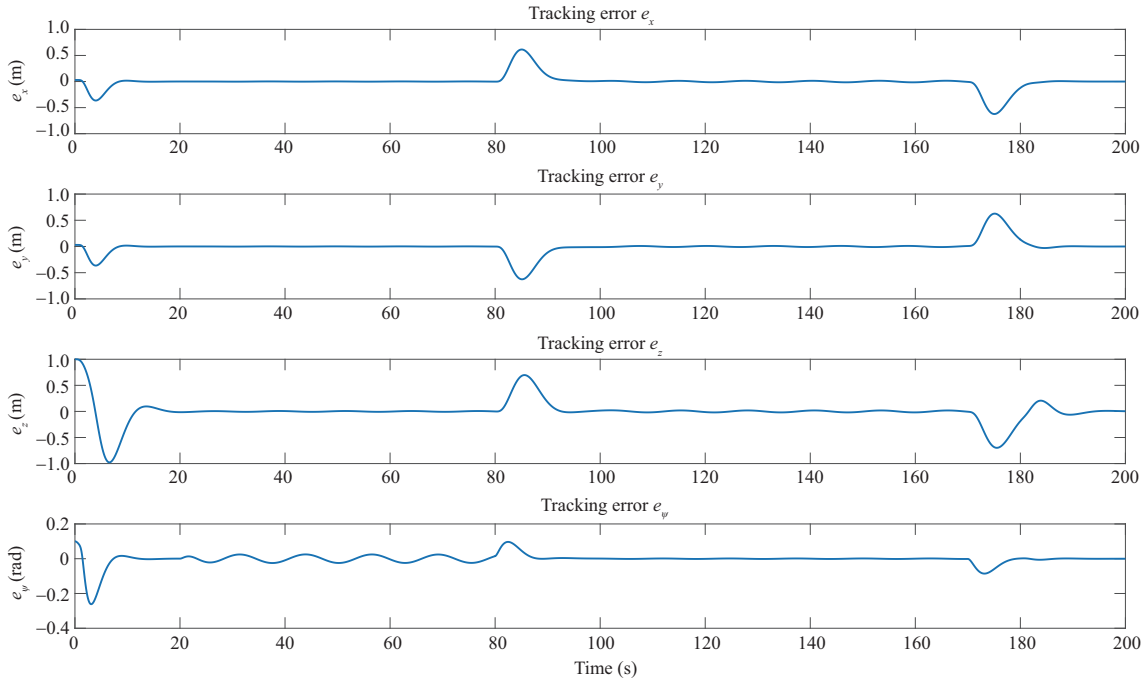


图 4 (网络版彩图) 常值扰动下四旋翼的跟踪误差

Figure 4 (Color online) Tracking error of a quadrotor with constant disturbance

$d_c(t) = [6+1.5\sin(0.5t)+\cos(0.5t), 0.05, 0.05, 0.01]^T$ . 选取基函数为  $f(t) = [1, \sin(0.5t), \cos(0.5t), 1, 1, 1]^T$ . 选取与场景 I 相同的参考模型与初始控制器参数, 仿真得到系统的输出跟踪曲线如图 5(a)~(d) 所示, 跟踪误差如图 6 所示. 在此场景下, 系统从 0 时刻即受到时变扰动影响. 四旋翼  $x$  方向上的位置近乎与参考输出曲线重合, 系统可以很快地抵消扰动作用, 跟踪误差存在有界的小波动, 且近乎为 0. 由于四旋翼沿  $x$  轴的运动速度与俯仰角相耦合 ( $\dot{x}_o = \frac{mg}{c_t} \tan \theta_o$ ), 因此在系统工况切换时如果沿  $x$  轴的运动速度发生改变, 会导致系统模型发生较大突变, 而且对于原四旋翼系统, 关联矩阵由对角型 (非对角

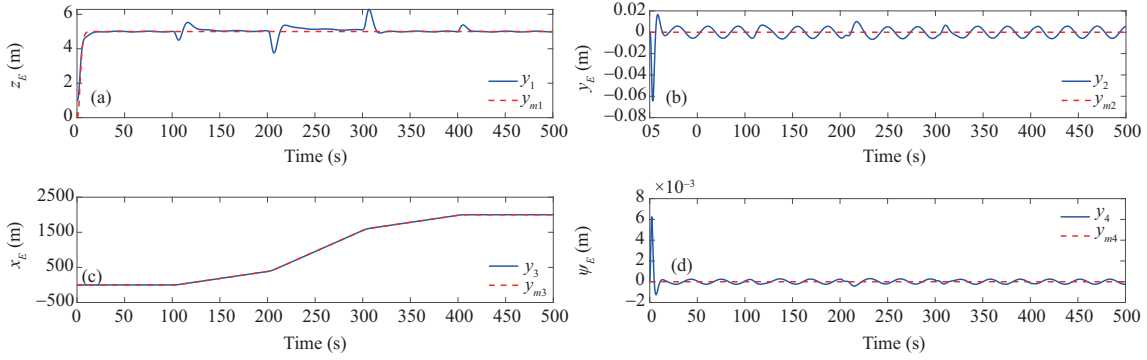


图 5 (网络版彩图) 时变扰动下四旋翼的输出响应

Figure 5 (Color online) Responses of a quadrotor with time-varying disturbance. (a)  $z_E$ ; (b)  $y_E$ ; (c)  $x_E$ ; (d)  $\psi_E$

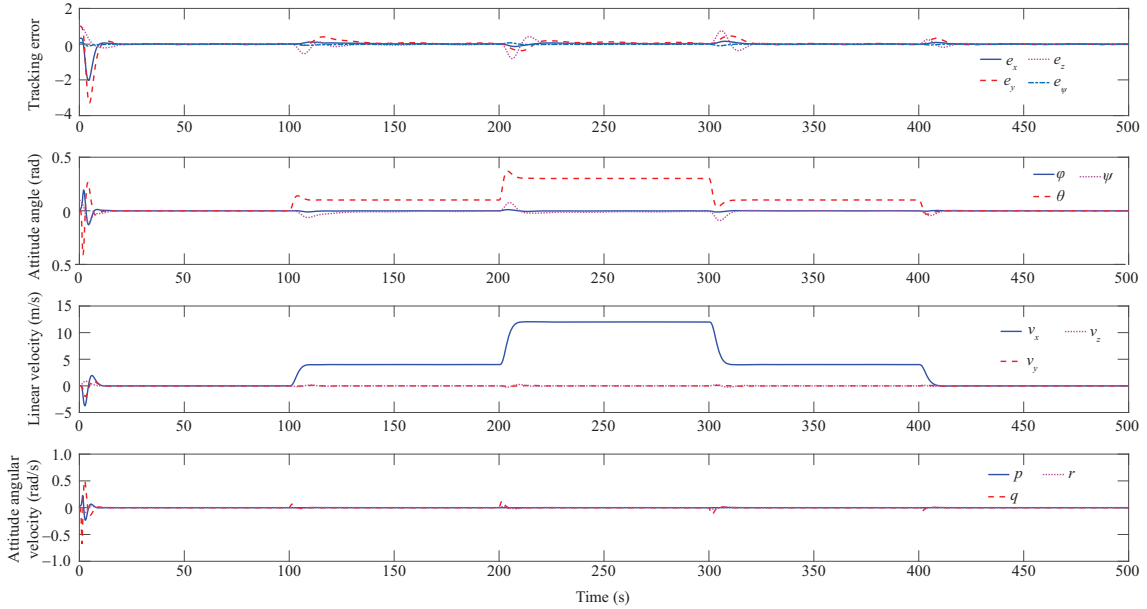


图 6 (网络版彩图) 时变扰动下四旋翼的状态与跟踪误差

Figure 6 (Color online) State and tracking error of a quadrotor with time-varying disturbance

型) 突变为非对角型 (对角型), 相对阶结构也发生了突变, 所以在工况切换时, 系统产生了一个瞬时跟踪误差, 但可以很快收敛至 0, 能够继续实现预定轨迹的追踪. 由此说明所设计控制算法能够很好地实现自适应时变扰动补偿与多工况跟踪.

**对比算法.** 对于四旋翼系统 (6), 设计鲁棒自适应状态反馈控制器. 以沿  $z$  轴垂直升降工况为例, 设计自适应控制器:  $\Delta u(t) = K_1^T \Delta x(t) + K_2 r(t) + K_3(t)$ , 设计过程与第 4 节经补偿重构后的四旋翼系统类似, 此处不再赘述. 将此自适应控制器应用于场景 II 中, 在 0~200 s 内得到  $z$  轴与  $x$  轴的跟踪曲线如图 7(a) 和 (b) 所示. 在 0~100 s 内, 四旋翼沿  $z$  轴垂直起飞至 5 m 后保持悬停, 在此过程中系统的关联矩阵始终为对角型, 且控制相对阶等于扰动相对阶, 系统能够较好地跟踪参考输出. 但 100 s 后, 四旋翼开始沿  $x$  轴飞行, 此时关联矩阵会发生由对角型至非对角型的突变, 相对阶结构也出现了控制相对阶大于扰动相对阶的情况, 由图 7(a) 和 (b) 可知, 此时若不进行控制器切换, 则系统的跟踪

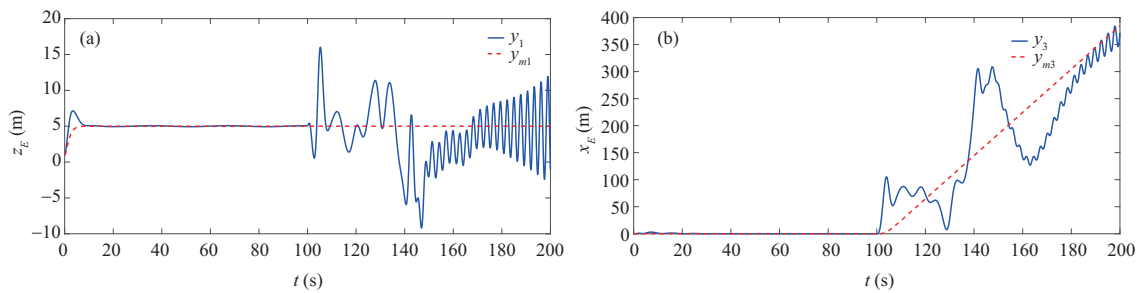


图7 (网络版彩图) 自适应鲁棒控制器作用下四旋翼的响应

Figure 7 (Color online) Responses of a quadrotor with an adaptive robust controller. (a)  $z_E$ ; (b)  $x_E$ 

效果将会变得很差. 由此可进一步说明本文所提出的基于输入-扰动双补偿器的控制算法对于多工况动态突变四旋翼控制的优越性.

## 7 结论

本文着重研究了四旋翼在室外存在风扰动的环境中, 由于变工况导致动态特性突变的自适应控制问题. 为了解决四旋翼在变工况时关联矩阵结构、相对阶结构、高频增益矩阵等动态特性发生突变所造成的控制难题, 文中提出了一种基于输入-扰动双补偿器的自适应扰动抑制方案, 对系统进行补偿并重构, 使得系统具有一致的动态特性, 进而基于重构后的系统设计自适应跟踪控制器与风扰动抑制器. 本文所设计的控制方案可以在无需得知突变发生时刻、不进行控制器切换的情况下实现四旋翼的稳定控制, 并使得闭环系统稳定. 最后通过常值与时变扰动的两种仿真场景验证了所提方案的有效性.

## 参考文献

- Castillo P, Dzul A, Lozano R. Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft. *IEEE Trans Contr Syst Technol*, 2004, 12: 510–516
- Qu Y H, Xing Z W, Yuan D L, et al. Wind field estimation based on position and attitude information of quadrotor in hover. *J Northwestern Polytech Univ*, 2016, 34: 684–690 [屈耀红, 邢哲文, 袁冬莉, 等. 基于悬停四旋翼位置姿态信息的风场估计方法研究. *西北工业大学学报*, 2016, 34: 684–690]
- Liu Z, Yuan C, Zhang Y. Linear parameter varying control of unmanned quadrotor helicopter with mass variation and battery drainage. In: *Proceedings of IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference*, 2016. 1864–1869
- Dong J, He B. Novel fuzzy PID-type iterative learning control for quadrotor UAV. *Sensors*, 2019, 19: 24
- Zhao Z H, Xiao L, Jiang B. Fast nonsingular terminal sliding mode trajectory tracking control of a quadrotor UAV based on extended state observers. *Contr Decis*, 2022, 37: 2201–2210 [赵振华, 肖亮, 姜斌, 等. 基于扩张状态观测器的四旋翼无人机快速非奇异终端滑模轨迹跟踪控制. *控制与决策*, 2022, 37: 2201–2210]
- Liu Y S, Yang S X, Wang W. An active disturbance-rejection flight control method for quad-rotor unmanned aerial vehicles. *Contr Theory Appl*, 2015, 32: 1351–1360 [刘一莎, 杨晟萱, 王伟. 四旋翼飞行器的自抗扰飞行控制方法. *控制理论与应用*, 2015, 32: 1351–1360]
- Ma D L, Xia Y Q, Li T Y, et al. Active disturbance rejection and predictive control strategy for a quadrotor helicopter. *IET Control Theor & Appl*, 2016, 10: 2213–2222
- Liang X, Li J, Zhao F. Attitude control of quadrotor UAV based on LADRC method. In: *Proceedings of Chinese Control and Decision Conference*, Nanchang, 2019. 1924–1929
- Guo L, Yu X, Zhang X, et al. Safety control system technologies for UAVs: review and prospect. *Sci Sin Inform*, 2020, 50: 184–194 [郭雷, 余翔, 张霄, 等. 无人机安全控制系统技术: 进展与展望. *中国科学: 信息科学*, 2020, 50: 184–194]

- 10 Guo L, Chen W H. Disturbance attenuation and rejection for systems with nonlinearity via DOBC approach. *Int J Robust Nonlinear Control*, 2010, 15: 109–125
- 11 Han Q, Liu Z, Su H, et al. Filter-based disturbance observer and adaptive control for Euler-Lagrange systems with application to a quadrotor UAV. *IEEE Trans Ind Electron*, 2023, 70: 8437–8445
- 12 MacKunis W, Wilcox Z D, Kaiser M K, et al. Global adaptive output feedback tracking control of an unmanned aerial vehicle. *IEEE Trans Contr Syst Technol*, 2010, 18: 1390–1397
- 13 Song F, Li Z, Yang S, et al. Anti-disturbance compensation for quadrotor close crossing flight based on deep reinforcement learning. *IEEE Trans Ind Electron*, 2023, 70: 3013–3023
- 14 Zhao W, Liu H, Lewis F L. Data-driven fault-tolerant control for attitude synchronization of nonlinear quadrotors. *IEEE Trans Automat Contr*, 2023, 66: 5584–5591
- 15 Martins L, Cardeira C, Oliveira P. Feedback linearization with zero dynamics stabilization for quadrotor control. *J Intell Robot Syst*, 2021, 101: 7
- 16 Diao C, Xian B, Gu X, et al. Nonlinear control for an underactuated quadrotor unmanned aerial vehicle with parametric uncertainties. In: *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*, Hefei, 2012. 998–1003
- 17 Mukherjee P, Waslander S. Direct adaptive feedback linearization for quadrotor control. In: *Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Minneapolis, 2012
- 18 Zheng X L, Yang X B, Zhao H, et al. Saturated adaptive-law-based backstepping and its applications to a quadrotor hover. *IEEE Trans Ind Electron*, 2022, 69: 13473–13482
- 19 Madani T, Benallegue A. Control of a quadrotor mini-helicopter via full state backstepping technique. In: *Proceedings of Conference on Decision and Control*, San Diego, 2006. 1515–1520
- 20 黄溪流. 一种四旋翼无人直升机飞行控制器的设计. 硕士学位论文. 南京: 南京理工大学, 2010
- 21 Zhao D, Jiang B, Yang H. Backstepping-based decentralized fault-tolerant control of hypersonic vehicles in PDE-ODE form. *IEEE Trans Automat Contr*, 2022, 67: 1210–1225
- 22 Lian S K, Meng W, Lin Z M, et al. Adaptive attitude control of a quadrotor using fast nonsingular terminal sliding mode. *IEEE Trans Ind Electron*, 2022, 69: 1597–1607
- 23 Yu G, Reis J, Cabecinhas D, et al. Reduced-complexity active disturbance rejection controller for quadrotor-slung-load transportation. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2023, 53: 5248–5259
- 24 Chau T. Robust tracking control of a quadrotor in the presence of uncertainty and non-vanishing disturbance. In: *Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Kissimmee, 2015
- 25 Islam S, Liu P X, Saddik A E. Robust control of four-rotor unmanned aerial vehicle with disturbance uncertainty. *IEEE Trans Ind Electron*, 2015, 62: 1563–1571
- 26 Chen F Y, Jiang R Q, Zhang K, et al. Robust backstepping sliding mode control and observer-based fault estimation for a quadrotor UAV. *IEEE Trans Ind Electron*, 2016, 43: 5044–5056
- 27 Li H Y, Wang Y, Yao D Y, et al. Robust adaptive sliding mode attitude control of MQUAVs based on event-triggered mechanism. *Sci Sin Inform*, 2023, 53: 66–80 [李鸿一, 王琰, 姚得银, 等. 基于事件触发机制的多四旋翼无人机鲁棒自适应滑模姿态控制. *中国科学: 信息科学*, 2023, 53: 66–80]
- 28 Wen L, Tao G, Yang H, et al. Aircraft turbulence compensation using adaptive multivariable disturbance rejection techniques. *J Guidance Control Dyn*, 2015, 38: 954–963
- 29 Liang Y, Yang J N, Zhang L X, et al. Switched control design for quadrotor in target tracking with complex intermittent measurements. *J Guidance Control Dyn*, 2023, 46: 206–214
- 30 Guo J X, Tao G, Liu Y. A multivariable MRAC scheme with application to a nonlinear aircraft model. *Automatica*, 2011, 47: 804–812
- 31 Selfridge J M, Tao G. Multivariable output feedback MRAC for a quadrotor UAV. In: *Proceedings of American Control Conference*, Boston, 2016. 492–499
- 32 Sheng Y. Adaptive control techniques for multirotor aircrafts. Dissertation for Ph.D. Degree. Virginia: University of Virginia, 2019
- 33 Sheng Y, Tao G. System characterization and adaptive tracking control of quadrotors under multiple operating conditions. *Guid Navigat Control*, 2021, 01: 2150006
- 34 Wang G X, Sui H H. TSMC based wind resistance research for quad-rotor UAVs. *Electr Opt Control*, 2018, 3: 87–91
- 35 Hoffmann G, Huang H M, Waslander S, et al. Autonomous quadrotor helicopter testbed design, control, and

- experiments. In: Proceedings of AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Hilton Head, 2007. 6461–6481
- 36 Xiao Y L, Jin C J. The Principle of Flight in Atmospheric Disturbance. Beijing: National Defense Industry Press, 1993
- 37 Isidori A. Nonlinear Control Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1995
- 38 Tao G. Adaptive Control Design and Analysis. New York: John Wiley and Sons, 2003
- 39 Wolovich W A, Falb P L. Invariants and canonical forms under dynamic compensation. SIAM J Control Optim, 1975, 14: 996–1008
- 40 Singh R, Narendra K. Prior information in the design of multivariable adaptive controllers. IEEE Trans Automat Contr, 1984, 29: 1108–1111

## Adaptive wind disturbance rejection technique of a quadrotor with uncertain dynamic mutations under varying operating conditions

Yujie ZHANG, Liyan WEN\*, Bin JIANG & Ruiyun QI

*College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*

\* Corresponding author. E-mail: wenliyan\_2017@nuaa.edu.cn

**Abstract** In this paper, considering the influence of wind disturbance and the uncertainty of dynamic mutation due to flight under variable conditions, an adaptive turbulent wind disturbance suppression scheme based on the design of input-disturbance dual compensator is proposed to ensure the stability and output asymptotic tracking performance of the quadrotor system. Firstly, the quadrotor in wind field environment is modeled. The dynamics under different operating conditions are analyzed, and the manifestation of the dynamic mutation and the control problems are described. Then, a method based on an input-disturbance dual compensator is designed to reconstruct the system, which solves the problems of difficult decoupling control when the interactor matrix mutates to a non-diagonal type, and the mutation of controller structure when the relative degree structure mutates. Based on the reconstructed system, an adaptive state feedback controller is designed to ensure the stabilization, disturbance suppression, and asymptotic output tracking performance of the quadrotor. Finally, the stability of the designed controller is proven and the effectiveness of the proposed control algorithm is verified by simulation.

**Keywords** quadrotor, wind disturbance suppression, dynamic mutation, system reconstruction, adaptive control