



# 扰动线性多智能体系统的分布式资源分配算法

时侠圣<sup>1,2,3</sup>, 孙长银<sup>1,2,3</sup>, 穆朝絮<sup>1,4\*</sup>

1. 安徽大学自主无人系统技术教育部工程研究中心, 合肥 230601
  2. 安徽大学安徽省无人系统与智能技术工程研究中心, 合肥 230601
  3. 安徽大学人工智能学院, 合肥 230601
  4. 天津大学电气与自动化信息工程学院, 天津 300192
- \* 通信作者. E-mail: cxmu@tju.edu.cn

收稿日期: 2023-04-12; 修回日期: 2023-06-28; 接受日期: 2023-08-30; 网络出版日期: 2024-04-10

国家创新研究群体科学基金 (批准号: 61921004) 和国家自然科学基金重点项目 (批准号: 62136008, 62236002) 资助

**摘要** 针对一般异构线性多智能体系统的分布式资源分配问题, 结合智能体动力学特性设计一类分布式优化算法, 旨在实现扰动抑制的同时完成资源的最优分配. 面对扰动模型已知干扰信号, 本文利用智能体状态信息设计一种自适应分布式优化算法, 其中拉格朗日 (Lagrange) 乘子对偶变量控制参数自动增加, 直至拉格朗日乘子对偶变量达到一致. 当智能体状态信息不可测时, 本文将上述算法修改为基于输出反馈的分布式优化算法. 当全局成本函数强凸时, 借助拉萨尔 (LaSalle) 不变性引理证明上述所提算法渐近收敛到全局最优解. 面对未知扰动信号, 本文利用扩张状态观测器技术设计一种分布式优化算法. 当未知扰动信号为常数或其微分趋于零时, 利用李雅普诺夫 (Lyapunov) 理论证明上述算法渐近收敛至全局最优解. 最后利用数值仿真验证上述算法有效.

**关键词** 异构多智能体系统, 资源分配, 自适应通信权重, 状态反馈, 输出反馈, 未知扰动

## 1 引言

资源分配问题作为分布式优化领域的重要研究热点之一, 已被广泛应用于许多实际工程中, 包括智能电网经济调度问题、移动通信系统中的信道资源调度与分配问题和车辆到一切 (vehicle-to-everything) 通信中频谱资源分配问题等<sup>[1~3]</sup>, 其中每个节点 (或智能体) 拥有不同的资源决策变量. 资源可以是能量、信息、材料、厂房生产能力和机器数量等. 然而, 经典的集中式优化方法无法有效应对网络架构复杂、环境不确定性强和通信负担较重等大规模网络下资源分配问题. 因此, 近些年来许多离散时间分布式资源分配算法被设计出来, 包括余量算法<sup>[4]</sup>、二分法<sup>[5]</sup>、投影算子法<sup>[6]</sup>等. 然而, 上述基于梯度跟踪策略的离散时间算法在求取资源分配量时需知晓成本函数对应梯度函数的逆函数或

**引用格式:** 时侠圣, 孙长银, 穆朝絮. 扰动线性多智能体系统的分布式资源分配算法. 中国科学: 信息科学, 2024, 54: 911–926, doi: 10.1360/SSI-2023-0093  
Shi X S, Sun C Y, Mu C X. Distributed resource allocation algorithms for linear multi-agent systems with disturbances (in Chinese). Sci Sin Inform, 2024, 54: 911–926, doi: 10.1360/SSI-2023-0093

在分布式资源分配算法中内嵌一局部优化问题, 计算量颇大. 此外, 上述算法多关注于设计分布式优化算法本身而很少关注智能体动力学特性. 但在一些优化问题中, 为获得最佳性能指标, 智能体动力学特性需要考虑进来. 比如, 分布式最优潮流<sup>[7]</sup>和无人机救援的能量最优路径规划问题<sup>[8]</sup>. 其次, 连续时间算法可以通过微分包含、李雅普诺夫 (Lyapunov) 稳定性理论等获得更强的收敛性条件, 例如固定时间收敛等. 基于此, 最近有部分学者将关注点转移至如何根据智能体动力学特性设计一系列连续时间分布式优化算法. 例如, 单积分系统<sup>[9,10]</sup>、二阶积分系统<sup>[11]</sup>、欧拉-拉格朗日 (Euler-Lagrange) 系统<sup>[12]</sup>、线性系统<sup>[13]</sup>和非线性系统<sup>[14]</sup>等.

众所周知, 在许多实际控制系统中, 外源干扰不可避免<sup>[15]</sup>. 而如何对干扰进行抑制是近年来分布式优化算法设计需要特殊考虑的问题之一. 基于连续时间系统, 已有一些相关研究成果被提出. 例如, 对于系统结构已知干扰信号, 文献<sup>[16]</sup>设计一种基于内模原理的指数收敛分布式事件触发通信优化算法. 此外, 同样基于内模原理, 文献<sup>[17,18]</sup>考虑二阶积分系统的干扰抑制问题, 并且文献<sup>[18]</sup>基于自适应控制技术和状态积分反馈控制技术解决了不匹配常值扰动抑制问题. 文献<sup>[19]</sup>针对由常数和未知频率正弦信号组成的有界扰动设计一种自适应内模观测器, 实现算法精确求解. 针对更广泛的未知扰动信号, 文献<sup>[20]</sup>利用干扰观测器和分布式解耦控制方法设计一种分布式优化算法. 对于更复杂的非线性扰动系统, 一些非线性内模观测器也被设计出来<sup>[21~23]</sup>. 除上述基于内模原理方法之外, 文献<sup>[24]</sup>利用扩张状态观测器设计一种一阶多智能体的自抗扰分布式优化算法. 文献<sup>[25]</sup>利用幂指数和有限时间干扰观测器模型设计一种前馈反馈复合控制框架, 旨在解决二阶多智能体系统下一类变化率有界的未知扰动抑制问题. 利用滑模控制技术, 一类有限时间分布式优化被设计出来, 有效解决多智能体系统的扰动抑制问题<sup>[26~28]</sup>. 滑模控制理论上可以实现扰动抑制问题, 但通常也会导致不连续的控制输入和物理系统的抖动问题.

而针对扰动系统下多智能体系统资源分配问题, 基于文献<sup>[16]</sup>的扰动抑制方法, 文献<sup>[29,30]</sup>研究一般线性多智能体系统和二阶多智能体系统中资源分配问题. 文献<sup>[31]</sup>利用临近算子设计一类非凸分布式优化算法, 且设计一类内模观测器实现对模型已知扰动信号的抑制. 基于嵌入式控制技术, 文献<sup>[32]</sup>设计一种状态和输出反馈控制分布式优化算法, 用以解决二阶扰动系统资源分配问题.

上述所提算法虽能有效解决一阶或二阶多智能体系统资源分配算法的干扰抑制问题, 但却无法将上述成果直接应用于更广泛的线性多智能体系统. 此外, 上述研究成果多针对结构参数已知的干扰信号, 而未能对未知的干扰信号作出有效抑制. 由于许多智能体通过线性动力学建模或者在某些平衡点线性化, 因此, 研究一般线性系统的资源分配问题非常重要且有意义<sup>[33]</sup>. 基于此, 本文考虑一般线性多智能体扰动系统的分布式资源分配问题. 首先, 针对结构已知的外部干扰信号, 本文基于内模原理设计一种新颖的自适应分布式优化算法. 其次, 当智能体状态信息不可测时, 本文利用状态观测器设计一种基于输出反馈的分布式资源分配算法. 最后, 面对外部未知扰动信号, 本文设计一种干扰信号观测器, 当干扰信号为常数时, 所设计算法指数收敛至精确解; 当干扰信号的变化率有界时, 通过调整观测器控制参数, 使得所设计算法可收敛至最优解的无限小邻域内.

本文研究难点和所提算法创新点如下: (1) 相比于一阶多智能体系统分布式资源分配问题, 本文所研究对象为一般异构线性多智能体系统, 其控制输入无法直接作用于智能体资源决策变量. 此外, 本文将多智能体网络的全局等式约束考虑进来. 由此引入的多变量特性进一步增加了资源分配算法设计和分析难度. 为此, 本文利用解耦思想和跟踪控制思想, 结合 KKT 条件设计一系列分布式优化算法. (2) 与文献<sup>[29,31]</sup>的已知扰动模型相比, 本文同时将已知和未知干扰信号对算法设计的影响考虑进来. 而如何在多变量系统中对扰动信号进行精确跟踪和抑制是另一研究难点. 为此, 针对已知扰动模型, 本文采用内模原理设计一类分布式资源分配算法, 并实现了控制参数的自适应变化, 达到更快

的收敛速度. 此外, 为解决系统状态量不可测情形下资源分配问题, 基于 Luenberger 观测技术, 设计一类输出反馈控制分布式资源分配算法. 针对未知扰动模型, 本文设计一种扩张状态观测器, 实现扰动信号的抑制.

本文后续内容结构如下: 第 2 节呈现问题描述以及预备知识, 其中, 预备知识包括线性智能体动力学特性、资源分配问题、代数图论等. 第 3 节, 首先, 进行已知扰动下算法设计和收敛性分析; 其次, 给出基于输出反馈的分布式资源分配算法; 第 4 节给出未知扰动下算法设计与收敛性分析. 第 5 节给出多组仿真实验; 第 6 节给出了本文的总结与展望.

## 2 问题描述及预备知识

在后续描述中, 令  $\mathbb{R}$  和  $\mathbb{R}^m$  分别表示一维实数集和  $m$  维实空间.  $\otimes$  表示克罗内克 (Kronecker) 积, 对于矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} := [a_{ij}\mathbf{B}] \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ .  $\nabla f(\mathbf{x})$  表示函数  $f(\mathbf{x})$  的梯度函数. 对于方阵  $\mathbf{A}$ ,  $\rho_i(\mathbf{A})$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $i$  小特征根, 其秩记为  $\text{rank}\{\mathbf{A}\}$ . 对于一组向量  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ ,  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_n^T]^T$  表示其聚合向量. 对于一组矩阵  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ ,  $\text{diag}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n\}$  表示由其组成的块对角矩阵.

### 2.1 问题描述

本文所研究的异构线性多智能体系统包含  $n$  个智能体节点, 每个智能体  $i, i = 1, 2, \dots, n$ , 动力学模型描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{q}_i(t), \\ \mathbf{y}_i(t) &= \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i(t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ ,  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^q$  和  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{p_i}$  分别表示智能体  $i$  的状态、控制输入、输出和未知外源干扰信号. 此外常数矩阵  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times p_i}$ ,  $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{q \times n_i}$  为智能体  $i$  的结构参数, 分别表示状态矩阵、输入矩阵和输出矩阵. 为书写简便, 后续分析中默认时间变量为  $t$ .

**假设 1** ([34])  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$  可控,  $(\mathbf{C}_i, \mathbf{A}_i)$  可观测,  $\mathbf{C}_i$  行满秩, 且下式解  $(\mathbf{\Gamma}_{1,i}, \mathbf{\Gamma}_{2,i}, \mathbf{\Omega}_i)$  存在:

$$\mathbf{B}_i \mathbf{\Gamma}_{1,i} = \mathbf{\Omega}_i, \mathbf{B}_i \mathbf{\Gamma}_{2,i} = \mathbf{A}_i \mathbf{\Omega}_i, \mathbf{C}_i \mathbf{\Omega}_i = \mathbf{I}_q, \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{\Gamma}_{1,i} \in \mathbb{R}^{p_i \times q}$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{2,i} \in \mathbb{R}^{p_i \times q}$ ,  $\mathbf{\Omega}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times q}$ .

**注释 1** 本文假设条件 1 与文献 [29, 35] 相比要弱一些. 文献 [29, 35] 对系统秩的要求表明系统 (1) 是全驱动系统, 且控制输入数量必须大于系统维度数量的一半 [36, 37]. 文献 [38] 虽然减弱了系统秩要求, 且将现有一阶多智能体系统分布式优化算法直接推广至一般线性异构多智能体系统. 但并不能完全包含本文假设条件 [39]. 此外, 假设 1 中可控性条件确保基于状态反馈控制能任意设置极点, 即矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_2$  的特征根可以任意设置, 其中,  $\mathbf{K}_2$  为状态反馈矩阵,  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  分别表示由  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$  和  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n$  组成的块对角矩阵. 可观测性条件确保基于输出反馈能够任意设计极点, 且能够重构智能体状态信息.

本文旨在针对系统 (1) 设计有效的控制输入  $\mathbf{u}_i$  使得所有智能体协同实现最优输出控制. 即解决如下分布式约束优化问题:

$$\min f(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{y}_i) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{d}_i, \quad (3)$$

其中,  $f(\mathbf{y})$  为全局目标函数,  $f_i(\mathbf{y}_i)$  是智能体  $i$  的局部成本函数,  $\mathbf{d}_i$  表示智能体  $i$  的期望资源分配量. 资源分配问题在很多实际工程中都存在广泛应用. 以智能电网经济调度问题为例<sup>[40]</sup>, 电网经济调度旨在负荷总功率需求与发电机组总出力达到平衡的约束下, 最小化所有发电机组的发电成本. 针对传统火力发电机组, 其成本函数可描述为二次函数<sup>[40]</sup>. 针对新型风力发电机组, 其成本函数由二次函数和指数函数组合而成<sup>[5]</sup>.

为完成后续算法的收敛性分析, 下面的假设是必要的.

**假设2** 全局成本函数  $f(\mathbf{y})$  可微且  $\mu$ -强凸 ( $\mu > 0$ ), 即有

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y})) \geq \mu \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^q. \quad (4)$$

**注释2** 假设2的强凸性保证了问题(3)最优解的唯一性. 此假设已广泛应用于此类问题的算法设计中, 如离散时间算法<sup>[4,5]</sup>和连续时间算法<sup>[6,29,31]</sup>, 这将有助于作者分析所设计算法的收敛性.

**引理1** (KKT条件 (Karush-Kuhn-Tucker conditions)<sup>[41]</sup>) 若假设2成立, 则  $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^{nq}$  是问题(3)的最优解, 当且仅当存在  $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^q$ , 使得  $(\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  满足

$$\nabla f(\mathbf{y}^*) + \mathbf{1}_n \otimes \boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{d}_i. \quad (5)$$

## 2.2 代数图论

针对式(1)所示的多智能体系统, 智能体节点间的双向/无向通信链路可以用图  $G = (\mathcal{V}, E, \mathcal{A})$  表示, 其中  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$  表示节点集合,  $E$  表示节点间的通信链路集合,  $\mathcal{A}$  表示各节点间的通信权重. 若存在有序对  $(i, j) \in E$ , 则节点  $i$  和  $j$  可实现消息相互传递, 此时有  $a_{ij} = a_{ji} > 0$ , 即  $\mathcal{A}$  为对称矩阵. 此外, 本文不考虑节点存在自环, 即  $a_{ii} = 0$ . 若网络  $G$  中存在一组有序对  $(i, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_k, j)$ , 则称节点  $j$  和  $i$  相互可达. 若网络  $G$  任意一点和其他任意节点都相互可达, 则称网络  $G$  为连通图. 网络  $G$  的拉普拉斯 (Laplace) 矩阵定义为  $\mathbf{L} = [\mathbf{L}_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 其中  $\mathbf{L}_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ ,  $\mathbf{L}_{ij} = -a_{ij}, \forall j \neq i$ . 所以必有结论  $\mathbf{L}\mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n$ , 即矩阵  $\mathbf{L}$  行和为零.

**假设3** 本文假设通信网络  $G$  为无向连通图.

## 3 干扰模型已知控制算法

面对扰动多智能体系统(1), 本节将利用引理1和拉格朗日乘子法针对问题(3)设计一类分布式优化算法. 首先, 设计一类干扰模型已知情形下分布式优化算法. 其次, 设计输出反馈控制策略将上述算法推广至智能体状态信息不可测情形, 并给出算法收敛性分析.

### 3.1 状态反馈分布式优化算法

本小节考虑已知扰动模型下算法设计. 首先, 假设扰动由如下外源系统产生:

$$\dot{\mathbf{w}}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{w}_i, \quad \mathbf{q}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{w}_i, \quad \forall i \in \mathcal{V}, \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $\mathbf{S}_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ ,  $\mathbf{D}_i \in \mathbb{R}^{p_i \times m_i}$ . 上述系统临界稳定且可观测<sup>[20]</sup>. 如文献[13, 29, 31]所述, 系统矩阵  $\mathbf{S}_i$  特征根都在虚轴上. 由此可知局部扰动信号  $\mathbf{q}_i$  有界. 虽然上述扰动系统结构已知, 但是对控制器而言, 由于系统(6)中变量  $\mathbf{w}_i$  初始状态未知, 所以扰动量  $\mathbf{q}_i$  为未知信号.

为实现所设计算法对干扰的抑制, 本文基于内模原理设计如下扰动观测器:

$$\dot{v}_i = -S_i(K_{1,i}x_i - v_i) + K_{1,i}(B_i u_i + A_i x_i) - K_{1,i}B_i D_i(K_{1,i}x_i - v_i), \quad \forall i \in \mathcal{V}, \quad (7)$$

其中,  $v_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ , 矩阵  $K_{1,i} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$  为反馈矩阵且使得  $S_i + K_{1,i}B_i D_i$  Hurwitz 稳定, 即矩阵  $S_i + K_{1,i}B_i D_i$  的特征根都具有负实部.

由引理 2 可知, 解决问题 (3) 的关键是找到全局最优拉格朗日乘子. 为实现算法分布式演化, 本文为每个智能体都分配一个本地拉格朗日乘子  $\lambda_i \in \mathbb{R}^q$ , 以此实现问题 (3) 中全局等式的解耦. 基于状态反馈策略和梯度下降法, 并利用内模观测器抑制系统的扰动, 每个智能体  $i, \forall i \in \mathcal{V}$ , 将通过以下算法自主收敛到问题 (3) 的最优分配方案:

$$u_i = -K_{2,i}x_i + \Gamma_{1,i}\dot{\eta}_i - (\Gamma_{2,i} - K_{2,i}\Omega_i)\eta_i + D_i(K_{1,i}x_i - v_i), \quad (8a)$$

$$\dot{\eta}_i = -\alpha \nabla f_i(y_i) - \lambda_i, \quad (8b)$$

$$\dot{\lambda}_i = y_i - d_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} a_{ij} (\lambda_i - \lambda_j) - z_i, \quad (8c)$$

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} a_{ij} (\lambda_i - \lambda_j), \quad (8d)$$

$$\dot{\beta}_{ij} = \gamma_{ij} a_{ij} \|\lambda_i - \lambda_j\|^2, \quad (8e)$$

其中, 控制参数  $\alpha > 0, \gamma_{ij} = \gamma_{ji} > 0$ , 反馈矩阵  $K_{2,i} \in \mathbb{R}^{p_i \times n_i}$ . 我们利用变量  $v_i - K_{1,i}x_i$  跟踪干扰中间变量  $w_i$ . 由于矩阵  $S_i + K_{1,i}B_i D_i$  Hurwitz 稳定, 所以当  $t \rightarrow \infty$  时有  $r_i \rightarrow 0$ , 其中  $r_i = w_i + K_{1,i}x_i - v_i$ . 所以利用观测器  $v_i$  可实现对扰动信号值精确跟踪. 变量  $\eta_i$  用于获取问题 (3) 的最优解, 并将反馈量  $\Omega_i \eta_i$  作为智能体状态量  $x_i$  的跟踪目标, 最终实现智能体输出量  $y_i$  精确跟踪变量  $\eta_i$ . 辅助变量  $z_i \in \mathbb{R}^q$  用来弥补系统输出值  $y_i$  与期望资源量  $d_i$  之间的差值. 辅助变量  $z_i$  记录反馈项  $\sum_{j=1}^n \beta_{ij} a_{ij} (\lambda_i - \lambda_j)$  的历史信息, 并与之一起实现对拉格朗日乘子  $\lambda_i$  的比例积分控制架构. 变量  $z_i$  初始状态需满足  $\sum_{i=1}^n z_i(0) = 0$ , 为简便, 可令  $z_i(0) = 0$ . 变量  $x_i, y_i, \lambda_i, \eta_i, v_i, \forall i \in \mathcal{V}$  初始自由. 此外, 我们对节点间通信权重设置自适应控制策略, 给定  $\beta_{ij}$  初始值, 随后  $\beta_{ij}$  一直处于增长趋势直至邻居智能体间的对偶变量  $\lambda_i$  实现一致.

**注释3** 与文献 [13] 中分布式凸优化算法相比, 本文将网络的全局等式约束和干扰信号加入进来, 且本文所设计算法降低智能体系统结构参数矩阵秩要求, 扩大其适用范围. 与文献 [31] 中抗扰动分布式资源分配算法相比, 本文讨论更一般线性多智能体系统, 具有更广的适用性. 与文献 [29] 相比, 本文所设计算法不需要对扰动信号结构参数进行变换. 此外, 为提高算法的收敛速度并避免对拉普拉斯特征根求解, 本文设计自适应参数控制而非文献 [29] 中固定控制参数.

令  $x, r, z, \lambda, \eta, v, d, \nabla f$  分别表示其聚合变量, 矩阵  $A, B, C, K_1, K_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \Omega, S$  分别表示其聚合对角块矩阵. 此时, 可将算法 (8) 写成如下紧凑形式:

$$\dot{x} = (A - BK_2)(x - \Omega\eta) + \Omega\dot{\eta} + BDr, \quad (9a)$$

$$\dot{\eta} = -\alpha \nabla f(y) - \lambda, \quad (9b)$$

$$\dot{\lambda} = y - d - (L_\beta \otimes I_q)\lambda - z, \quad (9c)$$

$$\dot{z} = (\mathbf{L}_\beta \otimes \mathbf{I}_q)\boldsymbol{\lambda}, \quad (9d)$$

$$\dot{\beta}_{ij} = \gamma_{ij}a_{ij}\|\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_j\|^2, \quad (9e)$$

$$\dot{r} = (\mathbf{S} + \mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{D})\mathbf{r}, \quad (9f)$$

其中自适应拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}_\beta$  定义为  $L_{\beta ij} = -a_{ij}\beta_{ij}$ ,  $L_{\beta ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}\beta_{ij}$ .

在给出算法收敛性分析之前, 先给出一个有关问题 (3) 最优解的引理.

**引理2** 若假设 1~3 成立, 假定系统 (9) 平衡点为  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \mathbf{z}^*, \mathbf{r}^*)$ , 则  $\mathbf{y}^*$  为问题 (3) 最优解.

**证明** 首先对式 (9d) 左乘单位向量, 结合网络  $G$  无向性可得  $\sum_{i=1}^n \dot{z}_i(t) = 0$ , 即  $\sum_{i=1}^n z_i(t) = \sum_{i=1}^n z_i(0)$ . 其次, 利用变量  $z_i$  的零初始和特性, 可得  $\sum_{i=1}^n z_i(t) = 0, \forall t \geq 0$ . 若  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \mathbf{z}^*, \mathbf{r}^*)$  为系统 (9) 平衡点, 则有

$$0 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_2)(\mathbf{x}^* - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\eta}^*) + \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{r}^*, \quad (10a)$$

$$0 = \alpha \nabla f(\mathbf{y}^*) + \boldsymbol{\lambda}^*, \quad (10b)$$

$$0 = \mathbf{y}^* - \mathbf{d} - (\mathbf{L}_\beta \otimes \mathbf{I}_q)\boldsymbol{\lambda}^* - \mathbf{z}^*, \quad (10c)$$

$$0 = (\mathbf{L}_\beta \otimes \mathbf{I}_q)\boldsymbol{\lambda}^*, \quad (10d)$$

$$0 = (\mathbf{S} + \mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{D})\mathbf{r}^*. \quad (10e)$$

利用结论  $\sum_{i=1}^n z_i(t) = 0, \forall t \geq 0$  和网络  $G$  的无向性 (矩阵  $\mathbf{L}_\beta$  列和为零特性), 对式 (10c) 两端左乘单位向量, 可知  $\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{d}_i$ , 问题 (3) 等式约束满足. 由于  $(\mathbf{L}_\beta \otimes \mathbf{I}_q)\boldsymbol{\lambda}^* = 0$ , 结合矩阵  $\mathbf{L}_\beta$  行和为零特性, 可得  $\boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^q$ , 进而有结论  $\nabla f(\mathbf{y}^*) = \frac{1}{\alpha} \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^q$ . 最终由引理 1 可知  $\mathbf{y}^*$  是问题 (3) 的最优解.

**注释4** 在引理 2 分析过程中利用了矩阵  $\mathbf{L}_\beta$  列和为零、行和为零特性, 其中行和为零确保拉格朗日乘子  $\boldsymbol{\lambda}$  的一致性, 列和为零确保问题 (3) 中等式约束的成立. 如文献 [6] 所述, 一般情况下矩阵  $\mathbf{L}_\beta$  元素值越大, 算法 (8) 收敛越快. 且矩阵  $\mathbf{L}_\beta$  元素值不会致使系统 (9) 平衡点发生变化. 在上述引理中我们发现  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_2)(\mathbf{x}^* - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\eta}^*) = 0$ . 由于矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_2$  Hurwitz 稳定, 所以有  $\mathbf{x}^* = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\eta}^*$ . 结合假设 1, 有结论  $\mathbf{C}\mathbf{x}^* = \mathbf{C}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\eta}^* = \mathbf{y}^*$ . 可以看出中间变量  $\boldsymbol{\eta}$  至关重要, 它沿着梯度  $\nabla f(\mathbf{y})$  方向下降, 并驱动系统  $\mathbf{x}$  更新. 此时可以发现算法 (9) 实质上是一套跟踪控制系统, 参考变量为  $\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\eta}$ .

**定理1** 若假设 1~3 成立, 且控制参数满足  $\alpha > 0, \gamma_{ij} = \gamma_{ji} > 0, \forall i, j \in \mathcal{V}$ . 多智能体系统 (1) 在状态反馈控制策略 (8) 作用下输出变量  $\mathbf{y}$  渐近收敛到问题 (3) 的最优解.

**证明** 令  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*, \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^*, \bar{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*, \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{z} - \mathbf{z}^*, \bar{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^*$  和  $\nabla \bar{f} = \nabla f(\mathbf{y}) - \nabla f(\mathbf{y}^*)$ . 考虑如下候选函数:

$$V_1 = \frac{1+\rho}{2} \|\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}\|^2 + \frac{\rho}{2} \|\bar{\boldsymbol{\lambda}}\|^2 + \frac{1}{2} \|\bar{\boldsymbol{\lambda}} + \bar{\mathbf{z}}\|^2, \quad (11)$$

其中自由常数  $\rho$  满足  $\rho > \max\{0, \frac{2}{\alpha\mu} - 1\}$ . 则  $V_1$  在系统 (9) 上的微分为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= (1+\rho)(C\bar{x})^T A_c(\bar{x} - \Omega\bar{\eta}) - \alpha(1+\rho)(C\bar{x})^T \nabla \bar{f} - (1+\rho)(C\bar{x})^T \bar{\lambda} - \rho\bar{\lambda}^T(L_\beta \otimes I_q)\bar{\lambda} \\ &\quad + (1+\rho)(C\bar{x})^T B D r + \rho\bar{y}^T \bar{\lambda} - \rho\bar{\lambda}^T \bar{z} + (\bar{\lambda} + \bar{z})^T (\bar{y} - \bar{z}) \\ &\leq (1+\rho)(C\bar{x})^T A_c(\bar{x} - \Omega\bar{\eta}) + (1+\rho)(C\bar{x})^T B D r \\ &\quad - \alpha\mu(1+\rho)\|C\bar{x}\| - \rho\bar{\lambda}^T(L_\beta \otimes I_q)\bar{\lambda} - \bar{z}^T \bar{z} + \bar{z}^T \bar{y} + (1+\rho)\bar{z}^T \bar{\lambda} \\ &\leq \frac{(1+\rho)\|A_c\|^2}{\alpha\mu}\|\bar{x} - \Omega\bar{\eta}\|^2 + \frac{(1+\rho)\|BD\|^2}{\alpha\mu}\|r\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\alpha\mu(1+\rho)\|C\bar{x}\|^2 - \rho\bar{\lambda}^T(L_\beta \otimes I_q)\bar{\lambda} - \frac{1}{2}\|\bar{z}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + (1+\rho)^2\|\bar{\lambda}\|^2, \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $A_c = A - BK_2$ . 在式 (12) 中, 基于 Young 不等式, 利用如下结果:

$$\begin{aligned} (1+\rho)(C\bar{x})^T A_c(\bar{x} - \Omega\bar{\eta}) &\leq \frac{\alpha\mu(1+\rho)}{4}\|C\bar{x}\|^2 + \frac{(1+\rho)\|A_c\|^2}{\alpha\mu}\|\bar{x} - \Omega\bar{\eta}\|^2, \\ (1+\rho)(C\bar{x})^T B D r &\leq \frac{\alpha\mu(1+\rho)}{4}\|C\bar{x}\|^2 + \frac{(1+\rho)\|BD\|^2}{\alpha\mu}\|r\|^2, \\ (1+\rho)\bar{z}^T \bar{\lambda} &\leq \frac{1}{4}\|\bar{z}\|^2 + (1+\rho)^2\|\bar{\lambda}\|^2, \\ \bar{z}^T \bar{y} &\leq \frac{1}{4}\|\bar{z}\|^2 + \|\bar{y}\|^2. \end{aligned} \quad (13)$$

令候选函数  $V_2 = (\bar{x} - \Omega\bar{\eta})^T Q(\bar{x} - \Omega\bar{\eta})$ , 由于矩阵  $A_c$  Hurwitz 稳定, 所以存在正定阵  $Q$  使得  $A_c^T Q + Q A_c = -\frac{3(1+\rho)\|A_c\|^2}{\alpha\mu} I_N$ , 其中  $N = \sum_{i=1}^n n_i$ . 则  $V_2$  在系统 (9) 上的微分为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= (\bar{x} - \Omega\bar{\eta})^T (A_c^T Q + Q A_c)(\bar{x} - \Omega\bar{\eta}) + 2(\bar{x} - \Omega\bar{\eta})^T Q B D r \\ &\leq -\frac{2(1+\rho)\|A_c\|^2}{\alpha\mu}\|\bar{x} - \Omega\bar{\eta}\|^2 + \frac{\alpha\mu\|QBD\|^2}{(1+\rho)\|A_c\|^2}\|r\|^2. \end{aligned} \quad (14)$$

类似地, 令候选函数  $V_3 = r^T P r$ , 其中, 正定矩阵  $P$  满足  $S_c^T P + P S_c = -(\frac{\alpha\mu\|QBD\|^2}{(1+\rho)\|A_c\|^2} + \frac{(1+\rho)\|BD\|^2}{\alpha\mu} + 1)I_N$ , 矩阵  $S_c$  定义为  $S_c = S + K_1 B D$ ,  $\bar{N} = \sum_{i=1}^n m_i$ . 进而有

$$\dot{V}_3 = -\left(\frac{\alpha\mu\|QBD\|^2}{(1+\rho)\|A_c\|^2} + \frac{(1+\rho)\|BD\|^2}{\alpha\mu} + 1\right)\|r\|^2. \quad (15)$$

令候选函数  $V_4 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{(\sqrt{\rho}\beta_{ij} - \frac{\sigma}{\sqrt{\rho}})^2}{4\gamma_{ij}}$ , 其中常数  $\sigma$  满足  $\sigma > \frac{(1+\rho)^2}{\rho_2(L)}$ . 则有结论

$$\dot{V}_4 = \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} a_{ij} \|\lambda_i - \lambda_j\|^2 - \frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \|\lambda_i - \lambda_j\|^2 = \rho\bar{\lambda}^T(L_\beta \otimes I_q)\bar{\lambda} - \sigma\bar{\lambda}^T(L \otimes I_q)\bar{\lambda}. \quad (16)$$

综合定义候选函数  $V(x, y, \lambda, \eta, z, r) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$ , 从上述函数定义很容易发现  $V$  关于变量  $\text{col}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\eta}, \bar{z}, r)$  和  $\beta_{ij}$  径向无界, 且为正定函数. 结合式 (12), (14)~(16), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{(1+\rho)\|A_c\|^2}{\alpha\mu}\|\bar{x} - \Omega\bar{\eta}\|^2 - \frac{\alpha\mu(1+\rho) - 2}{2}\|C\bar{x}\| - (\sigma\rho_2(L) - (1+\rho)^2)\|\bar{\lambda}\|^2 - \frac{1}{2}\|\bar{z}\|^2 - \|r\|^2 \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

由式 (17) 可知  $\dot{V}$  半负定, 故  $V$  为李雅普诺夫函数. 进而发现  $\text{col}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\eta}, \bar{z}, \bar{r})$  和  $\beta_{ij}$  有界. 此外, 由于  $\beta_{ij}$  单调非减, 所以其极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_{ij}$  存在. 基于拉萨尔 (LaSalle) 不变性原理, 可知系统 (9) 收敛至  $\{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\eta}, \bar{z}, \bar{r}) | \dot{V}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\eta}, \bar{z}, \bar{r}) = 0\}$  的最大不变集. 由式 (17) 可知  $\bar{y} = \mathbf{y}^*, \bar{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*, \bar{z} = \mathbf{z}^*, \bar{r} = \mathbf{r}^*$ . 结合式 (9b) 和  $\bar{y} = \mathbf{y}^*, \bar{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*$  可得  $\bar{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$ . 同理, 结合式 (17) 和  $\bar{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$ , 可得  $\bar{x} = \mathbf{x}^*$ . 综合可知  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\eta}, \bar{z}, \bar{r})$  为算法 (9) 的平衡点. 从而可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*$ , 即变量  $\mathbf{y}$  收敛至问题 (3) 的最优解.

### 3.2 输出反馈分布式优化算法

在前面章节中, 我们针对已知模型扰动信号下异构线性多智能体系统设计分布式资源分配算法, 然而在上述算法中, 智能体状态量  $\mathbf{x}_i$  被用于反馈控制, 即基于状态的反馈控制算法. 但在实际应用中, 一部分状态信息难以获取, 此时上述算法失效. 为解决状态信息不可测情形异构线性多智能体系统的分布式资源分配算法, 基于文献 [42] 中状态观测策略, 利用变量  $\hat{\mathbf{x}}_i$  估计真实状态信息  $\mathbf{x}_i$ . 针对智能体  $i, \forall i \in \mathcal{V}$ , 具体算法设计如下:

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_{2,i}\hat{\mathbf{x}}_i + \boldsymbol{\Gamma}_{1,i}\dot{\boldsymbol{\eta}}_i - (\boldsymbol{\Gamma}_{2,i} - \mathbf{K}_{2,i}\boldsymbol{\Omega}_i)\boldsymbol{\eta}_i + \mathbf{D}_i(\mathbf{K}_{1,i}\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{v}_i), \quad (18a)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_i = \mathbf{A}_i\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{u}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{q}_i + \mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i - \mathbf{C}_i\hat{\mathbf{x}}_i), \quad (18b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_i = -\alpha\nabla f_i(\mathbf{y}_i) - \boldsymbol{\lambda}_i, \quad (18c)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_i = \mathbf{y}_i - \mathbf{d}_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij}a_{ij}(\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_j) - \mathbf{z}_i, \quad (18d)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij}a_{ij}(\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_j), \quad (18e)$$

$$\dot{\beta}_{ij} = \gamma_{ij}a_{ij}\|\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_j\|^2. \quad (18f)$$

在上述算法中, 观测器分为两部分. 首先是模拟项  $\mathbf{A}_i\hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{u}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{q}_i$ , 其次是修正项  $\mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i - \mathbf{C}_i\hat{\mathbf{x}}_i)$ , 并利用输出误差来权衡以及校正状态估计值, 其中,  $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times q}$ . 与内模观测器 (7) 不同, 为确保算法收敛, 我们将其修改如下:

$$\dot{\mathbf{v}}_i = -(\mathbf{S}_i + \mathbf{K}_{1,i}\mathbf{B}_i\mathbf{D}_i)(\mathbf{K}_{1,i}\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{v}_i) + \mathbf{K}_{1,i}(\mathbf{B}\mathbf{u}_i + \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_i) + \mathbf{K}_{1,i}\mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i - \mathbf{C}_i\hat{\mathbf{x}}_i). \quad (19)$$

令  $\mathbf{e}_{xi} = \mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i$  表示状态观测值与真实值的差值, 则有  $\dot{\mathbf{e}}_{xi} = (\mathbf{A}_i - \mathbf{F}_i\mathbf{C}_i)\mathbf{e}_{xi}$ , 且令  $\mathbf{A}_f = \mathbf{A} - \mathbf{F}\mathbf{C}$ . 同时也有  $\dot{\mathbf{r}} = (\mathbf{S} + \mathbf{K}_1\mathbf{B}\mathbf{D})\mathbf{r}$ , 其中  $\mathbf{r}_i = \mathbf{K}_{1,i}\hat{\mathbf{x}}_i + \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{v}_i$ .

算法 (18) 收敛性结果在下述定理 2 给出.

**定理2** 若假设 1~3 成立, 且控制参数满足  $\alpha > 0, \gamma_{ij} = \gamma_{ji} > 0, \forall i, j \in \mathcal{V}$ . 多智能体系统 (1) 在输出反馈控制策略 (18) 作用下输出变量  $\mathbf{y}$  渐近收敛到问题 (3) 的最优解.

**证明** 此时, 可将式 (18) 写成如下矩阵形式:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_2)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{r} + \mathbf{B}\mathbf{K}_2\mathbf{e}_x, \quad (20a)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_x = (\mathbf{A} - \mathbf{F}\mathbf{C})\mathbf{e}_x, \quad (20b)$$



$$\dot{\eta} = -\alpha \nabla f(\mathbf{y}) - \lambda, \tag{20c}$$

$$\dot{\lambda} = \mathbf{y} - \mathbf{d} - (\mathbf{L}_\beta \otimes \mathbf{I}_q)\lambda - \mathbf{z}, \tag{20d}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{L}_\beta \otimes \mathbf{I}_q)\lambda, \tag{20e}$$

$$\dot{\beta}_{ij} = \gamma_{ij} a_{ij} \|\lambda_i - \lambda_j\|^2, \tag{20f}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = (\mathbf{S} + \mathbf{K}_1 \mathbf{B} \mathbf{D})\mathbf{r}. \tag{20g}$$

接下来令候选函数  $V_1, V_2, V_3, V_4$  与式 (11) 一致, 其中自由常数  $\rho$  满足  $\rho > \max\{0, \frac{4}{\alpha\mu} - 1\}$ . 则  $V_1$  在系统 (20) 上的微分为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= (1 + \rho)(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{A}_c(\bar{\mathbf{x}} - \Omega\bar{\eta}) - \alpha(1 + \rho)(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}})^T \nabla \bar{f} - (1 + \rho)(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}})^T \bar{\lambda} + (1 + \rho)(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{r} \\ &\quad + (1 + \rho)(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{B} \mathbf{K}_2 \mathbf{e}_x - \rho \bar{\lambda}^T (\mathbf{L}_\beta \otimes \mathbf{I}_q) \bar{\lambda} + \rho \bar{\mathbf{y}}^T \bar{\lambda} - \rho \bar{\lambda}^T \bar{\mathbf{z}} + (\bar{\lambda} + \bar{\mathbf{z}})^T (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{z}}) \\ &\leq \frac{(1 + \rho)\|\mathbf{A}_c\|^2}{\alpha\mu} \|\bar{\mathbf{x}} - \Omega\bar{\eta}\|^2 + \frac{(1 + \rho)\|\mathbf{B} \mathbf{D}\|^2}{\alpha\mu} \|\mathbf{r}\|^2 + \frac{(1 + \rho)\|\mathbf{B} \mathbf{K}_2\|^2}{\alpha\mu} \|\mathbf{e}_x\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \alpha\mu(1 + \rho)\|\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}\|^2 - \rho \bar{\lambda}^T (\mathbf{L}_\beta \otimes \mathbf{I}_q) \bar{\lambda} - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{z}} + (1 + \rho)^2 \|\bar{\lambda}\|^2 + \|\bar{\mathbf{y}}\|^2. \end{aligned} \tag{21}$$

在上式中, 基于 Young 不等式, 我们利用了结论 (13) 和  $(1 + \rho)(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{B} \mathbf{K}_2 \mathbf{e}_x \leq \frac{(1 + \rho)\alpha\mu}{4} \|\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}\|^2 + \frac{(1 + \rho)\|\mathbf{B} \mathbf{K}_2\|^2}{\alpha\mu} \|\mathbf{e}_x\|^2$ . 类似地, 针对候选函数  $V_2$  有如下结果:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= (\bar{\mathbf{x}} - \Omega\bar{\eta})^T (\mathbf{A}_c^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}_c) (\bar{\mathbf{x}} - \Omega\bar{\eta}) + 2(\bar{\mathbf{x}} - \Omega\bar{\eta})^T \mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{r} + 2(\bar{\mathbf{x}} - \Omega\bar{\eta})^T \mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{K}_2 \mathbf{e}_x \\ &\leq -\frac{2(1 + \rho)\|\mathbf{A}_c\|^2}{\alpha\mu} \|\bar{\mathbf{x}} - \Omega\bar{\eta}\|^2 + \frac{2\alpha\mu\|\mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{D}\|^2}{(1 + \rho)\|\mathbf{A}_c\|^2} \|\mathbf{r}\|^2 + \frac{2\alpha\mu\|\mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{K}_2\|^2}{(1 + \rho)\|\mathbf{A}_c\|^2} \|\mathbf{e}_x\|^2. \end{aligned} \tag{22}$$

同理, 令候选函数  $V_5 = \mathbf{e}_x^T \mathbf{E} \mathbf{e}_x$ , 其中正定矩阵  $\mathbf{E}$  满足  $\mathbf{A}_f^T \mathbf{E} + \mathbf{E} \mathbf{A}_f = -(\frac{2\alpha\mu\|\mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{K}_2\|^2}{(1 + \rho)\|\mathbf{A}_c\|^2} + \frac{(1 + \rho)\|\mathbf{B} \mathbf{K}_2\|^2}{\alpha\mu} + 1) \mathbf{I}_N$ , 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_5 &= \mathbf{e}_x^T (\mathbf{A}_f^T \mathbf{E} + \mathbf{E} \mathbf{A}_f) \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_x^T \mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{r} \\ &\leq -\left(\frac{2\alpha\mu\|\mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{K}_2\|^2}{(1 + \rho)\|\mathbf{A}_c\|^2} + \frac{(1 + \rho)\|\mathbf{B} \mathbf{K}_2\|^2}{\alpha\mu} + 1\right) \|\mathbf{e}_x\|^2. \end{aligned} \tag{23}$$

令候选函数  $V(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \lambda, \eta, \mathbf{z}, \mathbf{r}) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$ , 则有如下结果:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \frac{(1 + \rho)\|\mathbf{A}_c\|^2}{\alpha\mu} \|\bar{\mathbf{x}} - \Omega\bar{\eta}\|^2 - \frac{\alpha\mu(1 + \rho) - 4}{4} \|\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}\|^2 - \|\mathbf{e}_x\|^2 \\ &\quad - (\sigma\rho_2(\mathbf{L}) - (1 + \rho)^2) \|\bar{\lambda}\|^2 - \frac{1}{2} \|\bar{\mathbf{z}}\|^2 - \|\mathbf{r}\|^2 \\ &\leq 0, \end{aligned} \tag{24}$$

其中常数  $\sigma$  满足  $\sigma > \frac{(1 + \rho)^2}{\rho_2(\mathbf{L})}$ . 由式 (24) 可知  $\dot{V}$  半负定, 故  $V$  为李雅普诺夫函数. 与定理 1 类似, 可知算法 (18) 中  $\mathbf{y}$  收敛至问题 (3) 最优解. 此外可以发现估计值  $\hat{\mathbf{x}}$  最终实现状态信息  $\mathbf{x}$  精确跟踪.

#### 4 未知扰动控制算法

第3节针对已知模型扰动信号下异构线性多智能体系统设计分布式资源分配算法. 然而在实际应用中, 未知扰动模型下的干扰信号更为普遍. 针对未知扰动, 基于自抗扰技术, 本文设计如下观测器:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}_i(t) &= \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}_i(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{q}}_i(t) + \mathbf{F}_{1,i}(\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}_i(t)), \\ \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i(t) &= \mathbf{F}_{2,i}(\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}_i(t)), \quad \forall i \in \mathcal{V},\end{aligned}\quad (25)$$

其中, 反馈矩阵  $\mathbf{F}_{1,i} \in \mathbb{R}^{n_i \times q}$ ,  $\mathbf{F}_{2,i} \in \mathbb{R}^{p_i \times q}$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_i(t)$  用来估计  $\mathbf{x}_i(t)$  的变化,  $\hat{\mathbf{q}}_i(t)$  用来跟踪干扰信号, 进而实现对扰动的抑制. 记  $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_x^T, \mathbf{e}_q^T]^T$ , 其中  $\mathbf{e}_{xi} = \mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i$ ,  $\mathbf{e}_{qi} = \mathbf{q}_i - \hat{\mathbf{q}}_i$ ,  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_q$  分别为其聚合向量. 此外, 令  $\bar{\mathbf{A}}_i = [\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i; 0, 0]$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_i = [\mathbf{C}_i, 0]$ ,  $\bar{\mathbf{F}}_i = [\mathbf{F}_{1,i}, \mathbf{F}_{2,i}]^T$ ,  $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{C}}$  和  $\bar{\mathbf{F}}$  分别表示由  $\bar{\mathbf{A}}_1, \bar{\mathbf{A}}_2, \dots, \bar{\mathbf{A}}_n, \bar{\mathbf{C}}_1, \bar{\mathbf{C}}_2, \dots, \bar{\mathbf{C}}_n$  和  $\bar{\mathbf{F}}_1, \bar{\mathbf{F}}_2, \dots, \bar{\mathbf{F}}_n$  组成的块对角矩阵. 为完成对算法收敛性分析, 我们有以下假设4和5.

**假设4** 假设本小节研究的未知扰动信号变化率有界, 即存在正实数  $\tau > 0$  使得  $\|\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i(t)\| \leq \tau, \forall i \in \mathcal{V}$ .

**假设5**  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$  可控,  $(\mathbf{C}_i, \mathbf{A}_i)$  可观测, 且满足:  $\text{rank}\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_i & 0 \\ \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \end{bmatrix}\right\} = n_i + p_i$ .

**注释5** 上述可观测性假设确保输出信息  $\mathbf{y}_i$  可以反映扰动信号的所有组成成分, 使得直接利用扩张状态观测器估计扰动信号成为可能. 此外, 上述秩假设是扩张状态观测器的基本条件之一<sup>[43]</sup>.

基于自抗扰观测器(25), 针对系统(1), 本文拟设计合适的分布式优化算法使得系统输出值  $\mathbf{y}_i$  收敛至问题(3)最优解的无限小邻域内. 针对智能体  $i, \forall i \in \mathcal{V}$ , 具体算法设计如下:

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_{2,i} \hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{\Gamma}_{1,i} \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - (\mathbf{\Gamma}_{2,i} - \mathbf{K}_i \mathbf{\Omega}_i) \boldsymbol{\eta}_i - \hat{\mathbf{q}}_i, \quad (26a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_i = -\alpha \nabla f_i(\mathbf{y}_i) - \boldsymbol{\lambda}_i, \quad (26b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_i = \mathbf{y}_i - \mathbf{d}_i - \beta \sum_{j=1}^n a_{ij} (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_j) - \gamma \sum_{j=1}^n a_{ij} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j), \quad (26c)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_i = \beta \sum_{j=1}^n a_{ij} (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_j), \quad (26d)$$

其中控制参数  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ . 与算法(9)不同, 算法(26)去掉对变量  $\mathbf{z}_i$  的零和初始化要求.

**注释6** 与文献[13]的分布式凸优化算法相比, 本文将网络的全局等式约束和干扰信号加入进来. 与文献[29, 31]的抗扰动分布式资源分配算法相比, 本文讨论更一般未知扰动信号, 具有更广的适用性. 而文献[29, 31]研究模型已知扰动信号下资源分配算法设计.

**定理3** 若假设1~5成立, 且控制参数满足  $\alpha > 0, \gamma > \frac{1}{2\alpha\mu\rho_2(\mathbf{L})}, \beta > 0$ . 基于控制策略(26), 多智能体系统(1)输出变量  $\mathbf{y}$  指数收敛到问题(3)最优解的无限小邻域.

**证明** 我们定义候选函数  $V$  为

$$\begin{aligned}V &= \|\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}\|^2 + \frac{1}{2}\|\bar{\boldsymbol{\lambda}}\|^2 + \frac{1}{2}\|\bar{\boldsymbol{\lambda}} + \bar{\mathbf{z}}\|^2 + \frac{\gamma}{\beta}\|\bar{\mathbf{z}}\|^2 + (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{\Omega}\bar{\boldsymbol{\eta}})^T \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{\Omega}\bar{\boldsymbol{\eta}}) + \mathbf{e}^T \mathbf{M} \mathbf{e} \\ &\leq \epsilon_1 (\|\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}\|^2 + \|\bar{\boldsymbol{\lambda}}\|^2 + \|\bar{\mathbf{z}}\|^2 + \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{\Omega}\bar{\boldsymbol{\eta}}\|^2 + \|\mathbf{e}\|^2),\end{aligned}\quad (27)$$

其中  $\epsilon_1 = \max\{\frac{\gamma}{\beta} + 1, \|\mathbf{Q}\|, \|\mathbf{M}\|\}$ , 正定矩阵  $\mathbf{Q}, \mathbf{M}$  分别满足  $\mathbf{A}_c^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}_c = -3\mathbf{I}_N$  和  $\bar{\mathbf{A}}_f^T \mathbf{M} + \mathbf{M} \bar{\mathbf{A}}_f = -(2 + \max\{\frac{4\|\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{K}_2\|^2}{\alpha\mu} + \|\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{K}_2\|^2, \frac{4\|\mathbf{C}\mathbf{B}\|^2}{\alpha\mu} + \|\mathbf{Q}\mathbf{B}\|^2\})\mathbf{I}_{\tilde{N}}$ ,  $\tilde{N} = \sum_{i=1}^n (n_i + p_i)$ ,  $\bar{\mathbf{A}}_f = \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{C}}$ , 其中系

统 (25) 的可观性由文献 [43] 中引理 1 得证. 首先, 很容易验证  $V \geq 0$ . 其次, 类似于定理 1, 函数  $V$  在系统 (26) 上关于时间  $t$  的微分为

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\|\bar{\mathbf{x}} - \Omega\bar{\boldsymbol{\eta}}\|^2 - \alpha\mu\|\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}\| - \beta\rho_2(\mathbf{L})\|\bar{\boldsymbol{\lambda}}\|^2 - \left(\gamma\rho_2(\mathbf{L}) - \frac{1}{2\alpha\mu}\right)\|\bar{\mathbf{z}}\|^2 - \|\mathbf{e}\|^2 + \tau^2\|\mathbf{M}\|^2 \\ &\leq -\epsilon_2(\|\mathbf{y}\|^2 + \|\bar{\boldsymbol{\lambda}}\|^2 + \|\bar{\mathbf{z}}\|^2 + \|\bar{\mathbf{x}} - \Omega\bar{\boldsymbol{\eta}}\|^2 + \|\mathbf{e}\|^2) + \tau^2\|\mathbf{M}\|^2 \\ &\leq -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}V + \tau^2\|\mathbf{M}\|^2,\end{aligned}\quad (28)$$

其中  $\epsilon_2 = \min\{1, \alpha\mu, \beta\rho_2(\mathbf{L}), (\gamma\rho_2(\mathbf{L}) - \frac{1}{2\alpha\mu})\}$ . 此外, 基于 Young 不等式, 以下不等式被用到:

$$\begin{aligned}2\bar{\mathbf{y}}^T\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{K}_2\mathbf{e}_x &\leq \frac{\alpha\mu}{4}\|\bar{\mathbf{y}}\|^2 + \frac{4\|\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{K}_2\|^2}{\alpha\mu}\|\mathbf{e}_x\|^2, \\ 2\bar{\mathbf{y}}^T\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{e}_q &\leq \frac{\alpha\mu}{4}\|\bar{\mathbf{y}}\|^2 + \frac{4\|\mathbf{C}\mathbf{B}\|^2}{\alpha\mu}\|\mathbf{e}_q\|^2, \\ \bar{\mathbf{z}}^T\bar{\mathbf{y}} &\leq \frac{\alpha\mu}{2}\|\bar{\mathbf{y}}\|^2 + \frac{1}{2\alpha\mu}\|\bar{\mathbf{z}}\|^2, \\ 2(\bar{\mathbf{x}} - \Omega\bar{\boldsymbol{\eta}})^T\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{K}_2\mathbf{e}_x &\leq \|\bar{\mathbf{x}} - \Omega\bar{\boldsymbol{\eta}}\|^2 + \|\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{K}_2\|^2\|\mathbf{e}_x\|^2, \\ 2(\bar{\mathbf{x}} - \Omega\bar{\boldsymbol{\eta}})^T\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{e}_q &\leq \|\bar{\mathbf{x}} - \Omega\bar{\boldsymbol{\eta}}\|^2 + \|\mathbf{Q}\mathbf{B}\|^2\|\mathbf{e}_q\|^2, \\ 2\mathbf{e}^T\mathbf{M}\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} &\leq \|\mathbf{e}\|^2 + \tau^2\|\mathbf{M}\|^2.\end{aligned}\quad (29)$$

最后利用文献 [44] 中引理 1, 此时可以得到  $\|\bar{\mathbf{y}}\|^2 \leq V(0)\exp(-\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}t) + \frac{\epsilon_2\tau^2\|\mathbf{M}\|^2}{\epsilon_1}$ . 从而可知, 当面对未知信号干扰时, 则所设计算法 (26) 收敛至问题 (3) 邻域内. 且  $\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{C}}$  特征根负实部越远离虚轴, 上述算法稳定点离最优解越近.

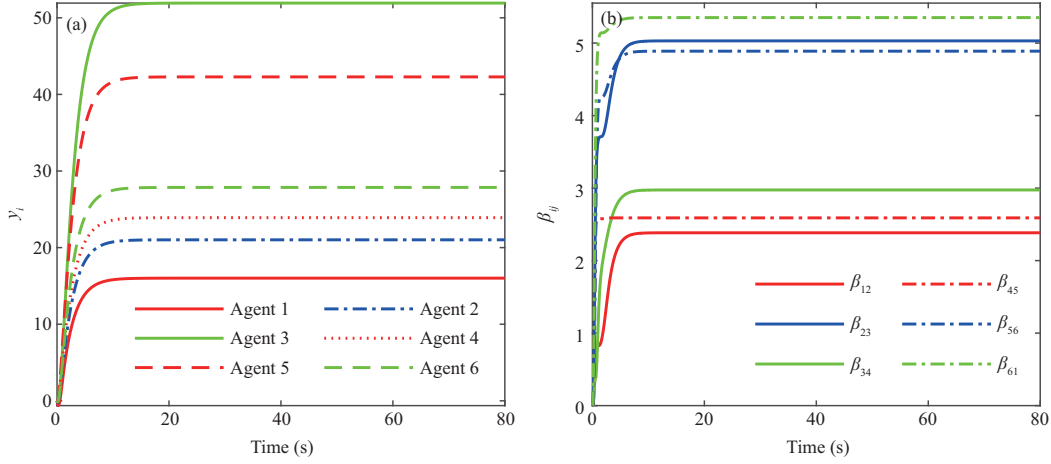
**注释 7** 从式 (28) 可以看出, 若所考虑干扰信号为常数, 则本文所设计自抗扰观测器 (25) 以指数速度精确跟踪到干扰信号. 从而实现资源分配问题 (3) 精确解的指数速度获取. 若  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}_i(t) = 0$ , 则所设计算法渐近收敛至最优解.

## 5 仿真实验

本节通过仿真实验来验证之前所提算法的有效性. 案例数据来自文献 [29].

仿真实验 1. 首先考虑如下 6 节点仿真案例 [29], 其中每个智能体都采用如下矩阵参数:  $i = 1, 2, \dots, 6$ ,  $\mathbf{A}_i = [-0.059, 0.496, -0.868; -5.513, -0.939, 0.665; 0.068, 0.026, -0.104]$ ,  $\mathbf{B}_i = [0.006, 0.006, 0.004, 0, 0.09; 1.879, 1.328, 0.029, 0.675, 0.217; -0.109, -0.109, -0.084, 0.007, -2.974]$ ,  $\mathbf{C}_i = [1, -1, 1]$ . 已知扰动模型参数选择如下:  $\mathbf{S}_i = [0, \epsilon; -\epsilon, 0]$ ,  $\mathbf{D}_i = [-0.5468, 0, 1.0132, 0, -0.0086; 0, 0, 0, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{w}_i(0) = [s_i \sin(c_i); s_i \cos(c_i)]$ . 其中初始值参数设置为  $\mathbf{s} = [5, -2, 3, -2, 2, 4]$ ,  $\mathbf{c} = [\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{7}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{5}]$ ,  $\epsilon = 1$ . 此时, 满足假设 1 的矩阵解和反馈矩阵  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$  选择如下:  $\mathbf{K}_{1,i} = [0.9144, 3, 0; 5.4864, 1, 0]$ ,  $\mathbf{K}_{2,i} = [2, 0, 1, 0, 1; 1, 3, 0, 1, 0; 0, 1, 0, 0, -1]^T$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{1,i} = [-0.5468, 0, 1.0132, 0, -0.0086]^T$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{2,i} = [4.774, 0, -349.5845, 0, 9.7077]^T$ ,  $\Omega_i = [0, -1, 0]^T$ . 此外智能体间通信拓扑为环形网络, 每个智能体的局部成本函数定义如下:

$$\begin{aligned}f_1(y_1) &= 2.5y_1^2 + 8y_1 + 0.5, \quad f_2(y_2) = 2y_2^2 + 4y_2 + 1.5, \quad f_3(y_3) = 0.8y_3^2 + 5y_3 + 3, \\ f_4(y_4) &= 1.8y_4^2 + 2y_4 + 1, \quad f_5(y_5) = y_5^2 + 3.5y_5 + 2.5, \quad f_6(y_6) = 1.5y_6^2 + 4.5y_6 + 2.\end{aligned}\quad (30)$$


 图 1 (网络版彩图) 案例 1 中算法 (8) 各节点变量  $y_i$  和自适应权重  $\beta_{ij}$  收敛曲线

**Figure 1** (Color online) Trajectories of output variable  $y_i$  and adaptive weight  $\beta_{ij}$  of algorithm (8) in case 1. (a)  $y_i, \forall i \in \mathcal{V}$ ; (b)  $\beta_{ij}, \forall (i, j) \in \mathcal{E}$ 

智能体局部期望资源量定义为  $\mathbf{d} = [20, 25, 35, 30, 40, 33]^T$ . 令控制参数  $\alpha = 1, \gamma_{ij} = \gamma_{ji} = 1, \forall i, j \in \mathcal{V}$ , 且算法初始变量设置为零, 则算法具体仿真轨迹如图 1 所示. 从图 1(a) 可以看出, 多智能体系统 (1) 在算法 (8) 作用下可实现对已知模型扰动信号的抑制, 并收敛至资源分配问题理论最优解  $\mathbf{y}^* = [16.01, 21.02, 51.92, 23.91, 42.28, 27.86]^T$ . 如注释 3 所述, 相比于已有文献 [29], 算法 (8) 设计自适应权重策略,  $\beta_{ij}$  会一直增大直至邻居智能体间的拉格朗日乘子差值为零. 这一点在图 2(b) 中得到验证,  $\beta_{ij}$  最终稳定在某一水平.

接下来验证基于输出状态观测器的输出反馈控制算法 (18) 的有效性. 此时, 令每个智能体采用反馈矩阵  $\mathbf{F}_i = [11.6457, -66.5640, -62.9117]^T$ . 控制参数与算法 (8) 仿真设置相同, 令状态估计初始值  $\hat{\mathbf{x}}_i(0)$  不同于实际状态初始值  $\mathbf{x}_i(0)$ , 算法具体仿真结果如图 2 所示. 从图 2(a) 可以看出令观测状态设计的输出反馈控制参数依然能够确保算法收敛至理论最优解. 此外, 算法 (20) 与 (8) 仅在算法初始阶段有点区别, 但总收敛趋势接近一致. 其次, 图 2(b) 展示的为  $\|\mathbf{e}_{x_i}\|$  仿真轨迹. 从图 2(b) 可以看出, 本文设计状态观测器可实现对不可测状态的准确跟踪.

仿真实验 2. 考虑 2 维输出最优资源分配问题. 假设系统智能体节点集为  $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 每个智能体的矩阵参数分别为  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = [0, 1; 0, 0]$ ,  $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_4 = [0, -1; 1, -2]$ ,  $\mathbf{A}_5 = [1, 0; 1, 0]$ ,  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = [0, 1; 1, -2]$ ,  $\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_4 = [1, 0; 3, -1]$ ,  $\mathbf{B}_5 = [1, 0; 1, 1]$ , 和  $\mathbf{C}_i = \mathbf{I}_2, \forall i \in \mathcal{V}$ . 上述矩阵参数满足假设 4 要求. 此外, 智能体局部成本函数定义如下:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{y}_1) &= \|\mathbf{y}_1 - [3, 3]^T\|^2 + \|\mathbf{y}_1\|^2, \quad f_2(\mathbf{y}_2) = \exp(\|\mathbf{y}_2\|^2), \quad f_3(\mathbf{y}_3) = \|\mathbf{y}_3 - [3, 3]^T\|^2 + \ln(\|\mathbf{y}_3\|^2), \\ f_4(\mathbf{y}_4) &= \|\mathbf{y}_4\|^2 + \exp(2(y_{41} - y_{42})), \quad f_5(\mathbf{y}_5) = \exp(3y_{51} - 5y_{52}). \end{aligned} \quad (31)$$

局部期望资源量  $\mathbf{d}_i$  设定为  $\mathbf{d}_i = [0.5, 2]^T, \forall i \in \mathcal{V}$ . 基于假设 3, 令  $\mathbf{\Gamma}_{1,1} = \mathbf{\Gamma}_{1,2} = [0, 2; 0, 1]$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{1,3} = \mathbf{\Gamma}_{1,4} = [0, -1; -1, -1]$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{1,5} = [1, 0; -1, 1]$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{2,1} = \mathbf{\Gamma}_{2,2} = [2, 1; 1, 0]$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{2,3} = \mathbf{\Gamma}_{2,4} = [1, 0; 3, -1]$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{2,5} = [1, 0; 0, 0]$  和  $\mathbf{\Omega}_i = \mathbf{I}_2, \forall i \in \mathcal{V}$ . 状态反馈控制矩阵设置为  $\mathbf{K}_{2,1} = \mathbf{K}_{2,2} = [3, 5; 1.5, 1]$ ,  $\mathbf{K}_{2,3} = \mathbf{K}_{2,4} = [5, -1; 15, -4]$ ,  $\mathbf{K}_{2,5} = [4, 0; 1, 3]$ . 状态观测反馈矩阵设置为  $\mathbf{F}_{1,1} = \mathbf{F}_{1,2} = [8.93, 0.09; -1.10, 9.07]$ ,  $\mathbf{F}_{3,1} = \mathbf{F}_{4,1} = [8.11, -0.52; 1.44, 7.89]$ ,  $\mathbf{F}_{1,5} = [9.71, 0.94; 1.98, 9.29]$ ,  $\mathbf{F}_{2,1} = \mathbf{F}_{2,2} = [33.33, 11.77; 19.17, -4.03]$ ,  $\mathbf{F}_{3,2} = \mathbf{F}_{4,2} = [15.50, 2.17; 44.54, -16.97]$  和  $\mathbf{F}_{2,5} = [18.18, 4.20; -13.78, 16.62]$ . 未知扰动信号为  $\mathbf{q}_1 =$

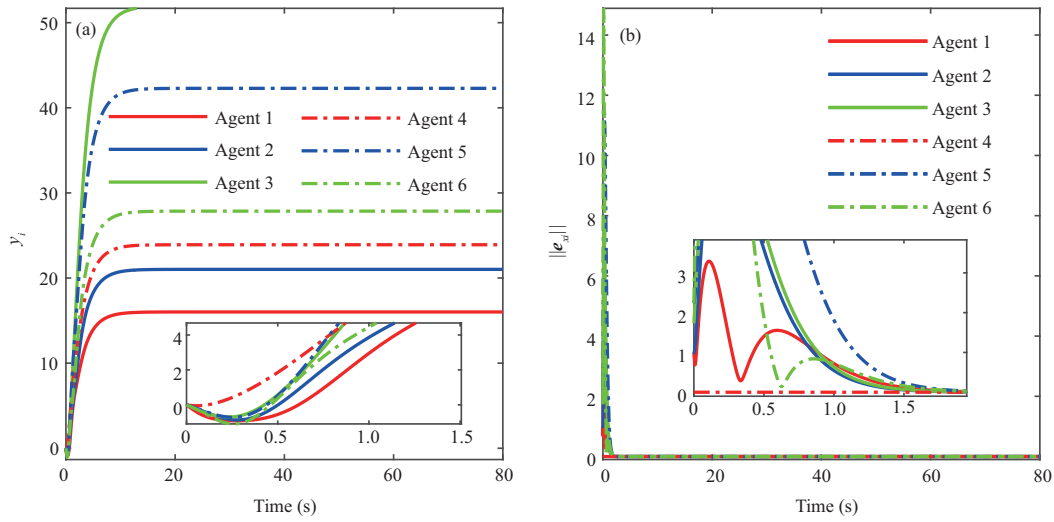


图 2 (网络版彩图) 案例 1 中算法 (20) 各节点输出变量  $y_i$  和误差  $\|e_{xi}\|$  收敛曲线

Figure 2 (Color online) Trajectories of output variable  $y_i$  and estimator error  $\|e_{xi}\|$  of algorithm (20) in case 1. (a)  $y_i, \forall i \in \mathcal{V}$ ; (b)  $\|e_{xi}\|, \forall i \in \mathcal{V}$

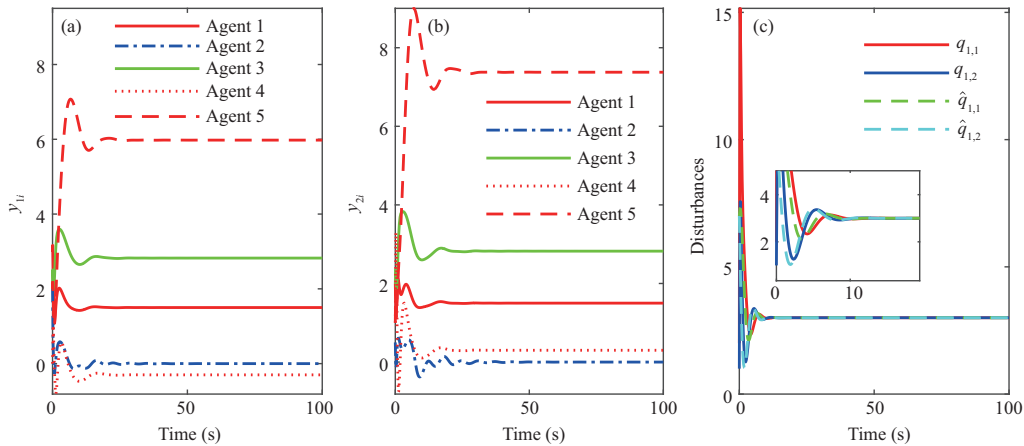


图 3 (网络版彩图) 案例 2 中算法 (26) 关于  $y_{1i}$ 、 $y_{2i}$ 、扰动信息  $q_1$  和观测信号  $\hat{q}_1$  收敛曲线

Figure 3 (Color online) Trajectories of  $y_{1i}, y_{2i}, q_1$ , and  $\hat{q}_1$  of algorithm (26) in case 2. (a)  $y_{1i}, \forall i \in \mathcal{V}$ ; (b)  $y_{2i}, \forall i \in \mathcal{V}$ ; (c)  $q_1$  and  $\hat{q}_1$

$[3 + 4\sqrt{2}\exp(-0.5t)\sin(t + \frac{\pi}{4}), 3 + 4\sqrt{2}\exp(-0.5t)\cos(t + \frac{\pi}{4})]^T$ ,  $\mathbf{q}_2 = [2\sqrt{2}\exp(-0.1t)\sin(t + \frac{\pi}{4}), 2\sqrt{2}\exp(-0.1t)\cos(t + \frac{\pi}{4})]^T$ ,  $\mathbf{q}_3 = [3\sqrt{2}\exp(-5t)\sin(t + \frac{\pi}{4}), 3\sqrt{2}\exp(-5t)\cos(t + \frac{\pi}{4})]^T$ ,  $\mathbf{q}_4 = [9\sqrt{2}\exp(-t)\sin(t + \frac{\pi}{4}), 9\sqrt{2}\exp(-t)\cos(t + \frac{\pi}{4})]^T$  和  $\mathbf{q}_5 = [\sqrt{2}\exp(-2t)\sin(2t + \frac{\pi}{3}), \sqrt{2}\exp(-2t)\cos(t + \frac{\pi}{4})]^T$ . 算法 (26) 仿真结果如图 3 所示. 从图 3(a) 和 (b) 可以看出, 当未知扰动满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}_i = 0$  时算法 (26) 实现渐近收敛. 从图 3(c) 可以看出估计扰动  $\hat{\mathbf{q}}_i$  总是滞后于实际扰动  $\mathbf{q}_i$ . 通过选择合适的反馈矩阵  $\bar{\mathbf{F}}_i$  使得矩阵  $\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{F}}_i\bar{\mathbf{C}}_i$  特征根实部越小, 估计扰动  $\hat{\mathbf{q}}_i$  跟踪精度越高, 算法 (26) 稳定点越靠近理论最优解.

## 6 总结

本文针对外部干扰信号作用下一般异构线性多智能体系统分布式资源分配问题进行算法设计. 首先, 利用内模原理, 针对已知扰动信号, 我们分别设计一种基于状态反馈和基于输出反馈的自适应分布式优化算法, 实现控制参数自适应获取. 其次, 针对未知扰动信号, 基于扩张状态观测器, 设计一种基于输出反馈的分布式优化算法. 并利用李雅普诺夫理论证明: 若未知扰动信号为常数, 所设计算法实现指数收敛; 若未知扰动信号微分趋于零, 所设计算法实现渐近收敛; 若未知扰动信号微分有界, 通过调节扩张状态观测器反馈矩阵, 所设计算法收敛至理论最优解无限小邻域. 然而上述算法都没有将智能体局部约束考虑进来, 而在实际应用中, 智能体决策量会由于执行机构能量限制或保护机制等而受到约束. 未来, 我们会考虑一般线性多智能体系统下带有局部约束的分布式资源分配问题. 此外, 将固定时间收敛策略引入进来, 提高状态扩展观测器对未知扰动信号的跟踪速度.

## 参考文献

- 1 Ren L N, Wu H, Jiao X H. Consistency-based energy management strategy for microgrids with V2G. *Sci Sin Inform*, 2022, 52: 1098–1113 [任丽娜, 武瀚, 焦晓红. 考虑 V2G 背景下微电网的一致性能量管理策略. *中国科学: 信息科学*, 2022, 52: 1098–1113]
- 2 Yang T, Yi X L, Wu J F, et al. A survey of distributed optimization. *Annu Rev Control*, 2019, 47: 278–305
- 3 Yang T, Chai T Y. Research status and prospects of distributed collaborative optimization. *Sci Sin Tech*, 2020, 50: 1414–1425 [杨涛, 柴天佑. 分布式协同优化的研究现状与展望. *中国科学: 技术科学*, 2020, 50: 1414–1425]
- 4 Xu Y, Han T R, Cai K, et al. A distributed algorithm for resource allocation over dynamic digraphs. *IEEE Trans Signal Process*, 2017, 65: 2600–2612
- 5 Xing H, Mou Y T, Fu M Y, et al. Distributed bisection method for economic power dispatch in smart grid. *IEEE Trans Power Syst*, 2015, 30: 3024–3035
- 6 Shi X S, Zheng R H, Lin Z Y, et al. An exponentially convergent distributed algorithm for resource allocation problem. *Asian J Control*, 2021, 23: 1072–1082
- 7 Bose S, Low S H, Teeraratkul T, et al. Equivalent relaxations of optimal power flow. *IEEE Trans Automat Contr*, 2015, 60: 729–742
- 8 Huang Y, Wang H L, Yao P. Energy-optimal path planning for Solar-powered UAV with tracking moving ground target. *Aerospace Sci Tech*, 2016, 53: 241–251
- 9 Yang T, Xu L, Yi X L, et al. Event-triggered distributed optimization algorithms. *Acta Automat Sin*, 2022, 48: 133–143 [杨涛, 徐磊, 易新蕾, 等. 基于事件触发的分布式优化算法. *自动化学报*, 2022, 48: 133–143]
- 10 Shi X S, Xu L, Yang T. An adaptive distributed resource allocation algorithm via saddle point dynamics. *Control Decis*, 2022, 38: 2042–2048 [时侠圣, 徐磊, 杨涛. 基于鞍点法的自适应分布式资源分配算法. *控制与决策*, 2023, 38: 2042–2048]
- 11 Shi X S, Yang T, Lin Z Y, et al. Distributed resource allocation algorithm for second-order multi-agent systems in continuous-time. *Acta Automat Sin*, 2021, 47: 2050–2060 [时侠圣, 杨涛, 林志赟, 等. 基于连续时间的二阶多智能体分布式资源分配算法. *自动化学报*, 2021, 47: 2050–2060]
- 12 Zhang Y Q, Deng Z H, Hong Y G. Distributed optimal coordination for multiple heterogeneous Euler-Lagrangian systems. *Automatica*, 2017, 79: 207–213
- 13 Shi X S, Xu L, Yang T, et al. Distributed fixed-time resource allocation algorithm for the general linear multi-agent systems. *IEEE Trans Circ Syst II Express Briefs*, 2022, 69: 2867–2871
- 14 Liu Y, Yang G H. Distributed robust adaptive optimization for nonlinear multiagent systems. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2021, 51: 1046–1053
- 15 Sun X T, Guo G, Zhang P F. Fixed-time consensus tracking of multi-agent systems under unmatched disturbances. *Acta Automat Sin*, 2021, 47: 1368–1376 [孙小童, 郭戈, 张鹏飞. 非匹配扰动下的多智能体系统固定时间一致跟踪. *自动化学报*, 2021, 47: 1368–1376]

- 16 Deng Z H, Wang X H, Hong Y G. Distributed optimisation design with triggers for disturbed continuous-time multi-agent systems. *IET Control Theor & Appl*, 2017, 11: 282–290
- 17 Tran N T, Xiao J W, Wang Y W, et al. Distributed optimisation problem with communication delay and external disturbance. *Int J Syst Sci*, 2017, 48: 3530–3541
- 18 Guo G, Kang J. Distributed optimization of multiagent systems against unmatched disturbances: a hierarchical integral control framework. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2022, 52: 3556–3567
- 19 Wang X H, Hong Y G, Yi P, et al. Distributed optimization design of continuous-time multiagent systems with unknown-frequency disturbances. *IEEE Trans Cybern*, 2017, 47: 2058–2066
- 20 Wang X Y, Li S H, Wang G D. Distributed optimization for disturbed second-order multiagent systems based on active antidisturbance control. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2020, 31: 2104–2117
- 21 Tang Y T. Distributed optimization for a class of high-order nonlinear multiagent systems with unknown dynamics. *Intl J Robust Nonlinear*, 2018, 28: 5545–5556
- 22 Wang Z, Wang D, Gu D B. Distributed optimal state consensus for multiple circuit systems with disturbance rejection. *IEEE Trans Netw Sci Eng*, 2020, 7: 2926–2939
- 23 Zhou X Q, Su Y F. Distributed optimization of nonlinear multi-agent systems with disturbance rejection. In: *Proceedings of the Chinese Automation Congress, Shanghai, 2020*. 5387–5391
- 24 Duan S Q, Chen S, Zhao Z L. Research on active disturbance rejection distributed optimization algorithm for first-order multi-agent disturbance systems. *Control Decis*, 2022, 37: 1559–1566 [段书晴, 陈森, 赵志良. 一阶多智能体受扰系统的自抗扰分布式优化算法研究. *控制与决策*, 2022, 37: 1559–1566]
- 25 Wang X Y, Wang G D, Li S H. Distributed finite-time optimization for disturbed second-order multiagent systems. *IEEE Trans Cybern*, 2021, 51: 4634–4647
- 26 Mu C X, Tang Y F, He H B. Improved sliding mode design for load frequency control of power system integrated an adaptive learning strategy. *IEEE Trans Ind Electron*, 2017, 64: 6742–6751
- 27 Wang X Y, Wang G D, Li S H. Distributed finite-time optimization for integrator chain multiagent systems with disturbances. *IEEE Trans Automat Contr*, 2020, 65: 5296–5311
- 28 Wang X Y, Zheng W X, Wang G D. Distributed finite-time optimization of second-order multiagent systems with unknown velocities and disturbances. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2023, 34: 6042–6054
- 29 Li S L, Nian X H, Deng Z H. Distributed optimization of general linear multi-agent systems with external disturbance. *J Franklin Institute*, 2021, 358: 5951–5970
- 30 Li S L, Nian X H, Deng Z H. Distributed resource allocation of second-order multiagent systems with exogenous disturbances. *Intl J Robust Nonlinear*, 2020, 30: 1298–1310
- 31 Zhu Y N, Wen G H, Yu W W, et al. Nonsmooth resource allocation of multiagent systems with disturbances: a proximal approach. *IEEE Trans Control Netw Syst*, 2021, 8: 1454–1464
- 32 Tang Y T. Distributed optimal steady-state regulation for high-order multiagent systems with external disturbances. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2020, 50: 4828–4835
- 33 Zhao Y, Liu Y F, Wen G H, et al. Distributed optimization for linear multiagent systems: edge- and node-based adaptive designs. *IEEE Trans Automat Contr*, 2017, 62: 3602–3609
- 34 Wu Z Z, Li Z H, Ding Z T, et al. Distributed continuous-time optimization with scalable adaptive event-based mechanisms. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2020, 50: 3252–3257
- 35 Li S L, Nian X H, Deng Z H, et al. Predefined-time distributed optimization of general linear multi-agent systems. *Inf Sci*, 2022, 584: 111–125
- 36 An L W, Yang G H. Distributed optimal coordination for heterogeneous linear multiagent systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2022, 67: 6850–6857
- 37 Li Z H, Wu Z Z, Li Z K, et al. Distributed optimal coordination for heterogeneous linear multiagent systems with event-triggered mechanisms. *IEEE Trans Automat Contr*, 2020, 65: 1763–1770
- 38 Li L, Yu Y, Li X X, et al. Exponential convergence of distributed optimization for heterogeneous linear multi-agent systems over unbalanced digraphs. *Automatica*, 2022, 141: 110259
- 39 Liu P, Xiao F, Wei B, et al. Distributed constrained optimization problem of heterogeneous linear multi-agent systems with communication delays. *Syst Control Lett*, 2021, 155: 105002
- 40 Ma K, Yu Y Q, Zhu S Y, et al. Distributed algorithm for economic dispatch based on gradient descent and consensus

- in power grid. *Sci Sin Inform*, 2018, 48: 1464–1380 [马锴, 于洋庆, 朱善迎, 等. 基于梯度下降和一致性的电网分布式经济调度算法. *中国科学: 信息科学*, 2018, 48: 1464–1380]
- 41 Chen G, Yang Q, Song Y D, et al. A distributed continuous-time algorithm for nonsmooth constrained optimization. *IEEE Trans Automat Contr*, 2020, 65: 4914–4921
  - 42 Luenberger D G. Observing the state of a linear system. *IEEE Trans Mil Electron*, 1964, 8: 74–80
  - 43 Cao W J, Zhang J H, Ren W. Leader-follower consensus of linear multi-agent systems with unknown external disturbances. *Syst Control Lett*, 2015, 82: 64–70
  - 44 Lv Y Z, Li Z K, Duan Z S, et al. Distributed adaptive output feedback consensus protocols for linear systems on directed graphs with a leader of bounded input. *Automatica*, 2016, 74: 308–314

## Distributed resource allocation algorithms for linear multi-agent systems with disturbances

Xiasheng SHI<sup>1,2,3</sup>, Changyin SUN<sup>1,2,3</sup> & Chaoxu MU<sup>1,4\*</sup>

1. *Engineering Research Center of Autonomous Unmanned System Technology, Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230601, China;*

2. *Anhui Provincial Engineering Research Center for Unmanned System and Intelligent Technology, Anhui University, Hefei 230601, China;*

3. *School of Artificial Intelligence, Anhui University, Hefei 230601, China;*

4. *School of Electrical and Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300192, China*

\* Corresponding author. E-mail: cxmu@tju.edu.cn

**Abstract** For the distributed resource allocation problem over general heterogeneous linear multi-agent systems, this study designs a class of distributed optimization algorithms based on the dynamics of agents to suppress disturbances and simultaneously complete the optimal allocation of resources. This study designs an adaptive distributed optimization employing the state information of each agent for structure-known disturbances. In addition, the control parameter of the dual-variable Lagrange multiplier adaptively increases until consensus is achieved. Furthermore, the proposed algorithm is modified to be an output-based distributed optimization algorithm when the state information is not accessible. Based on LaSalle's invariance principle, we show that the designed algorithms asymptotically converge to the optimal point when the global cost function is strongly convex. For unknown disturbances, this study proposes a distributed optimization algorithm based on an extended state observer. The proposed algorithm asymptotically converges to the theoretical optimal solution based on Lyapunov stability theory when the disturbance is constant, or its derivative tends to zero. Finally, the effectiveness of our proposed algorithms is illustrated by the provided simulation examples.

**Keywords** heterogeneous multi-agent systems, resource allocation, adaptive communication weight, state feedback, output feedback, unknown disturbance