



一种基于透射不变性原理的高机动编队控制方法

王常虹*, 陈济泽

哈尔滨工业大学空间科学与惯性技术研究中心, 哈尔滨 150001

* 通信作者. E-mail: cwang@hit.edu.cn

收稿日期: 2022-10-19; 修回日期: 2023-01-18; 接受日期: 2023-01-31; 网络出版日期: 2023-10-16

黑龙江头雁计划 (批准号: AUEA5640209120) 资助项目

摘要 本文给出了一种具有高机动性的透射编队控制方法, 解决了经典的仿射编队控制受限于平行关系的常约束, 无法直接实现战术攻防上常用的前后三角、前后梯形等队形的快速切换问题. 该方法受启发于框架理论中的透射不变性原理, 通过引入透射像和自应力矩阵来对编队构型进行定义, 实现了在仅增加一个领航者且队形凹凸性不变的前提下, 任意目标队形的保共线和交比的一致性跟踪, 提高了队形的可操作性. 所推导的透射可定位条件和队形连续变换条件为透射编队控制的应用提供了理论依据. 此外, 在攻防切换任务和联合切换任务两种情景下的仿真测试结果也进一步证明了该编队控制方法的可靠性.

关键词 透射变换, 编队控制, 战术任务, 多智能体系统, 自应力矩阵

1 引言

多智能体编队控制是协调多无人系统运动状态的核心技术, 其主要解决系统运动层对期望轨迹的跟踪问题. 广义上, 编队控制问题属于共识问题中关注运动信息一致性的子类, 其研究源于对生物集群活动的仿生分析^[1]. 由于编队控制目标为多智能体的空间几何构型, 其不仅需要像传统控制一样对特定模型、工作环境和性能需求下的控制规则进行设计, 还需要关注建模目标队形时常约束的设计方法以简化编队控制流程^[2~4].

在早期针对编队控制的研究中, 用于定义目标的常约束主要包括机构间位移、距离和轴向 3 种. 其中, 位移约束下的队形仅能实现平移变换, 这导致基于位移的控制方法无法跟踪队形在比例或方向上的变化^[5,6]. 而基于距离或轴向的控制方法虽放宽了对变换的约束, 仍很难同时实现对时变平移、比例和方向的全面跟踪^[7~10]. 针对以上问题, 一些研究尝试改进控制方法并引入局部方向或队形比例的估计机制以允许队形在尺度和方向上的调节^[11~13]. 然而, 复杂的估计过程不仅会增加控制器的设计难度, 还对个体的感知和通信性能提出了更高的要求.

引用格式: 王常虹, 陈济泽. 一种基于透射不变性原理的高机动编队控制方法. 中国科学: 信息科学, 2023, 53: 1965–1981, doi: 10.1360/SSI-2022-0409
Wang C H, Chen J Z. A high-mobility formation control method based on the principle of projective invariance (in Chinese). Sci Sin Inform, 2023, 53: 1965–1981, doi: 10.1360/SSI-2022-0409

为使得编队控制方法能够在较低约束条件下匹配更多的队形变换情景, 近些年针对编队控制的基础性研究多侧重于队形建模中新型常约束不变性的设计. 其中, 基于复拉普拉斯 (Laplace) 算子的分布式编队控制和基于应力矩阵的仿射编队控制得到了广泛关注^[14~17]. 复拉普拉斯算子对平面上平移、旋转和缩放变换保持不变, 因此, 基于复拉普拉斯算子的方法可以同时实现二维编队的平移、旋转和缩放^[18]. 然而, 这种编队方法很难扩展到三维空间. 相较而言, 基于应力矩阵的方法不受空间维度限制, 有望实现更一般的编队机动. 应力矩阵是框架力学中的核心概念, 其基本性质与框架的结构刚性紧密相关. 与传统非负的图拉普拉斯矩阵不同, 应力矩阵可以使用边权的正负性来表征框架中的张拉应力关系. 文献 [19] 根据自应力矩阵对编队构型的仿射不变性, 实现了一种适用于平移、旋转、缩放、剪切或相应组合的队形跟踪控制方法. 自应力矩阵具有表征对应框架内部的张拉处于平衡状态的实际物理意义, 当其满足一定秩条件时对应框架具有结构刚性和唯一性. 对编队进行仿射控制, 实质上是队形框架赋予抽象的张拉属性, 使得跟踪者在偏离由特定自应力矩阵和领航者确定的目标位置时, 根据自应力矩阵定义的误差进行校正机动, 以回归到平衡位置. 然而由于仿射变换对平行不变性的限制, 仿射编队控制在不对编队进行分组或重新计算应力矩阵的情况下, 无法实现战术攻防上常用的前后三角队形、前后梯形队形等编队需求的快速切换. 另外需要注意的是, 对仿射编队进行分组的方法无法保证个体的共线关系, 这可能不满足队形聚焦等战术任务的需求; 而在不考虑额外优化的情况下, 仅重新求解应力矩阵涉及的奇异值分解和线性矩阵不等式 (linear matrix inequality, LMI) 的求解问题即会造成 $O(n^2)$ 以上的计算复杂度, 无法满足大规模系统下编队切换的实时性需求.

综上所述, 应力矩阵可成为一种实现多种编队机动的强有力工具. 如何在基于应力矩阵的仿射建模基础上, 扩展队形常约束不变性的定义, 以提高编队的可操作自由度, 是实现一般性编队机动, 保障复杂战术规划的可靠执行的有效手段. 在此背景下, 考虑到透射变换不改变几何图形的交比, 相较于仿射变换具有更高的自由度, 本文将框架理论中的透射不变性原理引入到多智能体的编队控制算法设计中. 并针对性地解决了以下问题: (1) 引入透射不变性原理后, 如何保证跟踪机可由领航机定位; (2) 以自应力矩阵为不变量进行队形变换时, 如何保证透射变换的连续性; (3) 如何求取适用于透射编队控制的半正定自应力矩阵; (4) 如何设计适用于双积分模型的跟踪控制器.

本文其余部分的组织结构如下: 第 2 节给出透射编队控制中基于自应力矩阵的目标队形构建方法; 第 3 节根据透射可定位和连续变换需满足的自应力矩阵条件, 给出一种构建编队拓扑和相应自应力矩阵的方法; 第 4 节介绍了一种针对双积分智能体的控制器设计方法; 第 5 节在攻防切换任务和联合切换任务两种情景下对透射编队控制进行了仿真测试; 第 6 节给出了文本的总结和展望.

2 透射变换下目标队形的构建

本节考虑定义在欧氏空间 \mathbb{R}^d 中的 n 个移动智能体组成的系统, 其中, $d \geq 2$ 且 $n \geq d + 2$. 令 $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$ 为智能体的位置坐标, 则 $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_1^T, \dots, \mathbf{p}_n^T]^T \in \mathbb{R}^{nd}$ 为这 n 个智能体的构型. 进一步定义智能体间的无向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, 其中, $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ 是与智能体一一对应的顶点集, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为该多智能体系统的边集, 若 $(i, j) \in \mathcal{E}$, 则智能体 i 与 j 间存在双向的通信链路, 定义 \mathcal{N}_i 为与智能体 i 间存在边的智能体集合. 称 $\mathcal{G}(\mathbf{p})$ 为该多智能体系统的队形框架, 并定义 $V_L = \{1, \dots, n_l\}$ 为前 n_l 个领航者的集合, $V_F = \{n_l + 1, \dots, n\}$ 为其余跟随者的集合. 由此, 可将所有领航者的构型表示为 $\mathbf{p}_L = [\mathbf{p}_1^T, \dots, \mathbf{p}_{n_l}^T]^T$, 所有跟随者的构型表示为 $\mathbf{p}_F = [\mathbf{p}_{n_l+1}^T, \dots, \mathbf{p}_n^T]^T$. 且令 $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示 n 维单位矩阵, $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$ 表示元素都为 1 的列向量. 符号 \otimes 表示矩阵的 Kronecker 积. 定义 $\text{diag}(\mathbf{x})$ 为将向量 \mathbf{x} 映射为以 \mathbf{x} 为对角元素的对角矩阵的函数. 考虑到透射变换可以实现如图 1 所示的多种队形操作形

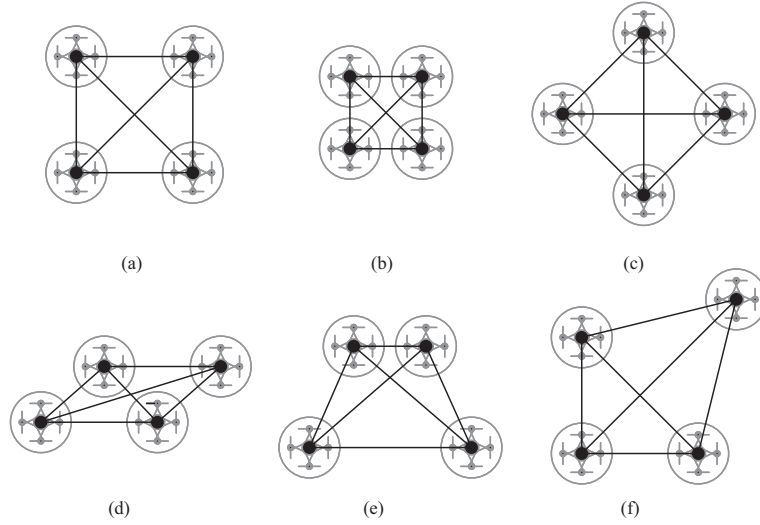


图1 透射变换下的基本形态操作

Figure 1 Basic morphological operations under projective transformation. (a) Norminal; (b) scaling; (c) rotation; (d) shear; (e) focusing; (f) unparallel

式, 本文引入透射像对编队构型进行刻画. 此外, 为便于区分变换前后的构型, 特别将初始构型定义为 $\mathbf{r} = [\mathbf{r}_1^T, \dots, \mathbf{r}_n^T]^T \in \mathbb{R}^{nd}$, 其中, $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^d$ 为智能体的初始位置坐标.

定义1 (透射像) 给定构型 \mathbf{r} , 其透射像可表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{r}) = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn} : \mathbf{p} = (\mathbf{\Lambda}^{-1} \otimes \mathbf{I}_d) ((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) \mathbf{r} + \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{b}), \\ \mathbf{\Lambda} = \text{diag}((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{c}^T) \mathbf{r} + \mathbf{1}_n), \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^d \}. \end{aligned} \quad (1)$$

定义2 (无穷透射子像) 给定构型 \mathbf{r} , 其无穷透射子像可表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s(\mathbf{r}) = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn} : \mathbf{p} = (\mathbf{\Lambda}^{-1} \otimes \mathbf{I}_d) ((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) \mathbf{r} + \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{b}), \\ \mathbf{\Lambda} = \text{diag}((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{c}^T) \mathbf{r} + \mathbf{1}_n), \det(\mathbf{\Lambda}) = 0, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^d \}. \end{aligned} \quad (2)$$

注释1 \mathbf{c} 为透射系数, 当 $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ 时, 透射像退化为仿射像, 当 $\mathbf{c}^T \mathbf{r}_i + 1 = 0$ 时, \mathbf{r}_i 被映射到无穷远. 一旦队形中某个体的目标位置被映射到无穷远, 个体会快速远离编队区域, 导致编队失控.

注释2 在动态环境下, 定义中相应参数应为时变形式, 如 $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}(t)$. 在目标队形设计部分, 本文主要考虑静态变换, 因此为简化书写统一省略了时间参数.

引理1 ([20]) 透射变换不改变任意三点的共线关系以及共线四点的交比.

定义3 (自应力矩阵) 给定队形框架 $\mathcal{G}(\mathbf{p})$, 矩阵 $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是关于 \mathbf{p} 的自应力矩阵当且仅当存在由应力系数组成的对称矩阵 $[\mathbf{\Omega}_{ij}]_{n \times n}$, 使得

$$(\mathbf{\Omega} \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

其中,

$$[\mathbf{\Omega}]_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, (i, j) \notin \mathcal{E}, \\ -\mathbf{\Omega}_{ij}, & i \neq j, (i, j) \in \mathcal{E}, \\ \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \mathbf{\Omega}_{ik}, & i = j. \end{cases} \quad (4)$$

引理2 (透射不变性) 给定队形框架 $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ 对应的自应力矩阵 Ω , 则任意 $\mathcal{G}(\mathbf{p}), \mathbf{p} \in \mathcal{P}(\mathbf{r}) \setminus \mathcal{P}_s(\mathbf{r})$, 具有与 Ω 相同秩的自应力矩阵 Ω_p .

证明 根据定义 3, 存在对称矩阵 $[\Omega_{ij}]_{n \times n}$ 满足式 (4) 且

$$(\Omega \otimes I_d) \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

由此, 若令 $\Omega_p = \Lambda \Omega \Lambda$, 且 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{diag}((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{c}^T) \mathbf{r} + \mathbf{1}_n)$ 对应于定义 1 中将 \mathbf{r} 投影到像 \mathbf{p} 的参数, 则存在对称矩阵 $[\lambda_i \lambda_j \Omega_{ij}]_{n \times n}$, 使得

$$[\Omega_p]_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, (i, j) \notin \mathcal{E}, \\ -\lambda_i \lambda_j \Omega_{ij}, & i \neq j, (i, j) \in \mathcal{E}, \\ \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \lambda_i \lambda_k \Omega_{ik}, & i = j, \end{cases} \quad (6)$$

且满足

$$\begin{aligned} (\Omega_p \otimes I_d) \mathbf{p} &= (\Lambda \Omega \Lambda \otimes I_d) (\Lambda^{-1} \otimes I_d) ((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) \mathbf{r} + \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{b}) \\ &= (\Lambda \Omega \Lambda \Lambda^{-1} \otimes I_d) ((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) \mathbf{r} + \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{b}) \\ &= (\Lambda \Omega \otimes I_d) ((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) \mathbf{r} + \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{b}) \\ &= (\Lambda \otimes I_d) (\Omega \otimes I_d) ((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) \mathbf{r} + \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (7)$$

又由于 Ω 是对称矩阵, 且 $(\Omega \otimes I_d)(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, 则

$$(\Omega_p \otimes I_d) \mathbf{p} = (\Lambda \otimes I_d) ((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) (\Omega \otimes I_d) \mathbf{r} + (\Omega \otimes I_d) (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{b})) = \mathbf{0}. \quad (8)$$

因此, Ω_p 为 $\mathcal{G}(\mathbf{p})$ 的自应力矩阵, 且由于 $\mathbf{p} \in \mathcal{P}(\mathbf{r}) \setminus \mathcal{P}_s(\mathbf{r})$, 有 $\det(\Lambda) \neq 0$, 即

$$\text{rank}(\Omega_p) = \text{rank}(\Lambda \Omega \Lambda) = \text{rank}(\Omega). \quad (9)$$

引理3 (透射等价) 给定欧氏空间 \mathbb{R}^d 上 $d+2$ 个智能体集 \mathcal{V} 对应的构型 \mathbf{r} 和 \mathbf{p} , 且满足大小为 $d+1$ 的任意集合 $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$, 满足 $\{\mathbf{r}_i\}_{i \in \tilde{\mathcal{V}}}$ 仿射生成空间 \mathbb{R}^d , 则存在唯一参数 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 使得 $\mathbf{p} \in \mathcal{P}(\mathbf{r}) \setminus \mathcal{P}_s(\mathbf{r})$, 当且仅当大小为 $d+1$ 的任意集合 $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$, 满足 $\{\mathbf{p}_i\}_{i \in \tilde{\mathcal{V}}}$ 仿射生成空间 \mathbb{R}^d .

证明 根据透射像和无穷透射子像的定义, 给定构型 \mathbf{r} , 有

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{r}) \setminus \mathcal{P}_s(\mathbf{r}) &= \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn} : \mathbf{p} = (\Lambda^{-1} \otimes I_d) ((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) \mathbf{r} + \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{b}), \\ &\quad \Lambda = \text{diag}((\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{c}^T) \mathbf{r} + \mathbf{1}_n), \det(\Lambda) \neq 0, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^d\}. \end{aligned} \quad (10)$$

即原命题等价于存在满足 $\det(\Lambda) \neq 0$ 的唯一参数 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 使得

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_1 + 1) \otimes \mathbf{p}_1 &= \mathbf{A} \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}, \\ &\vdots \\ (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_{d+2} + 1) \otimes \mathbf{p}_{d+2} &= \mathbf{A} \mathbf{r}_{d+2} + \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (11)$$

由于大小为 $d+1$ 的任意集合 $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$, 满足 $\{\mathbf{r}_i\}_{i \in \tilde{\mathcal{V}}}$ 仿射生成空间 \mathbb{R}^d , 则有

$$\mathbf{r}_{d+1}^T = a_1 \mathbf{r}_1^T + \dots + a_{d+1} \mathbf{r}_{d+1}^T, \quad (12)$$

其中, $\sum_{i=1}^{d+1} a_i = 1$ 且 $a_i \neq 0, \forall 1 \leq i \leq d+1$, 代入方程 (11) 并进行消元, 可得

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_{d+2} + 1) \mathbf{p}_{d+2} &= \sum_{i=1}^{d+1} a_i (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_i + 1) \mathbf{p}_i \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^{d+1} a_i (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_i + 1) \mathbf{p}_{d+2} &= \sum_{i=1}^{d+1} a_i (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_i + 1) \mathbf{p}_i \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^{d+1} a_i (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_i + 1) (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_i) &= 0 \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^{d+1} a_i \mathbf{c}^T \mathbf{r}_i (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_i) &= - \sum_{i=1}^{d+1} a_i (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_i) \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^{d+1} (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_i) a_i \mathbf{r}_i^T \mathbf{c} &= - \sum_{i=1}^{d+1} a_i (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_i). \tag{13}
 \end{aligned}$$

令 $\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{d+1} (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_i) a_i \mathbf{r}_i^T$, 仅需证明 \mathbf{G} 是满秩矩阵即可求取 \mathbf{c} , 进而确定唯一的 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, 即

$$\begin{cases}
 \mathbf{A} = [(\mathbf{c}^T \mathbf{r}_{d+2} + 1) \mathbf{p}_{d+2} - (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_1 + 1) \mathbf{p}_1, \dots, (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_{d+2} + 1) \mathbf{p}_{d+2} - (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_{d+1} + 1) \mathbf{p}_{d+1}] \\
 \quad \cdot [\mathbf{r}_{d+2} - \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{d+2} - \mathbf{r}_{d+1}]^{-1}, \\
 \mathbf{b} = (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_1 + 1) \mathbf{p}_1 - \mathbf{A} \mathbf{r}_1, \\
 \mathbf{c} = - \left(\sum_{i=1}^{d+1} (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_i) a_i \mathbf{r}_i^T \right)^{-1} \sum_{i=1}^{d+1} a_i (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_i).
 \end{cases} \tag{14}$$

(充分性) 由于大小为 $d+1$ 的任意集合 $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$, 满足 $\{\mathbf{p}_i\}_{i \in \tilde{\mathcal{V}}}$ 仿射生成空间 \mathbb{R}^d , 则必然存在唯一参数组 b_1, \dots, b_{d+1} , 使得 $\mathbf{p}_{d+1}^T = b_1 \mathbf{p}_1^T + \dots + b_{d+1} \mathbf{p}_{d+1}^T$, 且满足 $\sum_{i=1}^{d+1} b_i = 1, b_i \neq 0, \forall 1 \leq i \leq d+1$. 又由于

$$\sum_{i=1}^{d+1} a_i (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_i + 1) \mathbf{p}_{d+2} = \sum_{i=1}^{d+1} a_i (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_i + 1) \mathbf{p}_i, \tag{15}$$

且 $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{d+1}$ 仿射无关, 即方程组

$$\begin{cases}
 a_1 (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_1 + 1) = 0, \\
 \vdots \\
 a_{d+1} (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_{d+1} + 1) = 0
 \end{cases} \tag{16}$$

无解, 而 $\sum_{i=1}^{d+1} a_i (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_i + 1) = 0$ 或存在 $a_i (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_i + 1) = 0$ 的情况与任意大小为 $d+1$ 的集合 $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$, 满足 $\{\mathbf{p}_i\}_{i \in \tilde{\mathcal{V}}}$ 仿射生成空间 \mathbb{R}^d , 这一条件矛盾. 因此,

$$b_1 = \frac{a_1 (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_1 + 1)}{\sum_{i=1}^{d+1} a_i (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_i + 1)} \neq 0, \dots, b_{d+1} = \frac{a_1 (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_{d+1} + 1)}{\sum_{i=1}^{d+1} a_i (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_i + 1)} \neq 0, \tag{17}$$

即满足 $\det(\mathbf{\Lambda}) \neq 0$. 进而, 令 $\hat{\mathbf{p}}$ 为 \mathbf{r} 在参数 $(\mathbf{I}_d, \mathbf{0}, \mathbf{c})$ 下对应的透射像, 根据式 (15) 有

$$\mathbf{G} = (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_1) \left(a_1 \mathbf{r}_1^T - \frac{b_1}{b_{d+1}} a_{d+1} \mathbf{r}_{d+1}^T \right) + \dots + (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_d) \left(a_d \mathbf{r}_d^T - \frac{b_d}{b_{d+1}} a_{d+1} \mathbf{r}_{d+1}^T \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= [\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_d] \left[\left(a_1 \mathbf{r}_1^T - \frac{b_1}{b_{d+1}} a_{d+1} \mathbf{r}_{d+1}^T \right)^T, \dots, \left(a_d \mathbf{r}_d^T - \frac{b_d}{b_{d+1}} a_{d+1} \mathbf{r}_{d+1}^T \right)^T \right]^T \\
 &= [\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_d] \begin{bmatrix} a_1 (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_1 + 1) \left(\frac{\mathbf{r}_1^T}{\mathbf{c}^T \mathbf{r}_{d+1}} - \frac{\mathbf{r}_{d+1}^T}{\mathbf{c}^T \mathbf{r}_{d+1}} \right) \\ \vdots \\ a_d (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_d + 1) \left(\frac{\mathbf{r}_d^T}{\mathbf{c}^T \mathbf{r}_{d+1}} - \frac{\mathbf{r}_{d+1}^T}{\mathbf{c}^T \mathbf{r}_{d+1}} \right) \end{bmatrix} \\
 &= [\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_d] \begin{bmatrix} a_1 (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_1 + 1) (\hat{\mathbf{p}}_1^T - \hat{\mathbf{p}}_{d+1}^T) \\ \vdots \\ a_d (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_d + 1) (\hat{\mathbf{p}}_d^T - \hat{\mathbf{p}}_{d+1}^T) \end{bmatrix}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

又根据引理 1, 透射变换 $(\mathbf{I}_d, \mathbf{0}, \mathbf{c})$ 不改变共线性, $\hat{\mathbf{p}}_1, \dots, \hat{\mathbf{p}}_d, \hat{\mathbf{p}}_{d+1}$ 都可以仿射生成空间 \mathbb{R}^d . 因此, $\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_d$ 线性无关, $\hat{\mathbf{p}}_1^T - \hat{\mathbf{p}}_{d+1}^T, \dots, \hat{\mathbf{p}}_d^T - \hat{\mathbf{p}}_{d+1}^T$ 线性无关, 即 $\text{rank}(\mathbf{G}) = d$, 可根据 \mathbf{p} 和 \mathbf{r} 确定唯一的 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, 且满足 $\det(\mathbf{\Lambda}) \neq 0$.

(必要性) 假设大小为 $d+2$ 的 \mathcal{V} 满足 $\{\mathbf{r}_i\}_{i \in \mathcal{V}}$ 仿射生成空间, 但存在大小为 $d+1$ 的集合 $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$, 不满足 $\{\mathbf{r}_i\}_{i \in \tilde{\mathcal{V}}}$ 仿射生成空间 \mathbb{R}^d . 那么, 不失一般性地假设 $\mathcal{V}/\tilde{\mathcal{V}} = \{d+1\}$, 则有 $\mathbf{p}_{d+1}^T = b_1 \mathbf{p}_1^T + \dots + b_{d+1} \mathbf{p}_{d+1}^T$, 且满足 $\sum_{i=1}^{d+1} b_i = 1$, $b_{d+1} = 0$, $b_i \neq 0, \forall 1 \leq i \leq d$. 又由于 $\sum_{i=1}^{d+1} a_i (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_i + 1) \mathbf{p}_{d+2} = \sum_{i=1}^{d+1} a_i (\mathbf{c}^T \mathbf{r}_i + 1) \mathbf{p}_i$, 有 $\mathbf{c}^T \mathbf{r}_{d+1} + 1 = 0$. 此时, $\det(\mathbf{\Lambda}) = 0$, 与存在性条件相矛盾.

定义4 (透射可定位) 称队形框架 $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ 是透射可定位的, 若对任意 $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_L^T, \mathbf{p}_F^T]^T \in \mathcal{P}(\mathbf{r}) \setminus \mathcal{P}_s(\mathbf{r})$, 有 \mathbf{p}_F^T 可以被 \mathbf{p}_L^T 唯一决定.

定理1 (透射可定位条件) 在欧氏空间 \mathbb{R}^d 中, 队形框架 $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ 以最少的领航者实现透射可定位, 当且仅当 \mathcal{V}_L 的大小为 $d+2$, 且大小为 $d+1$ 的任意集合 $\tilde{\mathcal{V}}_L \subset \mathcal{V}_L$, 满足 $\{\mathbf{r}_i\}_{i \in \tilde{\mathcal{V}}_L}$ 仿射生成空间 \mathbb{R}^d .

证明 根据定义, 对于任意 $\mathbf{p} \in \mathcal{P}(\mathbf{r}) \setminus \mathcal{P}_s(\mathbf{r})$, 存在 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 使得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_L &= (\mathbf{\Lambda}_L^{-1} \otimes \mathbf{I}_d) ((\mathbf{I}_{n_l} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{r}_L + \mathbf{1}_{n_l} \otimes \mathbf{b}), \\
 \mathbf{p}_F &= (\mathbf{\Lambda}_F^{-1} \otimes \mathbf{I}_d) ((\mathbf{I}_{n_f} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{r}_F + \mathbf{1}_{n_f} \otimes \mathbf{b}), \quad (19)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\mathbf{\Lambda}_L = \text{diag}((\mathbf{I}_{n_l} \otimes \mathbf{c}^T) \mathbf{r}_L + \mathbf{1}_{n_l}), \quad \mathbf{\Lambda}_F = \text{diag}((\mathbf{I}_{n_f} \otimes \mathbf{c}^T) \mathbf{r}_F + \mathbf{1}_{n_f}). \quad (20)$$

由此, $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ 透射可定位等价于, 根据 \mathbf{p}_L 和 \mathbf{r}_L 可以求取全局透射变换的参数 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. 由于 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 为 $d^2 + 2d$ 维, 至少需要 $d+2$ 个领航者满足 $\mathbf{p}_L = (\mathbf{\Lambda}_L^{-1} \otimes \mathbf{I}_d) ((\mathbf{I}_{n_l} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{r}_L + \mathbf{1}_{n_l} \otimes \mathbf{b})$ 构成 $d \times (d+2)$ 维方程组. 进一步, 大小为 $d+1$ 的任意集合 $\tilde{\mathcal{V}}_L \subset \mathcal{V}_L$, 满足 $\{\mathbf{r}_i\}_{i \in \tilde{\mathcal{V}}_L}$ 仿射生成空间 \mathbb{R}^d , 且 $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_L^T, \mathbf{p}_F^T]^T \in \mathcal{P}(\mathbf{r}) \setminus \mathcal{P}_s(\mathbf{r})$, 根据引理 3, 必然可以解出唯一的 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

定理2 (自应力矩阵条件) 若给定队形框架 $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ 的自应力矩阵 $\mathbf{\Omega}$, 则该框架在不借助全局变换参数 (\mathbf{A}, \mathbf{b}) 的情况下实现透射可定位, 当且仅当 \mathbf{r}_L 满足定理 1 条件, $\text{rank}(\mathbf{\Omega}_{FF}) = n_f$, $n_f \leq n - d - 2$ 且 $\mathbf{\Omega}_{FF}$ 为 $\mathbf{\Omega}$ 中跟随者对应的子矩阵, 即

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_{LL} & \mathbf{\Omega}_{LF} \\ \mathbf{\Omega}_{FL} & \mathbf{\Omega}_{FF} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

证明 根据定理 1, 参数 \mathbf{c} 有唯一解, 当且仅当 $n_L \geq d + 2$, 即 $n_f \leq n - d - 2$. 此时, 令 $\Lambda_L = \text{diag}((\mathbf{I}_{n_L} \otimes \mathbf{c}^T)\mathbf{r}_L + \mathbf{1}_{n_L}), \Lambda_F = \text{diag}((\mathbf{I}_{n_f} \otimes \mathbf{c}^T)\mathbf{r}_F + \mathbf{1}_{n_f})$, 则根据引理 2 可得

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} \Omega_{LL} & \Omega_{LF} \\ \Omega_{FL} & \Omega_{FF} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_d \right) \begin{bmatrix} \mathbf{r}_L \\ \mathbf{r}_F \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \Rightarrow & \left(\begin{bmatrix} \Lambda_L & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{LL} & \Omega_{LF} \\ \Omega_{FL} & \Omega_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_L & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_F \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_d \right) \begin{bmatrix} \mathbf{p}_L \\ \mathbf{p}_F \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \Rightarrow & (\Lambda_F \Omega_{FL} \Lambda_L \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{p}_L + (\Lambda_F \Omega_{FF} \Lambda_F \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{p}_F = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (22)$$

因此, \mathbf{p}_F 有唯一解, 当且仅当

$$\begin{aligned} \text{rank}(\Lambda_F \Omega_{FF} \Lambda_F \otimes \mathbf{I}_d) = n_f d & \Rightarrow \text{rank}(\Lambda_F \Omega_{FF} \Lambda_F) = n_f \\ & \Rightarrow \text{rank}(\Omega_{FF}) = n_f. \end{aligned} \quad (23)$$

定理3 (连续凸包条件) 给定满足定理 1 的 $\mathbf{r}_L \in \mathbb{R}^{d(d+2)}$, 其透射像 \mathbf{p}_L 可形成 $\mathbb{R}^{(d+2)d}$ 上的连续变换, 且 \mathbf{p}_F 始终保持在 \mathbf{p}_L 定义的凸包内部, 当且仅当 (1) \mathbf{p}_L 不改变凸凹性, (2) \mathbf{r}_F 位于 \mathbf{r}_L 定义的凸包内部且 \mathbf{r}_L 满足

$$\begin{cases} \det(\mathbf{H}) \neq 0, \\ \sum_{i=1}^d k_i > 1, k_i > 0, \forall 1 \leq i \leq d, \\ \sum_{i=1}^d \frac{a_i}{a_{d+1}} < -1, \frac{a_i}{a_{d+1}} < 0, \forall 1 \leq i \leq d, \end{cases} \quad (24)$$

其中, $\mathbf{H} = [\mathbf{r}_1 + \frac{k_1 a_{d+1}}{a_1} \mathbf{r}_{d+1}, \dots, \mathbf{r}_d + \frac{k_d a_{d+1}}{a_d} \mathbf{r}_{d+1}]^T$, $\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_{d+1} = \sum_{i=1}^d k_i (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_i)$, $\mathbf{r}_{d+2} - \mathbf{r}_{d+1} = \sum_{i=1}^d -\frac{a_i}{a_{d+1}} (\mathbf{r}_{d+2} - \mathbf{r}_i)$.

证明 首先考虑保证 \mathbf{p}_L 可连续变换的 \mathbf{p}_L 条件. 即 \mathbf{p}_L 连续变换情况下, 需保证由 \mathbf{p}_L 和 \mathbf{r}_L 可在实数域内确定唯一的 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. 这等价于以下方程有唯一解

$$(\Lambda_L \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{p}_L = (\mathbf{I}_{n_L} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{r}_L + \mathbf{1}_{n_L} \otimes \mathbf{b}. \quad (25)$$

根据引理 3 的证明可知, 这等价于 $\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{d+1} (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_i) a_i \mathbf{r}_i^T$ 满秩, 由于

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_1) (a_1 \mathbf{r}_1^T + k_1 a_{d+1} \mathbf{r}_{d+1}^T) + \dots + (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_d) (a_d \mathbf{r}_d^T + k_d a_{d+1} \mathbf{r}_{d+1}^T) \\ &= [\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_d] \begin{bmatrix} a_1 \left(\mathbf{r}_1^T + \frac{k_1 a_{d+1}}{a_1} \mathbf{r}_{d+1}^T \right) \\ \vdots \\ a_d \left(\mathbf{r}_d^T + \frac{k_d a_{d+1}}{a_d} \mathbf{r}_{d+1}^T \right) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} a_1 \left(\mathbf{r}_1^T + \frac{k_1 a_{d+1}}{a_1} \mathbf{r}_{d+1}^T \right) \\ \vdots \\ a_d \left(\mathbf{r}_d^T + \frac{k_d a_{d+1}}{a_d} \mathbf{r}_{d+1}^T \right) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (26)$$

这又等价于要求 $\det(\tilde{\mathbf{P}}) \cdot \det(\mathbf{H}) \neq 0$. 由 $\det(\tilde{\mathbf{P}}) \neq 0$ 可知, 不存大小为 $d+1$ 的 $\tilde{\mathcal{V}}_L \subset \mathcal{V}_L$, 使得 $\{\mathbf{p}_i\}_{i \in \tilde{\mathcal{V}}_L}$ 处于 $d-1$ 维空间上, 因此连续变换的 \mathbf{p}_L 不能改变由 \mathbf{r}_L 定义的凸凹性, 即得出针对 \mathbf{p}_L 的条件 (1). 在满足条件 (1) 时, 有

$$\mathbf{r}_{d+2} - \mathbf{r}_{d+1} = \sum_{i=1}^d -\frac{a_i}{a_{d+1}} (\mathbf{r}_{d+2} - \mathbf{r}_i), \quad \sum_{i=1}^d \frac{a_i}{a_{d+1}} < -1, \frac{a_i}{a_{d+1}} < 0, \forall 1 \leq i \leq d, \quad (27)$$

$$\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_{d+1} = \sum_{i=1}^d k_i (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_i), \quad \sum_{i=1}^d k_i > 1, k_i > 0, \forall 1 \leq i \leq d. \quad (28)$$

进而, 可得式 (24) 中由 $\det(\mathbf{H}) \neq 0$ 限定的 \mathbf{r}_L 条件. 此外, 由于以上条件可解出唯一的 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, 那么根据引理 1 的共线不变性, 若 \mathbf{p}_L 不改变 \mathbf{r}_L 定义的凸凹性, 则内部 \mathbf{r}_F 的映射 \mathbf{p}_F 仍保持在内部, 外部 \mathbf{r}_F 的映射 \mathbf{p}_F 仍保持在外部. 因此 \mathbf{p}_F 被 \mathbf{p}_L 连续凸包需满足条件 (1) 和 (2).

推论 1 若满足定理 1 的 $\mathbf{r}_L \in \mathbb{R}^{d(d+2)}$ 包含原点且

$$\sum_{i=1}^d \frac{a_i}{a_{d+1}} < -1, \quad \frac{a_i}{a_{d+1}} < 0, \quad \forall 1 \leq i \leq d, \quad (29)$$

则 \mathbf{r}_L 满足连续凸包的初始条件.

证明 不失一般性地, 令 $\mathbf{r}_1 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$, 沿用定理 3 证明中的定义, 有

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 \left(\mathbf{r}_1^T + \frac{k_1 a_{d+1}}{a_1} \mathbf{r}_{d+1}^T \right) \\ \vdots \\ a_d \left(\mathbf{r}_d^T + \frac{k_d a_{d+1}}{a_d} \mathbf{r}_{d+1}^T \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \left(\frac{k_1 a_{d+1}}{a_1} \mathbf{r}_{d+1}^T \right) \\ \vdots \\ a_d \left(\mathbf{r}_d^T + \frac{k_d a_{d+1}}{a_d} \mathbf{r}_{d+1}^T \right) \end{bmatrix}. \quad (30)$$

此时, 假设 $\forall k_i > 0, \forall 1 \leq i \leq d, \sum_{i=1}^d k_i > 1$, 存在 \mathbf{r}_L 使得 $\det(\mathbf{H}) = 0$, 则 \mathbf{H} 中 (1) 存在某一行 $1 \leq j \leq d$ 全为 0, 或 (2) 存在某一行 $1 \leq j \leq d$ 可用其他行线性表示. 首先考虑条件 (1), 由于 $\mathbf{r}_1 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$, 条件 (1) 等价于

$$\mathbf{r}_j^T + \frac{k_j a_{d+1}}{a_j} \mathbf{r}_{d+1}^T = \mathbf{r}_1^T. \quad (31)$$

又 $k_i > 0, a_i \neq 0, \forall 1 \leq i \leq d$, 当 $j = 1$ 时, $\mathbf{r}_{d+1}^T = (0, \dots, 0) = \mathbf{r}_1$, 与定理 1 条件矛盾; 当 $j \neq 1$ 时, $\mathbf{r}_1^T, \mathbf{r}_j^T, \mathbf{r}_{d+1}^T$ 三点共线, 与定理 1 条件矛盾. 因此条件 (1) 不成立. 再考虑条件 (2), 即存在 $1 \leq j \leq d$, 使得

$$\mathbf{r}_j^T + \frac{k_j a_{d+1}}{a_j} \mathbf{r}_{d+1}^T = \lambda_1 \frac{k_1 a_{d+1}}{a_1} \mathbf{r}_{d+1}^T + \dots + \lambda_{d-1} \left(\mathbf{r}_d^T + \frac{k_d a_{d+1}}{a_d} \mathbf{r}_{d+1}^T \right), \quad (32)$$

$$\mathbf{r}_j^T - \mathbf{r}_1^T = \beta_1 (\mathbf{r}_2^T - \mathbf{r}_1^T) + \dots + \beta_{j-2} (\mathbf{r}_{j-1}^T - \mathbf{r}_1^T) + \beta_{j-1} (\mathbf{r}_{j+1}^T - \mathbf{r}_1^T) + \dots + \beta_{d-1} (\mathbf{r}_{d+1}^T - \mathbf{r}_1^T). \quad (33)$$

这意味着 \mathbf{r}_j^T 处于由 $\mathbf{r}_1^T, \dots, \mathbf{r}_{j-1}^T, \mathbf{r}_{j+1}^T, \dots, \mathbf{r}_{d+1}^T$ 张成的 $d-1$ 维空间上, 这与定理 1 的条件相矛盾, 即假设不成立.

定义 5 (目标队形) 给定满足定理 2 的 Ω , 满足透射可定位和连续凸包的目标编队的时变构型可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_L(t) &\in \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{d(d+2)} : \mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_{d+1} = \sum_{i=1}^d k_i (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_i), \sum_{i=1}^d k_i > 1, k_i > 0, \forall i \in [d] \right\}, \\ \mathbf{p}_F(t) &= -(\Lambda_F(t) \Omega_{FF} \Lambda_F(t) \otimes \mathbf{I}_d)^{-1} (\Lambda_F(t) \Omega_{FL} \Lambda_L(t) \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{p}_L(t), \end{aligned} \quad (34)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Lambda_F(t) &= \text{diag} \left((\mathbf{I}_{n_i} \otimes \mathbf{c}^T(t)) \mathbf{r}_F + \mathbf{1}_{n_i} \right), \\ \mathbf{c}^T(t) &= - \left([\mathbf{p}_{d+2}(t) - \mathbf{p}_1(t), \dots, \mathbf{p}_{d+2}(t) - \mathbf{p}_{d+1}(t)] [a_1 \mathbf{r}_1, \dots, a_{d+1} \mathbf{r}_{d+1}]^T \right)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sum_{i=1}^{d+1} a_i (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_i), \\ [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{d+1}]^T &= [\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_{d+1}]^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{d+2}. \end{aligned} \quad (35)$$

本节通过引入透射像的定义, 对将具有透射不变性的自应力矩阵作为一种常约束不变量整合到透射型目标队形的方法进行了设计和分析. 为了保证根据自应力矩阵和领航者坐标即可唯一确定相应透射变换下的跟踪者目标位置且目标编队构型不属于无穷透射子像, 本节所提出的编队目标构型需满足以下三方面约束:

(1) 根据定理 1 对应的透射可定位条件, 在欧氏空间 \mathbb{R}^d 中, 构型对应领航者的个数至少为 $d+2$ 个;

(2) 根据定理 2 对应的自应力矩阵条件, 初始构型对应的自应力矩阵中跟随者子矩阵 $\mathbf{\Omega}_{FF}$ 满秩;

(3) 根据定理 3 对应的连续凸包条件, 初始构型应保证跟随者在领航者确定的凸包内部且领航者构型不能发生凹凸性变化.

其中, 约束 (1) 和 (2) 是实现透射编队中变换唯一性的充分必要条件, 约束 (3) 是避免跟随者由于领航者的自主运动导致目标位置被映射到无穷远的充分不必要条件.

3 自应力矩阵的求取方法

引理4 ([21]) 若 $n \times n$ 矩阵 $\mathbf{\Omega}$ 是编队构型 $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ 的自应力矩阵, 且 \mathbf{r} 能够仿射生成空间 \mathbb{R}^d , 那么 $\text{rank}(\mathbf{\Omega}) \leq n - d - 1$.

给定无向图上定义的编队构型 $\mathcal{G}(\mathbf{r})$, 其秩为 $n - d - 1$ 的自应力矩阵 $\mathbf{\Omega}$ 存在的条件尚无明确定论^[16]. 因此, 在仿射队形控制的应用中, 一般需要对 $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ 的边拓扑结构进行合理设计, 进而采用二次规划的方法对可行解进行搜索. 由于在本文提出的透射队形控制背景中, 仅需获取秩大于等于 $n - d - 2$ 的自应力矩阵, 即放宽了搜索条件, 理论上透射队形控制对自应力矩阵的求解更为容易. 又考虑到引理 4 指出, 满足定理 3 条件的自应力矩阵的秩最大为 $n - d - 1$. 我们给出一种构建 $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ 的拓扑结构和相应自应力矩阵的方法, 使得任意跟随者或指定跟随者的需求满足 $\text{rank}(\mathbf{\Omega}_{FF}) = n - d - 2$.

步骤 1. 根据增广构型矩阵 $\hat{\mathbf{r}} = [\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_n] \in \mathbb{R}^{(d+1) \times n}$, $\hat{\mathbf{r}}_i = [\mathbf{r}_i^T, 1]^T$ 对应的 $d+1$ 个线性无关行向量, 构建矩阵 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{(n-d-1) \times n}$, 使得 $\mathbf{Q}\hat{\mathbf{r}}^T = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_{n-d-1}$. 并将 \mathbf{Q} 的任意 $n-d-2$ 行标准正交基构成的矩阵组成的集合定义为 \mathcal{Q} .

步骤 2. 构建包含 m 个边的 \mathcal{E} , 使得任意 $d+1$ 个节点是连通的, 赋予边任意方向, 并据此构建图的关联矩阵 $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_L^T, \mathbf{B}_F^T]^T = [b_1, \dots, b_{d+2}, b_{d+3}, \dots, b_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 其满足 $b_{ij} = 1$, 若第 j 条边起始于节点 i ; $b_{ij} = -1$, 若第 j 条边终止于节点 i ; $b_{ij} = 0$, 若第 j 条边与节点 i 无关.

步骤 3. 构建 $\mathbf{\Omega}$ 的分解表达式, 即 $\mathbf{\Omega} = \mathbf{B}^T \text{diag}(\sum_{i=1}^q c_i z_i) \mathbf{B}$, 其中, $z_1, \dots, z_q \in \mathbb{R}^m$ 是

$$\mathbf{E} = [(\hat{\mathbf{r}}\mathbf{B}^T \text{diag}(b_1))^T, \dots, (\hat{\mathbf{r}}\mathbf{B}^T \text{diag}(b_n))^T]^T \quad (36)$$

的零空间的基.

步骤 4. 给定特征值上界 $\bar{\lambda}$, 求解以下 LMI 问题:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{c}} \lambda, & & \max_{\mathbf{c}} \lambda, \\ \text{s.t. } 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}, \tilde{\mathbf{Q}} \in \mathcal{Q}, & & \text{s.t. } 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}, \\ \sum_{i=1}^q c_i \tilde{\mathbf{Q}}^T \mathbf{B}^T \text{diag}(z_i) \mathbf{B} \tilde{\mathbf{Q}} \succ \lambda \mathbf{I}_{n-d-2}, & & \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{B}_F^T \text{diag}(z_i) \mathbf{B}_F \succ \lambda \mathbf{I}_{n-d-2}, \\ \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{Q}^T \mathbf{B}^T \text{diag}(z_i) \mathbf{B} \mathbf{Q} \succeq \mathbf{0}, & & \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{Q}^T \mathbf{B}^T \text{diag}(z_i) \mathbf{B} \mathbf{Q} \succeq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (37)$$

步骤 5. 若步骤 4 无解, 则在 $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ 中增加边, 并重新生成相应的关联矩阵 \mathbf{B} , 重复步骤 4 直到输出可行解 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_q)$, 并计算 Ω .

定理 4 由以上步骤 1~5 求出的自应力矩阵 Ω 为半正定的, 且满足 $\text{rank}(\Omega_{FF}) = n - d - 2$.

证明 令 $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_q)$, 其中 w_i 为第 i 条边对应两点间的应力系数, 故有 $\Omega = \mathbf{B}^T \text{diag}(\mathbf{w}) \mathbf{B}$. 由于 $(\Omega \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{r} = \mathbf{0} \Rightarrow \hat{\mathbf{r}} \Omega = \mathbf{0}$, 可得 $\hat{\mathbf{r}} \mathbf{B}^T \text{diag}(\mathbf{w}) \mathbf{B} = \mathbf{0}$. 又由于 $\text{diag}(\mathbf{w}) \mathbf{b}_i = \text{diag}(b_i) \mathbf{w}$, 可得

$$\hat{\mathbf{r}} \mathbf{B}^T \text{diag}(b_i) \mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{w} \in \text{Null}(\mathbf{E}) \Rightarrow \mathbf{w} = \sum_{i=1}^q c_i z_i. \quad (38)$$

又由于自应力矩阵 Ω 满足 $\hat{\mathbf{r}} \Omega = \mathbf{0} \Rightarrow \Omega \hat{\mathbf{r}}^T = \mathbf{0}$, 则根据 $\mathbf{Q} \hat{\mathbf{r}}^T = \mathbf{0}, \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_{n-d-1}$, 可得 $\text{rank}(\Omega) = \text{rank}(\mathbf{Q}^T \Omega \mathbf{Q})$. 若不指定跟随者范围, 则仅需考虑 $\text{rank}(\Omega) \geq n - d - 2$ 等价于 $\text{rank}(\mathbf{Q}^T \Omega \mathbf{Q}) \geq n - d - 2$, 同时等价于存在 $\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathcal{Q}$ 使 $\text{rank}(\tilde{\mathbf{Q}}^T \Omega \tilde{\mathbf{Q}}) = n - d - 2$. 又 Ω 为半正定等价于 $\mathbf{Q}^T \Omega \mathbf{Q}$ 半正定, 可给定等价条件 $\exists 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}, \tilde{\mathbf{Q}} \in \mathcal{Q}$, 使

$$\sum_{i=1}^q c_i \tilde{\mathbf{Q}}^T \mathbf{B}^T \text{diag}(z_i) \mathbf{B} \tilde{\mathbf{Q}} \succ \lambda \mathbf{I}_{n-d-2}, \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{Q}^T \mathbf{B}^T \text{diag}(z_i) \mathbf{B} \mathbf{Q} \succeq \mathbf{0}. \quad (39)$$

若指定跟随者范围 $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_L^T, \mathbf{B}_F^T]^T = [b_1, \dots, b_{d+2}, b_{d+3}, \dots, b_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 则有 $\Omega_{FF} = \mathbf{B}_F^T \text{diag}(\mathbf{w}) \mathbf{B}_F$, 即可判断 $\exists 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}$, 使 $\sum_{i=1}^q c_i \mathbf{B}_F^T \text{diag}(z_j) \mathbf{B}_F \succ \lambda \mathbf{I}_{n-d-2}$.

4 透射型跟踪控制器设计

本节考虑自由领航下的跟踪控制器设计问题. 自由领航是指不提供参考轨迹的情况下, 领航者根据自身需求进行自主移动, 仅需保证自主行动轨迹满足

$$\mathbf{p}_L(t) \in \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{d(d+2)} : \mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_{d+1} = \sum_{i=1}^d k_i (\mathbf{p}_{d+2} - \mathbf{p}_i), \sum_{i=1}^d k_i > 1, k_i > 0, \forall i \in [d] \right\}. \quad (40)$$

因此, 在自由领航情景中, 我们仅考虑跟随者对领航者的透射队形跟踪问题. 假设跟随者的动力学为双积分型, 即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{v}_i(t), \\ \dot{\mathbf{v}}_i(t) = \mathbf{u}_i(t), \quad i = d+3, \dots, n, \end{cases} \quad (41)$$

其中, $\mathbf{v}_i(t) \in \mathbb{R}^d, \mathbf{u}_i(t) \in \mathbb{R}^d$ 分别为第 i 个跟随者的速度和控制输入且 $\mathbf{u}_i(0) = \mathbf{0}$. 那么, 本节的目标是设计控制器 $\mathbf{u}_i(t)$ 以实现跟随者对定义 5 中目标队形进行有效跟踪, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{p}_F(t) - \mathbf{p}_F^*(t)) = \mathbf{0}, \quad (42)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_F^*(t) &= -(\Lambda_F^{-1}(t)\Omega_{FF}^{-1}\Omega_{FL}\Lambda_L(t)\otimes\mathbf{I}_d)\mathbf{p}_L(t), \\ \Lambda_F(t) &= \text{diag}((\mathbf{I}_{n_i}\otimes\mathbf{c}^T(t))\mathbf{r}_F+\mathbf{1}_{n_i}), \\ \mathbf{c}^T(t) &= -\left([\mathbf{p}_{d+2}(t)-\mathbf{p}_1(t), \dots, \mathbf{p}_{d+2}(t)-\mathbf{p}_{d+1}(t)] [a_1\mathbf{r}_1, \dots, a_{d+1}\mathbf{r}_{d+1}]^T\right)^{-1} \\ &\quad \cdot \sum_{i=1}^{d+1} a_i(\mathbf{p}_{d+2}-\mathbf{p}_i), \\ [a_1, \dots, a_{d+1}]^T &= [\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_{d+1}]^{-1}\hat{\mathbf{r}}_{d+2}. \end{aligned} \quad (43)$$

对于以上控制问题设计控制器如下:

$$\mathbf{u}_i(t) = -\frac{1}{\mu_i(t)} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \phi_{ij}(t) \Omega_{ij} [K_p(\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)) + K_v(\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_j(t)) - \dot{\mathbf{v}}_j(t)], \quad (44)$$

其中, $K_p, K_v > 0$ 且

$$\mu_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \phi_{ij}(t) \Omega_{ij}, \quad \phi_{ij}(t) = (\mathbf{c}^T(t)\mathbf{r}_i + 1)(\mathbf{c}^T(t)\mathbf{r}_j + 1), \quad (45)$$

则有如下定理成立.

定理5 给定队形框架 $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ 对应的半正定自应力矩阵 Ω , 任意跟随者 i 对应的控制器 (44) 满足 $\mu_i(t) > 0$.

证明 根据半正定矩阵的等价条件, Ω 为半正定矩阵当且仅当存在 n 阶实矩阵 D , 使得

$$\Omega = D^T D. \quad (46)$$

又由于透射变换后, $\mathcal{G}(\mathbf{p})$ 对应于自应力矩阵 $\Omega_p = \Lambda \Omega \Lambda$, 存在 n 阶实矩阵 $D\Lambda$, 使得

$$\Omega_p = \Lambda D^T D \Lambda = (D\Lambda)^T D\Lambda. \quad (47)$$

因此, Ω_p 是实对称矩阵. 考虑到满足透射可定位条件的 $\Lambda_F \Omega_{FF} \Lambda_F$ 位于 Ω_p 的主对角线上且满秩, 可得 $\Lambda_F \Omega_{FF} \Lambda_F$ 是正定矩阵. 这意味着, $\Lambda_F \Omega_{FF} \Lambda_F$ 的任意主对角线元素 $\mu_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \phi_{ij}(t) \Omega_{ij} > 0$.

定理6 在定理 3 的条件下, 若 $\dot{\mathbf{v}}_L(t) = [\dot{\mathbf{v}}_1^T(t), \dots, \dot{\mathbf{v}}_{d+2}^T(t)]^T$ 连续, 并采用控制器 (44), 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{p}_F(t) - \mathbf{p}_F^*(t)) = 0, \quad (48)$$

且收敛是全局指数型的.

证明 将控制器带入系统方程有

$$\mathbf{v}_i(t) = -\frac{1}{\mu_i(t)} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \phi_{ij}(t) \Omega_{ij} [K_p(\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)) + K_v(\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_j(t)) - \dot{\mathbf{v}}_j(t)], \quad (49)$$

两边乘以 $\mu_i(t)$ 并整理有

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \phi_{ij}(t) \Omega_{ij} (\dot{\mathbf{v}}_i(t) - \dot{\mathbf{v}}_j(t))$$

$$= - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \phi_{ij}(t) \boldsymbol{\Omega}_{ij} [K_p(\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)) + K_v(\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_j(t))]. \quad (50)$$

令 $\mathbf{v}_L(t) = [\mathbf{v}_1^T(t), \dots, \mathbf{v}_{d+2}^T(t)]^T$, $\mathbf{v}_F(t) = [\mathbf{v}_{d+3}^T(t), \dots, \mathbf{v}_n^T(t)]^T$, 并定义

$$\boldsymbol{\delta}_F^p(t) = \mathbf{p}_F(t) - \mathbf{p}_F^*(t), \quad \boldsymbol{\delta}_F^v(t) = \dot{\boldsymbol{\delta}}_F^p(t), \quad (51)$$

则有矩阵形式

$$\begin{aligned} & (\Lambda_F(t) \boldsymbol{\Omega}_{FF} \Lambda_F(t) \otimes \mathbf{I}_d) \dot{\mathbf{v}}_F(t) + (\Lambda_F(t) \boldsymbol{\Omega}_{FL} \Lambda_L(t) \otimes \mathbf{I}_d) \dot{\mathbf{v}}_L(t) \\ &= -K_p((\Lambda_F(t) \boldsymbol{\Omega}_{FF} \Lambda_F(t) \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{p}_F(t) + (\Lambda_F(t) \boldsymbol{\Omega}_{FL} \Lambda_L(t) \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{p}_L(t)) \\ & \quad - K_v((\Lambda_F(t) \boldsymbol{\Omega}_{FF} \Lambda_F(t) \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{v}_F(t) + (\Lambda_F(t) \boldsymbol{\Omega}_{FL} \Lambda_L(t) \otimes \mathbf{I}_d) \mathbf{v}_L(t)) \\ &= -K_p(\Lambda_F(t) \boldsymbol{\Omega}_{FF} \Lambda_F(t) \otimes \mathbf{I}_d) \boldsymbol{\delta}_F^p(t) - K_v(\Lambda_F(t) \boldsymbol{\Omega}_{FF} \Lambda_F(t) \otimes \mathbf{I}_d) \boldsymbol{\delta}_F^v(t), \end{aligned} \quad (52)$$

即有

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\delta}}_F^v(t) &= \dot{\mathbf{v}}_F(t) + (\Lambda_F^{-1}(t) \boldsymbol{\Omega}_{FF}^{-1} \boldsymbol{\Omega}_{FL} \Lambda_L(t) \otimes \mathbf{I}_d) \dot{\mathbf{v}}_L(t) \\ &= -K_p \boldsymbol{\delta}_F^p(t) - K_v \boldsymbol{\delta}_F^v(t). \end{aligned} \quad (53)$$

因此误差动力学可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\delta}}_F^p(t) \\ \dot{\boldsymbol{\delta}}_F^v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-d-2} \\ -K_p \mathbf{I}_{n-d-2} & -K_v \mathbf{I}_{n-d-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_F^p(t) \\ \boldsymbol{\delta}_F^v(t) \end{bmatrix}. \quad (54)$$

由于误差系统矩阵的特征值为

$$\lambda_1 = \frac{-K_v - \sqrt{K_v^2 - 4K_p}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-K_v + \sqrt{K_v^2 - 4K_p}}{2}, \quad (55)$$

因此, 对于任意 $K_p, K_v > 0$, 特征值都存在负实部, 即误差全局指数收敛.

5 仿真与实验分析

编队控制一般要求跟随者对领航者所确定的队形和轨迹, 以实现战术上的攻防切换或联合协作的任务需求. 基于相对位姿的常规领航-跟随方法应用较为广泛, 具有良好的扩展性, 但队形的可操作性较差; 基于一致性理论的编队控制方法也难以在不增加控制协议复杂度的前提下拓展编队的机动能力, 较新提出的仿射型编队控制方法可以通过控制领航机的位置来对预设的名义队形进行仿射变换操作, 一定程度上提高了编队的灵活机动性. 然而由于仿射变换对平行不变性的限制, 仿射编队控制在不对编队进行分组或重新计算应力矩阵的情况下, 无法覆盖如图 2(a) 所示的战术攻防与协作任务中所有队形的切换需求. 在此背景下, 本节以如图 2(b) 所示的标准菱形队形为例, 测试本文提出的透射编队控制方法在队形进行攻防切换或联合编队时的有效性. 所选用的构型可表示为

$$\mathbf{r} = [0, 0, 4, 2, 8, 0, 4, -2, 2, 1, 6, 1, 4, 0, 2, -1, 6, -1]^T$$

且该构型下求取的一组可行的应力系数已标注在图 2(b) 的对应边上, 所采用的具体设计方法与应用流程可参见于图 3.

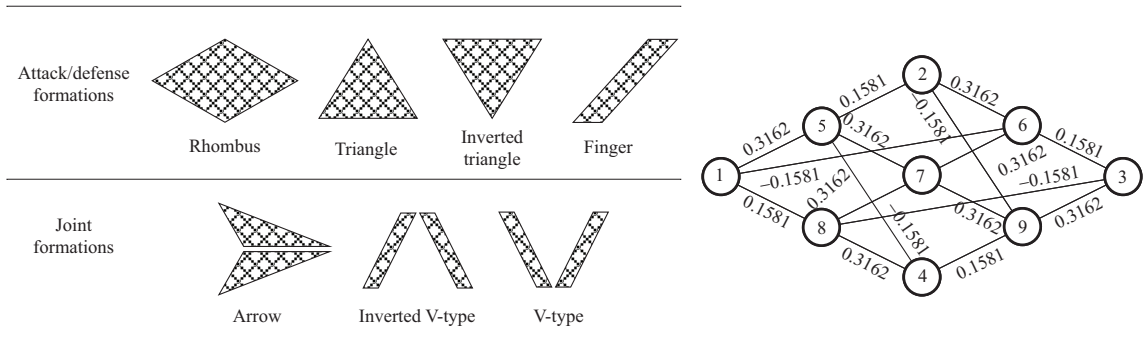


图 2 (a) 攻防与协作任务背景下的队形切换需求; (b) 选用标准队形的应力系数

Figure 2 (a) Formation switching requirements for the offensive and defensive and cooperative tasks; (b) stress coefficients of the selected standard formation

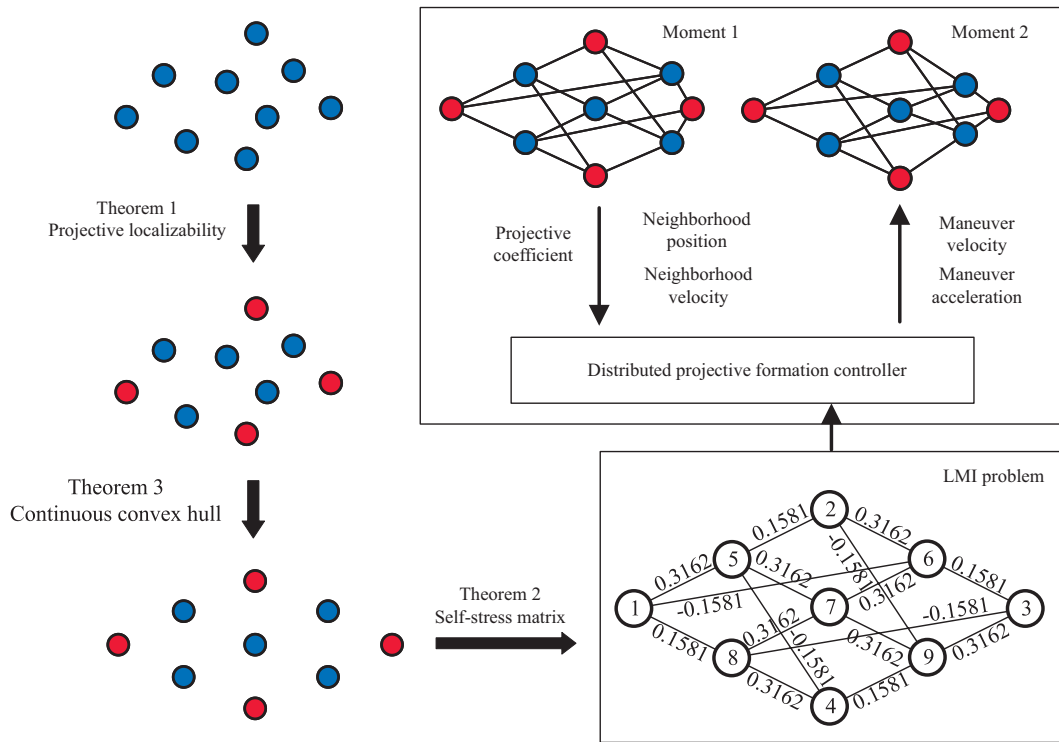


图 3 (网络版彩图) 透射编队控制的整体设计方法与应用流程

Figure 3 (Color online) Design method and application flow of transmission formation control

在攻防队形切换的仿真中, 本文人为指定一系列观测点, 及相应的队形决策结果, 并离线解算整个过程的领航机轨迹和透射参数 $C(t)$. 同时, 考虑到在线应用中 $C(t)$ 的全局通信可能存在较大延时, 本文在控制器中使用 $C(t + \Delta t)$ 进行测试, 其中 $\Delta t = 0.01$. 图 4 和 5 展示了使用所设计的跟踪控制器进行透射型编队的仿真数据. 结果表明, 该控制器能够实现跟踪误差快速收敛. 但注意到, 由于透射系数的获取存在通信延时, 当队形发生透射变换时系统会产生一定的跟踪误差, 但该误差是有界的, 且在领航机队形速度不变时可以快速收敛.

在联合编队的仿真中, 本文模拟了两组菱形编队的无人机群在接到指令后, 形成协作的箭形阵型,

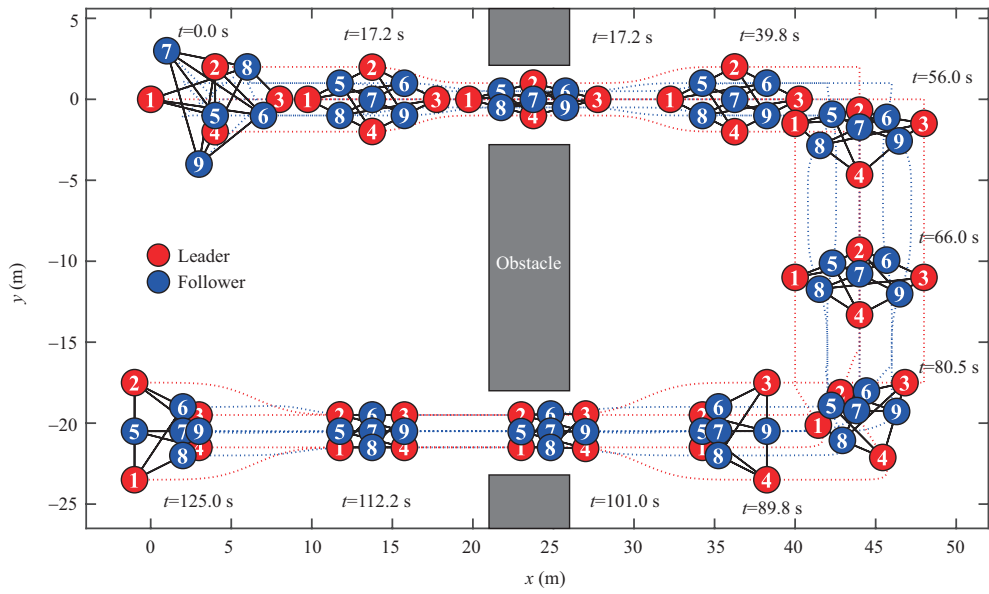


图 4 (网络版彩图) 3×3 无人机编队的攻防队形切换 ($K_p = 2, K_v = 2$)

Figure 4 (Color online) Offensive and defensive switching of a 3×3 UAV formation ($K_p = 2, K_v = 2$)

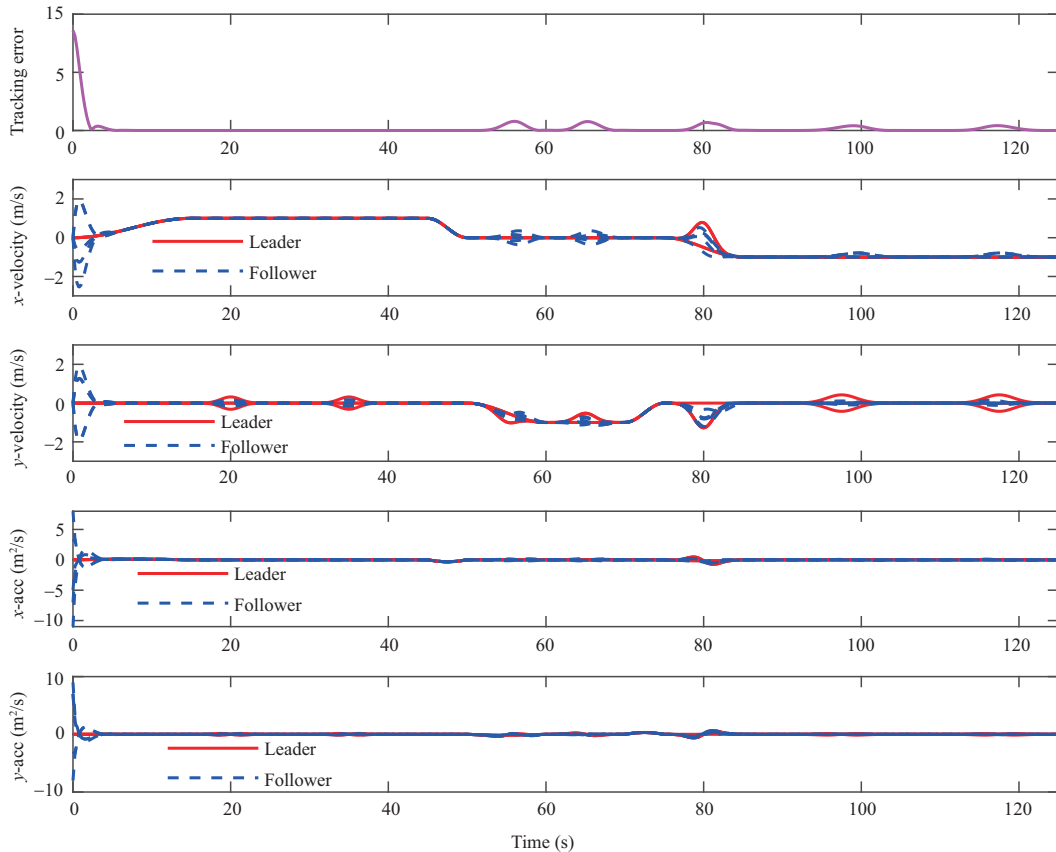


图 5 (网络版彩图) 攻防队形切换下的跟踪误差与状态信息

Figure 5 (Color online) Tracking error and state information under the offensive and defensive switching

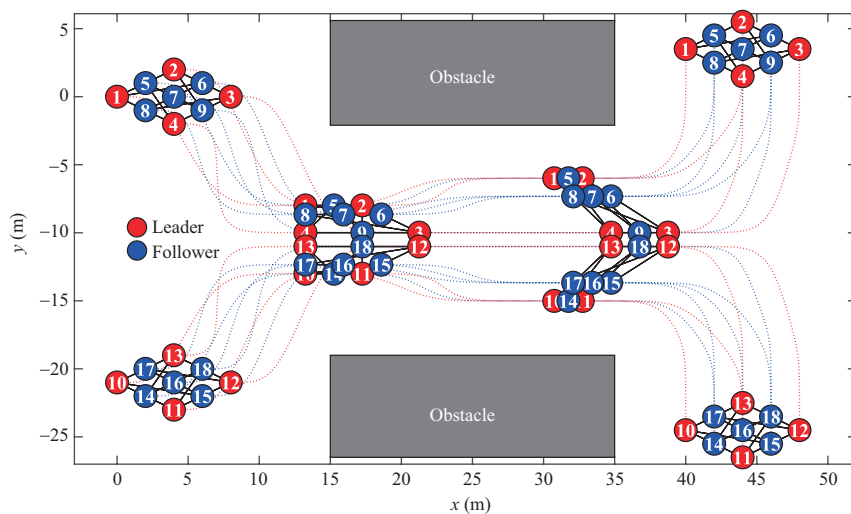


图 6 (网络版彩图) 两组 3×3 无人机编队的联合队形切换 ($K_p = 2, K_v = 2$)
 Figure 6 (Color online) Joint switching of two groups of 3×3 UAV formations ($K_p = 2, K_v = 2$)

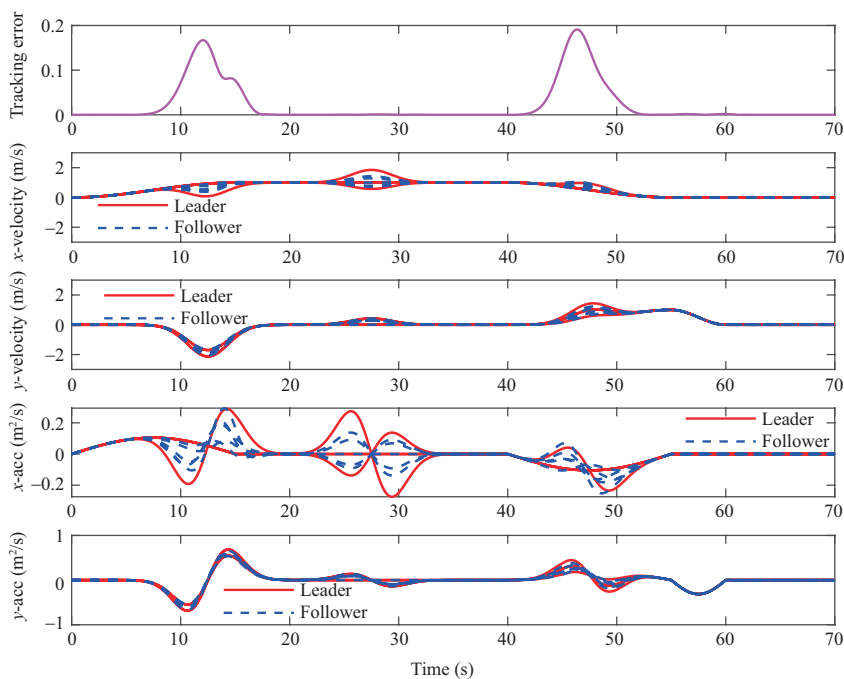


图 7 (网络版彩图) 联合队形切换下的跟踪误差与状态信息
 Figure 7 (Color online) Tracking error and state information under the joint switching

再经过平飞、联合队形变换,并最终分离的完整过程. 所使用的控制器参数以及延时配置与上一组仿真一致. 图 6 和 7 的仿真结果表明,多无人机系统可以快速响应并跟踪由领航机确定的行进轨迹,并始终保持由领航机确定的包络结构以及由初始标准队形确定的共线几何属性.

6 结论与展望

本文重点研究了一种基于透射不变性原理的编队控制方法, 以实现复杂战术背景下的攻防切换或联合协作等编队任务. 相较于以往在队形可操作性上表现最优的仿射编队控制, 本文提出的透射编队控制能够在仅增加一个领航者的前提下, 实现对领航者确定的凹凸性不变的队形进行保共线性的一致性跟踪, 弥补了传统编队控制无法直接进行前后三角、前后梯形等复杂队形变换的不足. 本文推导了透射可定位以及队形可连续变换需满足的条件, 并给出了一种满足条件队形所对应的自应力矩阵的规划算法和针对双积分系统的编队控制器设计方法. 此外, 对攻防切换和联合切换两种任务模式进行仿真分析, 也进一步验证了所提出的透射编队控制方法的有效性. 在后续的研究工作中, 可在透射编队控制的队形构建基础上, 关注于针对复杂环境和不同动力学个体的编队控制器设计问题. 尤其考虑到透射系数为全局变换系数, 其在个体间的通信存在延迟, 如何对该参数进行局部估计或针对通信时延进行控制器优化也是后续值得研究的方向.

参考文献

- 1 Reynolds C W. Flocks, herds and schools: a distributed behavioral model. *ACM SIGGRAPH Comput Graph*, 1987, 21: 25–34
- 2 Oh K K, Park M C, Ahn H S. A survey of multi-agent formation control. *Automatica*, 2015, 53: 424–440
- 3 Xu Y, Li D Y, Luo D L, et al. Affine formation maneuver tracking control of multiple second-order agents with time-varying delays. *Sci China Technol Sci*, 2019, 62: 665–676
- 4 Fan L R, Wang F, Zhou C, et al. Adaptive event-triggered control for time-delay multi-agent systems with actuator faults and asymmetric error constraints. *Sci Sin Inform*, 2022, 52: 1287–1301 [范利蓉, 王芳, 周超, 等. 执行器故障和非对称误差约束下的时延多智能体系统自适应事件触发控制. *中国科学: 信息科学*, 2022, 52: 1287–1301]
- 5 Ren W. Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state. *Syst Control Lett*, 2007, 56: 474–483
- 6 Ren W, Beard R W. Consensus algorithms for double-integrator dynamics. In: *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory and Applications*. London: Springer, 2008. 77–104
- 7 de Marina H G, Jayawardhana B, Cao M. Distributed rotational and translational maneuvering of rigid formations and their applications. *IEEE Trans Robot*, 2016, 32: 684–697
- 8 Sun Z, Park M C, Anderson B D O, et al. Distributed stabilization control of rigid formations with prescribed orientation. *Automatica*, 2017, 78: 250–257
- 9 Li X, Wen C, Chen C. Adaptive formation control of networked robotic systems with bearing-only measurements. *IEEE Trans Cybern*, 2020, 51: 199–209
- 10 Li Z, Tnunay H, Zhao S, et al. Bearing-only formation control with prespecified convergence time. *IEEE Trans Cybern*, 2020, 52: 620–629
- 11 Coogan S, Arcaç M. Scaling the size of a formation using relative position feedback. *Automatica*, 2012, 48: 2677–2685
- 12 Huang H, Yu C, Wu Q. Autonomous scale control of multiagent formations with only shape constraints. *Int J Robust Nonlinear Control*, 2013, 23: 765–791
- 13 Zelazo D, Giordano P R, Franchi A. Bearing-only formation control using an SE (2) rigidity theory. In: *Proceedings of the 54th IEEE conference on decision and control (CDC)*, 2015. 6121–6126
- 14 Lin Z, Wang L, Han Z, et al. Distributed formation control of multi-agent systems using complex laplacian. *IEEE Trans Automat Contr*, 2014, 59: 1765–1777
- 15 Wang J, Gao J, Wu P. Attack-resilient event-triggered formation control of multi-agent systems under periodic DoS attacks using complex Laplacian. *ISA Trans*, 2022, 128: 10–16
- 16 Lin Z, Wang L, Chen Z, et al. Necessary and sufficient graphical conditions for affine formation control. *IEEE Trans Automat Contr*, 2015, 61: 2877–2891
- 17 Xu Y, Luo D, Li D, et al. Affine formation control for heterogeneous multi-agent systems with directed interaction networks. *Neurocomputing*, 2019, 330: 104–115
- 18 Lin Z, Ding W, Yan G, et al. Leader-follower formation via complex Laplacian. *Automatica*, 2013, 49: 1900–1906

- 19 Zhao S. Affine formation maneuver control of multiagent systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2018, 63: 4140–4155
- 20 Gallier J. Basics of projective geometry. In: *Geometric Methods and Applications*. New York: Springer, 2011. 38: 103–175
- 21 Connelly R, Guest S D. *Frameworks, Tensegrities, and Symmetry: Understanding Stable Structures*. Cambridge: Cambridge University Press, 2022

A high-mobility formation control method based on the principle of projective invariance

Changhong WANG* & Jize CHEN

Space Science and Inertial Technology Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China

* Corresponding author. E-mail: cwang@hit.edu.cn

Abstract To address the problem that the classical affine formation control is limited by the constant constraint relation of parallel and cannot directly realize the rapid switching of the front and back triangle and front and back trapezoid formations commonly used in tactical attack and defense, a projective formation control method with higher formation maneuverability is proposed in this paper. Inspired by the principle of projective invariance in framework theory, the formation configuration is defined by the projective image and a self-stress matrix, and the collinear consistency tracking of any target formation is attained under the premise that only one pilot is added and the concavity of formation is unchanged, and the controllable degree of freedom of formation is improved. In addition, the necessary and sufficient conditions for projective localizability and transmission continuous transformation provided a theoretical guarantee for the application of the transmission formation control method. Finally, the simulation test of the offensive and defensive switching and joint switching tasks further confirmed the reliability of the control method.

Keywords projective transformation, formation control, tactical tasks, multiagent systems, self-stress matrix