



# 非对称信道下离散密度进化及 LDPC 码设计

袁涛, 马征\*, 庞琦珂, 唐小虎

西南交通大学信息科学与技术学院, 成都 611756

\* 通信作者. E-mail: zma@swjtu.edu.cn

收稿日期: 2022-06-22; 修回日期: 2022-07-27; 接受日期: 2022-08-26; 网络出版日期: 2023-04-11

四川省自然科学基金重点项目 (批准号: 2022NSFSC0043) 和国家重点研发计划项目 (批准号: 2018YFB1801104) 资助

**摘要** 为了设计非对称信道下的低密度奇偶校验 (low-density parity-check, LDPC) 码并分析其性能, 本文提出了可实现的基于偏移最小和译码的非对称离散密度进化方法. 首先采用组合数学、差分方法和二项式定理等工具推导了低复杂度的非对称信道离散密度进化的迭代公式; 应用该迭代公式, 进一步对采用偏移最小和译码的 LDPC 码编码进行优化设计, 得到了在非对称信道下不同量化范围和步长的 LDPC 码的最佳度分布及其性能; 最后获得了在高精度量化下的最佳偏移值. 结果表明在非对称信道下, 改进的基于偏移最小和译码的非对称密度进化方法复杂度比原方法呈指数级降低; 当码率固定, 规则码变量节点度越小其性能越好, 最佳偏移值越小. 对非规则 LDPC 码, 使用差分进化算法找到了最佳度分布与偏移值. 码率固定时, 最大变量节点度越大, 非规则码性能越好.

**关键词** 非对称信道, 低密度奇偶校验码, 最小和, 密度进化, 度分布, 差分进化

## 1 引言

低密度奇偶校验 (low-density parity-check, LDPC) 码是一类线性分组码, 最早由 Gallager<sup>[1]</sup> 在其博士论文中提出. Luby 等<sup>[2]</sup> 推导发现非规则码比规则码有更大的门限. 当码长足够长时, 好的非规则 LDPC 码有接近香农 (Shannon) 极限的性能<sup>[3]</sup>, 在 LDPC 码校验矩阵有环的情况下, 其理论性能分析比较困难, Richardson 等<sup>[4]</sup> 引入了密度进化 (density evolution, DE) 的概念并对无限长无环 LDPC 码进行分析, 这是进行 LDPC 编译码设计及分析的有效方法之一. 但是密度进化方法在用于优化度分布时, 计算量很大, 因此 Chung 等<sup>[5]</sup> 针对加性高斯白噪声 (additive white Gaussian noise, AWGN) 信道提出高斯近似 (Gaussian approximation, GA) 方法以降低计算量, 并给出了基于置信传播 (belief propagation, BP) 译码的离散密度进化, 得到了距离香农极限仅 0.0045 dB 的非规则码<sup>[6]</sup>. Wei 等<sup>[7]</sup> 推导了基于最小和 (min-sum, MS) 译码的连续密度进化迭代公式. Chen 等<sup>[8]</sup> 给出基于偏移

**引用格式:** 袁涛, 马征, 庞琦珂, 等. 非对称信道下离散密度进化及 LDPC 码设计. 中国科学: 信息科学, 2023, 53: 787–802, doi: 10.1360/SSI-2022-0250  
Yuan T, Ma Z, Pang Q K, et al. Discrete density evolution and LDPC codes design with asymmetric channels (in Chinese). Sci Sin Inform, 2023, 53: 787–802, doi: 10.1360/SSI-2022-0250

最小和 (offset min-sum, OMS) 和归一化最小和 (normalized min-sum, NMS) 译码的连续密度进化迭代公式, 并得到了部分规则码的理论偏移值和归一化值. Anastasopoulos<sup>[9]</sup> 提出了一种基于 MS 译码算法的离散密度进化方法, 该方法以递归的方式计算校验节点的概率函数. 文献 [10] 推导了基于 MS 译码算法的离散密度进化的公式, 其校验节点的计算复杂度非常低. 文献 [11] 仿真得到了不同量化数和量化步长下的基于 OMS 译码的不同偏移值下规则码的性能, 由于基于 OMS 译码的离散密度进化公式的特点, 其偏移值是量化步长的整数倍. 一般地, 在对称信道下, 经过精心设计的非规则码性能优于规则码, 非规则 LDPC 码的度分布优化问题是一种代价函数全局极值求解问题, 通常采用差分进化算法<sup>[12]</sup> 等非线性优化算法来进行搜索. 以上的前期研究工作都是在假设对称信道下完成的. 由于 BP 算法的对称性和 LDPC 码中奇偶校验约束的对称性, 在对称信道中, 译码错误概率与传输的码字无关, 即可以在密度进化时假设传输全零码字. 但在很多常见的信道中, 如二进制非对称信道 (binary asymmetric channel, BASC)、4-PAM 脉冲振幅调制信道等信道中译码错误概率与传输的码字有关, 或者信道噪声对不同传输码字的统计特性不一致也会导致译码错误概率与传输的码字有关<sup>[13]</sup>, 因此非对称信道是指码字的转移概率分布与误码率和码字本身相关的信道<sup>[13]</sup>. 研究非对称信道下 LDPC 码的密度进化理论对设计适用各类非对称信道的 LDPC 码编码具有很强的指导意义. 而对于非对称信道, LDPC 码的编译码设计和分析却更为困难: Wang 等<sup>[13]</sup> 在非对称信道下推导给出了基于 BP 译码的非对称密度进化方法; 文献 [14, 15] 分别将该非对称密度进化方法应用于 NAND 闪存和空间光 (free space optical, FSO) 通信系统, 但由于基于 BP 译码校验节点计算复杂度比较高, 实际应用非常困难; Dupraz 等<sup>[16]</sup> 在 Wang 等的基础上给出了基于 MS 译码的非对称离散密度进化算法, 但校验节点迭代公式为数值计算方法, 计算复杂度非常高, 在高精度量化或高码率应用下均不具有实际应用价值. 针对非对称信道下应用密度进化方法设计和分析 LDPC 码的研究工作不足, 本文的主要工作如下所述.

(1) 推导了基于 MS 译码的非对称密度进化算法的迭代公式, 提出了直接使用迭代公式计算非对称密度进化的方法, 使得校验节点迭代计算的时间复杂度从  $\mathcal{O}(d_c N^{d_c-1})$  降低到  $\mathcal{O}(d_c N)$ , 空间复杂度从  $\mathcal{O}(N^{d_c-1})$  降低到  $\mathcal{O}(1)$ , 极大地提升了计算速度, 解决了非对称信道在高精度量化或高码率下 LDPC 编码设计与分析的可实现问题.

(2) 基于 OMS 译码的非对称离散密度进化方法对 LDPC 码进行设计, 获得了规则码和非规则码的最优度分布.

(3) 应用 OMS 译码的非对称离散密度进化方法对非对称信道下 LDPC 码译码的最佳偏移值进行搜索, 获得了不同编码的最佳偏移值.

## 2 LDPC 码与密度进化的基本概念

LDPC 码是一种线性分组码, 其校验矩阵为低密度稀疏矩阵. LDPC 码可以分为规则码和非规则码, 规则码每行和每列中“1”的个数固定, 非规则码则不固定. 每行和每列中“1”的个数被称为行重和列重, 也被称为度. 一个 LDPC 码的集合可以由度分布函数  $(\lambda, \rho)$  表示. 假设最大变量节点度为  $d_v$ , 最大校验节点度为  $d_c$ ,  $\lambda_i$  表示与度数为  $i \geq 2$  的变量节点相连的边数在总的边数中所占的比例,  $\rho_j$  表示与度数为  $j \geq 2$  的校验节点相连的边数在总的边数中所占的比例. 因此构造多项式

$$\lambda(x) = \sum_{i=2}^{d_v} \lambda_i x^{i-1}, \quad \rho(x) = \sum_{j=2}^{d_c} \rho_j x^{j-1}, \quad (1)$$

其中  $\lambda(1) = \rho(1) = 1$ .  $\lambda(x)$  和  $\rho(x)$  为度数分布函数. 由式 (1) 可得码率为

$$r = 1 - \frac{\int_0^1 \rho(x) dx}{\int_0^1 \lambda(x) dx} = 1 - \frac{\sum_{j=2}^{d_c} \rho_j/j}{\sum_{i=2}^{d_v} \lambda_i/i}. \quad (2)$$

假设传输的码字为  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ , 其中  $c_i$  为 0 或 1, 经过 BPSK 调制为  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 其中  $x_i = (-1)^{c_i}$ . 经过 AWGN 信道传输, 接收器收到的序列为  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . 那么  $(y_n | c_n)$  就是高斯分布随机变量, 其均值为  $(x_n | c_n)$ , 方差为  $\sigma^2 = N_0/2$ .

## 2.1 BP 和 MS 译码算法

记  $C_{ij}^{(l)}$  和  $R_{ij}^{(l)}$  分别为第  $l$  次迭代时变量节点  $i$  传递给校验节点  $j$  的消息和校验节点  $j$  传递给变量节点  $i$  的消息. 另外记  $\mathcal{N}(j)$  为与校验节点  $j$  相连的变量节点的集合,  $\mathcal{M}(i)$  为与变量节点  $i$  相连的校验节点的集合. 第  $l$  次迭代, BP 译码计算分两步.

步骤 1. 校验节点消息处理.

$$R_{ij}^{(l)} = 2 \tanh^{-1} \left( \prod_{i' \in \mathcal{N}(j) \setminus i} \tanh \left( \frac{C_{i'j}^{(l-1)}}{2} \right) \right). \quad (3)$$

步骤 2. 变量节点消息处理.

$$C_{ij}^{(l)} = L_i^{(0)} + \sum_{j' \in \mathcal{M}(i) \setminus j} R_{ij'}^{(l)}. \quad (4)$$

译码判决时, 计算所有变量节点的硬判决信息:

$$L_i^{(l)} = L_i^{(0)} + \sum_{j \in \mathcal{M}(i)} R_{ij}^{(l)}, \quad (5)$$

校验节点消息处理有较大的计算量, 可以将其简化得到 MS 译码:

$$R_{ij}^{(l)} \approx \left( \prod_{i' \in \mathcal{N}(j) \setminus i} \operatorname{sgn} \left( C_{i'j}^{(l-1)} \right) \right) \min_{i' \in \mathcal{N}(j) \setminus i} \left| C_{i'j}^{(l-1)} \right|, \quad (6)$$

其中  $\operatorname{sgn}(\ast)$  是符号函数. BP 算法的性能优于 MS 算法. 这是因为校验节点信息的计算是近似的. 相较于 BP 算法, MS 算法校验节点消息有更大的幅值<sup>[17]</sup>. NMS 算法和 OMS 算法可以降低校验节点消息的幅值以提高性能.

NMS 算法使用校正因子  $\gamma$  来降低幅值, 其校验节点消息更新改进为

$$R_{ij}^{(l)} \leftarrow \frac{1}{\gamma} R_{ij}^{(l)}. \quad (7)$$

OMS 算法使用偏移因子  $o$  来降低幅值, 其校验节点消息更新改进为

$$R_{ij}^{(l)} \leftarrow \operatorname{sgn} \left( R_{ij}^{(l)} \right) \max \left( \left| R_{ij}^{(l)} \right| - o, 0 \right). \quad (8)$$

在实际工程应用中, OMS 算法由于实现复杂度低, 性能能够逼近 BP 算法而被经常采用. 但 OMS 的好性能依赖于获得精准偏移因子, 这通常需要通过密度进化分析或者大量的仿真实验来确定.

## 2.2 基于连续 MS 译码的对称密度进化算法

记校验节点消息  $R_{ij}^{(l)}$  为  $R$ , 它是由  $d_c - 1$  个独立同分布变量节点随机变量  $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_{d_c-1})$  构成的函数, 每个随机变量的概率密度函数均为  $P^{(l-1)}(s)$ . 变量节点概率密度函数的计算只需要直接进行傅里叶 (Fourier) 变换计算即可, 本文不做讨论. 记第  $l$  次迭代时, 校验节点的累积密度函数为  $F^{(l)}(x)$ , 概率密度函数为  $Q^{(l)}(x)$ . 记

$$\phi_{-}(|x|) = \int_{-\infty}^{-|x|} P^{(l-1)}(s) ds, \quad \phi_{+}(|x|) = \int_{|x|}^{+\infty} P^{(l-1)}(s) ds.$$

当  $x < 0$  时,

$$F^{(l)}(x) = \Pr(R < x) = \sum_{k=1, \text{odd}}^{d_c-1} \binom{d_c-1}{k} \phi_{-}(|x|)^k \phi_{+}(|x|)^{d_c-1-k}. \quad (9)$$

当  $x > 0$  时,

$$F^{(l)}(x) = 1 - \sum_{k=0, \text{even}}^{d_c-1} \binom{d_c-1}{k} \phi_{-}(|x|)^k \phi_{+}(|x|)^{d_c-1-k}. \quad (10)$$

对  $F^{(l)}(x)$  求导可以得到  $Q^{(l)}(x)$ .

根据更新公式 (7), NMS 的  $Q^{(l)}(x)$  修正为<sup>[8]</sup>

$$Q^{(l)}(x) \leftarrow \gamma Q^{(l)}(\gamma x). \quad (11)$$

根据更新公式 (8), OMS 的  $Q^{(l)}(x)$  修正为<sup>[8]</sup>

$$Q^{(l)}(x) \leftarrow u(x) Q^{(l)}(x+o) + u(-x) Q^{(l)}(x-o) + P_0 \delta(x), \quad (12)$$

其中  $\delta(x) = \int_{-o}^o Q^{(l)}(x) dx$ .

## 2.3 基于离散 MS 译码的对称密度进化算法

设置量化方式为均匀量化, 量化数为  $2N - 1$ . 对于  $1 \leq n \leq N$ , 记  $\phi_{+}(n) = \sum_{i=n}^N P^{(l-1)}(i)$ ,  $\phi_{-}(n) = \sum_{i=-N}^{-n} P^{(l-1)}(i)$ . 记第  $l$  次迭代时校验节点的累计质量函数 (cumulative mass function, CMF) 为  $C^{(l)}(n)$ . 将式 (9) 和 (10) 校验节点密度进化公式量化可以得到离散密度进化算法.

当  $-N \leq n \leq -1$  时,

$$C^{(l)}(n) = \sum_{k=1, \text{odd}}^{d_c-1} \binom{d_c-1}{k} \phi_{-}(|n|)^k \phi_{+}(|n|)^{d_c-1-k}; \quad (13)$$

当  $0 \leq n \leq N - 1$  时,

$$C^{(l)}(n) = 1 - \sum_{k=0, \text{even}}^{d_c-1} \binom{d_c-1}{k} \phi_{-}(|n|+1)^k \phi_{+}(|n|+1)^{d_c-1-k}. \quad (14)$$

可以简化式 (13) 和 (14) 得式 (15) 和 (16).

当  $-N \leq n \leq -1$  时,

$$C^{(l)}(n) = \frac{1}{2} \left[ (\phi_+ (|n|) + \phi_- (|n|))^{d_c-1} - (\phi_+ (|n|) - \phi_- (|n|))^{d_c-1} \right]; \quad (15)$$

当  $0 \leq n \leq N-1$  时,

$$C^{(l)}(n) = 1 - \frac{1}{2} \left[ (\phi_+ (|n|+1) + \phi_- (|n|+1))^{d_c-1} + (\phi_+ (|n|+1) - \phi_- (|n|+1))^{d_c-1} \right], \quad (16)$$

其中  $C^{(l)}(N) = 1$ . 对  $C^{(l)}(n)$  直接差分可得概率质量函数 (probability mass function, PMF)  $Q^{(l)}(n)$ .

$$Q^{(l)}(n) = \begin{cases} C^{(l)}(-N), & n = -N, \\ C^{(l)}(n) - C^{(l)}(n-1), & -N < n \leq N. \end{cases} \quad (17)$$

根据式 (12), OMS 的  $Q^{(l)}(n)$  的概率质量函数为离散值, 因此离散密度进化其偏移因子必须为量化步长的整数倍.

### 3 非对称密度进化

#### 3.1 基于 MS 译码的非对称密度进化算法

针对非对称信道, 需要将对称信道下的密度进化算法进行修改. 本文推导并使用基于 MS 译码的离散非对称密度进化算法.

当第  $l$  次迭代时, 校验节点输入的真实消息表示为  $\alpha^{(l-1)} = (\alpha_1^{(l-1)}, \alpha_2^{(l-1)}, \dots, \alpha_{d_c-1}^{(l-1)})$ , 校验节点更新为  $\beta^{(l)} = \Phi_c(\alpha^{(l-1)})$ . 变量节点输入的真实消息表示为  $\beta^{(l)} = (\beta_0^{(l)}, \beta_1^{(l)}, \dots, \beta_{d_v-1}^{(l)})$ , 变量节点更新为  $\alpha^{(l)} = \Phi_v(\beta^{(l)})$ , 其中  $\alpha^{(l)}$  和  $\beta^{(l)}$  的值均为量化值. 校验节点和变量节点消息更新公式为

$$\Phi_c(\alpha^{(l-1)}) = \left( \prod_{d=1}^{d_c-1} \text{sgn}(\alpha_d^{(l-1)}) \right) \min_d |\alpha_d^{(l-1)}|, \quad (18)$$

$$\Phi_v(\beta^{(l)}) = \mathcal{Q} \left( \beta_0^{(l)} + \sum_{d=1}^{d_v-1} \beta_d^{(l)} \right), \quad (19)$$

其中,  $\mathcal{Q}(\ast)$  是量化函数. 非对称密度进化算法中, 需要分别对 0 码和 1 码的概率密度函数进行计算. 首先计算 0 码和 1 码的信道概率密度函数. 变量节点的计算不需要修改, 只需要增加对 1 码的计算, 而校验节点的算法则需要修正. 文献 [16] 给出了数值计算方法:

$$Q_0^{(l)}(\beta) = \left( \frac{1}{2} \right)^{d_c-2} \sum_{v=0, \text{even}}^{d_c-1} \binom{d_c-1}{v} \sum_{\alpha: \Phi_c(\alpha)=\beta} \prod_{d=1}^v P_1^{(l-1)}(\alpha_d) \prod_{d=v+1}^{d_c-1} P_0^{(l-1)}(\alpha_d), \quad (20)$$

$$Q_1^{(l)}(\beta) = \left( \frac{1}{2} \right)^{d_c-2} \sum_{v=1, \text{odd}}^{d_c-1} \binom{d_c-1}{v} \sum_{\alpha: \Phi_c(\alpha)=\beta} \prod_{d=1}^v P_1^{(l-1)}(\alpha_d) \prod_{d=v+1}^{d_c-1} P_0^{(l-1)}(\alpha_d), \quad (21)$$

其中  $Q_0^{(l)}(\beta)$  和  $Q_1^{(l)}(\beta)$  分别代表第  $l$  次迭代时, 0 码和 1 码校验节点的概率密度,  $P_0^{(l-1)}(\alpha)$  和  $P_1^{(l-1)}(\alpha)$  分别代表第  $l-1$  次迭代时, 0 码和 1 码变量节点的概率密度. 当  $v=0$  时, 设置  $\prod_{d=1}^v P_1^{(l-1)}(\alpha_d) = 1$ . 当  $v=d_c-1$  时, 设置  $\prod_{d=v+1}^{d_c-1} P_0^{(l-1)}(\alpha_d) = 1$ .

在计算每个量化后的校验节点消息时, 需要寻找所有适合的消息组合, 这就需要构造查找表, 查找表的空间复杂度大致为  $\mathcal{O}(N^{d_c-1})$ . 校验节点更新算法的时间复杂度大致为  $\mathcal{O}(d_c N^{d_c-1})$ , 这样在高码率或高精度量化下, 时间复杂度和空间复杂度均非常高, 实际无法使用.

### 3.2 改进的 MS 译码非对称密度进化算法

对 MS 译码非对称密度进化算法进行改进, 可以从 MS 对称密度进化推导入手. 本文针对更有实用价值的离散 MS 密度进化进行推导, 连续 MS 密度进化推导过程类似. 在式 (20) 和 (21) 中, 主要的计算复杂度是公式最后的寻找和计算适合的量化消息组合.

记  $Q(v) = \sum_{\alpha} \prod_{d=1}^v P_1^{(l-1)}(\alpha_d) \prod_{d=v+1}^{d_c-1} P_0^{(l-1)}(\alpha_d)$ . 记第  $l$  次迭代时  $Q(v)$  的 CMF 为  $C_v^{(l)}(n)$ . 当  $-N \leq n \leq -1$  时,

$$C_v^{(l)}(n) = \Pr \left( P_1^{(l-1)}(\alpha_d), P_0^{(l-1)}(\alpha_d), \prod_{d=1}^v \text{sgn}(\alpha_d) = -1, \prod_{d=v+1}^{d_c-1} \text{sgn}(\alpha_d) = 1, |\alpha_d| > |Q(n)| \right) \\ + \Pr \left( P_1^{(l-1)}(\alpha_d), P_0^{(l-1)}(\alpha_d), \prod_{d=1}^v \text{sgn}(\alpha_d) = 1, \prod_{d=v+1}^{d_c-1} \text{sgn}(\alpha_d) = -1, |\alpha_d| > |Q(n)| \right), \quad (22)$$

因此, 可以表示为

$$C_v^{(l)}(n) = \left( \sum_{k=1, \text{odd}}^v \binom{v}{k} \phi_{1-}(|n|)^k \phi_{1+}(|n|)^{v-k} \right) \left( \sum_{k=0, \text{even}}^{d_c-1-v} \binom{d_c-1-v}{k} \phi_{0-}(|n|)^k \phi_{0+}(|n|)^{d_c-1-v-k} \right) \\ + \left( \sum_{k=0, \text{even}}^v \binom{v}{k} \phi_{1-}(|n|)^k \phi_{1+}(|n|)^{v-k} \right) \left( \sum_{k=1, \text{odd}}^{d_c-1-v} \binom{d_c-1-v}{k} \phi_{0-}(|n|)^k \phi_{0+}(|n|)^{d_c-1-v-k} \right); \quad (23)$$

当  $0 \leq n \leq N-1$  时, 有

$$C_v^{(l)}(n) = 1 - \Pr \left( P_1^{(l-1)}(\alpha_d), P_0^{(l-1)}(\alpha_d), \prod_{d=1}^v \text{sgn}(\alpha_d) = 1, \prod_{d=v+1}^{d_c-1} \text{sgn}(\alpha_d) = 1, |\alpha_d| > |Q(n)| \right) \\ - \Pr \left( P_1^{(l-1)}(\alpha_d), P_0^{(l-1)}(\alpha_d), \prod_{d=1}^v \text{sgn}(\alpha_d) = -1, \prod_{d=v+1}^{d_c-1} \text{sgn}(\alpha_d) = -1, |\alpha_d| > |Q(n)| \right), \quad (24)$$

可以表示为

$$C_v^{(l)}(n) = 1 - \left( \sum_{k=1, \text{odd}}^v \binom{v}{k} \phi_{1-}(|n|+1)^k \phi_{1+}(|n|+1)^{v-k} \right) \\ \times \left( \sum_{k=1, \text{odd}}^{d_c-1-v} \binom{d_c-1-v}{k} \phi_{0-}(|n|+1)^k \phi_{0+}(|n|+1)^{d_c-1-v-k} \right) \\ - \left( \sum_{k=0, \text{even}}^v \binom{v}{k} \phi_{1-}(|n|+1)^k \phi_{1+}(|n|+1)^{v-k} \right) \\ \times \left( \sum_{k=0, \text{even}}^{d_c-1-v} \binom{d_c-1-v}{k} \phi_{0-}(|n|+1)^k \phi_{0+}(|n|+1)^{d_c-1-v-k} \right), \quad (25)$$

其中

$$\phi_{1+}(n) = \sum_{i=n}^N P_1^{(l-1)}(n), \quad \phi_{1-}(n) = \sum_{i=-N}^{-n} P_1^{(l-1)}(n),$$

$$\phi_{0+}(n) = \sum_{i=n}^N P_0^{(l-1)}(n), \quad \phi_{0-}(n) = \sum_{i=-N}^{-n} P_0^{(l-1)}(n).$$

再使用二项式定理可以得到最终的迭代公式.

当  $-N \leq n \leq -1$  时,

$$\begin{aligned} C_v^{(l)}(n) = & \left\{ \frac{1}{2} [(\phi_{1+}(|n|) + \phi_{1-}(|n|))^v - (\phi_{1+}(|n|) - \phi_{1-}(|n|))^v] \right\} \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} [(\phi_{0+}(|n|) + \phi_{0-}(|n|))^{d_c-1-v} + (\phi_{0+}(|n|) - \phi_{0-}(|n|))^{d_c-1-v}] \right\} \\ & + \left\{ \frac{1}{2} [(\phi_{1+}(|n|) + \phi_{1-}(|n|))^v + (\phi_{1+}(|n|) - \phi_{1-}(|n|))^v] \right\} \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} [(\phi_{0+}(|n|) + \phi_{0-}(|n|))^{d_c-1-v} - (\phi_{0+}(|n|) - \phi_{0-}(|n|))^{d_c-1-v}] \right\}; \end{aligned} \quad (26)$$

当  $0 \leq n \leq N-1$  时,

$$\begin{aligned} C_v^{(l)}(n) = & 1 - \left\{ \frac{1}{2} [(\phi_{1+}(|n|+1) + \phi_{1-}(|n|+1))^v + (\phi_{1+}(|n|+1) - \phi_{1-}(|n|+1))^v] \right\} \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} [(\phi_{0+}(|n|+1) + \phi_{0-}(|n|+1))^{d_c-1-v} + (\phi_{0+}(|n|+1) - \phi_{0-}(|n|+1))^{d_c-1-v}] \right\} \\ & - \left\{ \frac{1}{2} [(\phi_{1+}(|n|+1) + \phi_{1-}(|n|+1))^v - (\phi_{1+}(|n|+1) - \phi_{1-}(|n|+1))^v] \right\} \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} [(\phi_{0+}(|n|+1) + \phi_{0-}(|n|+1))^{d_c-1-v} - (\phi_{0+}(|n|+1) - \phi_{0-}(|n|+1))^{d_c-1-v}] \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

将计算得到的所有  $C_v^{(l)}(n)$  按照公式计算并使用式 (17) 差分计算就可以得到校验节点的概率质量函数 PMF.

非规则码的计算只需要对所有  $d_v = i$  和  $d_c = j$  分别计算并求和即可.

$$P_x^{(l)}(n) = \sum_{i \geq 2} \lambda_i P_{x,i}^{(l)}(n), \quad (28)$$

$$Q_x^{(l)}(n) = \sum_{j \geq 2} \rho_j Q_{x,j}^{(l)}(n). \quad (29)$$

这样可以使使用迭代公式 (26) 和 (27) 直接计算校验节点的 PMF, 不需要使用查找表, 算法的时间复杂度为  $\mathcal{O}(d_c N)$ , 空间复杂度为  $\mathcal{O}(1)$ . 在高精度量化或高码率情况下, 本文推导的改进方法相较于原密度进化数值方法可以极大地降低算法复杂度.

图 1(a) 展示了在 (3, 6) 规则码时, 文献 [16] 数值算法和本文算法中校验节点加法和乘法的计算次数随量化比特数变化的曲线. 图 1 展示了在量化范围为  $[-15, 15]$ , 量化步长为 0.1 时数值算法和本文算法中校验节点加法和乘法的计算次数随校验节点度变化的曲线. 从图 1(a) 和 (b) 可以看出, 改进后的算法能极大地降低校验节点计算次数. 特别地, 在需要高码率 LDPC 码的应用时, 如 NAND 闪存, 数值计算非对称密度进化几乎不可能, 而本文改进的算法能够在可实现的复杂度下进行密度进化计算.

最后求误码率时不能只考虑 0 码的误码率, 这里将设置 0 码和 1 码误码率的平均值, 即

$$P_e = \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^0 P_0^{(l)}(n) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N P_1^{(l)}(n). \quad (30)$$

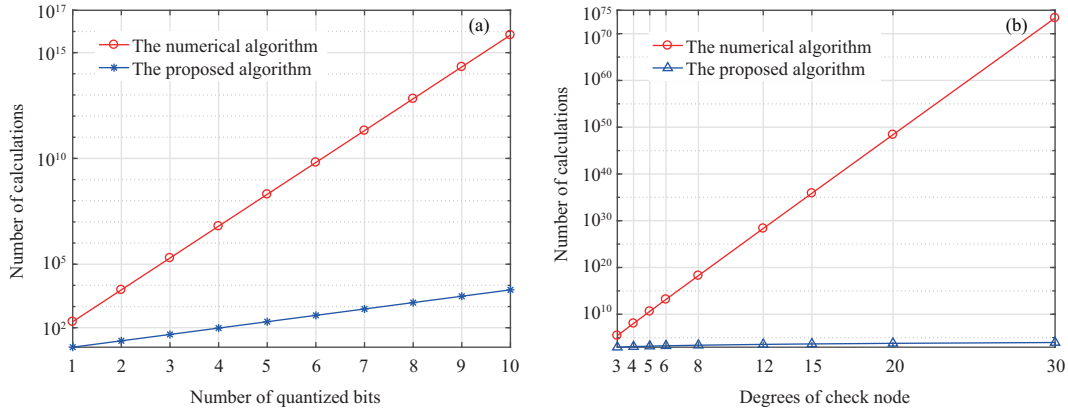


图 1 (网络版彩图) (a) 不同量化比特数和 (b) 不同校验节点度下校验节点计算次数对比

Figure 1 (Color online) Comparison of check node calculation times under (a) different quantization bits and (b) different check node degrees

## 4 差分进化

通过非对称密度进化可以确定可能的 LDPC 好码集合的阈值, 进一步需要找到对给定信道产生最大可能噪声阈值的度分布对. 该问题是一个连续空间参数的非线性代价函数最小化问题. 常用的求解方法为差分进化算法<sup>[12]</sup>. 该算法寻找已成功地应用于擦除信道<sup>[18]</sup>、AWGN 信道<sup>[19]</sup> 和 Rayleigh 信道<sup>[20]</sup> 的 LDPC 码的设计.

由式 (1) 和 (2) 可以得到

$$\lambda_{d_v} = \frac{\frac{r}{2} + \sum_{j=3}^{d_c} \rho_j \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{2}\right) - (1-r) \sum_{i=3}^{d_v-1} \lambda_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{2}\right)}{(1-r) \left(\frac{1}{d_v} - \frac{1}{2}\right)}. \quad (31)$$

由上述的约束关系以及  $\lambda_1 = \rho_1 = 0$  可以知道  $(d_v, d_c)$  的非规则码有  $L = d_v + d_c - 5$  维向量  $P = (\lambda_3, \dots, \lambda_{d_v-1}, \rho_3, \dots, \rho_{d_c})$ . 不同文献的差分进化算法略有不同, 本文将基于文献 [12] 的算法仿真.

(1) 初始化. 设定初始噪声水平, 即噪声标准差  $\sigma$ , 对首次迭代  $G = 0$ , 随机选择  $NP$  个  $L$  维序列  $p_{i,G}$ ,  $i = 1, \dots, NP$ , 其中  $NP = 20L$ . 使用密度进化算法计算每个序列在  $l_{\max}$  次迭代后能够达到设定误码率  $P_e$  的门限值, 即最大噪声标准差, 记其门限值为  $\sigma_{i,G}$ , 并选择有最大门限值的序列为最佳序列, 记为  $p_{\text{best},G}$ , 并计算所有门限值的方差.

(2) 更新. 在第  $G+1$  次迭代中, 对  $i = 1, \dots, NP$  序列, 在集合  $[1, NP]$  中随机选择 4 个不同的整数  $r_1, r_2, r_3, r_4$ , 而且这 4 个整数均与当前序列号  $i$  不相等. 定义更新公式为

$$v_{i,G+1} = p_{\text{best},G} + F \times (p_{r_1,G} - p_{r_2,G} + p_{r_3,G} - p_{r_4,G}), \quad (32)$$

其中  $F$  是控制矢量变化强度的常数, 一般取 0.5. 为了在迭代更新过程中增加序列的差异性, 本文增加了每个序列中分量的选择更新<sup>[12]</sup>.

$$v'_{ij,G+1} = \begin{cases} v_{ij,G+1}, & \text{if } \text{rnd} < \text{CR} \text{ or } j = \text{ind}, \\ p_{ij,G}, & \text{others,} \end{cases} \quad (33)$$



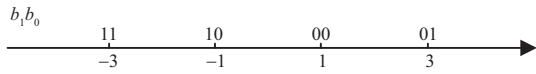


图 2 4-PAM 的星座  
Figure 2 4-PAM constellation

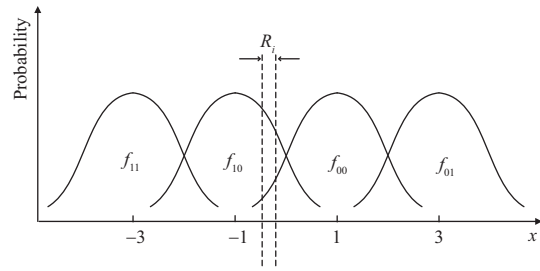


图 3 四种概率分布函数  
Figure 3 Four probability distribution functions

其中  $j = 1, \dots, L$ ,  $\text{rnd}$  是  $[0, 1]$  之间的随机数,  $\text{CR}$  是  $[0, 1]$  之间的常数, 本文的  $\text{CR}$  取值为 0.8.  $\text{ind}$  是从  $[1, L]$  中随机选择一个索引, 这样就可以保证在更新的序列中至少有一个分量取自迭代产生的序列. 这样有助于防止算法进入局部最小值. 计算更新后序列的门限值  $\sigma_{i,G+1}$ .

(3) 选择. 对于序列  $i = 1, \dots, NP$ , 如果  $\sigma_{i,G+1} > \sigma_{i,G}$ , 则更新序列  $p_{i,G+1}$  为  $v'_{i,G+1}$ , 否则为  $p_{i,G}$ . 选择有最大门限值的序列为最佳序列, 并计算门限方差.

(4) 停止准则. 如果序列门限方差小于一个接近于 0 的值 (如  $10^{-8}$ ) 则停止, 找到最大门限值及其序列, 否则返回到步骤 (2).

在计算 LDPC 最佳度分布时, 校验节点的度分布通常是集中分布<sup>[19]</sup>, 度分布由两个连续非零度构成, 即  $\rho(x) = \rho x^{k-1} + (1 - \rho) x^k$ . 由  $\lambda(x)$  和  $\rho(x)$  的限制条件可以得到在给定  $\lambda(x)$  和码率后可以得到唯一的  $\rho(x)$ .

令  $\alpha = (1 - r) \sum_{i=2}^{d_v} \lambda_i / i$  可以得到  $k = \lfloor 1/\alpha \rfloor$ , 其中  $\lfloor * \rfloor$  表示向下取整. 最后得到  $\rho = \alpha k (k + 1) - k$ . 通过差分进化和密度进化迭代可以得到给定  $d_{v,\max}$  和码率下的具有最大噪声门限的度分布.

## 5 仿真分析

### 5.1 非对称信道

本文使用在多进制通信、MLC NAND 闪存中常见的非对称信道, 调制方式为 4-PAM 调制<sup>[21]</sup>. 星座信号集为  $\chi = \{-3, -1, 1, 3\}$ . 图 2 为 4-PAM 星座图, 采用格雷映射 (Gray mapping), 其中  $b_0$  和  $b_1$  分别代表最低有效位 (least signification bit, LSB) 和最高有效位 (most signification bit, MSB).

常见的非对称信道, 如多进制通信、MLC NAND 闪存, 其概率密度函数各不相同. 比如在 MLC NAND 闪存中, 其概率分布函数被拟合为不同参数的 Normal-Laplace 分布<sup>[22]</sup> 和 Student-t 分布<sup>[23]</sup>, 其每个概率分布均不对称. 本文参考文献 [24] 使用 4 种均值不同的对称高斯分布概率分布函数, 均值为  $\chi = \{-3, -1, 1, 3\}$ , 如图 3 所示.

LSB 和 MSB 的 LLR (log-likelihood ratio) 的计算公式为

$$L_{\text{MSB}}^{\text{ch}} = \ln \left( \frac{\int_{R_i} (f_{00}(x) + f_{01}(x)) dx}{\int_{R_i} (f_{11}(x) + f_{10}(x)) dx} \right), \quad (34)$$

$$L_{\text{LSB}}^{\text{ch}} = \ln \left( \frac{\int_{R_i} (f_{10}(x) + f_{00}(x)) dx}{\int_{R_i} (f_{11}(x) + f_{01}(x)) dx} \right). \quad (35)$$

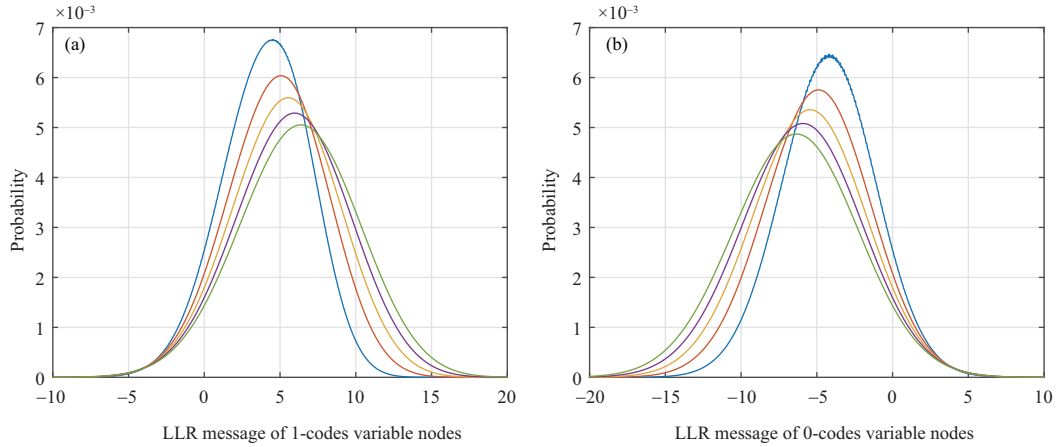


图 4 (网络版彩图) (a) 1 码变量节点消息密度的进化; (b) 0 码变量节点消息密度的进化

Figure 4 (Color online) Message density evolution for (a) 1-codes variable nodes and (b) 0-codes variable nodes

$R_i$  是信道读取的最小精度, 并设置信道读取范围. 可以给出信道 LLR 的离散值, 再量化该离散值, 并统计概率就可以得到 0 码和 1 码的 PMF. 根据文献 [21, 24], LSB 信道为非对称信道, 性能明显较差. 因此, 我们只讨论 LSB 的性能. LSB 信道的信噪比 (signal-to-noise ratio, SNR) 为

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_s}{\sigma^2} \right), \quad (36)$$

其中  $P_s = (\sum_{i=1}^4 \mu_i^2)/4$ ,  $\sigma^2$  为噪声方差. 本文在差分进化中仍然采用噪声标准差作为噪声水平标识.

图 4(a) 和 (b) 分别给出了在 Gaussian MLC 信道下,  $\sigma = 0.8$ , 5 次迭代时 LSB 信道 1 码和 0 码变量节点消息密度的进化. 可以看出, 随着迭代的进行, 正确消息的概率越来越大, 错误消息的概率越来越小, 译码逐步收敛. 因此利用密度进化可以在不进行仿真的情况下分析译码性能.

## 5.2 规则码设计优化

本文首先设计了在 4-PAM 调制下, 经过 AWGN 信道后 LSB 的信道分布模型. 设置差分进化的序列门限方差为  $10^{-8}$ , 密度进化截止误码率为  $10^{-6}$ , 最大迭代次数为 200. 本文仅在均匀量化下进行密度进化和译码仿真.

表 1 给出了 (3, 6), (4, 8) 和 (5, 10) 规则码在 12 种不同量化下的最佳偏移值及其门限. 表 2 是相同码率和相同量化下不同  $d_v$  的规则码的最佳偏移值及其门限.

由表 1 和 2 可以知道, 对于规则码, 随着量化范围和精度的增加, 门限值增加, 而且门限值在高精度量化下不再增加; 当量化范围固定, 随着量化步长的增加, 门限值减低; 当量化步长固定, 随着量化范围的增加, 门限值增加, 但量化范围增加到一定范围后, 门限值就不再变化; 在相同 ( $d_v$ ,  $d_c$ ) 下, 不同量化时的最佳偏移值基本保持不变; 当码率固定, 在相同的量化精度下, 随着  $d_v$  和  $d_c$  的增加, 最佳偏移值增加, 门限值降低, 这是由于 LDPC 译码需要变量节点度越大越好, 校验节点度越小越好, 但由于规则码码率固定, 随着变量节点度的增加, 校验节点度增加的速度更快, 因此性能逐渐会变差, 这与文献 [4] 中的结果类似.

## 5.3 非规则码设计优化

本文的非规则码量化方式与规则码相同, 变量节点最大节点度分别取为 3, 4, 5, 码率为 0.5. 表 3

表 1 规则码的最佳偏移值及其门限

Table 1 The optimal offset and threshold of the regular codes

Quantization	(3, 6)- $\sigma_{\text{best}}$	(3, 6)- $\sigma_{\text{max}}$	(4, 8)- $\sigma_{\text{best}}$	(4, 8)- $\sigma_{\text{max}}$	(5, 10)- $\sigma_{\text{best}}$	(5, 10)- $\sigma_{\text{max}}$
[-30:0.025:30]	0.375	0.8678	0.525	0.8237	0.6	0.7797
[-30:0.05:30]	0.4	0.8678	0.55	0.8236	0.6	0.7796
[-30:0.1:30]	0.4	0.8677	0.5	0.8234	0.6	0.7795
[-15:0.025:15]	0.375	0.8678	0.525	0.8237	0.6	0.7797
[-15:0.05:15]	0.4	0.8678	0.55	0.8236	0.6	0.7796
[-15:0.1:15]	0.4	0.8677	0.5	0.8234	0.6	0.7795
[-7:0.025:7]	0.375	0.8678	0.525	0.8237	0.6	0.7797
[-7:0.05:7]	0.4	0.8677	0.55	0.8236	0.6	0.7796
[-7:0.1:7]	0.4	0.8677	0.5	0.8234	0.6	0.7795
[-3:0.025:3]	0.275	0.8541	0.525	0.8127	0.575	0.7789
[-3:0.05:3]	0.25	0.8534	0.55	0.8126	0.55	0.7788
[-3:0.1:3]	0.2	0.8510	0.5	0.8124	0.6	0.7785

表 2 相同码率规则码的最佳偏移值及其门限

Table 2 The optimal offset and threshold of the regular codes with the same rate

Degree	Quantization	$\sigma_{\text{best}}$	$\sigma_{\text{max}}$
(3, 6)	[-30:0.025:30]	0.375	0.8678
(4, 8)	[-30:0.025:30]	0.525	0.8237
(5, 10)	[-30:0.025:30]	0.6	0.7797
(6, 12)	[-30:0.025:30]	0.675	0.7439
(10, 20)	[-30:0.025:30]	0.825	0.6548
(15, 30)	[-30:0.025:30]	0.925	0.5973
(20, 40)	[-30:0.025:30]	1	0.5626

给出了量化步长为  $\Delta = 0.05$ , 不同量化范围下,  $d_{v,\text{max}}$  分别为 3, 4, 5 时, 非规则码的最佳偏移值和最佳度分布及其门限.

通过表 3 的数据可以看到  $d_{v,\text{max}}$  为 3, 4, 5,  $r = 0.5$  时, 最优非规则码的性能优于非规则码, 具有最佳度分布的偏移值基本相同, 这与规则码的性质不同. 随着  $d_{v,\text{max}}$  的增加性能变好; 而且在步长相同下, 随着量化范围的减小, 最佳度分布中  $\lambda_2$  所占的比例越来越低, 其原因是在具有高迭代译码性能的 LDPC 码的设计中,  $d_v = 2$  的变量节点起着非常重要的作用. 一方面, 变量节点度越大越好, 这些  $d_v = 2$  的变量节点很有可能可以在一个环里或链里连接, 因此译码后这些变量节点的误码率明显更高. 当这些连接的  $d_v = 2$  的变量节点映射到同一个符号时, 容易触发捕获集 (trapping set), 提高  $d_v = 2$  的比例会提高错误平层. 另一方面, 为了使码字性能能够接近理论容量, 很大一部分  $d_v = 2$  变量节点是必要的, 以至于接近容量和实现低错误下限的两个相互冲突的目标可能是不可调和的 [25]. 因此在量化范围较小时, 为了达到设置的截止误码率,  $\lambda_2$  所占的比例会降低. 而且最佳偏移值基本固定, 这可能是由于非规则码中存在一定比例的低度变量节点. 这与高斯对称信道下的度分布与量化的关系类似 [26].

表 3 非规则码的最佳偏移值及其门限

Table 3 The optimal offset and threshold of the irregular codes

	Degree	[-30:0.05:30]	[-15:0.05:15]	[-7:0.05:7]	[-3:0.05:3]
$d_{v,\max} = 3$	$\lambda_2$	0.2323285	0.2308692	0.0238200	4.04e-05
	$\lambda_3$	0.7676715	0.7691308	0.9761800	0.999960
	$\rho_5$	0.5808211	0.5771731	0.0595500	0.000101
	$\rho_6$	0.4191789	0.4228269	0.9404500	0.999899
	$\sigma_{\text{best}}$	0.3	0.3	0.35	0.25
	$\sigma_{\text{max}}$	0.8783	0.8783	0.8694	0.8534
	$d_{v,\max} = 4$	$\lambda_2$	0.312859	0.254941	0.022722
$\lambda_3$		0.128484	0.298174	0.941300	0.994725
$\lambda_4$		0.558657	0.446885	0.035978	0.005248
$\rho_5$		0.083841	0.078747	0.011834	-
$\rho_6$		0.916159	0.921253	0.988166	0.990910
$\rho_7$		-	-	-	0.009090
$\sigma_{\text{best}}$		0.35	0.35	0.4	0.25
$\sigma_{\text{max}}$		0.8939	0.8894	0.8696	0.8534
$d_{v,\max} = 5$	$\lambda_2$	0.301251	0.250120	0.022284	1.3e-07
	$\lambda_3$	0.316793	0.435878	0.923546	0.838353
	$\lambda_4$	0.005647	0.001155	0.003937	0.001069
	$\lambda_5$	0.376309	0.312847	0.050233	0.160578
	$\rho_6$	0.990829	0.997428	0.930450	0.548512
	$\rho_7$	0.009171	0.002572	0.069550	0.451488
	$\sigma_{\text{best}}$	0.35	0.35	0.4	0.3
	$\sigma_{\text{max}}$	0.9009	0.8956	0.8702	0.8537

文献 [27] 给出了 4-PAM AWGN 信道的信道容量

$$C_{4\text{-PAM}} = 2 - E_{x,y} \left( \log_2 \frac{\sum_{z \in \mathcal{X}} p(y|z)}{p(y|x)} \right), \quad (37)$$

$$C_{4\text{-PAM}}^{\text{LSB}} = 1 - E_{b_0,y} \left( \log_2 \frac{\sum_{b_0 \in \{0,1\}} p(y|b_0)}{p(y|b_0)} \right), \quad (38)$$

其中  $E(*)$  为期望函数. 由式 (37) 和 (38) 可以得到当码率  $r = 0.5$  时, LSB AWGN 信道的噪声理论门限为 0.971. 本文设计的非规则 LDPC 码达到的最大噪声阈值为  $\sigma = 0.9009$ , 仿真结果与理论值匹配度很高, 因此本文所提非对称密度进化理论对设计非对称信道的 LDPC 编码具有很强的指导意义.

#### 5.4 LDPC 码译码仿真

本文将不同度分布的 LDPC 进行译码仿真, 并对比其性能, 由式 (26) 和 (27) 与文献 [16] 的式 (20) 和 (21) 对比可知, 本文算法获得的结果与文献 [16] 所提算法是完全一致的. 但由于文献 [16] 所提算法计算复杂度极高, 在高精度量化和高码率时均无法应用, 因此仅仿真验证本文所提算法性能. 本文使用 PEG 构造法构造 LDPC 码校验矩阵 [28]. 最大迭代次数设置为 200. 码长为 4000, 码率均为 0.5.

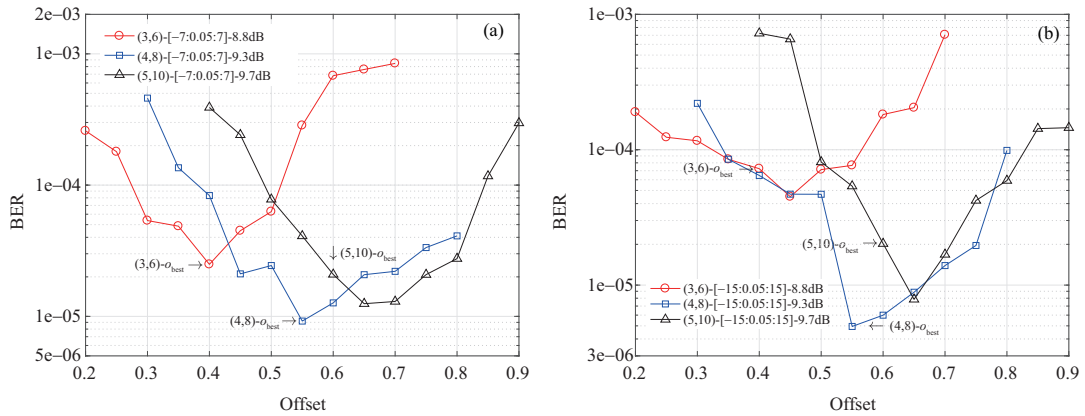


图 5 (网络版彩图) [-7:0.05:7] (a) 和 [-15:0.05:15] (b) 量化下偏移值对 BER 性能的影响

Figure 5 (Color online) Influence of offset on BER performance under (a) [-7:0.05:7] and (b) [-15:0.05:15] quantization

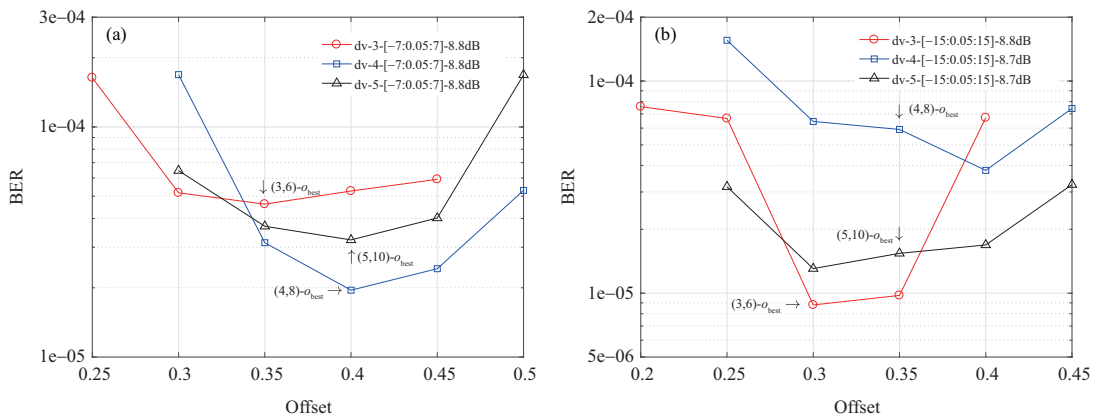


图 6 (网络版彩图) [-7:0.05:7] (a) 和 [-15:0.05:15] (b) 量化下的最佳度分布和偏移值对 BER 性能的影响

Figure 6 (Color online) Influence of optimal degree distribution and offset on BER performance under (a) [-7:0.05:7] and (b) [-15:0.05:15] quantization

本文首先仿真了 (3, 6), (4, 8) 和 (5, 10) 规则码的最佳偏移值, 如图 5(a) 和 (b) 所示. 图中标记了不同  $d_v$  下, 离散非对称密度进化得到的最佳偏移值. 由图 5(a) 和 (b) 可以看出虽然码长远非无穷大, 但是密度进化得到的最佳偏移值与译码得到的最佳偏移值相等或非常接近, 这说明非对称密度进化得到的结果具有很强的指导性. 然后本文仿真了  $d_{v,max}$  分别为 3, 4 和 5 的非规则码的最佳度分布和最佳偏移值. 图 6(a) 和 (b) 展示了不同量化下的最佳度分布和偏移值对误码率的影响. 虽然随机噪声可能会对译码性能产生一定的影响, 但本文提出的非对称密度进化算法仍然有效.

本文首先将未量化的 BP 算法和译码仿真中具有最佳性能的规则码进行对比. 基于 OMS 的量化算法在 [-15:0.05:15] 量化下获得了与未量化 BP 算法几乎相同的性能, 与未量化 BP 算法相比, 性能下降小于 0.1 dB, 相同量化和译码方法下 (3, 6) 规则码比 (4, 8) 规则码, (4, 8) 规则码比 (5, 10) 规则码的性能好大约 0.4 dB. (3, 6), (4, 8) 和 (5, 10) 规则码的瀑布区分别大概从 8.2 dB, 8.8 dB 和 9.2 dB 开始. 相同度数的规则码在不同译码和量化方式下性能几乎相同, 不同度数的规则码译码性能随着度数增加而逐渐降低. 不同度数和量化之间的性能关系与密度进化结果一致, 如图 7(a) 所示. 从图 7(b) 可以看出随着  $d_{v,max}$  的增大, 译码性能变好. 这种趋势与差分进化的结果一致. 在本文的非对称信道

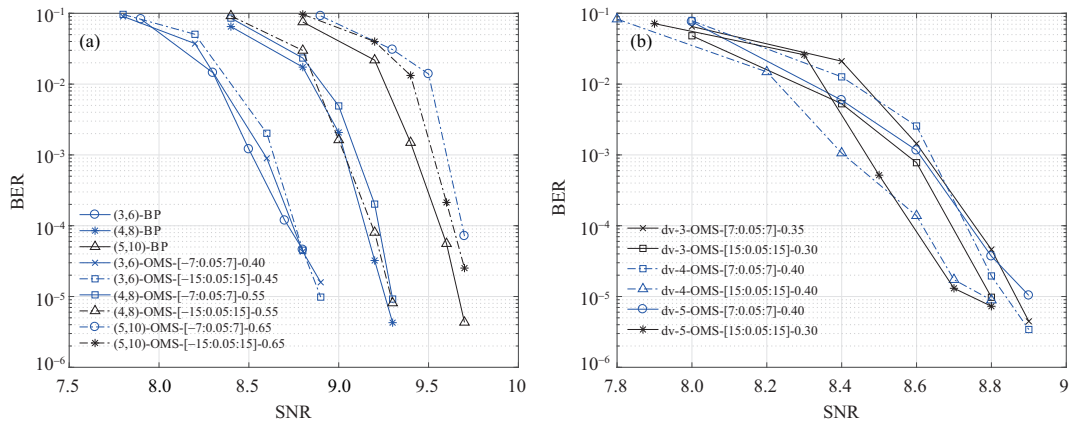


图 7 (网络版彩图) (a) 量化 OMS 和非量化 BP 译码性能对比; (b) 量化 OMS 最佳度分布译码性能对比

Figure 7 (Color online) (a) Comparison of performance between quantized OMS and non-quantized BP decoding; (b) decoding performance comparison of quantized OMS optimal degree distribution

下, 最佳非规则码性能均好于规则码. 不同  $d_{v,\max}$  下的非规则码的瀑布区大概从 8.2 dB 开始, 而且性能差距很小. 这是由于非规则码度数中较小的变量节点占有一定比例, 这会使 LDPC 码的性能更好.

## 6 结论

本文提出了低运算复杂度的基于 MS 译码的非对称密度进化方法, 校验节点迭代计算的时间复杂度从  $\mathcal{O}(d_c N^{d_c-1})$  降低到  $\mathcal{O}(d_c N)$ , 空间复杂度从  $\mathcal{O}(N^{d_c-1})$  降低到  $\mathcal{O}(1)$ , 解决了在高精度或高码率下应用非对称密度进化算法设计和分析 LDPC 码复杂度过高的难题. 应用所提方法, 得到了非对称信道下规则 LDPC 码在不同节点度和不同量化时的最佳偏移值与门限, 获得了其理论性能, 得到了规则码度数越小, 性能越好, 最佳偏移值越小的结论. 进一步地, 本文设计并优化了非对称信道下的非规则 LDPC 码, 非规则码性能优于规则码,  $d_{v,\max}$  越大非规则码性能越好. 在步长相同情况下, 随着量化范围的减小, 最佳度分布中  $\lambda_2$  所占的比例越来越低.

## 参考文献

- Gallager R. Low-density parity-check codes. IEEE Trans Inform Theor, 1962, 8: 21–28
- Luby M, Mitzenmacher M, Shokrollah A, et al. Analysis of low density codes and improved designs using irregular graphs. In: Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1998. 249–258
- MacKay D J C, Neal R M. Near Shannon limit performance of low density parity check codes. Electron Lett, 1996, 32: 1645
- Richardson T J, Urbanke R L. The capacity of low-density parity-check codes under message-passing decoding. IEEE Trans Inform Theor, 2001, 47: 599–618
- Chung S-Y, Richardson T J, Urbanke R L. Analysis of sum-product decoding of low-density parity-check codes using a Gaussian approximation. IEEE Trans Inform Theor, 2001, 47: 657–670
- Chung S-Y, Forney G D, Richardson T J, et al. On the design of low-density parity-check codes within 0.0045 dB of the Shannon limit. IEEE Commun Lett, 2001, 5: 58–60
- Wei X, Akansu A N. Density evolution for low-density parity-check codes under Max-Log-MAP decoding. Electron Lett, 2001, 37: 1125–1126
- Chen J, Fossorier M P C. Density evolution for two improved BP-Based decoding algorithms of LDPC codes. IEEE Commun Lett, 2002, 6: 208–210

- 9 Anastasopoulos A. A comparison between the sum-product and the min-sum iterative detection algorithms based on density evolution. In: Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference, 2001. 1021–1025
- 10 Chen J. Density evolution for BP-based decoding algorithms of LDPC codes and their quantized versions. In: Proceedings of Global Telecommunications Conference, 2002. 1378–1382
- 11 Chen J, Dholakia A, Eleftheriou E, et al. Reduced-complexity decoding of LDPC codes. *IEEE Trans Commun*, 2005, 53: 1288–1299
- 12 Storn R, Price K. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *J Glob Optim*, 1997, 11: 341–359
- 13 Wang C C, Kulkarni S R, Poor H V. Density evolution for asymmetric memoryless channels. *IEEE Trans Inform Theor*, 2005, 51: 4216–4236
- 14 Lee H C, Shy J H, Chen Y M, et al. LDPC coded modulation for TLC flash memory. In: Proceedings of IEEE Information Theory Workshop, 2017. 204–208
- 15 Ao J, Liang J, Ma C, et al. Optimization of LDPC Codes for PIN-based OOK FSO communication systems. *IEEE Photon Technol Lett*, 2017, 29: 727–730
- 16 Dupraz E, Leduc-Primeau F. Noisy density evolution with asymmetric deviation models. *IEEE Trans Commun*, 2020, 69: 1403–1416
- 17 Shrinidhi J, Krishna P S, B Y, et al. Modified min sum decoding algorithm for low density parity check codes. *Procedia Comput Sci*, 2020, 171: 2128–2136
- 18 Jeong S, Ha J. On the design of multi-edge type low-density parity-check codes. *IEEE Trans Commun*, 2019, 67: 6652–6667
- 19 Richardson T J, Shokrollahi M A, Urbanke R L. Design of capacity-approaching irregular low-density parity-check codes. *IEEE Trans Inform Theor*, 2001, 47: 619–637
- 20 Sonali, Dixit A, Jain V K. SNR-and rate-optimized LDPC codes for free-space optical channels. *IEEE Access*, 2021, 9: 13212–13223
- 21 Niu D, Peng K, Song J, et al. LDPC coded modulation with unequal protection. In: Proceedings of International Conference on Communications, Circuits and Systems, 2008. 114–118
- 22 Parnell T, Papandreou N, Mittelholzer T, et al. Modelling of the threshold voltage distributions of sub-20nm NAND flash memory. In: Proceedings of IEEE Global Communications Conference, 2014. 2351–2356
- 23 Luo Y, Ghose S, Cai Y, et al. Enabling accurate and practical online flash channel modeling for modern MLC NAND flash memory. *IEEE J Sel Areas Commun*, 2016, 34: 2294–2311
- 24 Yeh Y, Fazeli A, Siegel P H. Optimal placement of read thresholds for coded NAND flash memory. In: Proceedings of IEEE International Conference on Communications, 2021. 1–7
- 25 Tillich J P, Zemor G. On the minimum distance of structured LDPC codes with two variable nodes of degree 2 per parity-check equation. In: Proceedings of 2006 IEEE International Symposium on Information Theory, 2006. 1549–1553
- 26 Declercq D, Verdier F. Optimization of LDPC finite precision belief propagation decoding with discrete density evolution. In: Proceedings of the 3rd International Symposium on Turbo Codes and Related Topics Brest, 2003
- 27 Xie Q, Peng K, Song J, et al. On the channel capacity and iterative demapping of generalized 4PAM over AWGN channel. In: Proceedings of the 11th IEEE Singapore International Conference on Communication Systems, 2008. 860–863
- 28 Durcek V, Kuba M, Dado M. Investigation of random-structure regular LDPC codes construction based on progressive edge-growth and algorithms for removal of short cycles. *Eastern-European J Enterp Technol*, 2021, 4: 112

## Discrete density evolution and LDPC codes design with asymmetric channels

Tao YUAN, Zheng MA<sup>\*</sup>, Qike PANG & Xiaohu TANG

*School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China*

<sup>\*</sup> Corresponding author. E-mail: zma@swjtu.edu.cn

**Abstract** To design low-density parity-check (LDPC) codes with asymmetric channels and analyze their performance, an achievable asymmetric discrete density evolution method is proposed, which is based on offset min-sum decoding. First, the iterative formula of low-complexity asymmetric channel discrete density evolution is derived by means of combinatorics, difference method and the binomial theorem. The iterative formula is applied to further optimize the design of the LDPC codes using the offset min-sum decoding, and the optimal degree distributions and performance of the LDPC codes under different quantization ranges and step sizes are obtained under the asymmetric channel. Finally, the optimal offset values under high-precision quantization are obtained. The results show that under the asymmetric channel, the complexity of the proposed asymmetric density evolution method based on the offset min-sum decoding is reduced by an order of magnitude than that using the original method. For a fixed code rate, the smaller the variable node degree of the regular codes, the better the performance and the smaller the optimal offset value. For irregular LDPC codes, the optimal degree distributions and offset values are determined according to the differential evolution algorithm. For a fixed code rate, the larger the maximum variable node degree, the better the performance of irregular codes.

**Keywords** asymmetric channel, low-density parity-check codes, min-sum, density evolution, degree distributions, differential evolution