

# 基于自抗扰的三自由度推力矢量飞行器控制分配方法与理论

向飞宇<sup>1,2</sup>, 薛文超<sup>1,2\*</sup>, 陈森<sup>3</sup>, 张言军<sup>4</sup>

1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

2. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049

3. 陕西师范大学数学与统计学院, 西安 710119

4. 北京理工大学自动化学院, 北京 100081

\* 通信作者. E-mail: wenchaoxue@amss.ac.cn

收稿日期: 2022-05-16; 修回日期: 2022-08-02; 接受日期: 2022-10-08; 网络出版日期: 2023-06-07

国家自然科学基金(批准号: 62122083, 61973299, 62003202)和中国科学院青年创新促进会资助项目

**摘要** 推力矢量飞行器具有气动舵、推力矢量等改变本体姿态的多类控制输入, 这使得推力矢量飞行器具备在日益复杂的空天环境下的高机动控制能力。同时, 推力矢量飞行器的控制系统模型为非仿射非线性结构, 并且包含复杂的不确定性, 这使得其控制问题具有挑战性。本文针对三自由度推力矢量飞行器的角速度跟踪控制问题, 采用自抗扰控制方法, 实现了飞行过程中不确定性的主动补偿; 基于气动舵优先和误差最小的准则, 得到了控制输入最优解具有显式表达式的条件; 针对控制输入最优解无法得到显式表达式的情况, 证明了最优解一定在约束边界上, 且可通过有限步求解; 结合实际控制分配, 定量给出了闭环系统的跟踪误差和估计误差的特性。在典型仿真环境下, 本文提出的控制方法表现出有效性和鲁棒性, 能够在强非线性和大范围不确定性下实现角速度跟踪目标。

**关键词** 推力矢量飞行器, 自抗扰控制, 扩张状态观测器, 控制分配, 自由度

## 1 引言

未来飞行器所面临的空天环境日趋复杂化与多样化, 这使得现代飞行器高机动的性能需求日益增长, 如战斗机的过失速机动<sup>[1]</sup>, 近地卫星的变轨<sup>[2]</sup>等。推力矢量技术能够直接改变飞行器的推力大小和方向, 使得飞行器具有可改变本体姿态的多类控制输入, 即气动舵和推力矢量等。因此, 推力矢量技术是实现飞行器高机动的重要途径。同时, 推力矢量飞行器高机动控制需要对付复杂的不确定性, 包括非线性不确定气动模型、未知风干扰等。因此, 如何通过优化分配多类控制输入, 在复杂不确定性下实现控制目标, 是推力矢量飞行器的核心控制问题。

**引用格式:** 向飞宇, 薛文超, 陈森, 等. 基于自抗扰的三自由度推力矢量飞行器的控制分配方法与理论. 中国科学: 信息科学, 2023, 53: 1163–1180, doi: 10.1360/SSI-2022-0018  
Xiang F Y, Xue W C, Chen S, et al. ADRC-based control allocation method and theory for 3-DOF thrust-vector aircraft (in Chinese). Sci Sin Inform, 2023, 53: 1163–1180, doi: 10.1360/SSI-2022-0018

在过去几十年, 学者们针对不同类的非线性飞行器控制模型提出了多种有效的控制方法。特征点线性化方法<sup>[3]</sup>指在飞行器特征点处进行线性化, 对这个线性化模型设计控制律。自适应控制<sup>[4]</sup>能够在飞行过程中辨识出模型的参数, 然后根据辨识结果设计自适应控制律。滑模控制<sup>[5, 6]</sup>定义了滑模面, 通过切换控制器的结构使飞行器达到预期控制目标。非线性动态逆方法<sup>[7~9]</sup>充分利用了飞行器模型信息, 采用反馈线性化方法尽可能消除非线性项带来的影响。由于推力矢量飞行器的工作区域往往具有强非线性和不确定性, 控制设计需要具有更强的鲁棒性。近年来, 基于在线估计与补偿不确定性的控制方法也逐渐成为飞行器控制方法研究的热点, 其主要特性是在估计和补偿系统扰动的同时, 使闭环系统具有期望的动态特性<sup>[10]</sup>。自抗扰控制技术<sup>[11~13]</sup>通过扩张状态观测器主动估计系统的总扰动, 进而设计期望控制量对扰动进行主动补偿, 是一种不依赖于模型且易于设计的估计和补偿不确定性的控制方法。目前, 自抗扰控制技术已经应用于多种控制系统<sup>[14~16]</sup>, 尤其是飞行控制<sup>[17~19]</sup>。

针对具有多类控制输入的分配问题, 其研究也取得了很多进展。文献[20, 21]采用矩阵广义逆方法直接求解控制分配问题。文献[22]采用加权最小二乘方法, 根据控制输入的优先级设计权重, 然后给出控制分配方案。文献[23, 24]将控制输入分配问题转化为二次规划问题, 进而得到相应控制分配。文献[25, 26]利用布尔变量表示控制分配是否饱和, 通过混合整数线性规划方法进行控制分配。文献[17]结合气动舵优先和推力最小化的准则, 给出了有限步求解最优控制分配的算法。在上述文献中, 主要考虑了仅含气动舵面或二自由度推力矢量飞行器的控制分配方法, 如果将其直接用于三自由度推力矢量飞行器的控制分配, 可能无法完全发挥三自由度推力矢量飞行器的控制能力。因此, 在复杂多变的飞行环境下, 合理优化三自由度推力矢量飞行器的控制分配具有重要意义。而将自抗扰控制方法与最优控制分配进行结合, 既能充分发挥气动舵面和推力矢量的控制能力, 也能使三自由度推力矢量飞行器对付复杂多变的飞行环境, 从而使其具备更强的机动性。

本文针对三自由度推力矢量飞行器的角速度跟踪问题, 提出了基于自抗扰的飞行器舵优先控制分配方法与理论。本文的研究工作亮点如下:

第一, 针对三自由度推力矢量飞行器的角速度跟踪控制问题, 提出了基于舵优先和误差最小准则进行控制分配的自抗扰控制律, 并给出了推力矢量控制输入最优解具有显式表达式的条件;

第二, 针对推力矢量控制输入最优解无法得到显式解的情况, 证明了最优解一定在约束边界上, 且可通过有限步求得, 从而说明所提出算法计算负荷较低;

第三, 定量分析了闭环系统跟踪误差和估计误差的特性, 并在多通道耦合及大迎角等仿真环境下说明了所提出方法的有效性和鲁棒性。

本文如下部分安排为: 第2节为问题描述, 第3节为基于自抗扰的舵优先控制分配方法, 第4节为仿真结果, 第5节为总结。

## 2 问题描述

考虑如下三自由度推力矢量飞行器的角速度控制模型<sup>[22]</sup>:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_p(p, q, r, \alpha, \beta, V_T, \rho) \\ F_q(p, q, r, \alpha, \beta, V_T, \rho) \\ F_r(p, q, r, \alpha, \beta, V_T, \rho) \end{bmatrix} + B_1 \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} T \sin \delta_y \\ T \sin \delta_x \cos \delta_y \sin \delta_z \\ T \sin \delta_x \cos \delta_y \cos \delta_z \\ T \cos \delta_x \cos \delta_y \sin \delta_z \end{bmatrix}, \\ (\delta_a, \delta_e, \delta_r) \in U_A, (\delta_x, \delta_y, \delta_z, T) \in U_F, t \geq t_0, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $t_0$  为系统 (1) 的初始时刻. 滚转角速率  $p$ 、俯仰角速率  $q$  和偏航角速率  $r$  是系统 (1) 的状态. 升降舵偏角  $\delta_a$ 、副翼偏角  $\delta_e$  和方向舵偏角  $\delta_r$  是系统 (1) 的气动舵面控制输入, 等效推力矢量偏角  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$  和推力大小  $T$  是系统 (1) 的推力矢量控制输入.  $U_A$  和  $U_F$  分别为气动舵面和推力矢量控制输入的物理约束:

$$U_A = [\underline{\delta}_a, \bar{\delta}_a] \times [\underline{\delta}_e, \bar{\delta}_e] \times [\underline{\delta}_r, \bar{\delta}_r], \quad U_F = [\underline{\delta}_x, \bar{\delta}_x] \times [\underline{\delta}_y, \bar{\delta}_y] \times [\underline{\delta}_z, \bar{\delta}_z] \times [\underline{T}, \bar{T}], \quad (2)$$

其中  $[\underline{\delta}_a, \bar{\delta}_a]$ ,  $[\underline{\delta}_e, \bar{\delta}_e]$  和  $[\underline{\delta}_r, \bar{\delta}_r]$  是当前时刻气动舵面的范围,  $[\underline{\delta}_x, \bar{\delta}_x]$ ,  $[\underline{\delta}_y, \bar{\delta}_y]$ ,  $[\underline{\delta}_z, \bar{\delta}_z]$  和  $[\underline{T}, \bar{T}]$  是当前时刻推力矢量的范围. 此外,  $F_p(\cdot)$ ,  $F_q(\cdot)$  和  $F_r(\cdot)$  分别为系统 (1) 中滚转、俯仰和偏航通道的时变总扰动项, 它们与系统 (1) 的状态、飞行器的迎角  $\alpha$ 、侧滑角  $\beta$ 、速率  $V_T$  和空气密度  $\rho$  等均相关, 且具有较强的非线性. 最后, 矩阵  $B_1$  和  $B_2$  满足

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ I_{xz} & 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad B_1 = I^{-1} \frac{\rho V_T^2}{2} \begin{bmatrix} l_s C_{mx}^{\delta_a}(\cdot) & l_s C_{mx}^{\delta_e}(\cdot) & l_s C_{mx}^{\delta_r}(\cdot) \\ l_c C_{my}^{\delta_a}(\cdot) & l_c C_{my}^{\delta_e}(\cdot) & l_c C_{my}^{\delta_r}(\cdot) \\ l_s C_{mz}^{\delta_a}(\cdot) & l_s C_{mz}^{\delta_e}(\cdot) & l_s C_{mz}^{\delta_r}(\cdot) \end{bmatrix}, \quad B_2 = I^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_{T_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{T_x} \\ l_{T_x} & l_{T_y} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中  $C_{mx}(\cdot)$ ,  $C_{my}(\cdot)$  和  $C_{mz}(\cdot)$  分别为滚转、俯仰和偏航通道的气动力矩系数,  $C_{mx}^{\delta_a}(\cdot)$ ,  $C_{mx}^{\delta_e}(\cdot)$ ,  $C_{mx}^{\delta_r}(\cdot)$ ,  $C_{my}^{\delta_a}(\cdot)$ ,  $C_{my}^{\delta_e}(\cdot)$ ,  $C_{my}^{\delta_r}(\cdot)$ ,  $C_{mz}^{\delta_a}(\cdot)$ ,  $C_{mz}^{\delta_e}(\cdot)$  和  $C_{mz}^{\delta_r}(\cdot)$  均为气动力矩系数关于气动舵面偏角的偏导数, 它们与系统 (1) 的状态、气动舵面控制输入、迎角  $\alpha$ 、侧滑角  $\beta$  和速率  $V_T$  均相关. 实际中, 一般先利用插值法计算气动力矩系数<sup>[22]</sup>, 再采用临近点数据近似计算气动力矩系数关于气动舵面偏角的偏导数<sup>[17]</sup>. 以  $C_{mx}^{\delta_a}(\cdot)|_{\delta_a=\delta_a^*}$  为例, 假设  $\delta_a^*$  为待求解点,  $\delta_a^{(1)}$  和  $\delta_a^{(2)}$  为临近点, 则

$$C_{mx}^{\delta_a}(\cdot)|_{\delta_a=\delta_a^*} = \frac{C_{mx}(p, q, r, \alpha, \beta, \delta_a^{(2)}, \delta_e, \delta_r, V_T) - C_{mx}(p, q, r, \alpha, \beta, \delta_a^{(1)}, \delta_e, \delta_r, V_T)}{\delta_a^{(2)} - \delta_a^{(1)}}. \quad (4)$$

此外, 式 (3) 出现的其他变量中,  $\rho$  为空气密度,  $l_s$  为舵面径向相对长度,  $l_c$  为相对空气动力弦长度,  $l_{T_x}$  和  $l_{T_y}$  为推力矢量作用点距飞行器重心的距离,  $I_x$ ,  $I_y$  和  $I_z$  分别为飞行器对机体系  $x$ ,  $y$  和  $z$  轴的转动惯量,  $I_{xz}$  为飞行器对机体系  $x$  轴和  $z$  轴的惯量积. 系统 (1) 中变量的命名和单位如表 1 所示.

设  $p_c(t)$ ,  $q_c(t)$  和  $r_c(t)$  分别为滚转、俯仰和偏航通道的时变参考信号. 由于实际中既关心瞬态过程, 又关心稳态误差, 因此关心系统状态的整条轨迹. 设计理想轨迹  $p^*(t)$ ,  $q^*(t)$  和  $r^*(t)$  为不包含不确定性的比例反馈闭环系统, 即

$$\begin{cases} \dot{p}^* = -k_p(p^* - p_c), & p^*(t_0) = p(t_0), \\ \dot{q}^* = -k_q(q^* - q_c), & q^*(t_0) = q(t_0), \\ \dot{r}^* = -k_r(r^* - r_c), & r^*(t_0) = r(t_0), \end{cases} \quad (5)$$

其中  $k_p$ ,  $k_q$  和  $k_r$  分别为滚转、俯仰和偏航通道的比例反馈系数.

系统 (1) 的控制目标为使其状态变量  $p$ ,  $q$  和  $r$  跟踪理想轨迹  $p^*$ ,  $q^*$  和  $r^*$ , 即让下式尽可能小:

$$\sup_{t \in [t_0, \infty]} (|p(t) - p^*(t)| + |q(t) - q^*(t)| + |r(t) - r^*(t)|). \quad (6)$$

对于上述系统 (1) 和时变参考信号有如下典型假设条件:

表 1 符号说明  
Table 1 Notations

Name	Definition	Unit
$\alpha$	Attack angle	°
$\beta$	Sideslip angle	°
$\mu$	Roll angle of velocity	°
$V_T$	Velocity	m/s
$p, q, r$	Angular velocity	deg/s
$\delta_a, \delta_e, \delta_r$	Aero rudder deflection angle	°
$\delta_x, \delta_y, \delta_z$	Equivalent thrust vector deflection angle	°
$T$	Thrust	N
$l_{T_x}, l_{T_y}$	Distance between thrust vector and center	m
$l_s$	Radial relative length of rudder surface	m
$l_c$	Relative length of aerodynamic chord	m
$I_x, I_y, I_z, I_{xz}$	Rotational inertia and inertia product	kg · m <sup>2</sup>
$\rho$	Air density	kg · m <sup>-3</sup>
$C_{mx}, C_{my}, C_{mz}$	Coefficients of aerodynamic torque	—

- (H1) 矩阵  $B_1$  和  $B_2$  有界, 并且行满秩.
- (H2) 时变参考信号  $p_c(t), q_c(t)$  和  $r_c(t)$  有界.
- (H3)  $F_p(t), F_q(t)$  和  $F_r(t)$  关于  $t$  可微, 且存在正常数  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  满足

$$\begin{cases} \sup_{t \in [t_0, \infty)} (|F_p(t)| + |F_q(t)| + |F_r(t)|) \leq \varepsilon_1, \\ \sup_{t \in [t_0, \infty)} (|\dot{F}_p(t)| + |\dot{F}_q(t)| + |\dot{F}_r(t)|) \leq \varepsilon_2. \end{cases} \quad (7)$$

- (H4) 控制输入的范围  $[\underline{\delta}_a, \bar{\delta}_a], [\underline{\delta}_e, \bar{\delta}_e], [\underline{\delta}_r, \bar{\delta}_r], [\underline{\delta}_x, \bar{\delta}_x], [\underline{\delta}_y, \bar{\delta}_y], [\underline{\delta}_z, \bar{\delta}_z]$  和  $[\underline{T}, \bar{T}]$  满足

$$\max \{|\underline{\delta}_a|, |\bar{\delta}_a|, |\underline{\delta}_e|, |\bar{\delta}_e|, |\underline{\delta}_r|, |\bar{\delta}_r|, |\underline{\delta}_x|, |\bar{\delta}_x|, |\underline{\delta}_y|, |\bar{\delta}_y|, |\underline{\delta}_z|, |\bar{\delta}_z|\} < \frac{\pi}{4}, \bar{T} > \underline{T} > 0, t \geq t_0. \quad (8)$$

**注释1** 实际情况下,  $\delta_x$  通常由关于机体  $y$  轴对称安装的两台发动机的推力矢量偏角  $\delta_{zl}$  与  $\delta_{zr}$  差动实现<sup>[22]</sup>, 满足  $\delta_x = \frac{\delta_{zr} - \delta_{zl}}{2}$ , 由于推力矢量偏角的绝对值一般情况下不超过  $\frac{\pi}{4}$ , 即  $\max\{|\delta_{zl}|, |\delta_{zr}|\} < \frac{\pi}{4}$  成立, 则根据不等式关系可知  $|\delta_x| < \frac{\pi}{4}$ . 同理, 有  $|\delta_z| = |\frac{\delta_{zr} + \delta_{zl}}{2}| < \frac{\pi}{4}$  成立.

### 3 基于自抗扰的舵优先控制分配方法

图 1 给出了基于自抗扰的舵优先控制分配方法的整体流程, 下面将分步骤介绍本文提出的基于自抗扰的舵优先控制分配方法以及相应的理论分析结果.

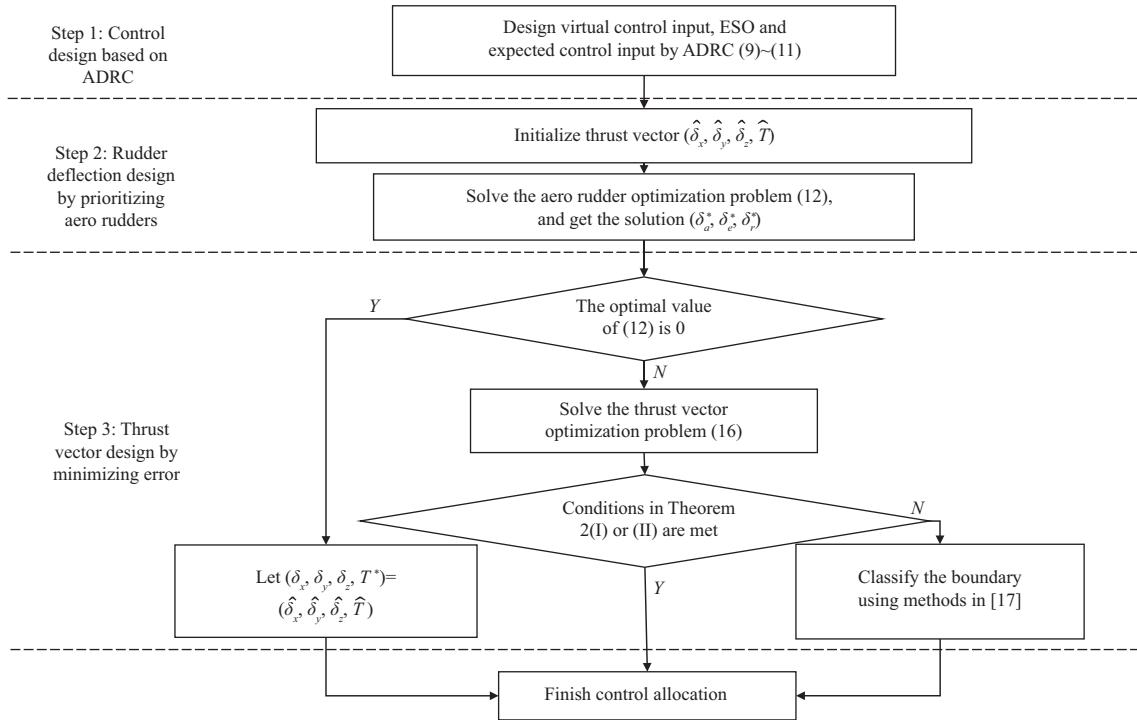


图 1 基于自抗扰的舵优先控制分配方法的整体流程图

Figure 1 Flow chart of rudder-prioritized control allocation based on ADRC

### 3.1 基于自抗扰控制的期望控制量设计

首先, 利用自抗扰控制的思想, 将系统 (1) 写成总扰动加上虚拟控制量  $u_v$  的形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_p(\cdot) \\ F_q(\cdot) \\ F_r(\cdot) \end{bmatrix} + u_v, \quad u_v = B_1 \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} T \sin \delta_y \\ T \sin \delta_x \cos \delta_y \sin \delta_z \\ T \sin \delta_x \cos \delta_y \cos \delta_z \\ T \cos \delta_x \cos \delta_y \sin \delta_z \end{bmatrix}. \quad (9)$$

其次, 采用自抗扰控制技术, 利用带宽法<sup>[27]</sup> 设计如下扩张状态观测器, 对式 (9) 中的扰动项进行在线估计与主动补偿:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{p1} \\ \dot{z}_{q1} \\ \dot{z}_{r1} \end{bmatrix} = u_v + \begin{bmatrix} z_{p2} - 2\omega_p(z_{p1} - p) \\ z_{q2} - 2\omega_q(z_{q1} - q) \\ z_{r2} - 2\omega_r(z_{r1} - r) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z_{p1}(t_0) \\ z_{q1}(t_0) \\ z_{r1}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t_0) \\ q(t_0) \\ r(t_0) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{z}_{p2} \\ \dot{z}_{q2} \\ \dot{z}_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_p^2(z_{p1} - p) \\ -\omega_q^2(z_{q1} - q) \\ -\omega_r^2(z_{r1} - r) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z_{p2}(t_0) \\ z_{q2}(t_0) \\ z_{r2}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中  $z_{p1}$ ,  $z_{q1}$  和  $z_{r1}$  分别为系统 (1) 状态  $p$ ,  $q$  和  $r$  的估计值;  $z_{p2}$ ,  $z_{q2}$  和  $z_{r2}$  分别为总扰动  $F_p(\cdot)$ ,  $F_q(\cdot)$  和  $F_r(\cdot)$  的估计值;  $w_p$ ,  $w_q$  和  $w_r$  分别为扩张状态观测器 (10) 在滚转、俯仰和偏航通道的带宽.

最后, 根据总扰动估计值, 得到带有扰动主动补偿的期望控制输入  $u_e$  为

$$u_e = \begin{bmatrix} -z_{p2} - k_p(p - p_c) \\ -z_{q2} - k_q(q - q_c) \\ -z_{r2} - k_r(r - r_c) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

其中  $k_p$ ,  $k_q$  和  $k_r$  的定义与式 (5) 一致, 分别为滚转、俯仰和偏航通道的比例反馈系数.

### 3.2 基于气动舵优先的舵偏输入设计

优先分配气动舵面能够充分利用气动舵能力, 减小推力矢量变化消耗的能量, 从而延长发动机的使用寿命. 因此, 本文采用优先分配气动舵面的准则, 即考虑如下气动舵面优化问题:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J_A(\delta_a, \delta_e, \delta_r) = \left\| u_e - B_1 \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} - B_2 \begin{bmatrix} \hat{T} \sin \hat{\delta}_y \\ \hat{T} \sin \hat{\delta}_x \cos \hat{\delta}_y \sin \hat{\delta}_z \\ \hat{T} \sin \hat{\delta}_x \cos \hat{\delta}_y \cos \hat{\delta}_z \\ \hat{T} \cos \hat{\delta}_x \cos \hat{\delta}_y \sin \hat{\delta}_z \end{bmatrix} \right\|_2^2, \\ \text{s.t. } (\delta_a, \delta_e, \delta_r) \in U_A, \end{array} \right. \quad (12)$$

其中  $(\hat{T}, \hat{\delta}_x, \hat{\delta}_y, \hat{\delta}_z)$  为当前时刻推力矢量的初步设定值, 在实际应用中一般取为推力矢量上一采样周期的值.

**注释2** 通常情况下, 飞行过程中并不希望推力矢量发生剧烈波动, 因此将推力矢量上一采样周期的值作为初步设定值. 一方面, 无论上周期舵偏能力是否足够, 只要本周期舵偏能力足够, 那么推力矢量在本周期不会变化, 从而避免了推力矢量的剧烈波动. 另一方面, 虽然设置不同的推力矢量初始值会对气动舵偏和推力矢量的计算结果有影响, 但是对于任意设定的初始值, 下面介绍的定理 1 和 2 说明气动舵偏和推力矢量的解析解可以直接给出, 这说明本文所提的控制器使得推力矢量初值对最优解的影响较小.

文献 [17] 已经指出, 优化问题 (12) 的最优解  $(\delta_a^*, \delta_e^*, \delta_r^*)$  是唯一的, 且该唯一解仅可能落在  $U_A$  的边界上或为固定点. 本文进一步给出了该最优解的具体形式, 为简便起见, 记

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = B_1^T B_1, \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = B_1^{-1} \left( u_e - B_2 \begin{bmatrix} \hat{T} \sin \hat{\delta}_y \\ \hat{T} \sin \hat{\delta}_x \cos \hat{\delta}_y \sin \hat{\delta}_z \\ \hat{T} \sin \hat{\delta}_x \cos \hat{\delta}_y \cos \hat{\delta}_z \\ \hat{T} \cos \hat{\delta}_x \cos \hat{\delta}_y \sin \hat{\delta}_z \end{bmatrix} \right). \quad (13)$$

**定理1** 气动舵面优化问题 (12) 的最优解必然为如下形式:

$$\begin{bmatrix} \delta_a^* \\ \delta_e^* \\ \delta_r^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min\{\max\{\delta_a^* - 2p_{11}(\delta_a^* - q_1) - 2p_{12}(\delta_e^* - q_2) - 2p_{13}(\delta_r^* - q_3), \underline{\delta}_a\}, \bar{\delta}_a\} \\ \min\{\max\{\delta_e^* - 2p_{21}(\delta_a^* - q_1) - 2p_{22}(\delta_e^* - q_2) - 2p_{23}(\delta_r^* - q_3), \underline{\delta}_e\}, \bar{\delta}_e\} \\ \min\{\max\{\delta_r^* - 2p_{31}(\delta_a^* - q_1) - 2p_{32}(\delta_e^* - q_2) - 2p_{33}(\delta_r^* - q_3), \underline{\delta}_r\}, \bar{\delta}_r\} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

**注释3** 由定理 1 可知, 气动舵面优化问题 (12) 解的形式只有有限种, 从而可通过分类讨论, 穷举 27 种可能的形式, 在有限步内得到气动舵面优化问题 (12) 的最优解  $(\delta_a^*, \delta_e^*, \delta_r^*)$ . 由于本文算法对每种可能的情况都给出了显式表达式, 其计算量为  $O(1)$ , 计算负荷较低.

下面给出定理 1 的证明.

**证明** 下面给出气动舵面优化问题 (12) 的 KKT 条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2p_{11}(q_1 - \delta_a^*) - 2p_{12}(q_2 - \delta_e^*) - 2p_{13}(q_3 - \delta_r^*) = \lambda_{a1} - \lambda_{a2}, \quad \lambda_{a1}(\delta_a^* - \underline{\delta}_a) = \lambda_{a2}(\delta_a^* - \bar{\delta}_a) = 0, \\ -2p_{21}(q_1 - \delta_a^*) - 2p_{22}(q_2 - \delta_e^*) - 2p_{23}(q_3 - \delta_r^*) = \lambda_{e1} - \lambda_{e2}, \quad \lambda_{e1}(\delta_e^* - \underline{\delta}_e) = \lambda_{e2}(\delta_e^* - \bar{\delta}_e) = 0, \\ -2p_{31}(q_1 - \delta_a^*) - 2p_{32}(q_2 - \delta_e^*) - p_{33}(q_3 - \delta_r^*) = \lambda_{r1} - \lambda_{r2}, \quad \lambda_{r1}(\delta_r^* - \underline{\delta}_r) = \lambda_{r2}(\delta_r^* - \bar{\delta}_r) = 0, \\ \underline{\delta}_a \leq \delta_a^* \leq \bar{\delta}_a, \quad \underline{\delta}_e \leq \delta_e^* \leq \bar{\delta}_e, \quad \underline{\delta}_r \leq \delta_r^* \leq \bar{\delta}_r, \quad \min\{\lambda_{a1}, \lambda_{a2}, \lambda_{e1}, \lambda_{e2}, \lambda_{r1}, \lambda_{r2}\} \geq 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

根据式 (15),  $\delta_a^*$  的取值只可能有 3 种情况:

- (I)  $\delta_a^* \in (\underline{\delta}_a, \bar{\delta}_a)$ . 此时  $\lambda_{a1} = \lambda_{a2} = 0$ , 从而  $p_{11}(q_1 - \delta_a^*) + p_{12}(q_2 - \delta_e^*) + p_{13}(q_3 - \delta_r^*) = 0$ .
- (II)  $\delta_a^* = \underline{\delta}_a$ . 此时  $\lambda_{a1} = 0$ ,  $\lambda_{a2} = 2p_{11}(q_1 - \delta_a^*) + 2p_{12}(q_2 - \delta_e^*) + 2p_{13}(q_3 - \delta_r^*)$ , 同时有  $\delta_a^* - \lambda_{a2} \leq \underline{\delta}_a$ .
- (III)  $\delta_a^* = \bar{\delta}_a$ . 此时  $\lambda_{a1} = -2p_{11}(q_1 - \delta_a^*) - 2p_{12}(q_2 - \delta_e^*) - 2p_{13}(q_3 - \delta_r^*)$ ,  $\lambda_{a2} = 0$ , 同时有  $\delta_a^* + \lambda_{a1} \geq \bar{\delta}_a$ .

将 (I)~(III) 的结果代入式 (14) 的右侧, 均可得  $\min\{\max\{\delta_a^* - 2p_{11}(\delta_a^* - q_1) - 2p_{12}(\delta_e^* - q_2) - 2p_{13}(\delta_r^* - q_3), \underline{\delta}_a\}, \bar{\delta}_a\} = \delta_a^*$ . 因此, 无论  $\delta_e^*$  和  $\delta_r^*$  的值如何变化, 式 (14) 中有关  $\delta_a^*$  的表达式仍然成立. 另一方面, 在式 (15) 中,  $\delta_a^*$ ,  $\delta_e^*$  和  $\delta_r^*$  结构类似, 类似  $\delta_a^*$  进行分类讨论, 就能说明式 (14) 成立.

因此, 对于  $\delta_a^*$ ,  $\delta_e^*$  和  $\delta_r^*$  的各种情形, 相应的分析结论均成立, 从而可得定理 1.

### 3.3 基于误差最小的推力矢量控制分配算法

得到气动舵面优化问题 (12) 的最优解后, 需要考虑如下推力矢量优化问题:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J_F(\delta_x, \delta_y, \delta_z, T) = \left\| u_e - B_1 \begin{bmatrix} \delta_a^* \\ \delta_e^* \\ \delta_r^* \end{bmatrix} - B_2 \begin{bmatrix} T \sin \delta_y \\ T \sin \delta_x \cos \delta_y \sin \delta_z \\ T \sin \delta_x \cos \delta_y \cos \delta_z \\ T \cos \delta_x \cos \delta_y \sin \delta_z \end{bmatrix} \right\|_2^2, \\ \text{s.t. } (\delta_x, \delta_y, \delta_z, T) \in U_F, \end{array} \right. \quad (16)$$

其中  $(\delta_a^*, \delta_e^*, \delta_r^*)$  为气动舵面优化问题 (12) 的最优解. 由式 (16) 可知, 如果气动舵面优化问题 (12) 的最优值为 0, 那么取  $(\delta_x^*, \delta_y^*, \delta_z^*, T^*) = (\hat{T}, \hat{\delta}_x, \hat{\delta}_y, \hat{\delta}_z)$ , 能够使推力矢量优化问题 (16) 的值也为 0. 即当气动舵面能够完成控制分配时, 推力矢量保持不变.

接下来讨论推力矢量优化问题 (16) 最优解  $(\delta_x^*, \delta_y^*, \delta_z^*, T^*)$  的具体形式. 定义  $S_F$ :

$$S_F = \left\{ (\delta_x, \delta_y, \delta_z, T) : \begin{array}{l} c_1 - c_2 T \sin \delta_y - T \sin \delta_x \cos \delta_y \sin \delta_z = 0 \\ c_3 - T \sin \delta_x \cos \delta_y \cos \delta_z = 0 \\ c_4 - T \cos \delta_x \cos \delta_y \sin \delta_z = 0 \end{array} \right\}, \quad (17)$$

其中  $c_1, c_2, c_3$  和  $c_4$  满足

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{I_{xz}}{l_{Ty}} & 0 & \frac{I_z}{l_{Ty}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_y}{l_{Tx}} & 0 \\ -\frac{I_x}{l_{Ty}} & 0 & \frac{I_{xz}}{l_{Ty}} \end{bmatrix} \left( u_e - B_1 \begin{bmatrix} \delta_a^* \\ \delta_e^* \\ \delta_r^* \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_{Tx}}{l_{Ty}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

其中  $l_{Tx}$  和  $l_{Ty}$  为推力矢量作用点距飞行器重心的距离,  $I_x, I_y$  和  $I_z$  分别为飞行器对机体系  $x, y$  和  $z$  轴的转动惯量,  $I_{xz}$  为飞行器对机体系  $x$  轴和  $z$  轴的惯量积.

**定理2** 推力矢量优化问题 (16) 的最优解必然为如下 3 种形式之一:

(I) 当  $S_F \cap U_F \neq \emptyset$ , 并且  $u_{eq}^*(I_{xz}u_{er}^* - I_xu_{ep}^*) \neq 0$  时, 有

$$\begin{cases} \delta_x^*(\eta) = \arctan\left(\frac{c_1 - c_2\eta}{c_4}\right), \delta_y^*(\eta) = \arctan\left(\frac{\eta(c_1 - c_2\eta)\operatorname{sgn}(c_3)\operatorname{sgn}(c_4)}{\sqrt{(c_1 - c_2\eta)^2 + c_3^2}\sqrt{(c_1 - c_2\eta)^2 + c_4^2}}\right), \\ \delta_z^*(\eta) = \arctan\left(\frac{c_1 - c_2\eta}{c_3}\right), T^*(\eta) = \frac{\sqrt{\eta^2(c_1 - c_2\eta)^2 + ((c_1 - c_2\eta)^2 + c_3^2)((c_1 - c_2\eta)^2 + c_4^2)}}{(c_1 - c_2\eta)\operatorname{sgn}(c_3)\operatorname{sgn}(c_4)}, \\ \eta \neq \frac{c_1}{c_2}, (\delta_x^*(\eta), \delta_y^*(\eta), \delta_z^*(\eta), T^*(\eta)) \in U_F. \end{cases} \quad (19)$$

(II) 当  $S_F \cap U_F \neq \emptyset$ , 并且  $u_{eq}^*(I_{xz}u_{er}^* - I_xu_{ep}^*) = 0$  时, 有

$$\begin{cases} \delta_x^* = \arcsin\left(\frac{c_3|c_2|}{\sqrt{c_2^2T^2 - c_1^2}}\right), \delta_y^* = \arcsin\left(\frac{c_1}{c_2T}\right), \delta_z^* = \arcsin\left(\frac{c_4|c_2|}{\sqrt{c_2^2T^2 - c_1^2}}\right), T^* = T, \\ (\delta_x^*, \delta_y^*, \delta_z^*, T^*) \in U_F. \end{cases} \quad (20)$$

(III) 当  $S_F \cap U_F = \emptyset$  时, 推力矢量优化问题 (16) 的最优解  $(\delta_x^*, \delta_y^*, \delta_z^*, T^*)$  在约束边界上, 即  $\delta_x^* \in \{\underline{\delta}_x, \bar{\delta}_x\}$ ,  $\delta_y^* \in \{\underline{\delta}_y, \bar{\delta}_y\}$ ,  $\delta_z^* \in \{\underline{\delta}_z, \bar{\delta}_z\}$ , 或  $T^* \in \{\underline{T}, \bar{T}\}$  成立.

**注释4** 由式 (17) 可知, 判断  $S_F \cap U_F$  是否为空集, 需要求解与推力矢量相关的不等式组, 其计算量为  $O(n)$ , 其中  $n = 4$  为推力矢量控制输入的个数. 根据定理 2, 如果  $S_F \cap U_F$  非空, 能得到推力矢量优化问题最优解的显式表达式, 其计算量为  $O(1)$ ; 如果  $S_F \cap U_F$  为空集, 推力矢量优化问题最优解一定在边界上, 此时可以采用文献 [17] 中的方法对约束边界分类, 求解此问题的计算量不超过  $O(n^{3.5})$  [28], 待优化变量数目  $n \leq 3$ . 因此, 能够在有限步内得到推力矢量优化问题 (16) 的解, 且计算负荷较小.

**注释5** 在  $S_F \cap U_F$  非空时进行控制分配, 能够使推力矢量优化问题 (16) 的最优值为 0, 即虚拟控制量  $u_v$  等于期望控制输入  $u_e$ . 结合式 (9) 和 (11) 可得

$$B_1 \begin{bmatrix} \delta_a^* \\ \delta_e^* \\ \delta_r^* \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} T^* \sin \delta_y^* \\ T^* \sin \delta_x^* \cos \delta_y^* \sin \delta_z^* \\ T^* \sin \delta_x^* \cos \delta_y^* \cos \delta_z^* \\ T^* \cos \delta_x^* \cos \delta_y^* \sin \delta_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_{p2} - k_p(p - p_c) \\ -z_{q2} - k_q(q - q_c) \\ -z_{r2} - k_r(r - r_c) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

因此, 此时的控制分配能够精确补偿扰动估计值和比例反馈.

下面给出定理 2 的证明.

**证明** 首先结合式 (18), 将推力矢量优化问题 (16) 的目标函数  $J_F(\delta_x, \delta_y, \delta_z, T)$  变为如下形式:

$$J_F(\delta_x, \delta_y, \delta_z, T) = \left\| \begin{bmatrix} -\frac{I_{xz}l_{Ty}}{I_{xz}^2 - I_xI_z} & \frac{I_zl_{Ty}}{I_{xz}^2 - I_xI_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_{Tx}}{I_y} \\ -\frac{I_xl_{Ty}}{I_{xz}^2 - I_xI_z} & \frac{I_{xz}l_{Ty}}{I_{xz}^2 - I_xI_z} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 - c_2T \sin \delta_y - T \sin \delta_x \cos \delta_y \sin \delta_z \\ c_3 - T \sin \delta_x \cos \delta_y \cos \delta_z \\ c_4 - T \cos \delta_x \cos \delta_y \sin \delta_z \end{bmatrix} \right\|_2^2. \quad (22)$$

下面计算  $J_F(\delta_x, \delta_y, \delta_z, T)$  的驻点  $(\delta_x^*, \delta_y^*, \delta_z^*, T^*)$ , 即求解方程:

$$\frac{\partial J_F}{\partial \delta_x}(\delta_x^*, \delta_y^*, \delta_z^*, T^*) = \frac{\partial J_F}{\partial \delta_y}(\delta_x^*, \delta_y^*, \delta_z^*, T^*) = \frac{\partial J_F}{\partial \delta_z}(\delta_x^*, \delta_y^*, \delta_z^*, T^*) = \frac{\partial J_F}{\partial T}(\delta_x^*, \delta_y^*, \delta_z^*, T^*) = 0. \quad (23)$$

由式 (23) 可得

$$\begin{aligned} & \cos \delta_y^* \frac{\partial J_F}{\partial \delta_y}(\delta_x^*, \delta_y^*, \delta_z^*, T^*) + T^* \sin \delta_y^* \frac{\partial J_F}{\partial T}(\delta_x^*, \delta_y^*, \delta_z^*, T^*) \\ &= -4T^* \frac{(I_{xz}^2 + I_z^2)l_{Ty}^2}{(I_{xz}^2 - I_xI_z)^2} \frac{(I_{xz}^2 + I_x^2)l_{Ty}^2}{(I_{xz}^2 - I_xI_z)^2} (c_1 - c_2T^* \sin \delta_y^* - T \sin \delta_x^* \cos \delta_y^* \sin \delta_z^*) \\ &+ 4T^* \frac{(I_{xz}^2 + I_z^2)l_{Ty}^2}{(I_{xz}^2 - I_xI_z)^2} \frac{I_{xz}(I_x + I_z)l_{Ty}^2}{(I_{xz}^2 - I_xI_z)^2} (c_3 - T^* \sin \delta_x^* \cos \delta_y^* \cos \delta_z^*) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

进一步整理可得

$$(I_x^2 + I_{xz}^2)(c_1 - c_2T^* \sin \delta_y^* - T^* \sin \delta_x^* \cos \delta_y^* \sin \delta_z^*) - I_{xz}(I_x + I_z)(c_3 - T \sin \delta_x^* \cos \delta_y^* \cos \delta_z^*) = 0. \quad (25)$$

将式 (25) 代入式 (23) 进一步可得

$$\begin{aligned} & \sin \delta_x^* \sin \delta_z^* \frac{\partial J_F}{\partial \delta_x}(\delta_x^*, \delta_y^*, \delta_z^*, T^*) + \cos \delta_x^* \cos \delta_z^* \frac{\partial J_F}{\partial \delta_z}(\delta_x^*, \delta_y^*, \delta_z^*, T^*) \\ &= 2T^* \cos \delta_x^* \cos \delta_y^* \cos \delta_z^* (\sin^2 \delta_x^* \sin^2 \delta_z^* - \cos^2 \delta_x^* \cos^2 \delta_z^*) \frac{l_{Tx}^2}{I_y^2} (c_4 - T^* \cos \delta_x^* \cos \delta_y^* \sin \delta_z^*) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

由 (H3) 可知  $\delta_x^* \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ ,  $\delta_z^* \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ , 因此  $\sin^2 \delta_x^* \sin^2 \delta_z^* \neq \cos^2 \delta_x^* \cos^2 \delta_z^*$ . 将式 (26) 代入式 (23) 可得

$$I_{xz}(I_x + I_z)(c_1 - c_2T^* \sin \delta_y^* - T^* \sin \delta_x^* \cos \delta_y^* \sin \delta_z^*) - (I_{xz}^2 + I_z^2)(c_3 - T^* \sin \delta_x^* \cos \delta_y^* \cos \delta_z^*) = 0. \quad (27)$$

结合  $(I_x^2 + I_{xz}^2)(I_z^2 + I_{xz}^2) - I_{xz}^2(I_x + I_z)^2 = (I_{xz}^2 - I_xI_z)^2 \neq 0$ , 可得

$$c_1 - c_2T^* \sin \delta_y^* - T^* \sin \delta_x^* \cos \delta_y^* \sin \delta_z^* = c_3 - T^* \sin \delta_x^* \cos \delta_y^* \cos \delta_z^* = c_4 - T^* \cos \delta_x^* \cos \delta_y^* \sin \delta_z^* = 0. \quad (28)$$

此即为推力矢量优化问题 (16) 的驻点, 进一步计算可得  $J_F(\delta_x^*, \delta_y^*, \delta_z^*, T^*) = 0$ . 由推力矢量优化问题 (16) 的形式可知  $J_F(\delta_x, \delta_y, \delta_z, T) \geq 0$ . 又由于  $J_F(\delta_x, \delta_y, \delta_z, T)$  是连续的, 推力矢量优化问题 (16) 仅在驻点处取最小值 0, 且在其他区域的值严格大于 0. 从而可知, 当  $S_F \cap U_F \neq \emptyset$  时,  $J_F(\delta_x, \delta_y, \delta_z, T)$  的驻点在  $U_F$  内.

令  $T^* \sin \delta_y^* = \eta$ , 则  $T^* \sin \delta_x^* \cos \delta_y^* \sin \delta_z^* = c_1 - c_2\eta$ . 当定理 2(I) 条件满足时, 有  $c_3 \neq 0$  和  $c_4 \neq 0$  成立, 结合式 (28) 可知  $\tan \delta_x^* = \frac{c_1 - c_2\eta}{c_4}$  和  $\tan \delta_z^* = \frac{c_1 - c_2\eta}{c_3}$ , 进一步计算即可得  $\delta_y^*$  和  $T^*$ , 从而定理 2(I)

得证. 当定理 2(II) 条件满足时, 有  $c_3 = 0$  或  $c_4 = 0$  成立. 当  $c_3 = 0$  时, 显然有  $\delta_x^* = 0$ ,  $c_1 = c_2 T^* \sin \delta_y^*$  和  $T^* \cos \delta_y^* \sin \delta_z^* = c_4$  成立. 此时将  $T^*$  看作自由变量, 反解可得  $\delta_y^*$  和  $\delta_z^*$  的值, 用类似方法可以得到  $c_4 = 0$  的结果, 将这两个结果合并, 定理 2(II) 得证.

当  $S_F \cap U_F = \emptyset$  时, 推力矢量优化问题 (16) 在约束边界及其内部不存在驻点, 根据连续函数在有界闭区间的性质, 推力矢量优化问题 (16) 的最优解一定在约束边界上, 定理 2(III) 得证.

### 3.4 闭环系统稳定性分析

记系统 (1) 状态  $p$ ,  $q$  和  $r$  对理想轨迹  $p^*$ ,  $q^*$  和  $r^*$  的跟踪误差分别为  $e_p$ ,  $e_q$  和  $e_r$ , 其表达式为

$$e_p = p - p^*, \quad e_q = q - q^*, \quad e_r = r - r^*. \quad (29)$$

扩张状态观测器 (10) 对系统 (1) 状态  $p$ ,  $q$  和  $r$  的估计误差分别为  $\hat{e}_{p1}$ ,  $\hat{e}_{q1}$  和  $\hat{e}_{r1}$ , 其表达式为

$$\hat{e}_{p1} = z_{p1} - p, \quad \hat{e}_{q1} = z_{q1} - q, \quad \hat{e}_{r1} = z_{r1} - r. \quad (30)$$

扩张状态观测器 (10) 对滚转、俯仰和偏航通道总扰动  $F_p(\cdot)$ ,  $F_q(\cdot)$  和  $F_r(\cdot)$  的估计误差分别为  $\hat{e}_{p2}$ ,  $\hat{e}_{q2}$  和  $\hat{e}_{r2}$ , 其表达式为

$$\hat{e}_{p2} = z_{p2} - F_p, \quad \hat{e}_{q2} = z_{q2} - F_q, \quad \hat{e}_{r2} = z_{r2} - F_r. \quad (31)$$

**定理3** 考虑满足典型假设条件 (H1)~(H4) 的系统 (1) 与由扩张状态观测器 (10) 设计的控制器构成的闭环系统. 该系统状态  $p$ ,  $q$  和  $r$  与其理想轨迹  $p^*$ ,  $q^*$  和  $r^*$  之间的跟踪误差满足

$$\sup_{t \in [t_0, \infty)} (|e_p(t)| + |e_q(t)| + |e_r(t)|) \leq 3 \left( \frac{2\varepsilon_1}{\omega_0} + \frac{2\varepsilon_2}{k_0 \omega_0} + \frac{\sqrt{\varepsilon_3}}{k_0} \right). \quad (32)$$

扩张状态观测器 (10) 对系统 (1) 状态  $p$ ,  $q$  和  $r$  的估计误差满足

$$\sup_{t \in [t_0, \infty)} (|\hat{e}_{p1}(t)| + |\hat{e}_{q1}(t)| + |\hat{e}_{r1}(t)|) \leq 3 \left( \frac{\varepsilon_1}{2\omega_0} + \frac{\varepsilon_2}{\omega_0^2} \right). \quad (33)$$

扩张状态观测器 (10) 对滚转、俯仰和偏航通道总扰动  $F_p(\cdot)$ ,  $F_q(\cdot)$  和  $F_r(\cdot)$  的估计误差满足

$$\sup_{t \in [t_0 + \max\{0, 2\frac{\ln \omega_0}{\omega_0}\}, \infty)} (|\hat{e}_{p2}(t)| + |\hat{e}_{q2}(t)| + |\hat{e}_{r2}(t)|) \leq 3 \left( \frac{2\varepsilon_1}{\omega_0} + \frac{2\varepsilon_2}{\omega_0} \right), \quad (34)$$

其中  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  为 (H4) 定义的正常数,  $\varepsilon_3 = \sup_{t \in [t_0, \infty)} (J_F(\delta_x^*(t), \delta_y^*(t), \delta_z^*(t), T^*(t)))$ ,  $J_F$  为优化问题 (16) 的最优值.  $k_0 = \min\{k_p, k_q, k_r\}$ ,  $\omega_0 = \min\{\omega_p, \omega_q, \omega_r\}$ .

**注释6** 由定理 3 可知, 当  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  和  $\varepsilon_3$  尽可能小时, 系统状态  $p$ ,  $q$  和  $r$  对理想轨迹  $p^*$ ,  $q^*$  和  $r^*$  的跟踪误差, 扩张状态观测器 (10) 对系统 (1) 状态  $p$ ,  $q$  和  $r$  的估计误差和扩张状态观测器 (10) 对滚转、俯仰和偏航通道总扰动  $F_p(\cdot)$ ,  $F_q(\cdot)$  和  $F_r(\cdot)$  的估计误差也会尽可能小. 另一方面, 当  $\varepsilon_3 = 0$  时, 系统状态  $p$ ,  $q$  和  $r$  对理想轨迹  $p^*$ ,  $q^*$  和  $r^*$  的跟踪误差上界为  $O(\frac{1}{\omega_0})$ ; 在任意时刻, 扩张状态观测器 (10) 对系统 (1) 状态  $p$ ,  $q$  和  $r$  的估计误差上界为  $O(\frac{1}{\omega_0})$ ; 在初始时刻经过  $2\frac{\ln \omega_0}{\omega_0}$  后, 扩张状态观测器 (10) 对滚转、俯仰和偏航通道总扰动  $F_p(\cdot)$ ,  $F_q(\cdot)$  和  $F_r(\cdot)$  的估计误差上界为  $O(\frac{1}{\omega_0})$ .

下面给出定理 3 的证明.

**证明** 将式(1)和(10)联立,构成如下的闭环系统:

$$\begin{cases} \dot{p} = F_p + u_{vp}, \\ \dot{z}_{p1} = z_{p2} - 2\omega_p(z_{p1} - p) + u_{vp}, \\ \dot{z}_{p2} = -\omega_p^2(z_{p1} - p), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{q} = F_q + u_{vq}, \\ \dot{z}_{q1} = z_{q2} - 2\omega_q(z_{q1} - q) + u_{vq}, \\ \dot{z}_{q2} = -\omega_q^2(z_{q1} - q), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{r} = F_r + u_{vr}, \\ \dot{z}_{r1} = z_{r2} - 2\omega_r(z_{r1} - r) + u_{vr}, \\ \dot{z}_{r2} = -\omega_r^2(z_{r1} - r), \end{cases} \quad (35)$$

其中  $u_{vp}$ ,  $u_{vq}$  和  $u_{vr}$  分别为滚转、俯仰和偏航通道的虚拟控制分量.

不失一般性,下面仅研究滚转角速率  $p$ 、滚转角速率估计值  $z_{p1}$  和滚转通道总扰动估计值  $z_{p2}$  构成的子系统,结合期望控制输入(11),可将闭环系统(35)写为

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_p \\ \dot{\hat{e}}_{p1} \\ \dot{\hat{e}}_{p2} \end{bmatrix} = A_e \begin{bmatrix} e_p \\ \hat{e}_{p1} \\ \hat{e}_{p2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{vp} - u_{ep} \\ 0 \\ -\dot{F}_p \end{bmatrix}, \quad A_e = \begin{bmatrix} -k_p & 0 & -1 \\ 0 & -2\omega_p & 1 \\ 0 & -\omega_p^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

其中  $k_p$  为滚转通道的比例反馈系数,  $\omega_p$  为扩张状态观测器在滚转通道的带宽,  $u_{ep}$  为滚转通道的期望控制分量.由计算可知,矩阵  $A_e$  的特征值分别为  $\lambda_1 = -k_p$ ,  $\lambda_2 = -\omega_p$  和  $\lambda_3 = -\omega_p$ .当  $k_p > 0$ ,并且  $\omega_p > 0$  时,矩阵  $A_e$  的特征值均具有负实部,从而矩阵  $A_e$  是 Hurwitz 的.

首先,由条件(H3)可知,

$$|F_p(t)| \leq \varepsilon_1, \quad |\dot{F}_p^*(t)| \leq \varepsilon_2, \quad |u_{ep}(t) - u_{vp}(t)| \leq \sqrt{\varepsilon_3}, \quad t \geq t_0. \quad (37)$$

下面对俯仰通道的跟踪误差  $e_p$ 、估计误差  $\hat{e}_{p1}$  和  $\hat{e}_{p2}$  进行估计.闭环系统(35)的解满足下式:

$$\begin{bmatrix} e_p(t) \\ \hat{e}_{p1}(t) \\ \hat{e}_{p2}(t) \end{bmatrix} = e^{A_e(t-t_0)} \begin{bmatrix} e_p(t_0) \\ \hat{e}_{p1}(t_0) \\ \hat{e}_{p2}(t_0) \end{bmatrix} + \int_{t_0}^t e^{A_e(t-\tau)} \begin{bmatrix} u_{vp}(\tau) - u_{ep}(\tau) \\ 0 \\ -\dot{F}_p(\tau) \end{bmatrix} d\tau, \quad (38)$$

其中  $e$  为自然对数.由扩张状态观测器(10)的初值可知,  $e_p(t_0) = \hat{e}_{p1}(t_0) = 0$ .为研究式(38)的性质,需要对  $A_e$  进行 Jordan 分解,进一步研究  $e^{A_e t}$  的结构.

当  $k_p \neq \omega_p$  时,有

$$e^{A_e t} = \begin{bmatrix} \frac{\omega_p^2((e^{-k_p t} - e^{-\omega_p t}) + (k_p - \omega_p)t e^{-\omega_p t})}{(k_p - \omega_p)^2} & \frac{(k_p - 2\omega_p)(e^{-k_p t} - e^{-\omega_p t}) - \omega_p(k_p - \omega_p)t e^{-\omega_p t}}{(k_p - \omega_p)^2} \\ 0 & (1 - \omega_p t)e^{-\omega_p t} \\ 0 & -\omega_p^2 t e^{-\omega_p t} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

下面对  $|e_p(t)|$  的上界进行分段估计:

$$\left| \frac{(k_p - 2\omega_p)(e^{-k_p(t-t_0)} - e^{-\omega_p(t-t_0)}) - \omega_p(k_p - \omega_p)(t - t_0)e^{-\omega_p(t-t_0)}}{(k_p - \omega_p)^2} \hat{e}_{p2}(t_0) \right| \leq (1 + e^{-k_p}) \frac{\varepsilon_1}{\omega_p} \leq \frac{2\varepsilon_1}{\omega_p}, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_0}^t -\frac{(k_p - 2\omega_p)(e^{-k_p(t-\tau)} - e^{-\omega_p(t-\tau)}) - \omega_p(k_p - \omega_p)(t - \tau)e^{-\omega_p(t-\tau)}}{(k_p - \omega_p)^2} \dot{F}_p(\tau) d\tau \right| \\ & \leq \frac{2\varepsilon_2}{k_p \omega_p} - \left( \frac{e^{-k_p(t-t_0)}(2\omega_p - k_p)}{k_p(k_p - \omega_p)^2} + \frac{e^{-\omega_p(t-t_0)}(2k_p - 3\omega_p)}{\omega_p(k_p - \omega_p)^2} + \frac{(t - t_0)e^{-\omega_p(t-t_0)}}{k_p - \omega_p} \right) \varepsilon_2 \leq \frac{2\varepsilon_2}{k_p \omega_p}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\left| \int_{t_0}^t e^{-k_p(t-\tau)} (u_{vp}(\tau) - u_{ep}(\tau)) d\tau \right| \leq \frac{1 - e^{-k_p(t-t_0)}}{k_p} \sqrt{\varepsilon_3} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon_3}}{k_p}. \quad (42)$$

当  $k_p = \omega_p$  时, 有

$$e^{A_e t} = \begin{bmatrix} e^{-\omega_p t} & \frac{\omega_p^2}{2} t^2 e^{-\omega_p t} & -(t + \frac{\omega_p}{2} t^2) e^{-\omega_p t} \\ 0 & (1 - \omega_p t) e^{-\omega_p t} & t e^{-\omega_p t} \\ 0 & -\omega_p^2 t e^{-\omega_p t} & e^{-\omega_p t} + \omega_p t e^{-\omega_p t} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

类似可对  $|e_p(t)|$  上界进行估计:

$$\sup_{t \in [t_0, \infty)} |e_p(t)| \leq \frac{2\varepsilon_1}{\omega_p} + \frac{2\varepsilon_2}{\omega_p^2} + \frac{\sqrt{\varepsilon_3}}{\omega_p}. \quad (44)$$

最后对  $|\hat{e}_{p1}(t)|$  和  $|\hat{e}_{p2}(t)|$  的上界进行估计:

$$\sup_{t \in [t_0, \infty)} |\hat{e}_{p1}(t)| \leq \frac{\varepsilon_1}{2\omega_p} + \frac{\varepsilon_1}{\omega_p^2} (1 - e^{-\omega_p(t-t_0)}(1 + \omega_p(t-t_0))) \leq \frac{\varepsilon_1}{2\omega_p} + \frac{\varepsilon_2}{\omega_p^2}, \quad (45)$$

$$\sup_{t \in [t_0 + \max\{0, 2\frac{\ln \omega_p}{\omega_p}\}, \infty)} |\hat{e}_{p2}(t)| \leq \frac{1 + 2 \ln \omega_p}{\omega_p^2} \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{\omega_p} (2 - e^{-\omega_p(t-t_0)}(2 + \omega_p(t-t_0))) \leq \frac{2\varepsilon_1}{\omega_p} + \frac{2\varepsilon_2}{\omega_p}. \quad (46)$$

同理可知, 在俯仰和偏航通道有类似结论, 从而定理 3 得证.

## 4 仿真结果

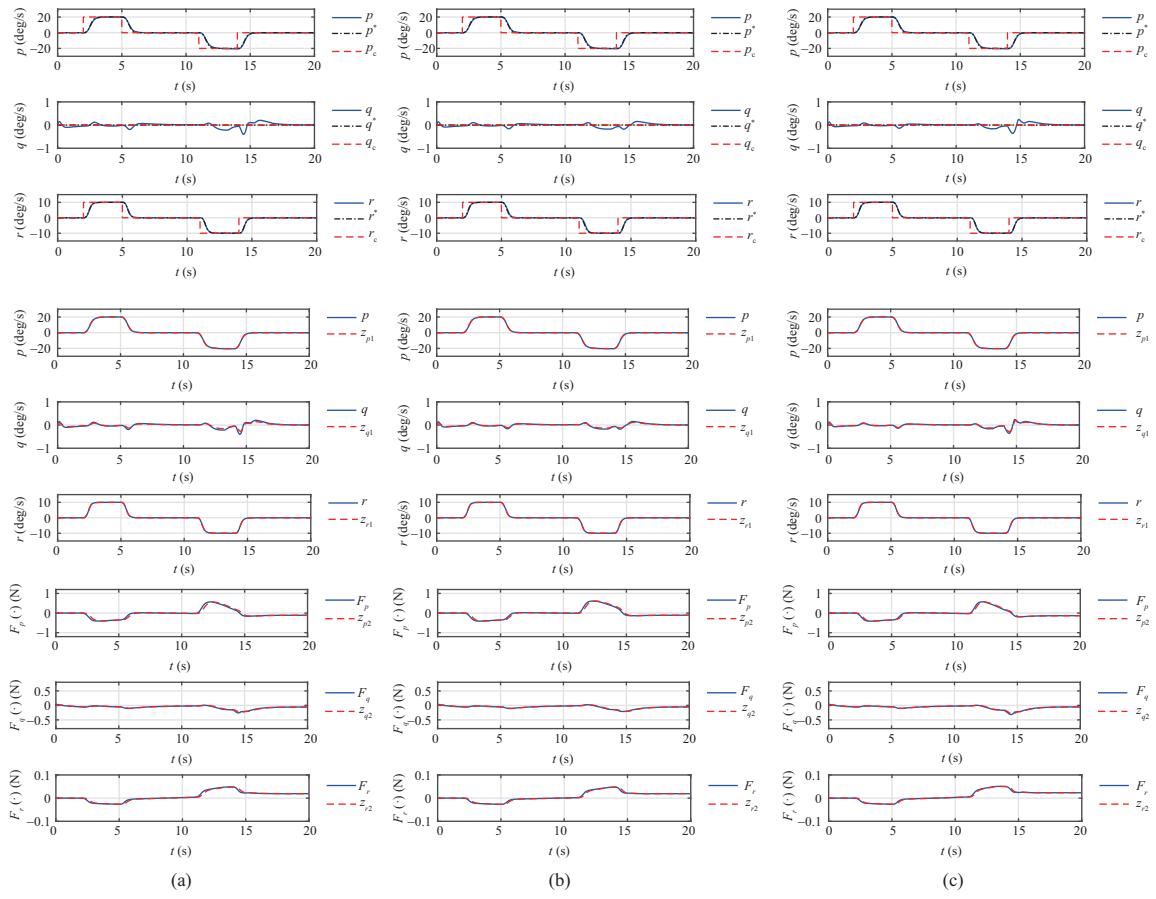
本节对带有推力矢量设计的飞行器模型<sup>[22]</sup>, 在仿真环境下验证本文提出的推力矢量飞行器控制算法的有效性. 为了使推力矢量飞行器具有高机动性, 本文将角速度的参考信号设计为

$$\left\{ \begin{array}{l} p_c(t) = \begin{cases} 20 \text{ deg/s}, & 2 \leq t \leq 5 \text{ s}, \\ -20 \text{ deg/s}, & 11 \leq t \leq 14 \text{ s}, \\ 0 \text{ deg/s}, & 0 \leq t < 2 \text{ s}, 5 < t < 11 \text{ s}, 14 < t \leq 20 \text{ s}, \end{cases} \\ q_c(t) = 0 \text{ deg/s}, 0 < t < 20 \text{ s}, \\ r_c(t) = \begin{cases} 10 \text{ deg/s}, & 2 \leq t \leq 5 \text{ s}, \\ -10 \text{ deg/s}, & 11 \leq t \leq 14 \text{ s}, \\ 0 \text{ deg/s}, & 0 \leq t < 2 \text{ s}, 5 < t < 11 \text{ s}, 14 < t \leq 20 \text{ s}. \end{cases} \end{array} \right. \quad (47)$$

本文将扩张状态观测器带宽 (10) 以及比例反馈系数 (11) 设定为

$$\omega_p = \omega_q = \omega_r = 12, k_p = k_q = k_r = 6. \quad (48)$$

**注释7** 扩张状态观测器带宽的设计具有明确的物理意义. 在定理 3 中已经指出, 该带宽越大, 系统的跟踪误差越小. 但由于实际物理系统的限制, 该带宽不能设计得很大. 图 2 中给出了带宽取值为 10, 12 和 15 这 3 种情况下的仿真结果, 从仿真结果可以看出, 控制的效果基本一致, 这说明带宽参数具有很大的适用范围. 比例反馈系数也具有明确的物理意义, 其本质代表了在系统控制输入饱和、谐振频率等约束下角速度预期动态的快慢和形状. 综上, 本文确定了式 (48) 所述的参数.



**图 2 (网络版彩图)** 不同带宽下, 角速度响应曲线(上)及扩张状态观测器对角速度(中)及总扰动(下)的估计效果  
**Figure 2** (Color online) Response curves of angular velocity (top) and estimation performance of ESO for angular velocity (middle) and total disturbances (bottom) under different bandwidths. (a)  $\omega_p = \omega_q = \omega_r = 10$ ; (b)  $\omega_p = \omega_q = \omega_r = 12$ ; (c)  $\omega_p = \omega_q = \omega_r = 15$

基于本文提出的自抗扰控制设计以及气动舵优先和误差最小的控制分配方案, 仿真结果如图 2~4 所示。从图 2 可以看到, 扩张状态观测器很好地估计了系统的总扰动, 滚转、俯仰和偏航通道的角速度均能跟踪时变参考信号, 且滚转和偏航通道的跟踪误差非常小, 这体现了扩张状态观测器良好的性能和自抗扰控制的有效性。

根据本文提出的控制分配算法, 在求解气动舵面和推力矢量时, 可以分为如下 3 种类型。

类型 (1) 仅采用气动舵面和推力矢量上一采样周期的值, 此时使用定理 1 中给出的显式表达式求解;

类型 (2) 采用气动舵面和推力矢量, 且定理 2 中提到的  $S_F \cap U_F$  不为空集, 此时使用定理 2 中给出的显式表达式求解;

类型 (3) 采用气动舵面和推力矢量, 且定理 2 中提到的  $S_F \cap U_F$  为空集, 此时使用文献 [17] 中的方法对约束边界分类求解。

图 3 展示了气动舵面偏角分配与推力矢量分配结果。从图 3 中可以看到, 在 0~2 s, 由于初始控制指令为角速度跟踪到 0, 仅使用气动舵面就可以完成控制; 在 2~6 s, 由于在滚转和偏航通道加入了较大的阶跃指令, 气动舵面迅速达到饱和, 推力矢量投入使用; 在 17~20 s, 气动舵面回到未饱和状态, 此

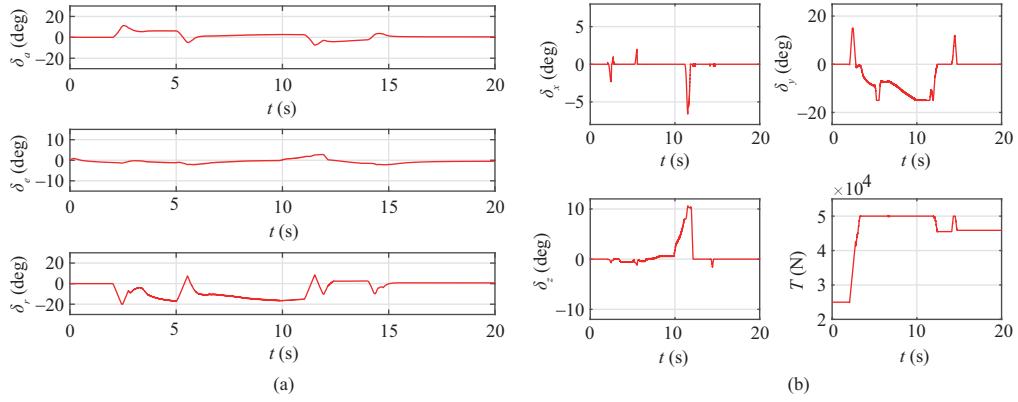


图 3 (网络版彩图) 气动舵面偏角分配 (a) 与推力矢量分配 (b) 结果

Figure 3 (Color online) Control allocation for aero rudders (a) and thrust vectors (b)

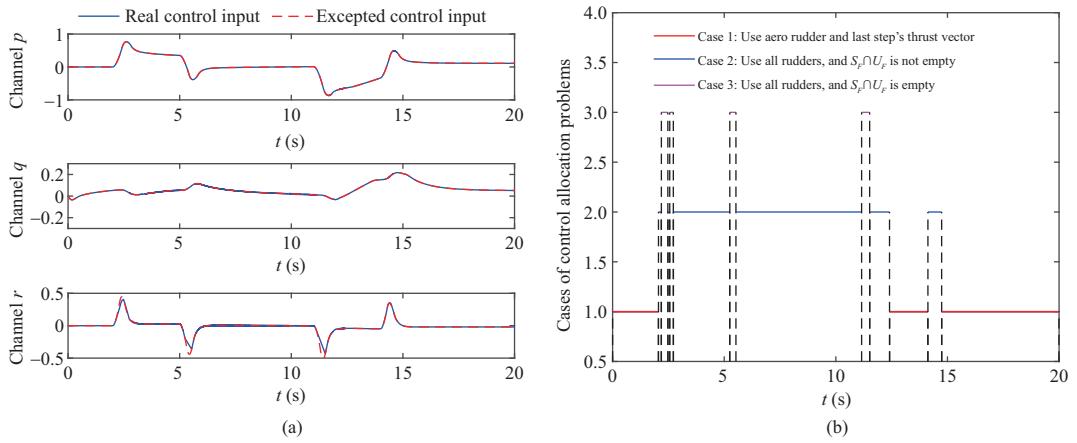


图 4 (网络版彩图) 实际控制输入与期望控制输入对比 (a) 与待求控制分配问题的类型 (b)

Figure 4 (Color online) Comparison between real control input and expected control input (a) and cases of control allocation problems (b)

时推力矢量保持不变. 图 4 对比了实际控制输入与期望控制输入, 并且展示了求解气动舵面和推力矢量时对应上文 3 种类型的具体时间段. 从图 4 中可以看到, 在使用气动舵面和推力矢量的大多数时间段内, 对应上文的类型 (1) 和 (2), 此时实际控制输入与期望控制输入相同, 体现了注释 5 中, 本文所提方法能够精确补偿总扰动的特点; 在给出阶跃指令的部分时间段内, 对应上文的类型 (3), 此时通过对约束边界分类, 也能使得实际控制输入与期望控制输入相差很小. 由此可知, 本文控制分配方案合理, 能够按需分配气动舵面和推力矢量的资源.

此外, 本文对飞行器的气动参数在其标称值的  $\pm 30\%$  范围与  $\pm 50\%$  范围按均匀分布进行随机拉偏, 图 5 为仿真结果. 从中可以看到, 在气动参数具有大范围不确定性的情况下, 滚转、俯仰和偏航通道的跟踪误差依然非常小, 这说明本文设计的控制分配算法具有鲁棒性.

最后, 将本文所提出显式表达式求解方法 (explicit solution method, ES) 与非线性规划方法<sup>[24]</sup> (nonlinear programming method, NP) 和线性化方法 (direct linearizing method, DL)<sup>[26]</sup> 在计算量 (computation complexity, CC)、计算时间 (computation time, CT)、角速度与理想轨迹之间的平均跟踪误差 (average tracking error, ATE) 和时间乘绝对误差积分 (integral of time multiplied by the absolute

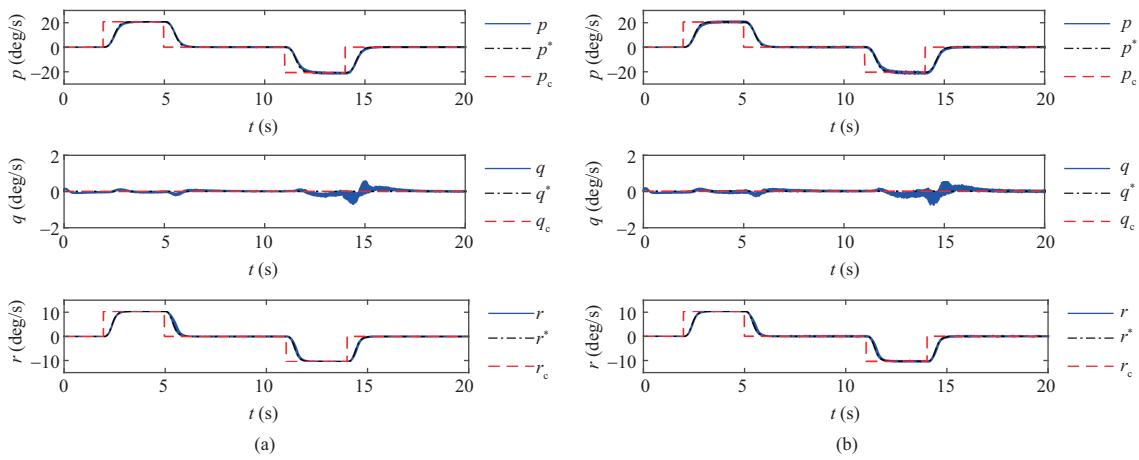


图 5 (网络版彩图) 1000 组气动参数  $\pm 30\%$  范围 (a) 与  $\pm 50\%$  范围 (b) 拉偏下, 角速度的响应曲线

**Figure 5** (Color online) Response curves of angular velocity for 1000 cases of randomized aerodynamic coefficients, within  $\pm 30\%$  range (a) and  $\pm 50\%$  range (b), respectively

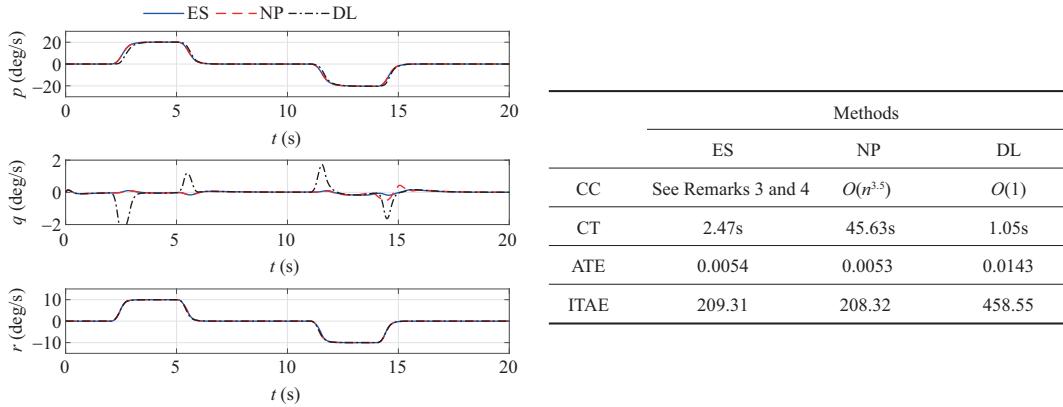


图 6 (网络版彩图) 本文所提出方法与其他经典方法的对比

**Figure 6** (Color online) Solution comparison between our method and other common methods

error, ITAE) 上进行对比, 结果如图 6 所示。可以看出, 相较于非线性规划方法, 本文方法的计算负荷远小于其计算负荷, 且平均跟踪误差和 ITAE 接近其平均跟踪误差和 ITAE; 相较于线性化方法, 本文方法的计算负荷接近其计算负荷, 且平均跟踪误差和 ITAE 远小于其平均跟踪误差和 ITAE。因此, 本文方法能够兼顾计算性能和控制目标。

**注释8** 利用反步法可以将姿态角控制问题转化为角速度跟踪问题<sup>[10]</sup>, 从而进一步拓展本文方法的适用范围. 本文参考文献 [22], 对飞行器进行眼镜蛇机动、60° 大迎角机动和 60° 大迎角下, 绕速度矢量 360° 滚转这几种实际机动指令进行了仿真, 仿真结果如图 7 所示. 从仿真结果可以看出, 本文方法能够实现对多种实际情形下迎角、侧滑角和速度滚转角指令  $\alpha_c$ ,  $\beta_c$  和  $\mu_c$  的跟踪, 并且姿态角响应曲线光滑, 这说明了本文方法的实用性与有效性.

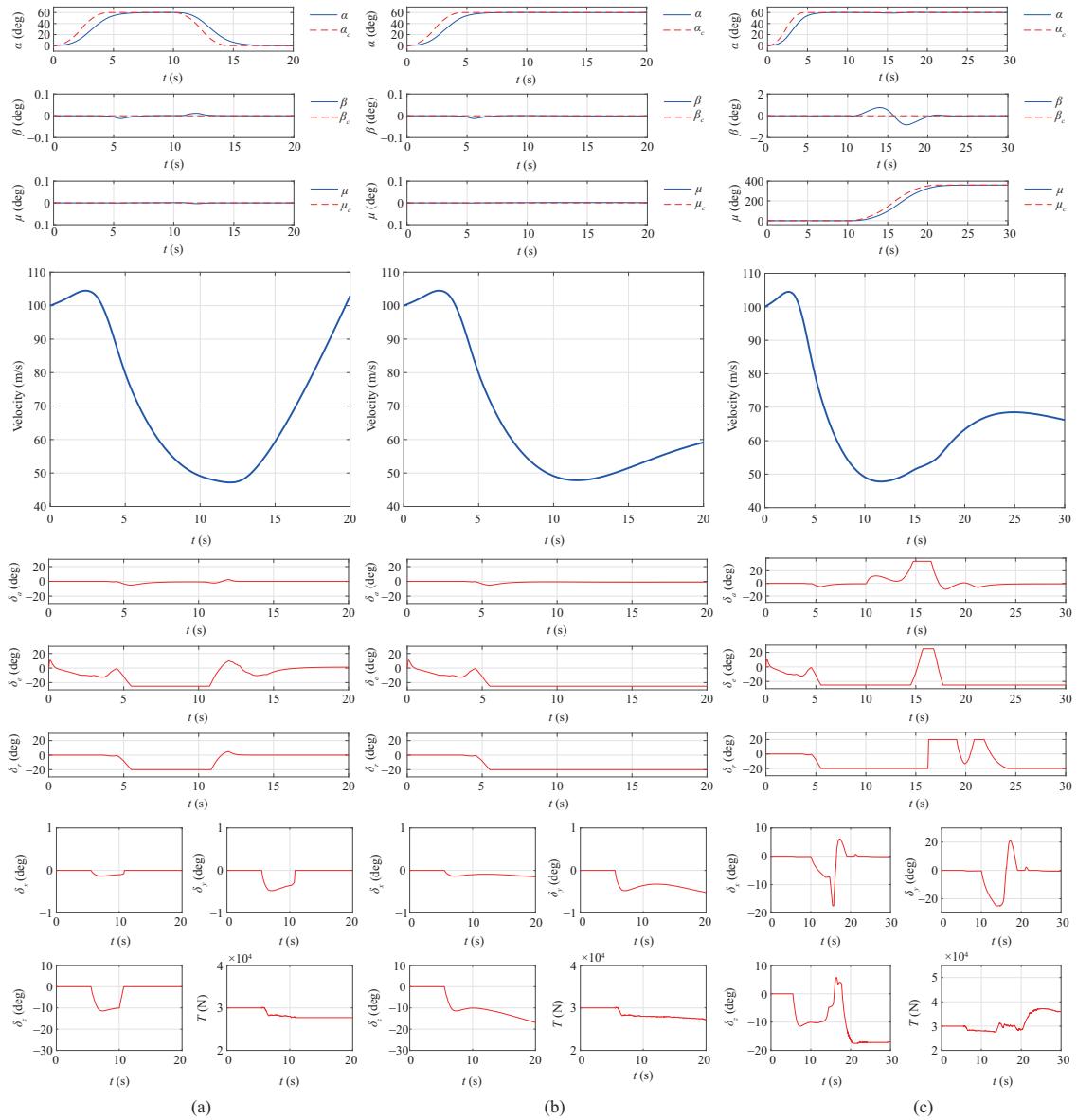


图 7 (网络版彩图) 不同实际控制指令下, 迎角、侧滑角、速度滚转角和速度响应曲线, 气动舵面偏角分配和推力矢量分配结果. (a) 眼镜蛇机动; (b) 大迎角机动; (c) 大迎角下, 绕速度矢量滚转

Figure 7 (Color online) Response curves of attack angle, sideslip angle, roll angle of velocity, and velocity, and control allocation for aero rudders and thrust vectors under different real control commands. (a) Cobra; (b) large attack angle; (c) rolling under large attack angle

## 5 总结

本文针对三自由度推力矢量飞行器的角速度跟踪问题, 采用自抗扰控制方法, 设计虚拟控制量, 并通过扩张状态观测器对飞行器的总扰动进行估计, 得到飞行器的期望控制输入, 实现了对扰动的主动补偿. 本文基于气动舵优先和误差最小的准则, 给出了控制分配对应的优化问题, 通过严格分析其解的性质, 给出了控制输入最优解具有显式表达式的条件, 简化了控制分配的求解流程; 针对控制输入最

优解无法得到显式表达式的情况,证明了最优解一定在约束边界上,从而能够设计有限步求解最优解算法。本文定量分析了闭环系统跟踪误差和估计误差的特性,且在仿真环境下验证了本文方法的有效性和鲁棒性。综上,本文提出的方法充分利用了三自由度推力矢量飞行器气动舵面和推力矢量的结构特征,合理分配了气动舵面和推力矢量资源,同时能够使推力矢量飞行器在强非线性和大范围不确定性环境中保证飞行质量,并使其具有高机动控制能力。

## 参考文献

- 1 He K F, Liu G, Mao Z J, et al. Model flight test technology for post-stall maneuver of advanced fighter. *Acta Aerodynam Sin*, 2020, 38: 9–20 [何开锋, 刘刚, 毛仲君, 等. 先进战斗机过失速机动模型飞行试验技术. 空气动力学报, 2020, 38: 9–20]
- 2 Chi J Z, Yu H Y, Zhang Z X. Research on orbit flight planning method of small thrust spacecraft. *Aer Control*, 2021, 39: 3–10 [迟进梓, 余红英, 张子雄. 一种小推力航天器变轨优化方法. 航天控制, 2021, 39: 3–10]
- 3 Saghafi F, Banazadeh A. Investigation on the flight characteristics of a conceptual fluidic thrust-vectored aerial tail-sitter. *Proc Institution Mech Engineers Part G-J Aerospace Eng*, 2007, 221: 741–755
- 4 Yu J Y, Chen J, Zhou S L, et al. Hypersonic aircraft adaptive fault-tolerant controller design. *Sci Sin Inform*, 2012, 42: 1391–1402 [于进勇, 陈洁, 周绍磊, 等. 一类高超声速飞行器自适应容错控制器设计. 中国科学: 信息科学, 2012, 42: 1391–1402]
- 5 Shtessel Y, Buffington J, Banda S. Tailless aircraft flight control using multiple time scale reconfigurable sliding modes. *IEEE Trans Contr Syst Technol*, 2002, 10: 288–296
- 6 Xiong Y, Chen M, Wu Q X, et al. Robust tracking control of variable swept-wing near space vehicle based on disturbance observers. *Sci Sin Inform*, 2019, 49: 585–598 [熊英, 陈谋, 吴庆宪, 等. 基于干扰观测器的变后掠翼近空间飞行器鲁棒跟踪控制. 中国科学: 信息科学, 2019, 49: 585–598]
- 7 Lane S H, Stengel R F. Flight control design using non-linear inverse dynamics. *Automatica*, 1988, 24: 471–483
- 8 Snell S A, Enns D F, Garrard J W L. Nonlinear inversion flight control for a supermaneuverable aircraft. *J Guid Control Dyn*, 1992, 15: 976–984
- 9 Zhang Z, Wang Y K, Mao J Q. Moving-mass control of hypersonic vehicles based on fuzzy tree inverse method. *Sci Sin Inform*, 2012, 42: 1379–1390 [张臻, 王玉坤, 毛剑琴. 基于模糊树逆方法的高超飞行器变质心控制. 中国科学: 信息科学, 2012, 42: 1379–1390]
- 10 Xue W C, Huang Y. Performance analysis of 2-DOF tracking control for a class of nonlinear uncertain systems with discontinuous disturbances. *Int J Robust Nonlinear Control*, 2017, 28: 1456–1473
- 11 Han J Q. From PID to active disturbance rejection control. *IEEE Trans Ind Electron*, 2009, 56: 900–906
- 12 Huang Y, Xue W C. Active disturbance rejection control: Methodology and theoretical analysis. *ISA Trans*, 2014, 53: 963–976
- 13 Gao Z Q. On the foundation of active disturbance rejection control. *Control Theory A*, 2013, 30: 1498–1510 [高志强. 自抗扰控制思想探究. 控制理论与应用, 2013, 30: 1498–1510]
- 14 Xue W C, Bai W Y, Yang S, et al. ADRC with adaptive extended state observer and its application to air-fuel ratio control in gasoline engines. *IEEE Trans Ind Electron*, 2015, 62: 5847–5857
- 15 Sira-Ramírez H, Linares-Flores J, García-Rodríguez C, et al. On the control of the permanent magnet synchronous motor: an active disturbance rejection control approach. *IEEE Trans Contr Syst Technol*, 2014, 22: 2056–2063
- 16 Sun L, Jin Y H, You F Q. Active disturbance rejection temperature control of open-cathode proton exchange membrane fuel cell. *Appl Energy*, 2020, 261: 114381
- 17 Chen S, Xue W C, Huang Y. Active disturbance rejection control and control allocation for thrust-vectored aircraft. *Control Theory A*, 2018, 35: 1591–1600 [陈森, 薛文超, 黄一. 推力矢量飞行器的自抗扰控制设计及控制分配. 控制理论与应用, 2018, 35: 1591–1600]
- 18 Lou Z P, Zhang K T, Wang Y, et al. Active disturbance rejection station-keeping control for solar-sail libration-point orbits. *J Guid Control Dyn*, 2016, 39: 1913–1917
- 19 Tao J, Sun Q L, Tan P L, et al. Active disturbance rejection control (ADRC)-based autonomous homing control of powered parafoils. *Nonlinear Dyn*, 2016, 86: 1461–1476

- 20 Durham W C. Constrained control allocation. *J Guid Control Dyn*, 1993, 16: 717–725
- 21 Tohidi S S, Khaki S A, Buzorgnia D. Fault tolerant control design using adaptive control allocation based on the pseudo inverse along the null space. *Int J Robust Nonlinear Control*, 2016, 26: 3541–3557
- 22 Chen Y L. Nonlinear dynamic characteristics analysis and control of aircraft at high-angle-of-attack. Dissertation for Ph.D. Degree. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007 [陈永亮. 飞机大迎角非线性动力学特性分析与控制. 博士学位论文. 南京: 南京航空航天大学, 2007]
- 23 Petersen J A M, Bodson M. Constrained quadratic programming techniques for control allocation. *IEEE Trans Contr Syst Technol*, 2006, 14: 91–98
- 24 Johansen T A, Fossen T I, Berge S P. Constrained nonlinear control allocation with singularity avoidance using sequential quadratic programming. *IEEE Trans Contr Syst Technol*, 2004, 12: 211–216
- 25 Bolender M A, Doman D B. Method for determination of nonlinear attainable moment sets. *J Guid Control Dyn*, 2004, 27: 907–914
- 26 Bolender M A, Doman D B. Nonlinear control allocation using piecewise linear functions. *J Guid Control Dyn*, 2004, 27: 1017–1027
- 27 Yoo D, Yau S S, Gao Z Q. Optimal fast tracking observer bandwidth of the linear extended state observer. *Int J Control*, 2007, 80: 102–111
- 28 Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 1984, 4: 373–395

## ADRC-based control allocation method and theory for 3-DOF thrust-vectored aircraft

Feiyu XIANG<sup>1,2</sup>, Wenchao XUE<sup>1,2\*</sup>, Sen CHEN<sup>3</sup> & Yanjun ZHANG<sup>4</sup>

1. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

3. School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China;

4. School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

\* Corresponding author. E-mail: wenchaoxue@amss.ac.cn

**Abstract** Thrust-vectored aircraft can use multiple control inputs, such as thrust and aero rudders, to change the gesture of the aircraft, so they have extreme maneuverability and are adaptive to incumbent flight environments. Furthermore, thrust-vectored aircraft have a non-affine and nonlinear control model that has complex uncertainty, which makes the control of the aircraft quite challenging. This paper focuses on the angular tracking control of three-degree-of-freedom (3-DOF) thrust-vectored aircraft. First, active disturbance rejection control is used to compensate for disturbances during flight. Second, we constrain nonlinear problems to manage control allocation by prioritizing the aero rudders and minimizing error. Next, some conditions are imposed to determine whether these problems have explicit formulas. If these conditions are not met, the optimal solution lies on the constraint boundary and can be solved in finite steps. Finally, the closed-loop system's tracking error and estimation error are quantitatively analyzed based on the results of control allocation. In typical simulation environments, the algorithm is effective and robust, and it achieves the angular tracking goal with extreme nonlinearity and large-scale uncertainty.

**Keywords** thrust-vectored aircraft, active disturbance rejection control, extended state observer, control allocation, degree of freedom