



# 基于低管秩张量分解的互质阵列自适应波束成形算法

程耘, 刘天鹏\*, 师俊朋, 苏晓龙, 刘振

国防科技大学电子科学学院, 长沙 410073

\* 通信作者. E-mail: everliutianpeng@sina.cn

收稿日期: 2022-01-10; 修回日期: 2022-03-15; 接受日期: 2022-04-29; 网络出版日期: 2023-02-02

国家自然科学基金创新研究群体 (批准号: 61921001)、国家自然科学基金 (批准号: 61801488, 62022091, 62071476)、湖南省科技创新计划 (批准号: 2020RC2041, 2021RC3079, 2021RC3080)、中国博士后科学基金 (批准号: 2020M683728, 2021T140788) 和国防科技大学学校科研计划 (批准号: ZK20-33) 资助项目

**摘要** 互质阵列因其大阵列孔径和高自由度特性在波束成形领域受到广泛关注. 为了充分利用该特性, 近年来学者们提出了基于空洞填充的算法, 有效提高了互质阵列波束成形的性能. 然而, 这些算法存在计算量大、噪声鲁棒性弱等缺点, 难以适应复杂多变的实际环境. 为此, 本文利用张量的多维结构在参数估计上的性能优势, 提出了一种基于低管秩张量分解的互质阵列自适应波束成形算法. 首先将互质阵列的多采样虚拟信号矩阵重排为张量形式, 利用其低管秩特性补充缺失的互相关信息; 然后从补充后的张量数据中提取信号参数, 并与目标先验进行匹配, 最终得到波束成形权矢量. 本算法分别利用 ADMM 和 Tucker 分解提高了张量补充和分解的运算效率; 所设计的目标匹配方案也有效控制了算法误差. 仿真结果展示了本算法在性能和计算复杂度相对于现有方法的优势, 尤其是在低信噪比和少采样数的情况下.

**关键词** 自适应波束成形, 互质阵列, 张量分解, 自由度, 参数估计

## 1 引言

自适应波束成形 (adaptive beamforming, ABF) 是阵列信号处理领域中的一项核心技术, 具有较强保持目标信号, 抑制干扰信号和背景噪声的能力, 目前被广泛应用于雷达、无线通信及射电天文等领域<sup>[1]</sup>. 标准 Capon 波束成形器 (standard Capon beamformer, SCB)<sup>[2]</sup> 是最经典的波束成形器之一, 在训练数据中不存在目标信号且目标方向精确已知的条件下具有最佳干扰抑制能力. 然而, 上述条件在现实场景中是难以达到的, 使得 SCB 在实际应用中的鲁棒性较差. 为了解决该问题, 在过去的几十年中多种鲁棒波束成形器陆续被提出, 主要可以分为: 对角加载类<sup>[3,4]</sup>、子空间类<sup>[5~7]</sup>、贝叶斯类<sup>[8~10]</sup> 和

**引用格式:** 程耘, 刘天鹏, 师俊朋, 等. 基于低管秩张量分解的互质阵列自适应波束成形算法. 中国科学: 信息科学, 2023, 53: 402–416, doi: 10.1360/SSI-2022-0013  
Cheng Y, Liu T P, Shi J P, et al. Coprime array-adaptive beamforming based on low-tubal-rank tensor decomposition (in Chinese). Sci Sin Inform, 2023, 53: 402–416, doi: 10.1360/SSI-2022-0013

重构类<sup>[11~13]</sup>. 然而, 以上波束成形器主要是针对传统均匀线性阵列 (uniform linear array, ULA) 建模设计的. 一般来说, 增大阵列孔径可以使波束获得更高的空间分辨率和更强的抗干扰能力. 传统 ULA 的阵列孔径与阵元数量成正比, 增大其孔径需要更多的物理阵元, 意味着硬件成本和计算复杂度的增加<sup>[1]</sup>. 为了解决该问题, 若干非均匀线性阵列 (non-uniform linear array, NLA) 在过去几十年中陆续被提出. 与传统 ULA 相比, NLA 能够以相同数量的物理阵元获得更大的阵列孔径和远多于物理阵元数的自由度. 嵌套阵列 (nested array, NA)<sup>[14]</sup> 和互质阵列 (co-prime array, CPA)<sup>[15]</sup> 是近十年来提出的两种系统化 NLA<sup>[1]</sup>. 与相同阵元数下的 NA 相比, CPA 拥有更大的阵元间距, 因此其不仅可以获得更大的阵列孔径, 还可以有效降低阵元间的互耦效应和接收噪声的相干性<sup>[16]</sup>. 因此, CPA 在阵列信号处理领域, 尤其是在波达方向 (direction of arrival, DOA) 估计领域受到了广泛关注<sup>[16~19]</sup>. 相比之下, 基于 CPA 的 ABF (CPA-ABF) 研究较少. 因此, 本文主要关注 CPA 的鲁棒自适应波束成形器设计.

上述波束成形器直接利用物理阵元的接收数据, 理论上也适用于其他阵列结构, 本文将其对应的算法统称为通用类算法. 然而, 该类算法在 CPA 的直接应用忽视了 CPA 的大自由度特性, 部分算法的前提假设也对 CPA 不成立, 往往会导致波束成形器的性能下降. 因此, 需要设计专门针对 CPA 的 ABF 算法, 称之为特定类算法. 值得注意的是, CPA 的大自由度来源于其虚拟阵列, 但该虚拟阵列是非连续的, 存在“孔洞”. 虽然近年来学者提出了若干改进 CPA<sup>[20,21]</sup> 以减少孔洞, 但仍无法完全避免孔洞的存在. 根据对孔洞的处理方式, 本文将特定类算法进一步划分为非填充类算法和填充类算法. 非填充类算法以利用物理阵元或者连续虚拟阵元数据的方式规避了孔洞. 这类算法的计算量较小, 但是忽略了大量非连续虚拟阵元的信息, 造成精度和最大可辨识信源数的下降, 在阵元数较多时尤为明显<sup>[22~25]</sup>.

填充类算法通过对孔洞进行填补实现对全虚拟阵元的利用, 相比于非填充算法在性能上有明显的提高. 文献 [26] 利用核范数最小化对多采样虚拟信号矩阵进行填充, 然后利用多重信号分类 (multiple signal classification, MUSIC) 方法和最小二乘 (least square, LS) 方法分别估计各信号源 DOA 和功率, 进而求得波束成形权矢量. 然而, 该方法利用 cvx 工具箱<sup>[27]</sup> 求解核范数优化问题, 具有较高的运算量; 使用 MUSIC 也导致该算法的噪声鲁棒性较差. 文献 [28] 将虚拟信号进行原子范数建模, 通过交替迭代的方式实现对目标角度和功率的估计. 然而, 该算法利用一阶近似迭代修正目标角度估计, 具有较大的运算量和较小的角度误差容限. 归纳起来, 现有的填充类算法存在计算量大、噪声鲁棒性较弱, 以及角度误差容限较小的缺点, 难以适用于复杂多变的实际环境.

本文针对现有填充类算法存在的问题, 提出了一种基于低管秩张量分解的 CPA-ABF 算法. 文献 [17] 指出张量的多维结构可以提高信号的参数估计性能, 特别是在低信噪、少采样的条件下. 利用这一优势, 本文将 CPA 的多采样虚拟信号矩阵重排为张量, 利用该张量从原矩阵继承而来的低管秩特性, 补全缺失的互相关信息; 接着对补全后的张量数据进行分解, 从所得的因子矩阵中提取出各信号源参数, 并与目标进行匹配, 进而计算 ABF 权矢量. 其中, 张量填充和张量分解分别利用交替方向乘法 (alternating direction multiplier method, ADMM)<sup>[29]</sup> 和 Tucker 分解<sup>[30]</sup> 提高运算效率; 本文所设计的目标参数匹配方案也有效保证了干扰信号功率远大于目标信号时的算法性能. 最后, 通过仿真实验对所提算法进行了验证, 并与若干现有算法进行比较. 实验结果证明了本方法的有效性以及相对于现有方法的优势.

## 2 预备知识

张量是数据的多维结构表示, 是向量和矩阵的高阶拓展, 描述了多变量之间线性关系. 在正式介绍

数学模型和所提算法之前, 本节简要介绍了相关的张量定义. 对于张量  $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ ,  $\mathbb{C}$  表示复数集合,  $t_{ijk} = \mathcal{T}(i, j, k)$  表示张量位于  $(i, j, k)$  的元素,  $\mathbf{t}_{ij} = \mathcal{T}(i, j, :)$  表示位于  $(i, j)$  的管纤维,  $\bar{\mathcal{T}} = \text{fft}(\mathcal{T}, [], 3)$  表示  $\mathcal{T}$  沿着第 3 个维度的离散傅里叶变换 (discrete Fourier transformation, DFT), 相应的逆过程为  $\mathcal{T} = \text{ifft}(\bar{\mathcal{T}}, [], 3)$ . 下面简述本文涉及到的张量定义.

**定义1** (三阶张量纵向展开<sup>[30]</sup>) 纵向展开是一种张量矩阵化方法, 用切片的方式可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{T}_H = \left[ \mathcal{T}(1, :, :)^T \ \mathcal{T}(2, :, :)^T \ \cdots \ \mathcal{T}(I, :, :)^T \right]^T \in \mathbb{C}^{IJ \times K}, \\ \mathbf{T}_L = \left[ \mathcal{T}(:, 1, :)^T \ \mathcal{T}(:, 2, :)^T \ \cdots \ \mathcal{T}(:, J, :)^T \right]^T \in \mathbb{C}^{JK \times I}, \\ \mathbf{T}_F = \left[ \mathcal{T}(:, :, 1)^T \ \mathcal{T}(:, :, 2)^T \ \cdots \ \mathcal{T}(:, :, K)^T \right]^T \in \mathbb{C}^{KI \times J}, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $(\cdot)^T$  表示转置,  $\mathcal{T}(i, :, :)$ ,  $\mathcal{T}(:, j, :)$  和  $\mathcal{T}(:, :, k)$  分别表示  $\mathcal{T}$  的第  $i$  个水平切片, 第  $j$  个侧向切片和第  $k$  个正向切片. 由于本文主要涉及由正向切片和  $\mathbf{T}_F$ , 令  $\mathbf{T}_k = \mathcal{T}(:, :, k)$ , 并定义展开操作  $\text{unfold}(\cdot)$ , 使得  $\mathbf{T}_F = \text{unfold}(\mathcal{T}) = [\mathbf{T}_1; \mathbf{T}_2; \dots; \mathbf{T}_K]$ ,  $\text{fold}(\cdot)$  则是其相对应的逆算子.

**定义2** (T 积<sup>[31]</sup>)  $\mathcal{T}_1 \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$  和  $\mathcal{T}_2 \in \mathbb{C}^{J \times L \times K}$  的 T 积定义为

$$\mathcal{T}_1 * \mathcal{T}_2 \triangleq \text{fold}(\text{bcirc}(\mathcal{T}_1) \cdot \text{unfold}(\mathcal{T}_2)). \quad (2)$$

其中,  $\text{bcirc}(\mathcal{T}) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_K & \cdots & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_1 & \cdots & \mathbf{T}_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{T}_K & \mathbf{T}_{K-1} & \cdots & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix}$  表示  $\mathcal{T}$  的块循环矩阵.

**定义3** (正交张量<sup>[31]</sup>) 在 T 积的基础上可以定义正交张量: 若张量  $\mathcal{Q} \in \mathbb{C}^{I \times I \times J}$  满足  $\mathcal{Q}^H * \mathcal{Q} = \mathcal{Q} * \mathcal{Q}^H = \mathcal{I}$ , 则称  $\mathcal{Q}$  是正交张量. 其中,  $\mathcal{Q}^H$  表示  $\mathcal{Q}$  的共轭转置, 通过共轭转置  $\mathcal{Q}$  的每一个正向切片, 再将第 2 个与最后一个正向切片交换位置得到.  $\mathcal{I} \in \mathbb{C}^{I \times I \times K}$  表示单位张量, 定义为第 1 个正向切片为单位矩阵, 其余正向切片均为零矩阵的三阶张量.

**定义4** (T-SVD<sup>[32]</sup>) 对于任意张量  $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ , 其 T-SVD 定义为  $\mathcal{T} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^H$ . 其中,  $\mathcal{U} \in \mathbb{C}^{I \times I \times K}$  和  $\mathcal{V} \in \mathbb{C}^{J \times J \times K}$  是正交张量,  $\mathcal{S} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$  是  $F$  对角张量, 定义为每个正向切片都是对角矩阵的三阶张量.

**定义5** (张量管秩<sup>[32]</sup>) 对于张量  $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{I \times J \times K}$ , 若其 T-SVD 为  $\mathcal{T} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^H$ , 则  $\mathcal{T}$  的管秩定义为  $\mathcal{S}$  的非零管纤维数, 表示为  $\text{rank}_t(\mathcal{A})$ , 等于  $\mathcal{S}$  的第 1 个正向切片的非零奇异值数, 即

$$\text{rank}_t(\mathcal{A}) = \#\{i, \mathcal{S}(i, i, :) \neq 0\} = \#\{i, \mathcal{S}(i, i, 1) \neq 0\}. \quad (3)$$

**定义6** (张量核范数<sup>[32]</sup>) 类似于矩阵核范数的定义, 由 T-SVD 引出的张量核范数定义为

$$\|\mathcal{T}\|_* = \sum_i^r \mathcal{S}(i, i, 1), \quad (4)$$

其中,  $r = \text{rank}_t(\mathcal{T})$ .

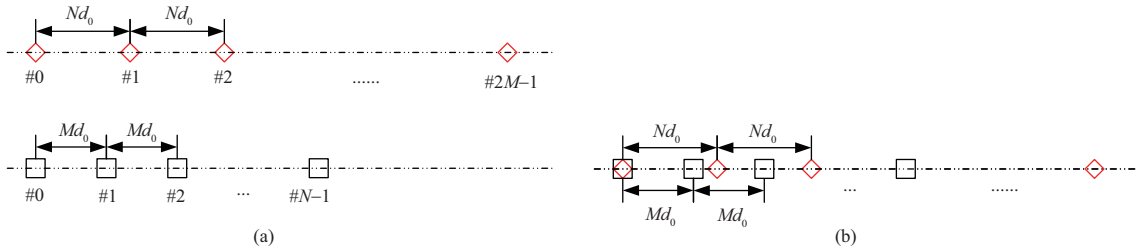


图 1 互质阵列结构示意图

Figure 1 The geometry configuration of a coprime array. (a) Separated form; (b) aligned form

### 3 信号模型与问题描述

#### 3.1 实阵列信号模型与波束成形

本文考虑文献 [15] 所提出的互质阵列结构, 如图 1 所示. 该阵列包括两个稀疏 ULA: 第 1 个 ULA 由  $2M$  个阵元组成, 阵元间距为  $Nd_0$ ; 第 2 个 ULA 由  $N$  个阵元组成, 阵元间距为  $Md_0$ . 其中,  $M, N$  是两个互质的正整数, 且  $M < N$ ;  $d_0$  表示单位阵元间距, 通常等于半波长. 由于两个子阵共享第 1 个阵元, 该 CPA 的总阵元数为  $2M + N - 1$ , 各阵元位置为

$$\mathbb{Q} = \{q_i d_0, i = 1, 2, \dots, 2M + N - 1\}, \quad q_i \in \{Mn | 0 \leq n \leq N - 1\} \cup \{Nm | 0 \leq m \leq 2M - 1\}. \quad (5)$$

假设  $K$  个远场窄带不相关信号分别以角度  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{K-1}$  入射到互质阵列. 其中,  $\theta_0$  表示目标信号的入射方向, 而  $\theta_k, k = 1, 2, \dots, K - 1$ , 表示  $K - 1$  个不同干扰信号的入射方向. 那么, 该阵列在第  $l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ) 个采样时刻接收到的实阵列信号可以表示为

$$\mathbf{x}(l) = \mathbf{x}_0(l) + \mathbf{x}_i(l) + \mathbf{n}(l) = \mathbf{a}(\theta_0) s_0(l) + \sum_{k=1}^{K-1} \mathbf{a}(\theta_k) s_k(l) + \mathbf{n}(l), \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{-j\frac{2\pi p_2 d_0}{\lambda} \sin(\theta)}, \dots, e^{-j\frac{2\pi p_2 M + N - 1 d_0}{\lambda} \sin(\theta)}]^T$  表示阵列在  $\theta$  方向上的导向矢量,  $j = \sqrt{-1}$ ;  $s_0(l)$  和  $s_k(l), k = 1, 2, \dots, K - 1$ , 分别是目标和干扰的信号波形;  $\mathbf{n}(l) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2 \mathbf{I})$  表示加性白噪声矢量. 除此之外, 本文对接收信号还做出了以下假设:

- (1) 所有信号的入射方向各不相同;
- (2) 干扰源数量已知, 可通过 Akaike 信息准则 (Akaike information criterion, AIC) 或者最小描述长度 (minimum description length, MDL) 探测准则实现信源数估计 [33];
- (3) 目标信号功率不会远远大于干扰信号, 该情况下干扰信号对目标信号的影响较小, 波束成形的意义较小.

自适应波束成形旨在对接收信号按照某种设计准则, 自适应地计算加权向量  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{2M+N-1}$ , 使得该波束成形器的输出为  $\mathbf{y}(l) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(l)$ . 目前, 最常用的准则是最大化输出信干噪比 (signal-to-interference-plus-noise ratio, SINR), 定义为  $\text{SINR} = \frac{\sigma_0^2 |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{i+n} \mathbf{w}}$ . 其中,  $\sigma_0^2$  表示目标信号的功率,  $\mathbf{R}_{i+n} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}_i(l) \mathbf{x}_i^H(l) + \mathbf{n}(l) \mathbf{n}^H(l)\} = \sum_{k=1}^{K-1} \sigma_k^2 \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) + \sigma_n^2 \mathbf{I}$  表示干扰加噪声协方差矩阵 (interference-plus-noise covariance matrix, INCM). 最大化 SINR 可解得权矢量如下:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{R}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}. \quad (7)$$

以上即 Capon 波束成形器, 也称最小方差无失真响应 (minimum variance distortionless response, MVDR) 波束成形器.

然而,  $\mathbf{R}_{i+n}$  在实际中无法直接计算. 一个常规做法是利用采样协方差矩阵 (sample covariance matrix, SCM)  $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{x}(l)\mathbf{x}^H(l)$  取代式 (7) 中的  $\mathbf{R}_{i+n}$ , 得到的权重  $\mathbf{w}_{\text{SMI}}$  被称作采样矩阵求逆 (sample matrix inversion, SMI) 波束成形器. 由于信号采样数  $L$  是有限的,  $\hat{\mathbf{R}}$  含有的信号分量在 SMI 波束成形器中会被当作干扰和噪声而被抑制, 即所谓的“自相消”现象, 该现象会随着目标信号信噪比的增大而越发显著. 因此, 波束成形器的性能提升需要对  $\mathbf{R}_{i+n}$  实现更精确的估计.

### 3.2 虚拟阵列信号模型

互质阵列的自由度是由实阵列信号的二阶相关统计量构造的虚拟阵列信号实现的. 具体地, 矢量化采样协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}$  可以得到虚拟差阵列信号

$$\mathbf{r} = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}) = \sigma_0^2 \tilde{\mathbf{a}}(\theta_0) + \sum_{k=1}^{K-1} \sigma_k^2 \tilde{\mathbf{a}}(\theta_k) + \sigma_n^2 \mathbf{1}, \quad (8)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta) = \mathbf{a}^*(\theta) \otimes \mathbf{a}(\theta)$ ,  $\otimes$  表示 Kronecker 积,  $\sigma_k^2$  表示第  $k$  个干扰信号的功率,  $\mathbf{1} = \text{vec}(\mathbf{I})$ . 与式 (6) 相比, 式 (8) 可以视作虚拟差阵列接收到的单采样信号, 相应的虚拟阵元分布为

$$\mathbb{Q}_d = \{\pm(Mn - Nm)d_0 \mid 0 \leq m \leq 2M - 1, 0 \leq n \leq N - 1\}. \quad (9)$$

显然,  $\mathbb{Q}_d$  存在重复的元素. 除去其中的重复元素, 再按照序号  $\pm(Mn - Nm)$  从小到大排序得到  $\mathbb{Q}_d$  的一个真子集, 用  $\mathbb{Q}_s$  表示. 相应地,  $\mathbf{r}$  也存在若干元素对应同一虚拟阵元的冗余情况, 将  $\mathbf{r}$  中对应于同一虚拟阵元的元素的平均值替代这些元素, 再按照对应的虚拟阵元序号排序得到新的虚拟信号矢量  $\mathbf{r}_s$ . 然而,  $\mathbb{Q}_s$  中虚拟阵元是不连续的, 存在“孔洞”. 根据文献 [28],  $\mathbb{Q}_s$  总共包含  $3MN + M - N$  个不同的虚拟阵元, 其中最大连续虚拟阵元数仅为  $2MN + 2M - 1$ . 非填充类算法只利用了连续阵元, 意味着其余  $(M - 1)(N - 1)$  个虚拟阵元携带的信息都被舍弃了. 这样的信息损失随着  $M$  和  $N$  的增大而越发严重, 导致参数估计的精度和波束成形器的性能下降.

为了解决上述问题, 虚拟阵元内插方法被提出 [26, 28]. 假定  $\mathbb{Q}_s$  所对应的非均匀阵列中的孔洞被额外的虚拟阵元所填充, 这样就构造了一个连续虚拟阵列, 其几何结构为

$$\mathbb{Q}_c = \{qd_0 \mid -((2M - 1)N) \leq q \leq (2M - 1)N\}. \quad (10)$$

这些额外的虚拟阵元原本是不存在的, 因此没有接收信号, 故将其接收信号初始化为 0. 那么,  $\mathbb{Q}_c$  所对应的虚拟信号可以初始化为

$$\langle \mathbf{r}_c \rangle_q = \begin{cases} \langle \mathbf{r}_s \rangle_q, & qd_0 \in \mathbb{Q}_s, \\ 0, & qd_0 \in \mathbb{Q}_c - \mathbb{Q}_s, \end{cases} \quad (11)$$

其中,  $\langle \mathbf{r}_c \rangle_q$  表示位于  $qd_0$  的虚拟阵元的虚拟信号. 显然,  $\mathbf{r}_c$  是单采样信号且  $\langle \mathbf{r}_c \rangle_q = \langle \mathbf{r}_c \rangle_{-q}^*$ , 可将其重排为一个 Hermitian Toeplitz 矩阵以解相关, 并称之为多采样虚拟信号矩阵:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{r}_c \rangle_0 & \langle \mathbf{r}_c \rangle_{-1} & \cdots & \langle \mathbf{r}_c \rangle_{-V+1} \\ \langle \mathbf{r}_c \rangle_1 & \langle \mathbf{r}_c \rangle_0 & \cdots & \langle \mathbf{r}_c \rangle_{-V+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{r}_c \rangle_{V-1} & \langle \mathbf{r}_c \rangle_{V-2} & \cdots & \langle \mathbf{r}_c \rangle_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{V \times V}, \quad (12)$$

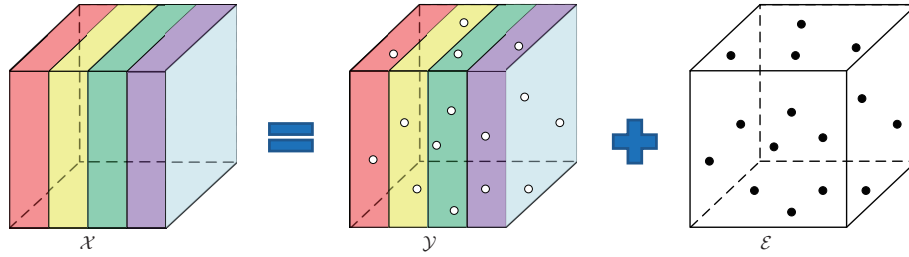


图 2 张量填充示意图

Figure 2 Schematic diagram of tensor completion

其中,  $V = \frac{|\mathbb{Q}_c|+1}{2} = (2M-1)N+1$ ,  $|\mathbb{Q}_c|$  表示  $\mathbb{Q}_c$  的势. 显然,  $\mathbf{Y}$  中存在信号初始化所导致的零元素, 因此需要恢复这些缺失的互相关信息.

#### 4 互质阵列自适应波束成形算法

针对现有填充类算法在计算量、抗噪性能, 以及目标角度误差容忍这 3 个方面的不足, 本节将多采样虚拟信号矩阵重排成三阶张量形式, 利用张量在结构和运算上的特性, 提出一种新的填充类互质阵列波束成形器, 使得其性能在上述 3 个方面相较于现有填充类算法得到改善.

##### 4.1 张量构造与填充

首先, 利用文献 [6] 的方法估计噪声信号的功率  $\hat{\sigma}_n^2$ , 并令  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \hat{\sigma}_n^2 \mathbf{I}$  表示除去大部分噪声分量的多采样虚拟信号. 由于目标和干扰的空间分布具有稀疏性, 矩阵  $\hat{\mathbf{Y}}$  也相应地具有低秩特性.

由矩阵构造三阶张量的主要方式是在该矩阵中取若干相同形状的子矩阵作为张量的正向切片. 本文分别取  $\hat{\mathbf{Y}}$  位于左上、左下、右上和右下 4 个顶点, 大小为  $(V-1) \times (V-1)$  的子阵作为 4 个正向切片构造张量  $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{\bar{V} \times \bar{V} \times 4}$ , 即

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{J}_{-V} \hat{\mathbf{Y}} \mathbf{J}_{-V}^H, \mathbf{Y}_2 = \mathbf{J}_{-1} \hat{\mathbf{Y}} \mathbf{J}_{-V}^H, \mathbf{Y}_3 = \mathbf{J}_{-V} \hat{\mathbf{Y}} \mathbf{J}_{-1}^H, \mathbf{Y}_4 = \mathbf{J}_{-1} \hat{\mathbf{Y}} \mathbf{J}_{-1}^H, \quad (13)$$

其中,  $\bar{V} = V - 1$ ,  $\mathbf{J}_{-V} = [\mathbf{I}_{\bar{V}} \mathbf{0}_{\bar{V} \times 1}]$ , 以及  $\mathbf{J}_{-1} = [\mathbf{0}_{\bar{V} \times 1} \mathbf{I}_{\bar{V}}]$ .

由这 4 个子阵构造的  $\mathcal{Y}$  不仅继承了  $\hat{\mathbf{Y}}$  中缺失的互相关信息 (零元素), 也在纵深方向上继承了其低秩特性, 即  $\mathcal{Y}$  具有低管秩特性. 本小节利用  $\mathcal{Y}$  的此特性来对其进行填充, 以恢复其中缺失的互相关信息. 该填充过程可以用图 2 直观表示, 本质上就是求解如下约束最小化问题:

$$\min_{\mathcal{X}, \mathcal{E}} \|\mathcal{X}\|_* \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} = \mathcal{Y} + \mathcal{E}, \pi_{\Omega^c}(\mathcal{E}) = 0, \quad (14)$$

其中,  $\mathcal{X}$  是填充后的信号张量,  $\mathcal{E}$  表示填充张量,  $\pi_{\Omega^c}(\mathcal{E})$  表示  $\mathcal{E}$  在位置索引  $\Omega^c$  的投影, 其中  $\Omega$  代表  $\mathcal{Y}$  中零元素的位置索引,  $\Omega^c$  则是在对应张量下的补集.

根据定义 6 易知, 式 (14) 是关于  $\mathcal{X}$  和  $\mathcal{E}$  的线性约束凸优化问题, 可以利用标准 ADMM 算法高效求解. 该算法被广泛用于求解具有可分离目标函数的线性约束凸问题, 其收敛性和最优性在文献 [29] 中得到了详细的阐述和证明.

具体地, 式 (14) 的部分 (忽略常数项) 增广拉格朗日函数如下:

$$L(\mathcal{X}, \mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mu) = \|\mathcal{X}\|_* + \langle \mathcal{Z}, \mathcal{Y} + \mathcal{E} - \mathcal{X} \rangle + \frac{\mu}{2} \|\mathcal{Y} + \mathcal{E} - \mathcal{X}\|_F^2, \quad (15)$$

其中,  $\mathcal{Z}$  是拉格朗日乘子,  $\mu > 0$  是惩罚系数. 式 (15) 可以分解为如下 4 个子问题:

(1) 更新  $\mathcal{X}^{(t+1)}$ :

$$\mathcal{X}^{(t+1)} = \arg \min_{\mathcal{X}} \|\mathcal{X}\|_* + \frac{\mu^{(t)}}{2} \left\| \mathcal{X} - \mathcal{W}^{(t)} \right\|_{\text{F}}^2, \text{ s.t. } \mathcal{W}^{(t)} = \mathcal{Y} + \mathcal{E}^{(t)} + \mathcal{Z}^{(t)}/\mu^{(t)}. \quad (16)$$

根据文献 [32], 上述最小化问题等价于

$$\mathcal{X}^{(t+1)} = \arg \min_{\mathcal{X}} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \left( \frac{1}{\mu^{(t)}} \|\bar{\mathbf{X}}_i\|_* + \frac{1}{2} \left\| \bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{W}}_i^{(t)} \right\|_{\text{F}}^2 \right), \quad (17)$$

其中,  $\bar{\mathbf{X}}_i$  和  $\bar{\mathbf{W}}_i$  分别表示  $\bar{\mathcal{X}}$  和  $\bar{\mathcal{W}}$  的第  $i$  个正向切片 ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $\bar{\mathcal{X}} = \text{fft}(\mathcal{X}, [], 3)$  和  $\bar{\mathcal{W}} = \text{fft}(\mathcal{W}, [], 3)$ . 注意到,  $\bar{\mathbf{X}}_i$  可以通过奇异值门限 (singular value thresholding, SVT) 方法 [34] 独立求解, 即

$$\bar{\mathbf{X}}_i^{(t+1)} = \bar{\mathbf{U}}_i^{(t)} \left( \bar{\Sigma}_i^{(t)} - \frac{1}{\mu^{(t)}} \mathbf{I} \right)_+ \bar{\mathbf{V}}_i^{(t)\text{H}}, \quad (18)$$

其中,  $[(\mathbf{Z})_+]_{ij} = \max([\mathbf{Z}]_{ij}, 0)$ ,  $\bar{\mathbf{W}}_i^{(t)} = \bar{\mathbf{U}}_i^{(t)} \bar{\Sigma}_i^{(t)} \bar{\mathbf{V}}_i^{(t)\text{H}}$  表示对  $\bar{\mathbf{W}}_i^{(t)}$  的奇异值分解. 最终由  $\bar{\mathbf{X}}_i^{(t+1)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 可以得到  $\bar{\mathcal{X}}^{(t+1)}$ , 进而求得  $\mathcal{X}^{(t+1)} = \text{ifft}(\bar{\mathcal{X}}^{(t+1)}, [], 3)$ .

(2) 更新  $\mathcal{E}^{(t+1)}$ :  $\mathcal{E}^{(t+1)} = \pi_{\Omega}(\mathcal{X}^{(t+1)} - \mathcal{Y} - \mathcal{Z}^{(t)}/\mu^{(t)});$

(3) 更新  $\mathcal{Z}^{(t+1)}$ :  $\mathcal{Z}^{(t+1)} = \mathcal{Z}^{(t)} + \mu^{(t)}(\mathcal{Y} + \mathcal{E}^{(t+1)} - \mathcal{X}^{(t+1)});$

(4) 更新  $\mu^{t+1}$ : 采用回退法,  $\mu^{(t+1)} = \min(\rho\mu^{(t)}, \mu_{\max})$ ,  $\rho$  略大于 1;

迭代上述更新过程, 直至收敛.

## 4.2 张量快速分解算法

对填充后的张量数据  $\mathcal{X}$  进行 CPD (parallel factor decomposition) 分解, 其核心是迭代求解相应的 3 个因子矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{\bar{V} \times K}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{\bar{V} \times K}$ , 以及  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{4 \times K}$ . 每一步迭代按照固定其中两个因子矩阵不变, 求解余下因子矩阵的方式, 可分解为依次求解的 3 个最小二乘问题:

$$\min_{\mathbf{A}} \left\| \mathbf{X}_{\text{L}} - (\mathbf{C} \odot \mathbf{B}) \mathbf{A}^{\text{T}} \right\|_{\text{F}}^2, \min_{\mathbf{B}} \left\| \mathbf{X}_{\text{F}} - (\mathbf{C} \odot \mathbf{A}) \mathbf{B}^{\text{T}} \right\|_{\text{F}}^2, \min_{\mathbf{C}} \left\| \mathbf{X}_{\text{H}} - (\mathbf{B} \odot \mathbf{A}) \mathbf{C}^{\text{T}} \right\|_{\text{F}}^2, \quad (19)$$

其中,  $\mathbf{X}_{\text{L}}$ ,  $\mathbf{X}_{\text{F}}$  和  $\mathbf{X}_{\text{H}}$  分别是  $\mathcal{X}$  的侧向切片、正向切片和水平切片.

然而, CPD 算法对因子矩阵的初始值较敏感, 不当的初始值有可能使得算法需要经过漫长迭代才能收敛, 甚至不能收敛 [30]. 一种简单做法是随机生成若干组因子矩阵的初始值, 经过数轮迭代, 选取迭代误差下降最快的那一组继续迭代, 直至收敛. 然而, 当数据规模较大或者初始化组数较多 (更有可能找到合适初始值) 时, 搜索合适初始值的过程将会显著增加计算复杂度. 为了缓解这个问题, 受文献 [35] 启发, 本文首先利用 Tucker 分解对  $\mathcal{X}$  进行压缩:

$$\mathcal{X} = \mathcal{G} \times_1 \mathbf{U} \times_2 \mathbf{V} \times_3 \mathbf{W}, \quad (20)$$

其中,  $\times_n$ ,  $n = 1, 2, 3$  表示张量  $n$ -模式积,  $\mathcal{G} \in \mathbb{C}^{F_1 \times F_1 \times F_2}$  是  $\mathcal{X}$  对应的核张量,  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{\bar{V} \times F_1}$ ,  $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{4 \times F_2}$  均为半正交矩阵,  $F_1 \geq K$ ,  $F_2 = \min\{F_1, 4\}$ . 对核张量  $\mathcal{G}$  进行 CPD 分解, 按照上述流程选择因子矩阵初始值, 并完成迭代, 得到  $\mathcal{G}$  的 3 个因子矩阵  $\mathbf{G}_1$ ,  $\mathbf{G}_2$  和  $\mathbf{G}_3$ . 通常  $F_1$  远小于  $\bar{V}$ , 因此对核张量  $\mathcal{G}$  搜索初始值的计算量将会远小于直接对  $\mathcal{X}$  进行搜索. 再根据 CPD 分解和 Tucker 分解的转换关系, 可以得到  $\mathcal{X}$  对应的 3 个因子矩阵:

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{U} \mathbf{G}_1, \underline{\mathbf{B}} = \mathbf{V} \mathbf{G}_2, \underline{\mathbf{C}} = \mathbf{W} \mathbf{G}_3. \quad (21)$$

以  $\underline{\mathbf{A}}$ ,  $\underline{\mathbf{B}}$  和  $\underline{\mathbf{C}}$  作为初始值对  $\mathcal{X}$  进行 CPD 分解, 得到  $\underline{\mathbf{A}}$ ,  $\underline{\mathbf{B}}$  和  $\underline{\mathbf{C}}$  作为  $\mathcal{X}$  的 CPD 分解结果.

#### 4.3 信号参数估计

令  $\hat{\mathbf{Y}}$  表示  $\hat{\mathbf{Y}}$  进行填充后的结果, 根据文献 [28],  $\hat{\mathbf{Y}}$  可以表示为

$$\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{A}}^{\text{H}}, \quad (22)$$

其中,  $\hat{\mathbf{A}} = [\hat{\mathbf{a}}(\theta_0), \hat{\mathbf{a}}(\theta_1), \dots, \hat{\mathbf{a}}(\theta_{K-1})] \in \mathbb{C}^{V \times K}$ ,  $\hat{\mathbf{a}}(\theta)$  表示  $\mathbb{Q}_u = \{qd_0 | 0 \leq q \leq V-1\}$  确定的均匀线阵在  $\theta$  方向上的导向矢量;  $\hat{\mathbf{P}} = \mathcal{D}([\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{K-1}^2]) \in \mathbb{R}^{K \times K}$  携带信号的功率信息,  $\mathcal{D}(\cdot)$  表示将矢量转化为相应对角矩阵. 根据因子矩阵和各正向切片的转换关系, 结合式 (13) 和 (22), 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \underline{\mathbf{A}}\mathcal{D}(\underline{\mathbf{C}}(1,:))\underline{\mathbf{B}}^{\text{T}} = \hat{\mathbf{A}}_{-V}\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{A}}_{-V}^{\text{H}}, & \mathbf{X}_2 &= \underline{\mathbf{A}}\mathcal{D}(\underline{\mathbf{C}}(2,:))\underline{\mathbf{B}}^{\text{T}} = \hat{\mathbf{A}}_{-V}\Phi\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{A}}_{-V}^{\text{H}}, \\ \mathbf{X}_3 &= \underline{\mathbf{A}}\mathcal{D}(\underline{\mathbf{C}}(3,:))\underline{\mathbf{B}}^{\text{T}} = \hat{\mathbf{A}}_{-V}\mathbf{P}\Phi^{\text{H}}\hat{\mathbf{A}}_{-V}^{\text{H}}, & \mathbf{X}_4 &= \underline{\mathbf{A}}\mathcal{D}(\underline{\mathbf{C}}(4,:))\underline{\mathbf{B}}^{\text{T}} = \hat{\mathbf{A}}_{-V}\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{A}}_{-V}^{\text{H}}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中,  $\hat{\mathbf{A}}_{-V} = \mathbf{J}_{-V}\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\Phi = \mathcal{D}([\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{K-1}])$  满足  $\mathbf{J}_{-V}\hat{\mathbf{A}}\Phi = \mathbf{J}_{-1}\hat{\mathbf{A}}$ , 则  $\varphi_k = \exp(-j\pi\sin(\theta_k))$ ,  $k = 0, 1, \dots, K-1$ . 显然, CPD 得到的  $\underline{\mathbf{A}}$ ,  $\underline{\mathbf{B}}$  和  $\underline{\mathbf{C}}$  的列矢量存在缩放模糊和置换模糊. 利用  $\hat{\mathbf{A}}_{-V}$  中所有元素模为 1 的性质, 可以消除缩放模糊, 得到  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}$  满足

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}_{-V}\mathbf{\Pi}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{A}}_{-V}^*\mathbf{\Pi}, \quad \hat{\mathbf{C}} = [d(\mathbf{P}) \ d(\Phi\mathbf{P}) \ d(\mathbf{P}\Phi^{\text{H}}) \ d(\mathbf{P})]^{\text{T}}\mathbf{\Pi}, \quad (24)$$

其中,  $\mathbf{\Pi}$  表示列置换矩阵,  $d$  是  $\mathcal{D}$  的逆算子. 因子矩阵  $\hat{\mathbf{A}}$  携带了目标的角度信息, 因此可以通过最小二乘估计目标的 DOA. 具体地, 第  $i_k$  个目标的角度估计为

$$\hat{\theta}_{i_k} = \arcsin\left(j\beta^{\dagger} \ln\left(\hat{\mathbf{a}}_k\right)\right), \quad (25)$$

其中,  $\hat{\mathbf{a}}_k$  表示  $\hat{\mathbf{A}}$  的第  $k$  列,  $\beta = [0, \pi, \dots, (V-2)\pi]^{\text{T}}$ ,  $\beta^{\dagger}$  表示其伪逆. 另一方面, 因子矩阵  $\hat{\mathbf{C}}$  携带了信号的功率信息, 可从中提取功率的估计值. 具体地, 第  $i_k$  个目标的功率估计为

$$\hat{\sigma}_{i_k}^2 = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathbf{C}}(1, k) + \hat{\mathbf{C}}(4, k) \right). \quad (26)$$

最后, 将估计的 DOA 和功率分别用集合  $\hat{\Theta} = \{\hat{\theta}_{i_1}, \hat{\theta}_{i_2}, \dots, \hat{\theta}_{i_K}\}$  和  $\hat{\mathbb{P}} = \{\hat{\sigma}_{i_1}^2, \hat{\sigma}_{i_2}^2, \dots, \hat{\sigma}_{i_K}^2\}$  表示.

#### 4.4 目标参数匹配与权矢量计算

$\hat{\Theta}$  和  $\hat{\mathbb{P}}$  仍然存在置换模糊, 需要利用先验信息与目标匹配. 假设已知目标先验方向  $\theta_p$ , 以及  $\theta_p$  只包含目标信源的一个邻域, 称作目标角度区域, 表示为  $\Psi = [\theta_p - \Delta\theta, \theta_p + \Delta\theta]$ . 而  $\Psi$  在  $[-90^\circ, 90^\circ]$  上的补集则被称为干扰角度区域. 一般情况下, 只需在  $\hat{\Theta}$  中找到属于  $\Psi$  的元素即可确定目标信号的 DOA 估计  $\hat{\theta}_0$ . 然而, 当目标信号功率远小于干扰信号时, 张量分解对目标信号的 DOA 估计存在严重误差, 会出现  $\hat{\Theta}$  中任意元素都不属于  $\Psi$  的情况. 此时, 将 SCM 和重构的 INCM 的差作为目标协方差的估计, 再根据文献 [28] 求解权矢量. 鉴于该思路, 本小节提出如下目标参数匹配方案.

• (一般情况)  $\hat{\Theta} \cap \Psi \neq \emptyset$  时:

(a)  $\hat{\theta}_0 = \hat{\Theta} \cap \Psi$ ;

(b)  $\hat{\Theta}$  中其余元素及其在  $\hat{\mathbb{P}}$  中的对应元素为干扰信号方向和功率的估计, 重构  $\hat{\mathbf{R}}_{i+n}$ ;

(c) 将  $\hat{\theta}_0$  和  $\hat{\mathbf{R}}_{i+n}$  代入式 (7) 即可得到波束成形权矢量.

• (目标信号功率远小于干扰信号)  $\hat{\Theta} \cap \Psi = \emptyset$  时:

(a)  $\hat{\mathbb{P}}$  中较大的  $K-1$  个元素及其在  $\hat{\Theta}$  中的对应元素为干扰信号功率和方向的估计, 重构  $\hat{\mathbf{R}}_{i+n}$ ;

(b) 令  $\hat{\mathbf{R}}_s = \hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{R}}_{i+n}$ , 计算权矢量  $\mathbf{w} = \mathcal{P}(\hat{\mathbf{R}}_{i+n}^{-1}\hat{\mathbf{R}}_s)$ ,  $\mathcal{P}(\cdot)$  表示矩阵的主特征矢量.



#### 4.5 算法分析

**注释1** 文献 [36] 给出了在不考虑缩放模糊和置换模糊的前提下, 式 (19) 分解具有唯一性的充分条件:  $k_A + k_B + k_C \geq 2K + 2$ . 其中,  $k_A$ ,  $k_B$  和  $k_C$  分别表示  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{C}$  的 Kruskal 秩. 结合 Kruskal 秩的性质, 上述不等式可进一步写为

$$2 \min(\bar{V}, K) + \min(4, K) \geq 2K + 2. \quad (27)$$

通常情况下  $\bar{V} > 4$ , 则当  $K \geq \bar{V}$  时, 式 (27) 可以化简为  $K \leq \bar{V} + 1$ . 因此本算法的最大可辨识目标数为  $\bar{V} + 1$ .

**注释2** 本算法的计算复杂度主要来自于以下 3 个方面:

- 张量填充 ADMM 过程, 其计算复杂度为  $l_1 \mathcal{O}(\log 4 \times \bar{V}^2 + \bar{V}^3)$ ;
- 张量分解算法中的 Tucker 分解过程, 其计算复杂度为

$$l_2 \left\{ 8F_1 F_2 \bar{V} + (9F_1 + 16F_2) F_1 \bar{V}^2 + \mathcal{O}[F_1^2 F_2 (\bar{V} + 2)] \right\} + 8F_1 F_2 \bar{V}^2 + 2F_1^2 F_2 \bar{V};$$

• 张量分解算法中核张量的 CPD 过程, 其计算复杂度为  $l_3[3K^2 + 6F_1^2 F_2 K + 2K^2(F_1^2 + 2F_1 F_2)]$ . 其中,  $l_1$ ,  $l_2$  与  $l_3$  表示各过程的迭代次数. 由于  $\bar{V}$  是由阵列结构决定, 而  $F_1$  和  $F_2$  主要受信源数  $K$  影响, 张量填充 ADMM 过程的计算复杂度只由阵列结构决定, 而 Tucker 分解过程的计算复杂度受到阵列结构和信源数的共同影响, 核张量的 CPD 过程则主要由信源数  $K$  决定. 由于  $\bar{V} \gg F_1 > K$ ,  $F_2 = \min(4, K)$ , 阵列结构对算法的计算复杂度的影响将会明显大于信源数.

## 5 仿真实验

本节从以下 3 个方面以仿真实验的方式验证了本算法的性能. 实验选择互质数对  $M = 3$  和  $N = 5$  所确定的互质阵列结构, 阵元间距设置为半波长. 假设目标角度区域的半径  $\Delta\theta = 4^\circ$ , 则  $\Psi = [\theta_p - 4^\circ, \theta_p + 4^\circ]$ . 定义先验误差为目标先验方向与目标真实方向之差, 表示为  $\theta_e = \theta_p - \theta_0$ . 在 ADMM 过程中, 设置  $\mu_{\max} = 10^5$ ,  $\rho = 1.1$ ; 张量分解的初始化次数为 10 且每次初始化进行 5 次迭代. 所有迭代算法的收敛阈值为  $10^{-5}$ .

### 5.1 波束方向图

本实验比较了所提算法在不同信噪比 (signal-to-noise ratio, SNR) 条件下的波束方向图, 以分析 SNR 与干噪比 (interference-to-noise ratio, INR) 的相对关系对算法性能的影响. 实验设置  $\text{INR} = 10$  dB, 采样数  $L = 100$ , 分别假定  $\text{SNR} = 10$  dB 和  $\text{SNR} = -10$  dB, 代表一般情况和 SNR 远小于 INR 的特殊情况.

两种场景下的仿真结果如图 3 所示, 其中品红色虚线表示目标方向, 黑色虚线表示干扰方向. 场景 1 假设目标方向为  $\theta_0 = 2^\circ$ , 两个干扰方向分别为  $\theta_1 = -17^\circ$  和  $\theta_2 = 25^\circ$ . 令  $\theta_e = 0^\circ$  和  $\theta_e = 2^\circ$  表示无先验误差和  $2^\circ$  先验误差两种情况. 对比图 3(a) 和 (b) 可以看出, 所提算法基本不受先验误差影响, 在两种 SNR 下均使波束主瓣对准目标方向, 在干扰方向抑制深度均超过了 40 dB. 场景 2 假定目标方向为  $\theta_0 = 5^\circ$ , 4 个干扰方向分别为  $\theta_1 = -25^\circ$ ,  $\theta_2 = -10^\circ$ ,  $\theta_3 = 15^\circ$  和  $\theta_4 = 35^\circ$ . 设置  $\theta_e = 0^\circ$  和  $\theta_e = 3^\circ$ , 从图 3(c) 可以看出, 在该场景下先验误差为  $0^\circ$  时, 所提算法在两种 SNR 下均能使主瓣对准目标方向. 其中  $\text{SNR} = -10$  dB 对应的波束方向图的旁瓣略高, 且在某些干扰方向上的抑制深度明显

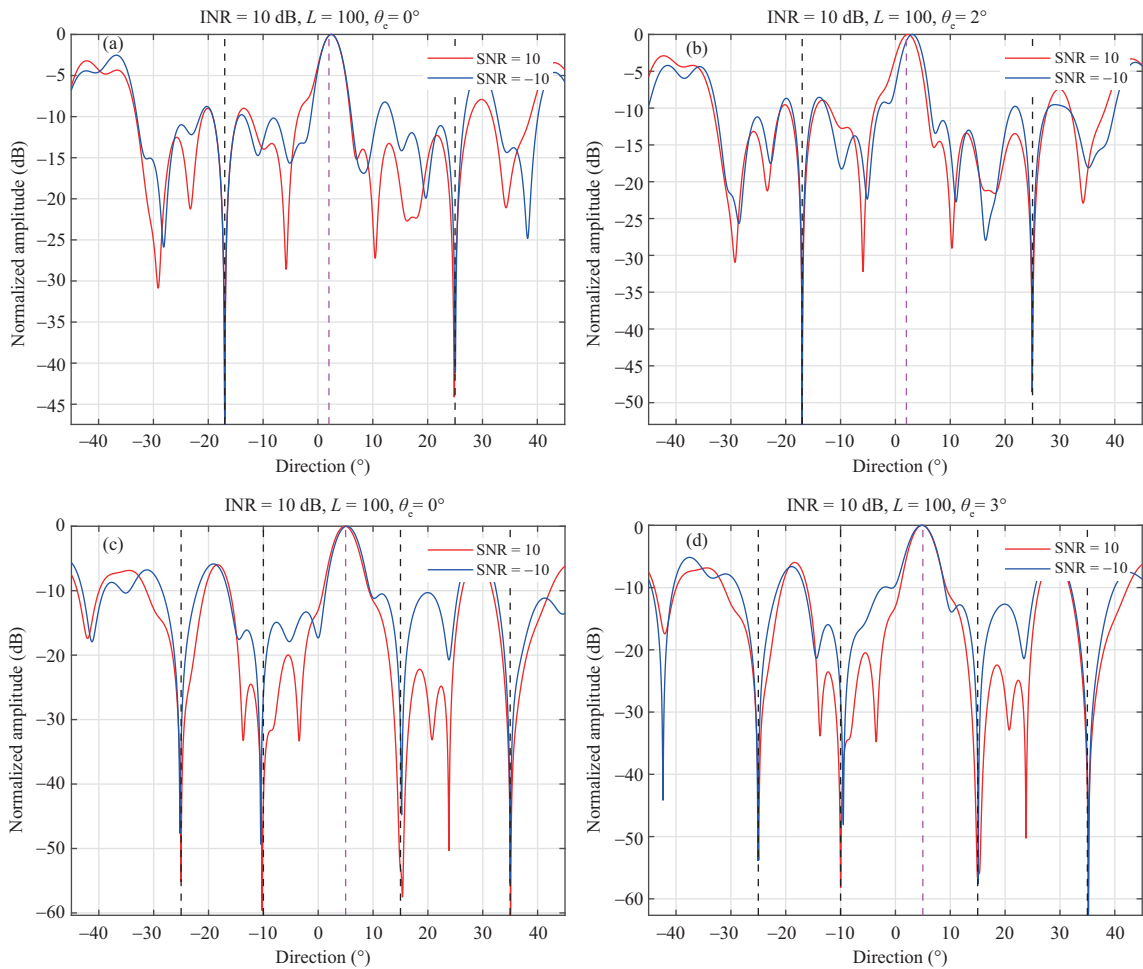


图 3 不同输入 SNR 下的波束方向图比较

**Figure 3** Comparison of beam patterns under different input SNR. (a) Scenario 1 — no prior error; (b) scenario 1 —  $2^\circ$  prior error; (c) scenario 2 — no prior error; (d) scenario 2 —  $3^\circ$  prior error

下降,但仍超过 40 dB.从图 3(d)可以看出,先验误差为  $3^\circ$  时的结果与无先验误差时的类似.场景 1 和 2 的实验结果验证了所提目标参数匹配方案的有效性.

## 5.2 输出 SINR

本小节从输出 SINR 的角度将所提算法 (以 Proposed 作为图例) 与现有的若干算法进行性能比较.具体对比算法包括对角加载算法 [3]、经典重建算法 [11]、子空间算法 [6]、空间谱求和算法 [23],以及核范数填充算法 [26],在下文分别以 DL-SMI, Reconstruction, Subspace, Summation 和 Completion 指代.前 3 个比较算法属于通用类算法,其余两个算法分别是非填充类算法和填充类算法的典型代表.本实验假设目标信号方向  $\theta_0 = 5^\circ$ ,4 个干扰信号的入射角度分别为  $-25^\circ$ ,  $-10^\circ$ ,  $15^\circ$  和  $35^\circ$ .实验设置  $\text{INR} = 10 \text{ dB}$ ,在比较不同 SNR 下的输出 SINR 时,固定采样数为 100;在比较不同采样数下的输出 SINR 时,固定 SNR 为 0 dB. DL-SMI 算法中的对角加载系数设置为  $10\sigma_n^2$ . Subspace, Summation 和 Completion 这 3 种算法中的角度采样间隔为  $0.1^\circ$ .本实验考虑了雷达或通信实际应用中的 3 种典型场景,每种场景均以 500 次 Monte-Carlo 实验输出结果的平均值作为实验结果.

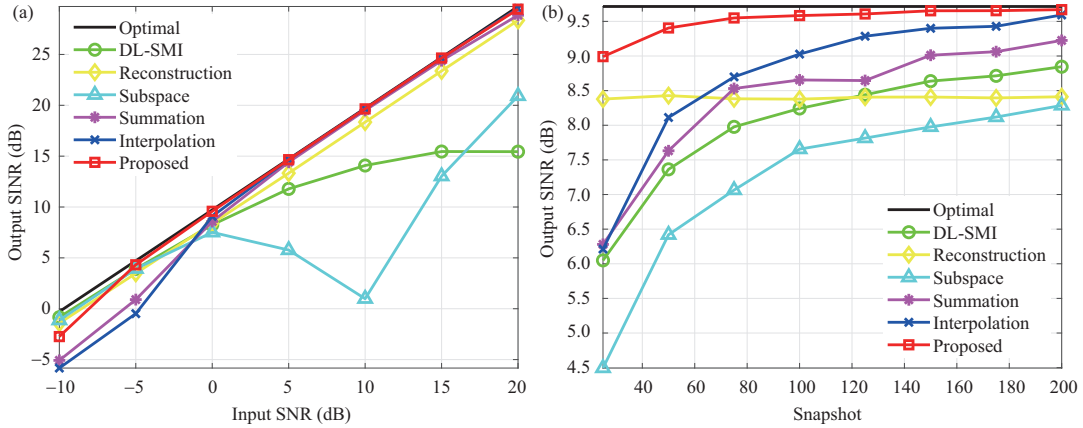


图 4 场景 1: 目标方向精确已知

**Figure 4** Scenario 1: precisely known target steering vector. (a) Output SINR versus SNR; (b) output SINR versus the number of snapshots

### 5.2.1 场景 1: 目标方向精确已知

场景 1 考虑了目标方向精确已知的情况. 图 4(a) 展示了输出 SINR 与输入 SNR 的关系. 由于使用采样协方差作为 INCM 的近似, DL-SMI 的输出 SINR 曲线随着 SNR 增大逐渐变得平缓, 即所谓的“自相消”现象. Subspace 算法在 SNR = 10 dB 的附近区域陡降, 这是因为 SNR 与 INR 接近时的色散效应使得目标与干扰子空间相互混叠, 致使所估计的目标导向矢量含有干扰信号分量, 而 INCM 含有目标信号分量. 所提算法在 SNR 大于 -5 dB 的范围内最接近最优值. Reconstruction 算法虽然性能稳定, 但其输出 SINR 曲线整体低于所提算法. Summation 和 Completion 两种算法均在低 SNR 条件下性能较差, 但随着 SNR 升高, 其性能迅速提高, 接近最优值. 然而, 由于 Summation 参估计精度的不足, 在 SNR 达到了 20 dB 时出现了性能下降. 图 4(b) 显示了输出 SINR 与输入采样数的关系, 可以看到所提算法和 Reconstruction 对采样数变化并不敏感, 但 Reconstruction 的性能明显低于所提算法. 其余算法在采样数较低时性能较差, 随着采样数增加其性能逐渐上升, 其中 Completion 性能逐渐趋近所提算法.

### 5.2.2 场景 2: 随机先验误差

场景 2 考虑了目标方向存在随机先验误差的情况. 具体地,  $\theta_e$  在每次 Monte-Carlo 实验中随机均匀采样于  $[-4^\circ, 4^\circ]$ . 从图 5(a) 可以看出, DL-SMI 的“自相消”现象更加明显, 而所提算法因为目标匹配方案几乎没有受到先验误差的影响, 其余算法的性能均出现了一定下降. 在 SNR 低于 -5 dB 时, 所提算法性能稍低于 Subspace. 在高 SNR 区域, 所提算法和 Completion 算法均能最接近最优值, 而 Summation 的性能下降更加明显. 从图 5(b) 可以看出, DL-SMI 的性能明显下降, 而所提算法对采样数的敏感性几乎不变, 且在整个采样数范围内均能优于其他对比算法的性能.

### 5.2.3 场景 3: 相干局部散射

场景 3 考虑了多径效应所引起的相干局部散射的情况. 假设存在 4 个不同相干局部散射路径, 则

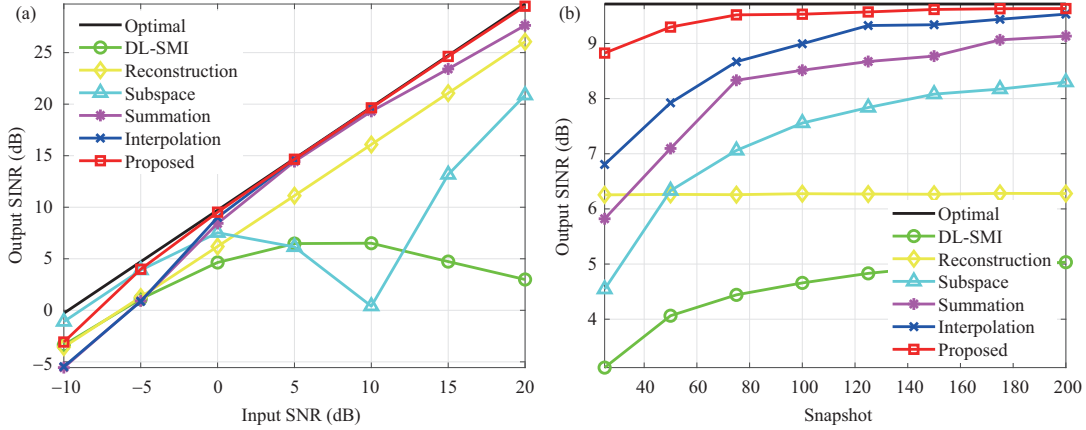


图 5 场景 2: 随机先验误差

Figure 5 Scenario 2: random prior error. (a) Output SINR versus SNR; (b) output SINR versus the number of snapshots

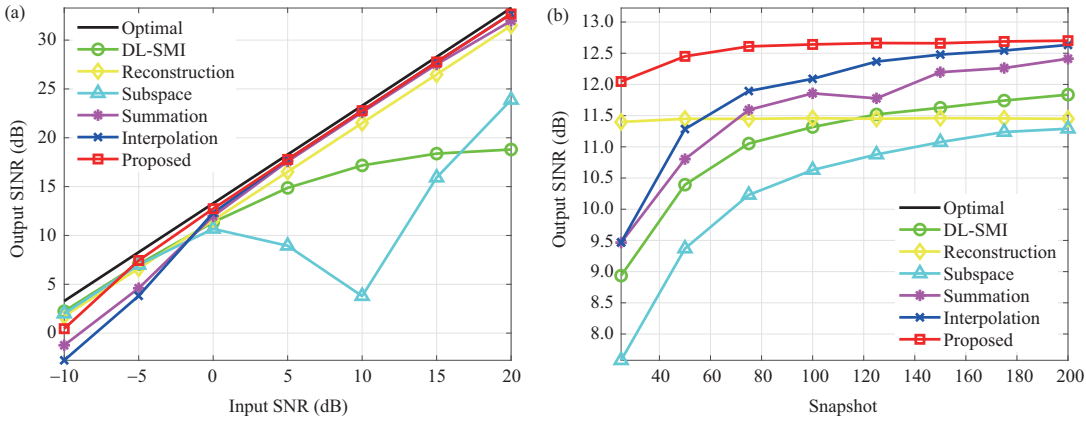


图 6 场景 3: 相干局部散射

Figure 6 Scenario 3: coherent local scattering. (a) Output SINR versus SNR; (b) output SINR versus the number of snapshots

相应的目标导向矢量可以表示为

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{a}(\theta_0) + \sum_{q=1}^4 \alpha_q e^{j\beta_q} \mathbf{a}(\vartheta_q), \quad (28)$$

其中,  $\mathbf{a}(\vartheta_q)$ ,  $q = 1, 2, 3, 4$  表示 4 个相干局部散射路径对应的导向矢量. 在每次实验中,  $\{\vartheta_q, q = 1, 2, 3, 4\}$  独立均匀分布于  $[\theta_0 - 2^\circ, \theta_0 + 2^\circ]$ ,  $\{\alpha_q, q = 1, 2, 3, 4\}$  是独立均匀采样于  $[0, 1]$  的实数,  $\{\beta_q, q = 1, 2, 3, 4\}$  独立均匀分布于  $[0, 2\pi]$ , 但在每次实验中这些参数均不随采样数改变. 图 6(a) 给出了该情景下输出 SINR 随输入 SNR 变化的曲线. 与图 4(a) 相比, 多径效应使得所有算法的性能都提高了约 3 dB. 图 6(b) 展示了该情景下输出 SINR 与采样数的关系. 可以看到, 所提算法和 Reconstruction 算法在整个采样范围内几乎保持不变, 前者相对于后者在性能上提高了约 1 dB; 其余算法在采样数大于 150 时才能达到各自的最佳性能. 这说明所提算法能很好地适应快速时变的外部环境.

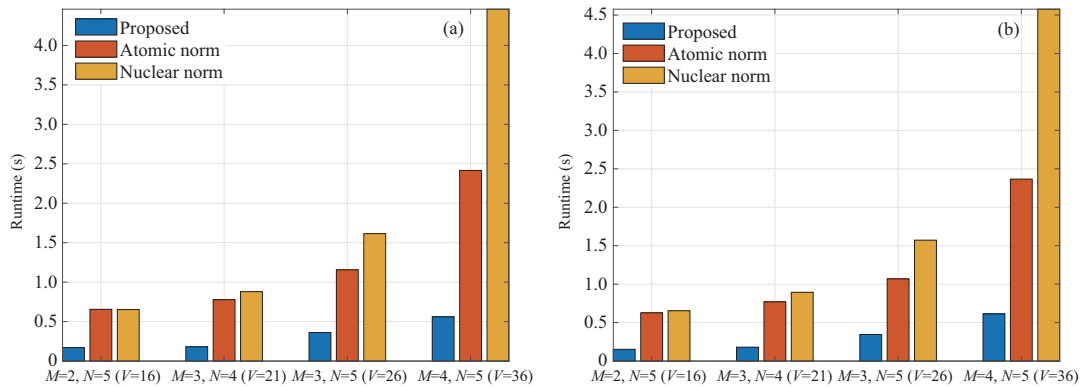


图 7 平均计算时间比较

Figure 7 Comparison of average calculation time. (a) 2 interference sources; (b) 4 interference sources

### 5.3 平均计算时间

本小节从平均计算时间的角度将所提算法与现有的两种填充类算法进行比较, 包括原子范数填充算法<sup>[28]</sup>、核范数填充算法<sup>[26]</sup>, 分别用 Atomic Norm 和 Nuclear Norm 作图示. 实验设置 SNR = 0 dB, INR = 10 dB, 采样数  $L = 100$ , 目标方向  $\theta_0 = 5^\circ$ , 分别考虑方向为  $\theta_1 = -17^\circ$  和  $\theta_2 = 25^\circ$  的 2 干扰场景和方向分别为  $\theta_1 = -25^\circ$ ,  $\theta_2 = -10^\circ$ ,  $\theta_3 = 15^\circ$ , 以及  $\theta_4 = 35^\circ$  的 4 干扰场景, 每种场景均以 50 次 Monte-Carlo 实验计算时间的平均值作为实验结果. 图 7(a) 和 (b) 分别展示了 2 干扰场景和 4 干扰场景的平均计算时间比较结果. 可以看到, 在给出的阵列结构下, 所提算法的平均计算时间明显低于其余两种填充类算法; 随着阵元数增多, 所提算法也增长得最慢. 在干扰数增多时, 各算法的计算时间只出现了细微的增长, 与理论分析相吻合.

## 6 总结

本文针对现有填充类算法在计算量和噪声鲁棒性等方面的不足, 提出了一种基于低管秩张量分解的 CPA-ABF 算法. 首先, 将多采样虚拟信号矩阵重排为张量的形式参与后续处理, 可以利用张量的多维结构优势提高了在低 SNR 和少采样条件下的参数估计精度; 其次, 算法内嵌的 ADMM 和 Tucker 分解, 显著降低了算法的计算复杂度; 最后, 所设计的目标匹配方案有效弥补了张量分解在干扰信号功率远大于目标信号时的性能短板. 仿真结果验证了所提算法在性能和计算量相对于现有方法的优势, 证明了其在实际信号环境中的鲁棒性和高效性.

### 参考文献

- 1 Zhou C W. Coprime sensor array signal processing. Dissertation for Ph.D. Degree. Hangzhou: Zhejiang University, 2018 [周成伟. 互质阵列信号处理算法研究. 博士学位论文. 杭州: 浙江大学, 2018]
- 2 Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. Proc IEEE, 1969, 57: 1408–1418
- 3 Li J, Stoica P, Wang Z S. On robust Capon beamforming and diagonal loading. IEEE Trans Signal Process, 2003, 51: 1702–1715
- 4 Xu Y, Ma J, Liu Z, et al. A class of diagonally loaded robust Capon beamformers for noncircular signals of interest. Signal Process, 2014, 94: 670–680
- 5 Huang F, Sheng W, Ma X. Modified projection approach for robust adaptive array beamforming. Signal Process, 2012, 92: 1758–1763

- 6 Shen F, Chen F, Song J. Robust adaptive beamforming based on steering vector estimation and covariance matrix reconstruction. *IEEE Commun Lett*, 2015, 19: 1636–1639
- 7 Zhu X, Xu X, Ye Z. Robust adaptive beamforming via subspace for interference covariance matrix reconstruction. *Signal Process*, 2020, 167: 107289
- 8 Bell K L, Ephraim Y, van Trees H L. A Bayesian approach to robust adaptive beamforming. *IEEE Trans Signal Process*, 2000, 48: 386–398
- 9 Vorobyov S A, Gershman A B, Luo Z Q. Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: a solution to the signal mismatch problem. *IEEE Trans Signal Process*, 2003, 51: 313–324
- 10 Rong Y, Vorobyov S A, Gershman A B. Robust linear receivers for multiaccess space-time block-coded MIMO systems: a probabilistically constrained approach. *IEEE J Sel Areas Commun*, 2006, 24: 1560–1570
- 11 Gu Y J, Leshem A. Robust adaptive beamforming based on interference covariance matrix reconstruction and steering vector estimation. *IEEE Trans Signal Process*, 2012, 60: 3881–3885
- 12 Zhang X, Jiang W, Huo K, et al. Robust adaptive beamforming based on linearly modified atomic-norm minimization with target contaminated data. *IEEE Trans Signal Process*, 2020, 68: 5138–5151
- 13 He J, Shu T, Dakulagi V, et al. Simultaneous interference localization and array calibration for robust adaptive beamforming with partly calibrated arrays. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2021, 57: 2850–2863
- 14 Pal P, Vaidyanathan P P. Nested arrays: a novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom. *IEEE Trans Signal Process*, 2010, 58: 4167–4181
- 15 Pal P, Vaidyanathan P P. Coprime sampling and the music algorithm. In: *Proceedings of Digital Signal Processing and Signal Processing Education Meeting (DSP/SPE)*, Sedona, 2011. 289–294
- 16 Liu Y X, Shi J P, Li X. Research progress on sparse array MIMO radar parameter estimation. *Sci Sin Inform*, 2022, 52: 1560–1576 [刘永祥, 师俊朋, 黎湘. 稀疏阵列 MIMO 雷达参数估计研究进展. *中国科学: 信息科学*, 2022, 52: 1560–1576]
- 17 Fan J Y, Gu H, Su W M, et al. Co-prime MIMO radar multi-parameter estimation based on tensor decomposition. *J Electron Inform Technol*, 2015, 37: 933–938 [樊劲宇, 顾红, 苏卫民, 等. 基于张量分解的互质阵 MIMO 雷达目标多参数估计方法. *电子与信息学报*, 2015, 34: 933–938]
- 18 Zhou C W, Zheng H, Gu Y J, et al. Research progress on coprime array signal processing: direction-of-arrival estimation and adaptive beamforming. *J Radar*, 2019, 8: 558–577 [周成伟, 郑航, 顾宇杰, 等. 互质阵列信号处理研究进展: 波达方向估计与自适应波束成形. *雷达学报*, 2019, 8: 558–577]
- 19 Zheng Z, Huang Y, Wang W Q, et al. Direction-of-arrival estimation of coherent signals via coprime array interpolation. *IEEE Signal Process Lett*, 2020, 27: 585–589
- 20 Raza A, Liu W, Shen Q. Thinned coprime array for second-order difference co-array generation with reduced mutual coupling. *IEEE Trans Signal Process*, 2019, 67: 2052–2065
- 21 Fu Z, Chargé P, Wang Y. Rearranged coprime array to increase degrees of freedom and reduce mutual coupling. *Signal Process*, 2021, 183: 108038
- 22 Gu Y J, et al. Coprime array adaptive beamforming based on compressive sensing virtual array signal. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Shanghai, 2016. 2981–2985
- 23 Zhou C W, Shi Z G, Gu Y J. Coprime array adaptive beamforming with enhanced degrees-of-freedom capability. In: *Proceedings of IEEE Radar Conference (RadarConf)*, Seattle, 2017. 1357–1361
- 24 Zhou C, Gu Y, He S, et al. A robust and efficient algorithm for coprime array adaptive beamforming. *IEEE Trans Veh Technol*, 2018, 67: 1099–1112
- 25 Liu K, Zhang Y D. Coprime array-based robust beamforming using covariance matrix reconstruction technique. *IET Commun*, 2018, 12: 2206–2212
- 26 Zheng Z, Yang T, Wang W Q, et al. Robust adaptive beamforming via coprime coarray interpolation. *Signal Process*, 2020, 169: 107382
- 27 Grant M, Boyd S. *Cvx: Matlab software for disciplined convex programming version 2.1*. 2014. <http://cvxr.com/cvx>
- 28 Cheng Y, Zhang X, Liu T, et al. Coprime array-adaptive beamforming via atomic-norm-based sparse recovery. *IET Radar Sonar Navi*, 2021, 15: 1494–1507
- 29 Boyd S, Parikh N, Chu E, et al. *Distributed Optimisation and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers: Foundations and Trends in Machine Learning*. Hanover: Now Publishers, 2011

- 30 Zhang X D. Matrix Analysis and Applications. Beijing: Tsinghua University Press, 2013 [张贤达. 矩阵分析与应用. 北京: 清华大学出版社, 2013]
- 31 Kilmer M E, Martin C D. Factorization strategies for third-order tensors. *Linear Algebra and its Appl*, 2011, 435: 641–658
- 32 Lu C, Feng J, Chen Y, et al. Tensor robust principal component analysis with a new tensor nuclear norm. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 2020, 42: 925–938
- 33 Wax M, Kailath T. Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Trans Acoust Speech Signal Process*, 1985, 33: 387–392
- 34 Cai J F, Candés E J, Shen Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion. *SIAM J Optim*, 2010, 20: 1956–1982
- 35 Bro R, Sidiropoulos N D, Giannakis G. A fast least squares algorithm for separating trilinear mixtures. In: *Proceedings of Independent Component and Blind Signal Separation Anal (ICA)*, Helsinki, 2000. 11–15
- 36 Jiang T, Sidiropoulos N D. Kruskal’s permutation lemma and the identification of CANDECOMP/PARAFAC and bilinear models with constant modulus constraints. *IEEE Trans Signal Process*, 2004, 52: 2625–2636

## Coprime array-adaptive beamforming based on low-tubal-rank tensor decomposition

Yun CHENG, Tianpeng LIU<sup>\*</sup>, Junpeng SHI, Xiaolong SU & Zhen LIU

*College of Electronic Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China*

<sup>\*</sup> Corresponding author. E-mail: everliutianpeng@sina.cn

**Abstract** The coprime array (CPA) has attracted extensive attention in the field of adaptive beamforming (ABF) because of its large array aperture and high degree of freedom. To make full use of this characteristic, several algorithms based on hole filling have been proposed to improve the performance of ABF. However, these algorithms have disadvantages in computation and noise robustness, which are difficult to adapt to complex and changeable environments. To solve this problem, this paper proposes a CPA-ABF algorithm based on low-tubal-rank tensor decomposition. First, the multi-sampling virtual signal matrix of the CPA is rearranged into a tensor form, and the missing cross-correlation information is completed using its low tubal rank. Then, signal parameters are extracted from the completed tensor data and matched with the target a priori. Finally, the ABF weight vector is obtained. The algorithm uses ADMM and Tucker decomposition to improve the efficiency of tensor completion and decomposition. The designed target matching scheme also effectively controls the algorithm error. The simulation results show the advantages of the algorithm in performance and computational complexities compared with existing methods, especially in the case of low signal-to-noise ratios and a small number of samples.

**Keywords** adaptive beamforming, coprime array, tensor decomposition, degree-of-freedom, parameter estimation