



具有高阶时延的离散非仿射非线性系统的自适应跟踪控制

张言军

北京理工大学自动化学院, 北京 100081

E-mail: yanjun@bit.edu.cn

收稿日期: 2022-01-05; 修回日期: 2022-03-21; 接受日期: 2022-04-24; 网络出版日期: 2023-03-07

国家自然科学基金 (批准号: 62173323, 61925303, 62088101) 和北京理工大学青年教师学术启动计划资助项目

摘要 本文研究了一类具有高阶输入–输出时延的非仿射非线性离散不确定系统的自适应输出跟踪控制问题, 提出了一种基于隐函数的自适应输出反馈输出跟踪控制方案. 该方案主要解决了两个技术问题: 一是构造了基于未知参数估计和未来时刻信号估计的隐函数方程解的自适应控制律, 解决了因系统高阶时延导致的控制律因果矛盾问题并实现了闭环稳定和渐近输出跟踪; 二是针对非仿射非线性控制律难求解问题, 提出了基于迭代解的解析自适应控制律, 实现了闭环稳定和实用输出跟踪. 最后仿真研究证实了所提出控制方案的有效性.

关键词 自适应控制, 非仿射非线性, 闭环稳定, 输出跟踪

1 引言

实际系统总受到各种不确定因素的影响, 系统必然存在参数不确定性, 自适应控制是处理系统参数不确定的强有力的手段. 截至目前, 自适应控制理论已取得蓬勃发展, 并成功应用于诸多实际系统, 取得了很好的控制效果^[1~5].

非仿射非线性不确定系统的自适应控制一直是控制学界的热点方向. 现有文献提出了很多方法处理非仿射非线性系统的控制信号难求解问题. 比如, 基于神经网络或模糊逼近, 将含有输入信号的非线性函数近似表示为输入线性形式的神经网络或模糊逼近模型^[6~8]; 基于最优控制方法, 在每个采样间隔迭代求解自适应控制律^[9, 10]; 基于动态匹配方法构造解析的控制信号^[11]; 基于无源控制方法处理非仿射非线性^[12]; 以及基于系统扩维, 引入控制信号的导数, 构造以输入的导数为虚拟输入的仿射非线性系统^[13]. 各类方法各具优势, 比如, 利用神经网络或模糊逼近得到的仿射模型可构造解析形式的控制律, 但逼近模型仅在有界闭集内逼近是有效的; 相比而言, 最优控制方法不依赖有界闭集相关的限

引用格式: 张言军. 具有高阶时延的离散非仿射非线性系统的自适应跟踪控制. 中国科学: 信息科学, 2023, 53: 535–549, doi: 10.1360/SSI-2022-0007
Zhang Y J. Adaptive tracking control of discrete-time non-affine nonlinear systems with high-order time delays (in Chinese). Sci Sin Inform, 2023, 53: 535–549, doi: 10.1360/SSI-2022-0007

制条件, 但很多时候难构造解析控制律, 尤其是具有非线性约束的情形. 相关方法还有很多, 本文不再详述. 然而, 尽管针对非仿射非线性不确定系统的自适应控制已取得诸多成果, 但如何在参数化自适应控制框架内解决非仿射非线性不确定系统的自适应控制问题, 鲜有相关成果发表.

除了非仿射非线性问题之外, 本文同时考虑了离散系统的高阶时延导致的自适应控制律的因果性问题. 非线性离散系统的输入 – 输出时延对于自适应控制律构造至关重要^[14~16]. 本文考虑一类具有任意输入 – 输出时延的非线性系统, 当系统输入 – 输出时延大于 1 时, 易造成控制律的因果矛盾. 为解决时延导致的技术性问题, 本文将提出基于未来时刻信号估计的自适应控制策略.

基于现有文献取得的杰出成果, 本文将进一步考虑如何在参数化自适应控制框架下解决一类含有任意高阶时延的非仿射非线性不确定离散系统的自适应控制问题. 针对输入信号非线性导致的自适应控制律难求解问题, 本文提出了基于隐函数方程解和基于迭代解的自适应方案. 同时, 针对高阶时延易导致控制律因果矛盾问题, 本文充分利用估计参数的特性构造未来信号的估计, 并基于此构造了与标称隐函数方程结构一致的自适应隐函数方程, 证明了在每个采样时刻自适应隐函数方程关于控制律存在唯一解, 并给出了自适应控制律的解析形式. 综上, 本文的主要贡献如下.

(i) 针对具有任意时延的离散非仿射非线性不确定系统, 本文提出了基于隐函数方程解的输出反馈自适应输出跟踪控制方案. 与现有相关文献的结果相比, 本文依赖参数化自适应控制的标准设计条件, 建立了全参数化自适应控制框架, 构造了解析的自适应控制律, 实现了自适应输出跟踪性能.

(ii) 针对隐函数方程难求解问题, 构造了迭代形式的解析自适应控制律, 并证明了每个采样时刻的迭代自适应控制律均为收敛的, 可保证受控系统的闭环信号有界和实用输出跟踪.

符号说明. 本文使用符号 \mathbb{R} 表示实数集, 符号 z 和 z^{-1} 分别表示向前和向后位移算子, 即 $zx(t) = x(t+1)$, $z^{-1}x(t) = x(t-1)$, 其中 $t \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. 本文使用符号 L^∞ 和 L^2 分别表示两类空间, 分别定义为 $L^\infty = \{X(t) : \sup_{t \geq 0} \|X(t)\|_\infty < \infty\}$ 和 $L^2 = \{X(t) : \sqrt{\sum_{t=0}^{\infty} \|X(t)\|_2^2} < \infty\}$, 其中 $X(t)$ 表示任意有限维信号. 为简化符号, 本文使用符号 c 表示一种通用信号界, 即对于任意有界信号 $x(t)$, 其有界性可表示为 $\|x(t)\| \leq c$. 同时, 本文使用 $\mu(t)$ 表示一种通用的 L^2 衰减信号界, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = 0$ 且对于任意属于 L^2 空间的信号 $x(t)$, 可表示为 $\|x(t)\| \leq \mu(t)$. 特别地, 本文使用 $y(t) = G(z)[u](t)$ 表示输出为 $y(t)$, 输入为 $u(t)$, 传递函数为 $G(z)$ 的线性定常离散系统. 这一表示形式的好处在于简化时间和 z 域信号间的相互转换, 简化控制设计与分析的符号使用. 读者可参考文献 [14~16], 其中也使用了相似的表示形式.

2 问题描述

2.1 系统模型

本文考虑如下输入 – 输出形式的非线性不确定系统

$$y(t) = \theta^{*\top} f(y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-n), u(t-d), u(t-d-1), \dots, u(t-m)), \quad m \geq d, \quad (1)$$

其中 $y(t) \in \mathbb{R}$ 和 $u(t) \in \mathbb{R}$ 分别为系统输出和输入信号, $\theta^* = [\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_p^*]^\top \in \mathbb{R}^p$ 是未知常值向量, $f: \mathbb{R}^{n+m+1-d} \rightarrow \mathbb{R}^p$ 是已知的 Lipschitz 非线性可微映射, d 为系统输入 – 输出时延且满足 $1 \leq d \leq n$. 本文假定系统 (1) 的输出 $y(t)$ 可测.

2.2 控制目标

本文的控制目标为: 对任意给定的参考模型 $y^*(t) = W_m(z)[r](t)$, 其中 $W_m(z) = z^{-d}$, $r(t) \in \mathbb{R}$ 是有界参考输入信号, 设计输出反馈自适应控制律 $u(t)$, 使得系统 (1) 的所有闭环信号有界, 并实现渐近输出跟踪 $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y^*(t)) = 0$ 或实用输出跟踪即 $y(t) - y^*(t)$ 收敛到原点的任意小残差集合.

2.3 假设条件

为实现控制目标, 我们假定受控系统 (1) 满足如下条件.

假设 1 系统阶数 n 和时延 d 已知.

假设 2 存在已知的有界闭区间组 $[\theta_i^a, \theta_i^b]$ 满足 $\theta_i^* \in [\theta_i^a, \theta_i^b]$, $i = 1, 2, \dots, p$, 且

$$\left| \bar{\theta}^T \frac{\partial f(X)}{\partial X_{n+1}} \right| \geq \alpha_0, \quad \forall \bar{\theta}_i \in [\theta_i^a, \theta_i^b], \quad \forall X \in \mathbb{R}^{n+m+1-d}, \quad (2)$$

其中 $\bar{\theta} = [\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_p]^T$, α_0 是未知正常数, X_{n+1} 是 f 的第 $n+1$ 个变量.

假设 3 $\bar{\theta}^T \frac{\partial f(X)}{\partial X_{n+1}}$ 的符号已知.

假设 4 系统 (1) 是最小相位的, 即 $|u(t-d)| \leq c_1|y(t)| + c_2 \sum_{\tau=0}^{t-1} \lambda^{t-\tau-1}|y(\tau)|$, 其中 c_1, c_2, λ 均为常数且 $\lambda \in (0, 1)$.

假设 1 是自适应控制的常见设计条件, 通常可放宽为系统阶数和时延的上界是已知的. 关于如何放宽假设 1, 读者可参考文献 [14, 16], 本文不再赘述.

假设 2 中的区间组 $[\theta_i^a, \theta_i^b]$ 将用于参数更新律中参数投影的设计, 本文在参数更新律中施加参数投影的目的在于: 保证参数更新过程不破坏系统的输入-输出时延结构. 事实上, 很多实际系统的输入-输出时延是系统固有属性, 对区间组 $[\theta_i^a, \theta_i^b]$ 的选取不敏感, 即在符合实际意义前提下, 即使 $\theta(t)$ 发生大范围变化 ($\theta(t)$ 表示 θ^* 的估计), 系统的输入-输出时延是保持不变的. 若系统输入-输出时延依赖参数选取, 则在很多实际系统中确定 $[\theta_i^a, \theta_i^b]$ 的范围也是可行的. 例如, 飞行器姿态控制系统通过风洞实验可确定一组标称参数, 实际飞行中系统参数会在标称参数附近发生不确定改变, 此时 $[\theta_i^a, \theta_i^b]$ 可由标称参数、系统的物理属性以及工程师的经验等因素综合确定. 条件 $|\bar{\theta}^T \frac{\partial f(X)}{\partial X_{n+1}}| \geq \alpha_0$ 可以理解为一类强输入-输出时延条件, 即 $\bar{\theta}^T \frac{\partial f(X)}{\partial X_{n+1}}$ 始终非零且不趋向于原点. 考虑到受控系统 (1) 存在未知参数, 读者可能认为 $|\bar{\theta}^T \frac{\partial f(X)}{\partial X_{n+1}}| \geq \alpha_0$ 在数学意义上不容易验证. 然而, 在很多实际控制系统中, 我们可以通过系统的固有物理属性判定是否满足假设 2. 例如我们所熟知的电阻电感电容串联电路、机械位移系统等, 尽管参数会发生不确定变化, 系统的离散化数学模型的输入-输出时延是确定的.

假设 3 意味着系统的控制方向已知, 这在很多实际系统中同样是容易验证的. 例如, 即使飞行器存在大范围参数或结构不确定性, 但发动机的推力方向一般是确定的, 这一物理特性的数学表达可表示为 $\bar{\theta}^T \frac{\partial f}{\partial X}$ 的符号是已知的. 不失一般性, 我们假设

$$\bar{\theta}^T \frac{\partial f(X)}{\partial X_{n+1}} \geq \alpha_0 > 0. \quad (3)$$

假设 4 可以理解为有界输入有界状态稳定条件, 该条件是实现模型参考自适应控制的前提, 类似的假设条件可参见文献 [6, 14~17].

2.4 技术性问题

下面陈述为实现控制目标需解决的技术性问题. 由于系统 (1) 存在任意阶输入 - 输出时延, 为设计当前时刻的控制输入, 将系统 (1) 改写为显含 $u(t)$ 的形式, 即

$$y(t+d) = \theta^{*T} f(y(t-1+d), y(t-2+d), \dots, y(t-n+d), u(t), u(t-1), \dots, u(t-m+d)).$$

当系统输入 - 输出时延 $d > 1$ 时, 如何设计符合因果性的自适应控制律是第一个技术性问题. 如果假设 2 成立, 则根据文献 [18] 的全局隐函数定理, 方程

$$\theta^{*T} f(y(t-1+d), y(t-2+d), \dots, y(t-n+d), u(t), u(t-1), \dots, u(t-m+d)) = y^*(t+d) \quad (4)$$

关于 $u(t)$ 有唯一解 (用 $u^*(t)$ 表示). 在每个采样时刻若取 $u(t) = u^*(t)$, 则有 $y(t+d) = y^*(t+d)$ 成立. 然而, 即使 θ^* 已知且 $u^*(t)$ 有解析形式, $u^*(t)$ 在实际系统中也是无法应用的. 这是因为当 $d > 1$ 时, 由方程 (4) 的形式可得 $u^*(t)$ 会依赖未来时刻的输出信号 $y(t-1+d), y(t-2+d), \dots, y(t+1)$. 即 $u^*(t)$ 存在因果矛盾, 即使在数学意义上具有解析形式, 但在实际系统中是无法应用的. 本文将设计辅助参数化系统, 并与自适应参数估计策略相结合, 构造未来输出信号 $y(t-1+d), y(t-2+d), \dots, y(t+1)$ 的估计.

系统动态非线性依赖输入信号, 如何设计解析形式的自适应控制律是第二个技术性问题. 我们在引言中已阐明: 基于神经网络或模糊逼近处理非仿射非线性依赖有界闭集条件, 最优控制方法处理非仿射非线性一般很难有解析解. 本文针对离散非仿射非线性不确定系统 (1), 考虑如何仅在参数化自适应控制设计的一般假设条件下, 在每个采样时刻构造迭代形式的解析自适应控制律, 解决非仿射非线性系统的自适应控制律难求解问题. 我们将首先基于估计参数和已知信号构造一个关于自适应控制律的全局隐函数方程, 并证明该方程的解可实现闭环稳定和渐近输出跟踪. 进一步, 针对隐函数方程难求解的问题, 我们在每个采样时刻构造迭代形式的解析自适应控制律, 并证明该控制律收敛于全局隐函数方程的解, 可实现闭环稳定和实用输出跟踪性能.

3 自适应控制设计

本文所提出的自适应设计包括 5 个步骤: 一是设计参数更新律, 估计未知参数 θ^* ; 二是基于 θ^* 的估计, 构造未来时刻信号 $y(t+j)$ 的估计, 其中 $j = 1, 2, \dots, d$; 三是基于前两步得到的估计参数和估计信号, 导出方程 (4) 的自适应形式, 即把式 (4) 中的未知信号和未知参数用它们的估计代替, 得到关于 $u(t)$ 的自适应隐函数方程, 并证明该方程关于 $u(t)$ 存在唯一解; 四是完成自适应闭环系统信号有界与输出跟踪性能分析; 五是针对自适应隐函数方程难求解情形, 给出迭代形式的解析自适应控制律, 并证明该控制律可实现受控系统的闭环信号有界和实用输出跟踪性能.

3.1 参数更新律的设计

令 $\theta(t) = [\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_p(t)]^T \in \mathbb{R}^p$ 表示 θ^* 的估计, 且

$$\phi_f(t-1) = f(y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-n), u(t-d), u(t-d-1), \dots, u(t-m)) \in \mathbb{R}^p. \quad (5)$$

定义估计误差为

$$\epsilon(t) = \theta^T(t)\phi_f(t-1) - y(t). \tag{6}$$

利用 $\phi_f(t-1)$ 和估计误差, 我们设计 $\theta(t)$ 的更新律为

$$\theta(t+1) = \theta(t) - \frac{\Gamma\phi_f(t-1)\epsilon(t)}{m^2(t-1)} + g(\theta(t), h(t)), \tag{7}$$

其中

$$m(t-1) = \sqrt{1 + \phi_f^T(t-1)\phi_f(t-1)}, \tag{8}$$

$\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ 是增益矩阵, $g(\theta(t), h(t)) = [g_1(\theta_1(t), h_1(t)), \dots, g_p(\theta_p(t), h_p(t))]^T$ 是基于参数投影技术的修正项, $\gamma_i \in (0, 2)$. 基于假设 2, 我们设计 $g_i(\theta_i(t), h_i(t))$ 为如下形式:

$$g_i(\theta_i(t), h_i(t)) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \theta_i(t) \in [\theta_i^a, \theta_i^b], \\ \theta_i^b - \theta_i(t) - h_i(t), & \text{如果 } \theta_i(t) + h_i(t) > \theta_i^b, \\ \theta_i^a - \theta_i(t) - h_i(t), & \text{如果 } \theta_i(t) + h_i(t) < \theta_i^a, \end{cases} \tag{9}$$

其中 $[\theta_i^a, \theta_i^b]$ 已在假设 2 中给出, $h_i(t)$ 是 $h(t)$ 的第 i 个分量, 且 $h(t)$ 的形式为

$$h(t) = -\frac{\Gamma\phi_f(t-1)\epsilon(t)}{m^2(t-1)}.$$

基于参数更新律 (7), 我们给出如下引理.

引理1 参数更新律 (7) 保证了如下性质: $\theta_i(t) \in [\theta_i^a, \theta_i^b]$, $\frac{\epsilon(t)}{m(t-1)} \in L^2$, $\theta(t+i_0) - \theta(t) \in L^2$, 其中 i_0 为任意正整数.

证明 由参数投影修正项的形式 (9), 我们可以验证 $\theta_i(t) \in [\theta_i^a, \theta_i^b]$. 考虑一个正定函数 $V(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta}$, 其中 $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$. 沿着 $\tilde{\theta}(t)$ 的轨迹, V 的时间增量为

$$\begin{aligned} V(\tilde{\theta}(t+1)) - V(\tilde{\theta}(t)) &= -\left(2 - \frac{\phi_f^T(t-1)\Gamma\phi_f(t-1)}{m^2(t-1)}\right) \frac{\epsilon^2(t)}{m^2(t-1)} - g^T(\theta(t), h(t))\Gamma^{-1}g(\theta(t), h(t)) \\ &\quad + 2g^T(\theta(t), h(t))\Gamma^{-1}(\tilde{\theta}(t) + g(\theta(t), h(t)) + h(t)). \end{aligned} \tag{10}$$

因为 Γ 是对角矩阵, 则由式 (9) 可得

$$\begin{aligned} &2g^T(\theta(t), h(t))\Gamma^{-1}(\tilde{\theta}(t) + g(\theta(t), h(t)) + h(t)) \\ &= 2\sum_{i=1}^p \gamma_i^{-1}g_i(\theta_i(t), h_i(t))(\theta_i(t) - \theta_i^* + h_i(t) + g_i(\theta_i(t), h_i(t))) \leq 0. \end{aligned} \tag{11}$$

由式 (10) 和 (11) 可得

$$V(\tilde{\theta}(t+1)) - V(\tilde{\theta}(t)) \leq -\frac{\beta\epsilon^2(t)}{m^2(t-1)} - g^T(\theta(t), h(t))\Gamma^{-1}g(\theta(t), h(t)), \quad (12)$$

其中 $\beta = 2 - \max_{1 \leq i \leq p} \{\gamma_i\} > 0$. 不等式 (12) 说明 $V(\theta(t))$ 是单调不减的. 由单调有界定理可得 $V(\theta(t))$ 随时间 t 收敛. 从而, 由式 (12) 可得

$$\sum_{t=0}^N \frac{\epsilon^2(t)}{m^2(t-1)} \leq V(\theta(0)) - V(\theta(N+1)).$$

由 $V(\theta(t))$ 收敛可得 $\sum_{t=0}^{t=\infty} \frac{\epsilon^2(t)}{m^2(t-1)}$ 收敛, 即 $\frac{\epsilon(t)}{m(t-1)} \in L^2$. 从而, 我们由式 (7) 可知, $\theta(t+1) - \theta(t) \in L^2$. 因此, 对任意整数 i_0 , 都有 $\theta(t+i_0) - \theta(t) \in L^2$.

引理 1 揭示了关于估计参数 $\theta(t)$ 和估计误差 $\epsilon(t)$ 的关键性质, 这些性质对于闭环系统的稳定性分析至关重要.

3.2 未来时刻信号的估计

第 2 节已经阐明当输入 - 输出时延 $d > 1$ 时, 为设计符合因果性的自适应控制律, 需对 $d-1$ 个未来时刻的输出信号 $y(t+d-1), y(t+d-2), \dots, y(t+1)$ 进行估计. 由于 $y(t+i)$ 估计的设计依赖 $y(t+1), y(t+2), \dots, y(t+i-1)$ 的估计, 所以我们按照 $y(t+1), y(t+2), \dots, y(t+d-1)$ 的先后顺序进行估计信号的设计.

对任一未知信号 X , 本文使用符号 \hat{X} 表示 X 的估计. 基于式 (1), (5), (7), 设计 $\hat{y}(t+j)$ 为

$$\hat{y}(t+1) = \theta^T(t)\phi_f(t), \quad (13)$$

$$\hat{y}(t+j) = \theta^T(t)\hat{\phi}_f(t+j-1), \quad j = 2, 3, \dots, d, \quad (14)$$

其中

$$\hat{\phi}_f(t+j-1) = f(\hat{y}(t+j-1), \dots, \hat{y}(t+1), y(t), \dots, y(t-n+j), u(t-d+j-1), \dots, u(t-m+j)). \quad (15)$$

我们给出如下引理, 揭示估计信号的一个基本性质.

引理 2 基于式 (13) 和 (14) 得到的估计信号 $\hat{y}(t+i)$, $i = 1, 2, \dots, d$ 在当前时刻是已知的, 且满足

$$|\hat{y}(t+i) - y(t+i)| \leq \mu(t) \max_{j=1,2,\dots,i} \{\|\phi_f(t+j)\|\} + \mu(t), \quad i = 1, 2, \dots, d,$$

其中 $\mu(t) \in L^2$ 是通用的衰减信号界.

证明 基于估计信号的形式 (13)~(15), 只需按照 $y(t+1), y(t+2), \dots, y(t+d)$ 的先后顺序进行估计, 我们很容易验证 $\hat{y}(t+i)$, $i = 1, 2, \dots, d$, 都是已知的.

由式 (1), (5), (6), (13) 可得

$$\hat{y}(t+1) - y(t+1) = \theta^T(t)\phi_f(t) - \theta^T(t+1)\phi_f(t) + \theta^T(t+1)\phi_f(t) - \theta^{*T}\phi_f(t)$$

$$= (\theta^T(t) - \theta^T(t+1))\phi_f(t) + \frac{\epsilon(t+1)}{m(t)}m(t).$$

由引理 1 可得 $\theta(t) - \theta(t+1) \in L^2$, $\frac{\epsilon(t+1)}{m(t)} \in L^2$. 而且由式 (8) 可知 $m(t) \leq \|\phi_f(t)\| + 1$. 从而

$$|\hat{y}(t+1) - y(t+1)| \leq \mu(t)\|\phi_f(t)\| + \mu(t). \quad (16)$$

由式 (1), (5), (6), (14) 可得

$$\hat{y}(t+2) - y(t+2) = \theta^T(t)\hat{\phi}_f(t+1) - \theta^T(t)\phi_f(t+1) + (\theta^T(t) - \theta^T(t+2))\phi_f(t+1) + \epsilon(t+2).$$

由于 f 是 Lipschitz 的, 所以 $\|\hat{\phi}_f(t+1) - \phi_f(t+1)\| \leq c|y(t+1) - \hat{y}(t+1)|$. 从而, 由引理 1 和式 (16) 可得

$$|\hat{y}(t+2) - y(t+2)| \leq \mu(t) \max_{i=1,2} \{\|\phi_f(t+i)\|\} + \mu(t).$$

综上, 当 $i = 1, 2$ 时, 引理 2 的结论成立. 现假定当 $i < k (k \leq d)$ 时, 引理 2 的结论成立. 则当 $i = k$ 时,

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+k) - y(t+k) &= \theta^T(t)\hat{\phi}_f(t+k-1) - \theta^T(t)\phi_f(t+k-1) + (\theta^T(t) - \theta^T(t+k))\phi_f(t+k-1) \\ &\quad + \theta^T(t+k)\phi_f(t+k-1) - \theta^{*T}\phi_f(t+k-1). \end{aligned} \quad (17)$$

由于 f 是 Lipschitz 的, 从而 $\|\hat{\phi}_f(t+k-1) - \phi_f(t+k-1)\| \leq c \max_{i=1,2,\dots,k-1} \{\|y(t+i) - \hat{y}(t+i)\|\}$. 由归纳法假设条件可知 $\|\hat{\phi}_f(t+k-1) - \phi_f(t+k-1)\| \leq \mu(t) \max_{i=1,2,\dots,k-1} \{\|\phi_f(t+i)\|\} + \mu(t)$. 因此, 由式 (6), (17) 和引理 1 可得

$$\|\hat{\phi}_f(t+k) - \phi_f(t+k)\| \leq \mu(t) \max_{i=1,2,\dots,k-1} \{\|\phi_f(t+i)\|\} + \mu(t). \quad (18)$$

不等式 (18) 意味着当 $i = k$ 时, 引理 2 的结论依然成立. 由数学归纳法, 引理结论得证.

特别注意的是, 本文所提的估计算法不依赖激励条件, 无法保证估计误差的收敛性. 事实上, 本文的自适应控制算法并不要求估计误差的收敛性, 但依然能够实现控制目标.

3.3 自适应控制律隐函数方程的构造

基于未知参数的估计和未来输出信号的估计, 我们构造与标称隐函数方程 (4) 结构一致的自适应隐函数方程:

$$\theta^T(t)f(\hat{y}(t-1+d), \dots, \hat{y}(t+1), y(t), \dots, y(t-n+d), u(t), u(t-1), \dots, u(t-m+d)) = y^*(t+d). \quad (19)$$

注意到 $y^*(t+d) = r(t)$, 而 $r(t)$ 是当前时刻已知的参考输入信号. 可以验证, 方程 (19) 中的所有参数和信号在当前时刻都是已知的. 为简化符号表示, 定义

$$\bar{y}(t) = [\hat{y}(t-1+d), \dots, \hat{y}(t+1), y(t), \dots, y(t-n+d)]^T,$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(t-1) &= [u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-m+d)]^T, \\ H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u(t)) \\ &= \theta^T(t) f(\hat{y}(t-1+d), \dots, \hat{y}(t+1), y(t), \dots, y(t-n+d), u(t), u(t-1), \dots, u(t-m+d)) \\ &\quad - y^*(t+d). \end{aligned}$$

受文献 [18] 的全局隐函数定理和文献 [19] 中引理 11 的启发, 我们得出如下引理.

引理3 若假设 1~3 都成立, 则在每个采样时刻 t , 方程 (19) 关于 $u(t)$ 有唯一解, 记为 u_t^* , 且满足

$$|u_t^*| \leq \mu(t) \max_{j=1,2,\dots,d-1} \{ \|\phi_f(t+j)|_{X_{n+1}=0}\| \} + c \|\phi_f(t+d-1)|_{u=0}\| + c,$$

其中 X_{n+1} 表示 $\phi_f(t+j)$ 的第 $n+1$ 个变量.

证明 令

$$\kappa(t) = \inf_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u)}{\partial u} \right\}. \quad (20)$$

由假设 2 和式 (3) 可得

$$\kappa(t) \geq \alpha_0 > 0. \quad (21)$$

令 $\rho(t) = H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u)|_{u=0}$. 若 $\rho(t) = 0$, 则 $u = 0$ 为 $H = 0$ 的解. 否则, 考虑有界闭集

$$\Omega_t = \{u : |u| \leq |\rho(t)|/\kappa(t)\}. \quad (22)$$

因为 $\frac{\partial H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u)}{\partial u}$ 在 Ω_t 上关于 u 连续, 从而在 Ω_t 上有最大值. 从而, 对于所有的 $u \in \Omega_t$, 固定 H 中的其他信号, 存在依赖于时间 t 的有界信号 $\bar{\kappa}(t)$ 满足

$$\bar{\kappa}(t) = \max_{u \in \Omega_t} \left\{ \frac{\partial H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u)}{\partial u} \right\} > 0.$$

定义映射 $f_t : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$, 其形式为

$$f_t(u) = u - \frac{1}{\gamma(t)} H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u), \quad (23)$$

其中 $\gamma(t)$ 是一个给定的依赖时间 t 的时变参数, 且满足 $\gamma(t) > \bar{\kappa}(t)$.

对于任意的 $u \in \Omega_t$, 由中值定理可得

$$H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u) = \rho(t) + u \frac{\partial H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u)}{\partial u} \Big|_{u=\sigma_1}, \quad (24)$$

其中 $\sigma_1 \in \Omega_t$. 为此, 由式 (23) 和 (24) 可得

$$\begin{aligned} |f_t(u)| &= \left| u - \frac{1}{\gamma(t)} \left(\rho(t) + u \frac{\partial H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u)}{\partial u} \Big|_{u=\sigma_1} \right) \right| \\ &\leq \left| 1 - \frac{1}{\gamma(t)} \frac{\partial H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u)}{\partial u} \Big|_{u=\sigma_1} \right| |u| + \frac{|\rho(t)|}{\gamma(t)}. \end{aligned}$$

由于 $u, \sigma_1 \in \Omega_t$ 且 $\gamma(t) > \bar{\kappa}(t) \geq \underline{\kappa}(t)$, 从而 $|f_t(u)| \leq \frac{|\rho(t)|}{\gamma(t)} + (1 - \frac{\underline{\kappa}(t)}{\gamma(t)}) \frac{|\rho(t)|}{\underline{\kappa}(t)} = \frac{|\rho(t)|}{\underline{\kappa}(t)}$. 这意味着 f_t 满足 $f_t: \Omega_t \rightarrow \Omega_t$. 同时, 对于任意的 $u_1, u_2 \in \Omega_t$, 都有 $|f_t(u_1) - f_t(u_2)| = |u_1 - u_2 - \frac{1}{\gamma(t)}(H|_{u=u_1} - H|_{u=u_2})|$. 由中值定理可得

$$|f_t(u_1) - f_t(u_2)| \leq \left| 1 - \frac{1}{\gamma(t)} \frac{\partial H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u)}{\partial u} \Big|_{u=\sigma_2} \right| |u_1 - u_2| \leq \left(1 - \frac{\underline{\kappa}(t)}{\gamma(t)} \right) |u_1 - u_2|,$$

其中 σ_2 是介于 u_1 和 u_2 之间的值. 由此可见, f_t 是一个压缩映射. 故由 Banach 不动点定理可得, 方程 $f_t(u) = u$ 关于 u 有唯一解, 记为 u_t^* . 即方程 $u - \frac{1}{\gamma(t)} H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u) = u$ 有唯一解 u_t^* . 综上, 无论 $\rho(t)$ 是否为零, u_t^* 是方程 (19) 关于 u 的唯一解.

由式 (21) 和 (22) 可知, u_t^* 满足 $|u_t^*| \leq |\theta^T(t) \hat{\phi}_f(t+d-1)|_{u=0}| + c$. 从而,

$$|u_t^*| \leq c \|\hat{\phi}_f(t+d-1)|_{u=0} - \phi_f(t+d-1)|_{u=0}\| + \|\phi_f(t+d-1)|_{u=0}\| + c.$$

基于式 (18) 可得

$$|u_t^*| \leq \mu(t) \max_{j=1,2,\dots,d-1} \{\|\phi_f(t+j)|_{X_{n+1}=0}\| \} + c \|\phi_f(t+d-1)|_{u=0}\| + c,$$

其中 X_{n+1} 表示 $\phi_f(t+j)$ 的第 $n+1$ 个变量. 由此, 引理 3 结论得证.

引理 3 证实了自适应隐函数方程 (19) 关于 $u(t)$ 解的存在唯一性, 为后续闭环稳定与跟踪性能分析、解析自适应控制律的构造奠定了基础.

3.4 闭环系统性能分析

基于引理 2 和 3, 我们给出本文的主要结果之一.

定理 1 如果假设 1~4 都成立, 以式 (7) 为参数更新律, 以方程 (19) 的解 u_t^* 为自适应控制律应用到受控系统 (1), 则闭环系统所有信号有界且输出跟踪误差渐近收敛到零: $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y^*(t)) = 0$.

证明 为减少符号使用, 本证明中的 $u(t)$ 恒等于 u_t^* . 由引理 3 可知

$$\theta^T(t) \hat{\phi}_f(t+d-1) - y^*(t+d) = H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u(t)) = 0. \tag{25}$$

定义跟踪误差 $e(t) = y(t) - y^*(t)$, 则由式 (1), (5), (25), 以及引理 2 可得

$$\begin{aligned} |e(t+d)| &= |\theta^{*T} \phi_f(t+d-1) - y^*(t+d)| \\ &\leq |\epsilon(t+d)| + |(\theta^T(t+d) - \theta^T(t)) \phi_f(t+d-1)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |\theta^T(t)(\phi_f(t+d-1) - \hat{\phi}_f(t+d-1))| + |\theta^T(t)\hat{\phi}_f(t+d-1) - y^*(t+d)| \\
\leq & \mu(t)\|\phi_f(t+d-1)\| + \mu(t) \max_{j=1,2,\dots,d-1} \{\|\phi_f(t+j)\|\} + \mu(t). \quad (26)
\end{aligned}$$

因为 f 是 Lipschit 函数, 而且 $y^*(t)$ 是有界的, 我们得到

$$\begin{aligned}
\|\phi_f(t+d-1)\| & \leq c \max_{i=d-n,\dots,d-1} \{|e(t+i)|\} + c \max_{i=d-m,\dots,-1,0} \{|u(t+i)|\} + c, \\
\|\phi_f(t+d-1)|_{u=0}\| & \leq c \max_{i=d-n,\dots,d-1} \{|e(t+i)|\} + c \max_{i=d-m,\dots,-1} \{|u(t+i)|\} + c, \\
\|\phi_f(t+j)\| & \leq c \max_{i=(j+1)-n,\dots,(j+1)-1} \{|e(t+i)|\} + c \max_{i=(j+1)-m,\dots,-1,0} \{|u(t+i)|\} + c, \\
\|\phi_f(t+j)|_{X_{n+1}=0}\| & \leq c \max_{i=(j+1)-n,\dots,(j+1)-1} \{|e(t+i)|\} + c \max_{i=(j+1)-m,\dots,-1} \{|u(t+i)|\} + c.
\end{aligned}$$

基于以上所得, 结合假设 4, 我们可以验证

$$|e(t+d)| \leq \mu(t) \max_{0 \leq \tau \leq d-1} \{|e(\tau)|\} + c.$$

这表明 $e(t+d)$ 有界, 从而 $y(t)$ 有界. 由最小相位条件可得 $u(t)$ 是有界的, 从而闭环系统信号都是有界的. 最后基于式 (26) 可得跟踪误差趋于零, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

定理 1 是系统 (1) 基于输出反馈实现自适应输出跟踪的基本结论, 揭示了线性参数化自适应控制技术可有效解决非仿射非线性不确定系统的自适应控制问题, 并能实现理想的控制性能.

3.5 迭代形式的自适应控制律设计

针对隐函数方程 (19) 难求解情形, 本小节将给出迭代形式的解析自适应控制律, 并证明该控制律可实现受控系统的闭环信号有界和实用输出跟踪性能.

迭代自适应控制律的解析结构. 在每个采样时刻 t , 我们设计迭代形式的自适应控制律:

$$u_i(t) = u_{i-1}(t) - \frac{H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u_{i-1}(t))}{\gamma(t)}, \quad (27)$$

其中 $u_0(t)$ 取为 $t-1$ 时刻的控制信号值, $\gamma(t)$ 的取法可见式 (23).

关于信号 $u_i(t)$, 我们给出如下定理.

定理2 如果假设 1~4 都成立, 则对于所有的 $t \geq 1$, $\{u_i(t)\}$ 关于 i 收敛, 即 $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(t) = u_t^*$, 其中 u_t^* 是隐函数方程 $H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u)$ 关于 u 的唯一解.

证明 基于式 (27), 对于所有的 $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ 都有

$$|u_{m+1}(t) - u_{n+1}(t)| = u_m(t) - u_n(t) + \frac{H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u)|_{u=u^*}}{\gamma(t)} (u_m(t) - u_n(t)), \quad (28)$$

其中 u^p 为介于 $u_m(t)$ 和 $u_n(t)$ 之间的值. 由式 (21) 和 $\gamma(t)$ 的取法可知

$$|u_{m+1}(t) - u_{n+1}(t)| \leq \left(1 - \frac{\kappa(t)}{\gamma(t)}\right) |u_m(t) - u_n(t)|.$$

由柯西 (Cauchy) 收敛准则可知 $\{u_i(t)\}$ 收敛, 记为 $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(t) = u^*(t)$. 令方程 (27) 两边的 i 趋于无

穷可得

$$u^*(t) = u^*(t) - \frac{H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u^*(t))}{\gamma(t)}.$$

显然, $u^*(t)$ 为 $H = 0$ 关于 u 的解. 在引理 3 中我们已经证实, 方程 $H = 0$ 在每个采样时刻 t 均有唯一解, 从而 $u^*(t)$ 即为 $H = 0$ 的唯一解 u_t^* .

定理 2 揭示了迭代形式的控制律与基于自适应隐函数方程解的控制律之间的内在联系. 迭代形式的自适应控制律 (27) 结构简单, 便于设计. 然而, $\{u_i(t)\}$ 的收敛值 u_t^* 是一个极限值, 在实际中很难获得. 为解决这一问题, 在每个采样时刻 t , 我们基于迭代公式 (27) 迭代 q 次得到 $u_q(t)$ 作为控制信号, 且 p 满足如下条件:

$$\begin{cases} q = 1, & \text{如果 } u_1(t) = u_0(t), \\ q \geq \log_{\frac{\gamma(t)-\kappa(t)}{\gamma(t)}} \frac{\kappa(t)\epsilon}{2\gamma(t)\kappa(t)|u_1(t)-u_0(t)|}, & \text{如果 } u_1(t) \neq u_0(t), \end{cases} \quad (29)$$

其中 ϵ 是给定的容许误差. 在此, 我们给出如下结果.

定理3 如果假设 1~4 都成立, 以式 (7) 为参数更新律, 以迭代次数满足式 (29) 的 $u_q(t)$ 作为自适应控制律, 应用到受控系统 (1), 则闭环系统所有信号有界且输出跟踪误差满足 $|e(t+d)| \leq \epsilon + \delta, \forall t \geq 1$, 其中 ϵ 是给定的容许误差, δ 是依赖系统初值的渐近衰减到零的信号.

证明 如果 $u_1(t) = u_0(t)$, 则由迭代公式 (27) 得

$$H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u_0(t)) = 0.$$

这说明 $u_0(t)$ 是 $H = 0$ 的唯一解. 若 $u_1(t) \neq u_0(t)$, 则由式 (28) 得 $|u_{q+1}(t) - u_q(t)| \leq (1 - \frac{\kappa(t)}{\gamma(t)})^q |u_1(t) - u_0(t)|$. 从而,

$$|u_{q+s}(t) - u_q(t)| \leq \frac{\gamma(t)}{\kappa(t)} \left(1 - \frac{\kappa(t)}{\gamma(t)}\right)^q \left(1 - \left(1 - \frac{\kappa(t)}{\gamma(t)}\right)^s\right) |u_1(t) - u_0(t)|. \quad (30)$$

基于 $\{u_i(t)\}$ 关于 i 收敛, 令式 (30) 两边 $s \rightarrow \infty$ 可得

$$|u_t^* - u_q(t)| \leq \frac{\gamma(t)}{\kappa(t)} \left(1 - \frac{\kappa(t)}{\gamma(t)}\right)^q |u_1(t) - u_0(t)|.$$

针对 $H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u_q(t)) = 0$, 应用中值定理可得

$$\begin{aligned} |H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u_q(t))| &\leq \left| \frac{\partial H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u_q(t))}{\partial u_q(t)} \Big|_{u_q(t)=\psi_0} \right| |u_q(t) - u_t^*| \\ &\leq \left(1 - \frac{\kappa(t)}{\gamma(t)}\right)^q \frac{\gamma(t)\kappa(t)|u_1(t) - u_0(t)|}{\kappa(t)}, \end{aligned} \quad (31)$$

其中 ψ_0 是介于 $u_q(t)$ 和 u_t^* 之间的值. 容易验证: 如果 p 满足式 (29), 则 $H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u_q(t)) \leq \frac{1}{2}\epsilon$ 成立. 从而 $|e(t+d)| \leq |y(t+d) - H(\bar{x}_t, \bar{y}_t, \Theta_t, u_{t-1}, u_t^*)| + 2|H(\theta(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t-1), y^*(t+d), u_q(t))| < \delta + \epsilon$ 成立.

定理 3 提供了具体的自适应控制律的构造方法, 阐明了在每一时刻施加的输入信号 $u_q(t)$, 只需迭代次数 q 满足式 (29) 便可保证所有闭环信号有界并实现实用输出跟踪.

至此, 针对非仿射非线性不确定系统 (1), 本文已建立了一种基于隐函数的输出反馈自适应输出跟踪控制框架, 主要包括两种具体方法: 一是基于隐函数方程解的自适应控制方法, 可实现渐近跟踪性能; 二是基于迭代的解析自适应控制方法, 可实现实用输出跟踪性能. 我们给出如下注释, 阐明两种方法的区别与联系.

注释 1 定理 1 是本文的主要理论结果, 给出了基于隐函数方程解的自适应控制律, 实现了受控系统的闭环信号有界和渐近输出跟踪. 定理 1 所提控制律的优点在于可实现渐近跟踪的控制性能, 但控制律是通过求解隐函数方程而得的, 有时难以求得解析解. 为解决定理 1 中隐函数方程难求解问题, 定理 3 给出了解析迭代形式的自适应控制律, 并证明了该迭代控制律的极限形式即为定理 1 中的自适应隐函数控制律, 即定理 1 是定理 3 成立的基础. 迭代形式控制律的优点在于无需求解隐函数方程, 解决了非仿射非线性自适应控制律难求解的问题, 可实现受控系统的闭环信号有界和实用输出跟踪, 即跟踪误差可收敛到原点的任意小残差集合. 为保证实用跟踪性能, 我们给出了每步最小迭代次数.

4 仿真研究

本节给出一个算例来说明控制设计过程, 并验证其有效性.

4.1 仿真模型

考虑如下系统模型:

$$y(t) = \theta^{*\text{T}} f(y(t-1), y(t-2), y(t-3), u(t-3)), \quad (32)$$

其中 $y(t) \in \mathbb{R}$ 是系统输出, $u \in \mathbb{R}$ 是系统输入,

$$\begin{aligned} \theta^* &= [0.5, 1.3, 2.08, 1.6]^{\text{T}} \in \mathbb{R}^4, \\ f &= [\sin y(t-1), \sin^2 y(t-2), \sin(y(t-2) - 0.5 \sin y(t-3)), \\ &\quad \sin(0.1u(t-3)) + (1 + \sin^2(y(t-3)))u(t-3)]^{\text{T}} \in \mathbb{R}^4. \end{aligned} \quad (33)$$

在仿真中, 我们假设 θ^* 是未知的, f 是已知的.

4.2 假设验证

设 $y_2 = y(t+2)$, $y_1 = y(t+1)$, $y_0 = y(t)$, 根据式 (32) 可得

$$y(t+3) = \theta^{*\text{T}} f(y(t+2), y(t+1), y(t), u(t)), \quad (34)$$

其中

$$f = [\sin(y(t+2)), \sin^2(y(t+2)), \sin(y(t+1) - 0.5 \sin y(t)), \sin(0.1u(t)) + (1 + \sin^2(y(t)))u(t)]^{\text{T}} \in \mathbb{R}^4.$$

这意味系统阶数 $n = 3$ 和时延 $d = 3$. 设 θ_4^* 表示 θ^* 中的第 4 个元素, 那么

$$\frac{\partial y(t+3)}{\partial u(t)} = \theta_4^*(0.1 \cos(0.1u(t)) + 1 + \sin^2(y(t))). \quad (35)$$

基于式 (33) 和 (35), 可以验证仿真算例 (32) 的输入-输出时延为 3, 且依赖未知参数 θ_4^* . 基于此, 针对假设 2 中的有界闭区间组 $[\theta_i^a, \theta_i^b]$ 的选取, 只需保证 θ_4^a 在区间 $(0, 1.6]$ 上选取, 即可保证不等式 (2) 总是成立的. 在本仿真中, 我们选取 $[\theta_1^a, \theta_1^b] = [0, 1]$, $[\theta_2^a, \theta_2^b] = [0, 2]$, $[\theta_3^a, \theta_3^b] = [0, 4]$, $[\theta_4^a, \theta_4^b] = [0.1, 3]$. 在参数更新律 (7) 中, 基于闭区间组的选取, 可以确定投影修正项 $g(\theta(t), h(t))$ 的具体解析形式, 并可保证假设 2 和 3 恒成立. 同时, 可以验证假设 4 也是成立的, 即仿真算例 (32) 是最小相位系统.

4.3 自适应控制律的设计

由式 (33) 和 (34) 可知, 仿真算例 (32) 是非仿射的且很难求得控制律的解析解. 从而, 根据定理 3 且确定参考输出信号为 $y^*(t) = 0.5 \sin(t) + 1$, 我们使用如下形式的迭代自适应控制律:

$$u_i(t) = u_{i-1}(t) - \frac{H(\theta(t), \bar{y}(t), y^*(t+3), u_{i-1}(t))}{\gamma(t)}, \quad (36)$$

其中 $\theta(t) = [\theta_1(t), \dots, \theta_4(t)]^T \in \mathbb{R}^4$, $\bar{y}(t) = [\hat{y}(t+2), \hat{y}(t+1), y(t)]^T \in \mathbb{R}^3$, $y^*(t+3) = 0.5 \sin(t+3) + 1$, $\gamma = 12.6$. 控制律的迭代初始值选为上一时刻的控制律取值. 特别地, 由式 (7) 可得 $\theta(t)$ 的更新律的具体形式为

$$\theta(t+1) = \theta(t) - \frac{\Gamma \phi_f(t-1) \epsilon(t)}{m^2(t-1)} + g(\theta(t), h(t)), \quad (37)$$

其中 $\Gamma = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$, $m(t-1) = \sqrt{1 + \phi_f^T(t-1) \phi_f(t-1)}$, $\phi_f(t-1) = [\sin y(t-1), \sin^2 y(t-2), \sin(y(t-2) - 0.5 \sin y(t-3)), \sin(0.1u(t-3)) + (1 + \sin^2(y(t-3)))u(t-3)]^T$, $\epsilon(t) = \theta^T(t) \phi_f(t-1) - y(t)$, $g(\theta(t), h(t))$ 的具体形式如式 (9) 所示, $[\theta_i^a, \theta_i^b]$ 已在 4.2 小节中给出具体数值. 同时, 由式 (13) 和 (14) 可得

$$\hat{y}(t+1) = \theta^T(t) \phi_f(t), \quad (38)$$

$$\hat{y}(t+2) = \theta^T(t) \hat{\phi}_f(t+1), \quad (39)$$

其中 $\phi_f(t) = [\sin y(t), \sin^2 y(t-1), \sin(y(t-1) - 0.5 \sin y(t-2)), \sin(0.1u(t-2)) + (1 + \sin^2(y(t-2)))u(t-2)]^T$, $\hat{\phi}_f(t+1) = [\sin \hat{y}(t+1), \sin^2 y(t), \sin(y(t) - 0.5 \sin y(t-1)), \sin(0.1u(t-1)) + (1 + \sin^2(y(t-1)))u(t-1)]^T$.

4.4 仿真结果

根据定理 3, 我们使用迭代解 $u_q(t)$ 作为自适应律. 将式 (29) 中的容许误差 ϵ 选为 0.001, 参考输出信号选为 $y^* = 0.5 \sin(t) + 1$. 图 1 显示了输出信号与参考输出信号的轨迹, 图 2 绘制了跟踪误差信号的轨迹. 图 1 和 2 可以表明, 系统输出可以很好地跟踪参考输出信号. 图 3 给出了系统输入信号的轨迹, 图 4 显示了估计参数的自适应响应. 以上仿真结果证实了本文所提的自适应控制算法的有效性.

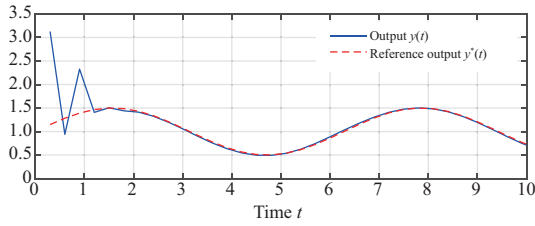


图 1 (网络版彩图) 系统输出 y 和参考输出 y^* 的轨迹
 Figure 1 (Color online) Trajectories of system output y and reference output y^*

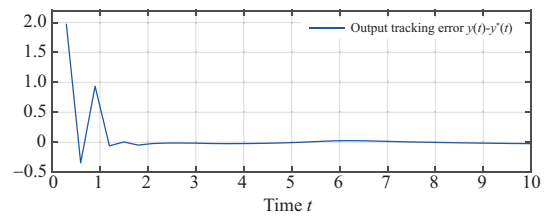


图 2 (网络版彩图) 跟踪误差 $y - y^*$ 的轨迹
 Figure 2 (Color online) Trajectory of tracking error $y - y^*$

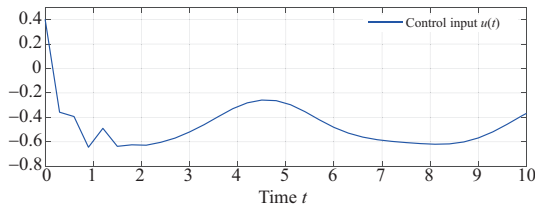


图 3 (网络版彩图) 系统输入信号 u 的轨迹
 Figure 3 (Color online) Trajectory of system input u

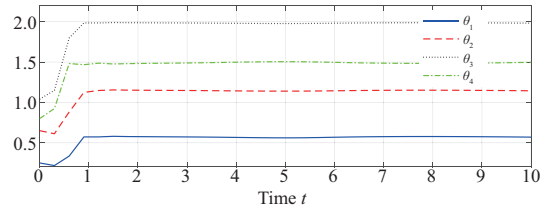


图 4 (网络版彩图) 系统估计参数 $\theta_i(t), i = 1, 2, 3, 4$ 的轨迹
 Figure 4 (Color online) Trajectories of system estimation parameters $\theta_i(t), i = 1, 2, 3, 4$

5 结论

本文研究了一类具有高阶时延的参数化不确定非仿射离散非线性系统的自适应输出跟踪控制问题, 提出了基于未来信号估计与全局隐函数的参数化自适应控制方案, 实现了系统闭环稳定和输出跟踪性能. 未来拟基于本文的主要结果, 进一步考虑系统阶数和输入-输出时延均未知情情形下的自适应输出跟踪控制问题.

参考文献

- 1 Åström K J. Theory and applications of adaptive control—a survey. *Automatica*, 1983, 19: 471–486
- 2 Tao G. Multivariable adaptive control: a survey. *Automatica*, 2014, 50: 2737–2764
- 3 Tan S P, Guo J, Zhao Y L, et al. Adaptive control with saturation-constrained observations for drag-free satellites—a set-valued identification approach. *Sci China Inf Sci*, 2021, 64: 202202
- 4 Liu Q H, Liu M, Duan G R. Adaptive fuzzy backstepping control for attitude stabilization of flexible spacecraft with signal quantization and actuator faults. *Sci China Inf Sci*, 2021, 64: 152205
- 5 Ma Y J, Jiang B, Ren H. Minimum eigenvalue-based adaptive compensation of actuator faults for flexible spacecraft. *Sci Sin Inform*, 2021, 51: 834–850 [马亚杰, 姜斌, 任好. 基于最小特征值的挠性航天器执行器故障自适应补偿技术. *中国科学: 信息科学*, 2021, 51: 834–850]
- 6 Qi R Y, Tao G, Jiang B. Adaptive control of MIMO time-varying systems with indicator function based parametrization. *Automatica*, 2014, 50: 1369–1380
- 7 Yang B J, Calise A J. Adaptive control of a class of nonaffine systems using neural networks. *IEEE Trans Neural Netw*, 2007, 18: 1149–1159
- 8 Deng H, Li H-X, Wu Y-H. Feedback-linearization-based neural adaptive control for unknown nonaffine nonlinear discrete-time systems. *IEEE Trans Neural Netw*, 2008, 19: 1615–1625
- 9 Bian T, Jiang Y, Jiang Z P. Adaptive dynamic programming and optimal control of nonlinear nonaffine systems.

- Automatica, 2014, 50: 2624–2632
- 10 Wei Q, Liu D, Yang X. Infinite horizon self-learning optimal control of nonaffine discrete-time nonlinear systems. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2015, 26: 866–879
 - 11 Wu C, Chen J. Adaptive control of linearly parameterized nonaffine nonlinear systems via dynamic matching. *Int J Robust Nonlin Control*, 2020, 30: 7197–7215
 - 12 Lin W, Niu X, Gao X, et al. Adaptive regulation of discrete-time nonaffine systems with parametric uncertainty. *IEEE Trans Automat Contr*, 2020, 66: 2365–2371
 - 13 Boskovic J D, Chen L, Mehra R K. Adaptive control design for nonaffine models arising in flight control. *J Guid Control Dyn*, 2004, 27: 209–217
 - 14 Tao G. *Adaptive Control Design and Analysis*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003
 - 15 Goodwin G C, Sin K S. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1984
 - 16 Chen H-F, Zhang J-F. Identification and adaptive control for systems with unknown orders, delay, and coefficients. *IEEE Trans Automat Contr*, 1990, 35: 866–877
 - 17 Narendra K S, Xiang C. Adaptive control of discrete-time systems using multiple models. *IEEE Trans Automat Contr*, 2000, 45: 1669–1686
 - 18 Zhang W N, Ge S S. A global implicit function theorem without initial point and its applications to control of non-affine systems of high dimensions. *J Math Anal Appl*, 2006, 313: 251–261
 - 19 Zhang Y J, Zhang J F, Liu X K. Implicit function based adaptive control of non-canonical form discrete-time nonlinear systems. *Automatica*, 2021, 129: 109629

Adaptive tracking control of discrete-time non-affine nonlinear systems with high-order time delays

YanJun ZHANG

School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

E-mail: yanjun@bit.edu.cn

Abstract This paper addresses the adaptive output-tracking control problem for a class of discrete-time non-affine nonlinear systems with high-order time delays, and proposes an implicit function-based adaptive output-feedback output-tracking control scheme. This scheme mainly solves two technical problems. One problem is constructing an implicit function equation solution-based adaptive control law using estimates of unknown parameters and future time signals. This control law overcomes the causal contradiction problem caused by the high-order time delays and achieves closed-loop stability and asymptotic output tracking. The other problem is proposing an iterative solution-based analytical adaptive control law that achieves closed-loop stability and practical output tracking. Finally, a simulation study verifies the effectiveness of the proposed control scheme.

Keywords adaptive control, non-affine nonlinearity, closed-loop stability, output tracking