



基于大偏差技术的子集排序最优仿真预算分配方法

肖辉¹, 王子淳¹, 寇纲^{2*}, 顾先明³, Loo Hay LEE⁴

1. 西南财经大学管理科学与工程学院, 成都 611130, 中国

2. 西南财经大学大数据研究院, 成都 611130, 中国

3. 西南财经大学数学学院, 成都 611130, 中国

4. Department of Industrial and Systems Engineering, National University of Singapore, Singapore 119077, Singapore

* 通信作者. E-mail: kougang@swufe.edu.cn

收稿日期: 2021–12–29; 修回日期: 2022–07–06; 接受日期: 2022–09–07; 网络出版日期: 2023–06–08

国家自然科学基金 (批准号: 71971176, 71725001, 71910107002) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: JBK2103010) 资助项目

摘要 排序选优方法已广泛应用于求解离散事件动态系统中的仿真优化问题, 但该类方法鲜有研究聚焦于子集排序问题的高效求解, 而子集排序问题广泛存在于智能制造、电气工程、供应链管理等众多领域. 本文针对 k 个备选方案的子集排序问题, 构建了以最大化子集正确排序概率为目标的仿真预算优化分配模型, 推导了该优化问题的渐进最优条件, 并提出了相应的序贯仿真算法来实现仿真预算的渐进最优分配规则. 数值实验结果表明, 本文所提出的算法显著地提高了子集排序问题的仿真优化效率.

关键词 离散事件动态系统, 仿真优化, 最优计量分配方法, 大偏差技术, 排序选优

1 引言

由异步、突发事件驱动状态演变的动态系统被称为离散事件动态系统, 它在智能电网、智能交通、能源互联网等领域具有广泛的应用^[1,2]. 随着离散事件动态系统复杂性的日益增加, 解析模型中的假设条件难以满足, 因此解析模型对复杂系统评估的准确性大幅度下降^[2,3]. 为了提高系统评估的准确性, 随机仿真方法被广泛应用于评估离散事件动态系统^[4,5]. 随机仿真方法的优点在于可以根据实际需要, 对系统动态变化的全过程进行更加准确的建模. 然而随着系统复杂度的增加, 系统仿真的时间也大幅度增加. 例如, Ho 等^[6]提到对由 20 个十字路口组成的交通网络的 24 小时动态过程仿真一次需要 2 小时, 对涡轮叶片进行一次挤压的三维有限元仿真需要 7 天. 此外, 仿真的随机性使得决策者通常需要对每一个备选方案进行多次重复仿真, 才能获得平稳的仿真输出. 因此, 研究如何提高仿真效率的排序选优方法成为随机仿真优化领域的研究热点之一^[7~9].

引用格式: 肖辉, 王子淳, 寇纲, 等. 基于大偏差技术的子集排序最优仿真预算分配方法. 中国科学: 信息科学, 2023, 53: 1147–1162, doi: 10.1360/SSI-2021-0440
Xiao H, Wang Z C, Kou G, et al. Optimal simulation budget allocation for subset ranking from a large deviation perspective (in Chinese). Sci Sin Inform, 2023, 53: 1147–1162, doi: 10.1360/SSI-2021-0440

现有排序选优文献中的方法大致可以分为三类: 无差异区域法 (indifference-zone, IZ)、信息价值法 (value of information procedure, VIP) 以及最优计量分配方法 (optimal computing budget allocation, OCBA). 无差异区域法假设最优方案的性能表现至少 δ 优于其他方案, 旨在找到一种可行的仿真预算分配规则, 以确保达到预先设定的正确选择概率, 其中 δ 表示值得检测的方案间最小均值差^[10~12]. 信息价值法运用贝叶斯 (Bayes) 后验分布来描述正确选择的概率, 基于决策理论, 通过最大化抽样信息价值, 得到最优仿真预算分配规则^[13,14]. 最优计量分配方法以最大化正确选择的概率为目标, 提出了基于方案方差与方案间均值差的仿真预算分配规则^[15,16]. Branke 等^[17] 对这 3 种方法进行比较发现: 3 种随机仿真方法中, 没有一种方法绝对优于另外两种方法. 基于 OCBA 在实际问题中卓越的性能表现, 近年来已有多位学者将该方法扩展并用于解决不同的仿真优化问题. 例如, 不同备选方案仿真输出之间存在相关性的问题^[18]、仿真输出分布服从任意分布的问题^[19]、多目标的仿真优化问题^[20]、有随机约束条件的仿真优化问题^[21,22]、机会成本损失的仿真优化问题^[23]、输入不确定性的仿真优化问题^[24~26]、仿真时间随机的仿真优化问题^[27]、最优子集的选择问题^[28~30]、备选方案的全排序问题^[31]. OCBA 在电子元件设计、绿色能源、港口运营等领域也得到了重要的应用^[32~36].

综上所述, 鲜有研究聚焦于子集排序问题的高效求解. 然而子集排序广泛存在于众多实际决策问题中, 例如, 互联网大数据推荐系统通常会根据用户的喜好对产品进行分组排序, 以实现产品的精准推荐^[37]. 医疗系统通过建立患者入院优先级决策模型, 实现患者的分级诊疗, 提高医疗资源的利用率和医院的整体服务水平^[38,39]. 在供应链管理领域中, 文献 [40] 将排序理论应用于工件生产调度问题, 研究工件分批加工及配送的最优策略. 在电气工程领域, 文献 [41] 针对模块化多电平换流器的调制问题, 以优化电容电压排序运算量为目标, 提出子模块分组排序的调制方法. 在再制造系统中, 需要根据回收材料的质量进行分级, 以此决定回购价格与再制造操作规划^[42~45].

基于子集排序问题的广泛应用, 本文针对随机环境下的子集排序问题进行研究. 本研究考虑性能表现未知且只能通过仿真评估获得的 k 个备选方案, 如何在有限仿真预算内根据仿真输出将方案准确地分为 r 个组间有序且组内无序的子集. 本文建立以最大化子集正确排序概率为目标的仿真预算分配优化模型, 基于大偏差技术推导了渐进最优条件, 并提出了相应的序贯仿真算法. 文献 [37] 提出了仿真输出服从正态分布情况下子集正确排序的仿真预算优化分配规则, 该方法需要在组间确定一个常数将各组分离. 该文献提出的仿真算法的性能表现对常数值的选择高度敏感. 本文将基于 OCBA 框架, 采用新的建模思路来开发更加严谨的仿真算法, 该方法不再需要确定组间的常数值, 从而使算法的性能更加高效稳健. 本文的主要创新体现在: (1) 采用了一个更严谨的理论推导过程来解决子集排序的预算优化分配问题; (2) 基于大偏差技术, 提出的渐进最优子集排序仿真预算分配规则适用于仿真输出服从任意分布的情形; (3) 提出了相应的序贯仿真算法, 通过数值实验和应用案例, 验证了本文所提出的最优预算分配规则能够显著地提高子集排序问题的仿真效率, 并显示了本文的算法优于包括文献 [37] 在内的其他算法.

本文结构安排如下: 第 2 节针对子集排序问题构建仿真预算优化分配模型, 第 3 节推导出模型的渐进最优条件并提出序贯仿真算法, 第 4 节将展示一系列数值实验的结果, 第 5 节将对全文进行总结.

2 问题描述

本文使用的符号如表 1 所示.

考虑一个包含了 k 个备选方案的有限集 Θ , 其中第 i 个备选方案性能表现的均值为 $\mu_i, \forall i = 1, 2, \dots, k$. μ_i 未知且只能通过仿真估计得到. 不失一般性, 本文假设 $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k$. 本研究

表 1 符号列表
Table 1 Notations

Notation	Interpretation
k	Total number of designs
Θ	Set of designs, $\Theta = \{1, 2, \dots, k\}$
r	Number of subsets, $r \in \{2, \dots, k\}$
S_p	True subset, $p \in \{1, 2, \dots, r\}$
\hat{S}_p	Estimated subset based on simulation output, $p \in \{1, 2, \dots, r\}$
m_p	Cardinal number of subset, $p \in \{1, 2, \dots, r\}$
n	Total number of simulation replications (budget)
n_i	Number of simulation replications allocated to design i
α_i	Proportion of the total simulation budget allocated to design i , i.e., $\alpha_i = n_i/n$
X_i^l	Output of the l th simulation replication for design i
\bar{X}_i	Sample mean of design i , i.e., $\bar{X}_i = 1/n_i \sum_{l=1}^{n_i} X_i^l$
μ_i	Unknown true mean of design i
σ_i^2	Unknown true variance of design i

的目标是将 k 个备选方案分为 r 个子集, $S_1 = \{1, 2, \dots, m_1\}, S_2 = \{m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2\}, \dots, S_r = \{\sum_{j=1}^{r-1} m_j + 1, \dots, k\}$, 任意子集的基数 $|S_p| = m_p, \forall p = 1, 2, \dots, r$, 并使得 $\mu_i < \mu_t, i \in S_p, t \in S_q, p < q, \forall p, q = 1, 2, \dots, r$. 为了更清晰地阐述子集, 给出定义如下.

定义 1 对于所有 k 个备选方案分为 r 个子集表示如下:

$$\underbrace{1, 2, \dots, m_1}_{S_1}, \underbrace{m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2}_{S_2}, \dots, \underbrace{\sum_{j=1}^{p-1} m_j + 1, \dots, \sum_{j=1}^{p-1} m_j + m_p}_{S_p}, \dots, \underbrace{\sum_{j=1}^{r-1} m_j + 1, \dots, k}_{S_r}.$$

注释 1 定义 1 表明了: 对 $\forall p, q = 1, 2, \dots, r$, 若 $p < q$, 子集 S_p 内任一备选方案性能表现的均值都小于子集 S_q 内任一备选方案性能表现的均值. 但各子集内备选方案不需要按照性能表现的均值大小排序.

因此, 子集正确排序 (subset ranking, SR) 的事件为

$$SR = \left\{ \bigcap_{p=1}^r \bigcap_{q=1}^r \left[\left(\max_{i \in S_p} \mu_i \right) < \left(\min_{t \in S_q} \mu_t \right) \right], p < q, |S_p| = m_p, |S_q| = m_q, \forall p, q = 1, 2, \dots, r \right\}. \quad (1)$$

仿真的随机性使得决策者通常需要对每一个备选方案进行多次重复仿真, 才能获得平稳的仿真输出. 然而实际决策问题中仿真预算有限, 因此需要对有限的仿真预算进行优化分配使得子集正确排序的概率最大. 记 $\alpha_i, \forall i = 1, 2, \dots, k$ 为分配给第 i 个备选方案的仿真预算 n_i 占仿真总预算 n 的比例, 即 $\alpha_i = n_i/n$, 且 $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$. 令 $(X_i^1, X_i^2, \dots, X_i^{n_i})$ 表示通过仿真获得的备选方案 i 的样本, 样本均值为 $\bar{X}_i = 1/n_i \sum_{l=1}^{n_i} X_i^l$. 记 $\bar{X}_{(i)}$ 为备选方案 i 样本均值的次序统计量, 有 $\bar{X}_{(1)} < \bar{X}_{(2)} < \dots < \bar{X}_{(k)}$. 因此根据仿真样本估计的子集排序表示如下:

$$\underbrace{(1), (2), \dots, (m_1)}_{\hat{S}_1}, \dots, \underbrace{(\sum_{j=1}^{p-1} m_j + 1), \dots, (\sum_{j=1}^{p-1} m_j + m_p)}_{\hat{S}_p}, \dots, \underbrace{(\sum_{j=1}^{r-1} m_j + 1), \dots, (k)}_{\hat{S}_r}.$$

因此, 子集正确排序的事件为: 通过仿真样本估计得到的子集 \hat{S}_p 与真实子集 S_p 相等, 即 $\hat{S}_p = S_p, \forall p = 1, 2, \dots, r$. 子集正确排序的概率 (probability of correct subset ranking, PCR) 为

$$\text{PCR} = P \left\{ \bigcap_{p=1}^r (\hat{S}_p = S_p), |S_p| = m_p, \forall p = 1, 2, \dots, r \right\}. \quad (2)$$

由于 PCR 的解析式未知, 尽管能够通过蒙特卡洛 (Monte Carlo) 仿真获得其估计值, 但是计算成本非常昂贵. 因此本文对 PCR 进行简化, 降低其计算复杂度, 从而节省仿真成本. 根据定义 1, 可知子集正确排序表述为: 若 $p < q, \forall p, q = 1, 2, \dots, r$, 子集 S_p 内的任一备选方案性能表现的样本均值都小于子集 S_q 内的任一备选方案性能表现的样本均值, 因此, 式 (2) 可进一步表示为

$$\text{PCR} = P \left\{ \bigcap_{i \in S_p} \bigcap_{t \in S_q} (\bar{X}_i \leq \bar{X}_t), p < q, |S_p| = m_p, |S_q| = m_q, \forall p, q = 1, \dots, r \right\}. \quad (3)$$

综上, 本文的预算优化分配模型可表示为

$$\begin{aligned} & \max \quad \text{PCR} \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, k, \end{aligned} \quad (4)$$

其中, α_i 表示分配给备选方案 i 的仿真预算比例.

在求解优化模型 (4) 之前, 本文列出以下 3 个假设.

假设 1 任一备选方案 i 的仿真输出样本独立同分布, 同时任意两个备选方案 i 和 t 的仿真输出样本之间也相互独立.

假设 1 在仿真优化问题中是一个经典假设^[15], 该假设使得本文在求解最优分配规则时更加容易处理. 基于该假设有 $\mu_i = E[X_i^t], \sigma_i^2 = \text{Var}[X_i^t]$.

假设 2 $\mu_i - \mu_t \neq 0, i, t \in \{1, \dots, k\}, i \neq t$.

假设 2 使得仿真预算能够按照最优分配规则分配至所有备选方案, 而不会被某两个均值相等的备选方案全部占有, 确保当仿真预算趋于无穷大时, 仿真的正确率趋于 1.

令 $\Lambda_i(\theta) = \log E[\exp(\theta X_i)]$ 表示 X_i 的对数矩母函数, 令 $I_i(x) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} (\theta x - \Lambda_i(\theta))$ 表示 Λ_i 的速率方程. 记 Λ_i 的有效域为 $D_{\Lambda_i} = \{\theta \in \mathbb{R} : \Lambda_i(\theta) < \infty\}$. 记 $\mathcal{F}_i = \{\Lambda_i'(\theta) : \theta \in D_{\Lambda_i}^\circ\}$, 其中 $D_{\Lambda_i}^\circ$ 表示集合 D_{Λ_i} 的内部, $\Lambda_i'(\theta)$ 表示函数 Λ_i 在 θ 处的导数. 令 $\mu_{\min} = \min_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} \mu_i, \mu_{\max} = \max_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} \mu_i$. 本文作出如下假设 3.

假设 3 闭区间 $[\mu_{\min}, \mu_{\max}] \subset \bigcap_{i=1}^k \mathcal{F}_i^\circ$.

由文献 [19] 可知, 假设 3 使得 \bar{X}_i 能够落在区间 $[X_{\min}, X_{\max}]$ 内. 由于样本均值是一个随机变量, 因此事件 $\bar{X}_i > \bar{X}_t, i \in S_p, t \in S_q$ 不是确定事件, 也具有随机性. 假设 3 也使得 $P(\bar{X}_i > \bar{X}_t) > 0, i \in S_p, t \in S_q$ 始终成立. 这一假设条件在常见的分布族中都成立, 如正态分布、伯努利 (Bernoulli) 分布、泊松 (Poisson) 分布和伽马 (Gamma) 分布等.

在优化模型 (4) 中, 为了进一步降低计算复杂度, 同时也能更快速地实现 PCR 的最大化, 本文将对 PCR 进行放缩来寻找一个精细的下界作为子集正确排序概率的近似 (approximate probability of correct subset ranking, APCR).

文献 [37] 通过在子集间插入参数 c_i 的方法来构建下界, 以达到简化原目标函数的目的. 最终得到原目标函数下界的表达式如下:

$$\text{APCS} = \prod_{i=1}^r \prod_{j \in S_i} P \{c_{i-1} \leq \tilde{J}_j \leq c_i\},$$

其中, i 表示第 i 个子集 S_i , 共有 r 个子集, j 表示子集 S_i 中的一个备选方案, \tilde{J}_j 表示第 j 个方案真实值的后验估计值. c_i 表示划分子集界线的参数, 为一组常数. 由于 c_i 通过启发式方法获得, 且 APCS 对 c_i 的变化异常敏感, 因此这种构建下界的方法缺乏稳定性. 本文构建了一个更精细的下界, 如定理 1 所示.

定理 1 式 (3) 中子集正确排序的概率 PCR 的下界可表示为

$$\begin{aligned} \text{APCR} = 1 - & \sum_{i=1}^{m_1-1} \exp(-nG_{i,m_1}) - \sum_{p=2}^{r-1} \sum_{i=h_{p-1}+1}^{h_p} \exp(-nG_{i,h_{p-1}}) \\ & - \sum_{p=2}^{r-1} \sum_{i=h_{p-1}+1}^{h_p} \exp(-nG_{i,h_p}) - \sum_{i=h_{r-1}+1}^k \exp(-nG_{i,h_{r-1}}), \end{aligned} \tag{5}$$

其中, $h_p = \sum_{j=1}^p m_j, \forall p = 2, 3, \dots, r-1$. $G_{i,m_1} = \alpha_i I_i(x(\alpha_i, \alpha_{m_1})) + \alpha_{m_1} I_{m_1}(x(\alpha_i, \alpha_{m_1}))$, $G_{i,h_p} = \alpha_i I_i(x(\alpha_i, \alpha_{h_p})) + \alpha_{h_p} I_{h_p}(x(\alpha_i, \alpha_{h_p}))$, $I_i(x) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} (\theta x - \Lambda_i(\theta)), \forall i = 1, 2, \dots, k$.

证明 运用 Bonferroni 不等式对式 (4) 进行放缩 [15], 以得到以下下界:

$$\begin{aligned} \text{PCR} & \geq P \left\{ \left[\bigcap_{i=1}^{m_1-1} (\bar{X}_i \leq \bar{X}_{m_1}) \right] \cap \left[\bigcap_{i=h_{r-1}+1}^k (\bar{X}_i \geq \bar{X}_{h_{r-1}}) \right] \right. \\ & \quad \left. \cap \left[\bigcap_{p=2}^{r-1} \left[\left(\bigcap_{i=h_{p-1}+1}^{h_p} (\bar{X}_i \geq \bar{X}_{h_{p-1}}) \right) \cap \left(\bigcap_{i=h_{p-1}+1}^{h_p} (\bar{X}_i \leq \bar{X}_{h_p}) \right) \right] \right] \right\} \\ & \geq 1 - P \left\{ \left[\bigcap_{i=1}^{m_1-1} (\bar{X}_i \leq \bar{X}_{m_1}) \right]^C \right\} - P \left\{ \left[\bigcap_{i=h_{r-1}+1}^k (\bar{X}_i \geq \bar{X}_{h_{r-1}}) \right]^C \right\} \\ & \quad - \sum_{p=2}^{r-1} P \left\{ \left[\left(\bigcap_{i=h_{p-1}+1}^{h_p} (\bar{X}_i \geq \bar{X}_{h_{p-1}}) \right) \cap \left(\bigcap_{i=h_{p-1}+1}^{h_p} (\bar{X}_i \leq \bar{X}_{h_p}) \right) \right]^C \right\} \\ & = 1 - P \left\{ \bigcup_{i=1}^{m_1-1} (\bar{X}_i \geq \bar{X}_{m_1}) \right\} - P \left\{ \bigcup_{i=h_{r-1}+1}^k (\bar{X}_i \leq \bar{X}_{h_{r-1}}) \right\} \\ & \quad - \sum_{p=2}^{r-1} P \left\{ \left[\left(\bigcup_{i=h_{p-1}+1}^{h_p} (\bar{X}_i \leq \bar{X}_{h_{p-1}}) \right) \cup \left(\bigcup_{i=h_{p-1}+1}^{h_p} (\bar{X}_i \geq \bar{X}_{h_p}) \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

经过化简, 最终得到如下不等式:

$$\begin{aligned} \text{PCR} & \geq 1 - \sum_{i=1}^{m_1-1} P \{ \bar{X}_i \geq \bar{X}_{m_1} \} - \sum_{p=2}^{r-1} \sum_{i=h_{p-1}+1}^{h_p} P \{ \bar{X}_i \leq \bar{X}_{h_{p-1}} \} \\ & \quad - \sum_{p=2}^{r-1} \sum_{i=h_{p-1}+1}^{h_p} P \{ \bar{X}_i \geq \bar{X}_{h_p} \} - \sum_{i=h_{r-1}+1}^k P \{ \bar{X}_i \leq \bar{X}_{h_{r-1}} \}. \end{aligned} \tag{6}$$

根据文献 [30] 可知, 对于任意两个备选方案 $i, t \in \{1, 2, \dots, k\}$, 若 $\mu_i < \mu_t$, 则 $P(\bar{X}_t \leq \bar{X}_i)$ 可以放缩得到一个上界, 即

$$P(\bar{X}_t \leq \bar{X}_i) \leq \exp(-nG_{i,t}), \tag{7}$$

其中, n 表示仿真总预算.

本文根据上界 (7), 进一步对于式 (6) 进行放缩来寻找一个更精细的下界, 从而简化目标函数且求得一个渐进最优条件. 于是, 将式 (7) 代进式 (6) 得

$$\begin{aligned} \text{PCR} &\geq 1 - \sum_{i=1}^{m_1-1} \exp(-nG_{i,m_1}) - \sum_{p=2}^{r-1} \sum_{i=h_{p-1}+1}^{h_p} \exp(-nG_{i,h_{p-1}}) \\ &\quad - \sum_{p=2}^{r-1} \sum_{i=h_{p-1}+1}^{h_p} \exp(-nG_{i,h_p}) - \sum_{i=h_{r-1}+1}^k \exp(-nG_{i,h_{r-1}}) \\ &= \text{APCR}. \end{aligned} \tag{8}$$

基于上述分析, 本文建立一个目标函数为最大化子集正确排序近似概率的仿真预算分配规则的优化模型:

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{APCR} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \tag{9}$$

3 最优子集排序策略

本节将推导出优化模型 (9) 的渐进最优条件, 并给出仿真输出服从正态分布下最优条件的显式表达, 最后提出了子集正确排序的序贯算法.

3.1 渐进最优条件

根据文献 [30], $\exp(-nG_{i,j})$ 是一个严格的凸函数, 进而 APCR 是一个严格的凹函数, 优化模型 (9) 是一个凸优化问题, 因此其一阶条件即为模型的最优条件 [46]. 于是本文运用卡罗需 - 库恩 - 塔克 (Karush-Kuhn-Tucker, KKT) 条件来求解该优化模型.

在求解最优条件之前, 此处需要给出如下引理.

引理1 ([30]) 对于 $u_j, v_j, w_j, z_j \in \mathbb{R}$, 其中 $v_j, w_j > 0, v_j, z_j < 0, j = 1, 2, \dots, m$. 若对 $x \in \mathbb{R}, m_1, m_2 \geq 1$,

$$\sum_j^{m_1} u_j \exp(v_j x) = \sum_j^{m_2} w_j \exp(z_j x),$$

则当 $x \rightarrow +\infty$ 时有

$$\max_{j \in \{1, \dots, m_1\}} v_j = \max_{j \in \{1, \dots, m_2\}} z_j.$$

定理2 当仿真总预算 n 趋于无穷时, 模型 (9) 在满足下列条件下, 其目标函数达到渐进最优:

$$G_{a,m_1} = \min \{G_{h_{p-1},i}, G_{i,h_p}\} = G_{h_{r-1},b}, \tag{10}$$

其中, $a \in S_1, i \in S_p, b \in S_r, h_p = \sum_{j=1}^p m_j, \forall p = 2, 3, \dots, r - 1$.

证明 令 \mathcal{F} 为带有拉格朗日 (Lagrange) 乘子的拉格朗日函数, 于是,

$$\mathcal{F} = \text{APCR} - \lambda \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i - 1 \right), \quad (11)$$

可得 KKT 条件如下:

$$\forall a \in S_1, \text{ i.e., } a = 1, 2, \dots, m_1,$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_a} = n \exp(-nG_{a,m_1}) \frac{\partial G_{a,m_1}}{\partial \alpha_a} - \lambda = n \exp(-nG_{a,m_1}) I_a(x(\alpha_a, \alpha_{m_1})) - \lambda = 0, \quad (12)$$

$$\forall i \in S_p, \text{ i.e., } i = m_{p-1} + 1, m_{p-1} + 2, \dots, m_{p-1} + m_p, p = 2, \dots, r-1,$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_i} = n \exp(-nG_{i,h_{p-1}}) I_i(x(\alpha_i, \alpha_{h_{p-1}})) + n \exp(-nG_{i,h_p}) I_i(x(\alpha_i, \alpha_{h_p})) - \lambda = 0, \quad (13)$$

$$\forall b \in S_r, \text{ i.e., } b = \sum_{j=1}^{r-1} m_j + 1, \sum_{j=1}^{r-1} m_j + 2, \dots, k,$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_b} = n \exp(-nG_{h_{r-1},b}) I_b(x(\alpha_{h_{r-1}}, \alpha_b)) - \lambda = 0, \quad (14)$$

其中, $h_p = \sum_{j=1}^p m_j, \forall p = 2, 3, \dots, r-1$.

由于子集所处位置不同, 与该子集中备选方案进行比较的备选方案个数不同, 因此本文将备选方案集合分为三类: 第一个子集 S_1 , 最后一个子集 S_r , 以及中间其他子集 $S_p, p = 2, 3, \dots, r-1$. 考虑任意备选方案两两比较时, 存在以下 6 种情形.

情形 1: 对 $\forall a, a' \in S_1, \text{ i.e., } a, a' = 1, 2, \dots, m_1, \text{ 且 } a \neq a',$ 根据式 (12) 可得

$$n \exp(-nG_{a,m_1}) I_a(x(\alpha_a, \alpha_{m_1})) - \lambda = n \exp(-nG_{a',m_1}) I_{a'}(x(\alpha_{a'}, \alpha_{m_1})) - \lambda,$$

化简得

$$G_{a,m_1} = G_{a',m_1}. \quad (15)$$

情形 2: 对于 $\forall i, i' \in S_p, \text{ i.e., } i, i' = m_{p-1} + 1, m_{p-1} + 2, \dots, m_{p-1} + m_p, \forall p = 2, 3, \dots, r-1, \text{ 且 } i \neq i',$ 根据式 (13) 可得

$$\begin{aligned} & n \exp(-nG_{i,h_{p-1}}) I_i(x(\alpha_i, \alpha_{h_{p-1}})) + n \exp(-nG_{i,h_p}) I_i(x(\alpha_i, \alpha_{h_p})) - \lambda \\ & = n \exp(-nG_{i',h_{p-1}}) I_{i'}(x(\alpha_{i'}, \alpha_{h_{p-1}})) + n \exp(-nG_{i',h_p}) I_{i'}(x(\alpha_{i'}, \alpha_{h_p})) - \lambda, \end{aligned}$$

化简得

$$\begin{aligned} & \exp(-nG_{i,h_{p-1}}) I_i(x(\alpha_i, \alpha_{h_{p-1}})) + \exp(-nG_{i,h_p}) I_i(x(\alpha_i, \alpha_{h_p})) \\ & = \exp(-nG_{i',h_{p-1}}) I_{i'}(x(\alpha_{i'}, \alpha_{h_{p-1}})) + \exp(-nG_{i',h_p}) I_{i'}(x(\alpha_{i'}, \alpha_{h_p})). \end{aligned}$$

由引理 1 得

$$\min \{G_{i,h_{p-1}}, G_{i,h_p}\} = \min \{G_{i',h_{p-1}}, G_{i',h_p}\}. \quad (16)$$

情形 3: 对于 $\forall b, b' \in S_r, \text{ i.e., } b, b' = h_{r-1} + 1, h_{r-1} + 2, \dots, k, \text{ 其中 } h_{r-1} = \sum_{j=1}^{r-1} m_j, \text{ 且 } b \neq b',$ 根据式 (14) 可得

$$n \exp(-nG_{h_{r-1},b}) I_b(x(\alpha_{h_{r-1}}, \alpha_b)) - \lambda = n \exp(-nG_{h_{r-1},b'}) I_{b'}(x(\alpha_{h_{r-1}}, \alpha_{b'})) - \lambda,$$

化简得

$$G_{h_{r-1},b} = G_{h_{r-1},b'}. \quad (17)$$

情形 4: 对于 $\forall a \in S_1, \forall i \in S_p, i = m_{p-1} + 1, m_{p-1} + 2, \dots, m_{p-1} + m_p, \forall p = 2, 3, \dots, r - 1$, 根据式 (12) 和 (13) 可得

$$\begin{aligned} & n \exp(-nG_{a,m_1})I_a(x(\alpha_a, \alpha_{m_1})) - \lambda \\ &= n \exp(-nG_{i,h_{p-1}})I_i(x(\alpha_i, \alpha_{h_{p-1}})) + n \exp(-nG_{i,h_p})I_i(x(\alpha_i, \alpha_{h_p})) - \lambda. \end{aligned}$$

由引理 1 得

$$G_{a,m_1} = \min \{G_{i,h_{p-1}}, G_{i,h_p}\}. \quad (18)$$

情形 5: 对于 $\forall a \in S_1, \forall b \in S_r$, 根据式 (12) 和 (14) 可得

$$n \exp(-nG_{a,m_1})I_a(x(\alpha_a, \alpha_{m_1})) - \lambda = n \exp(-nG_{h_{r-1},b})I_b(x(\alpha_{h_{r-1}}, \alpha_b)) - \lambda,$$

化简得

$$G_{a,m_1} = G_{h_{r-1},b}. \quad (19)$$

情形 6: 对于 $\forall i \in S_p, i = m_{p-1} + 1, m_{p-1} + 2, \dots, m_{p-1} + m_p, p = 2, 3, \dots, r - 1, \forall b \in S_r$, 根据式 (13) 和 (14) 可得

$$\begin{aligned} & n \exp(-nG_{i,h_{p-1}})I_i(x(\alpha_i, \alpha_{h_{p-1}})) + n \exp(-nG_{i,h_p})I_i(x(\alpha_i, \alpha_{h_p})) - \lambda \\ &= n \exp(-nG_{h_{r-1},b})I_b(x(\alpha_{h_{r-1}}, \alpha_b)) - \lambda. \end{aligned}$$

由引理 1 得

$$\min \{G_{i,h_{p-1}}, G_{i,h_p}\} = G_{h_{r-1},b}. \quad (20)$$

综上, 由式 (15)~(20) 可得

$$\begin{aligned} G_{1,m_1} &= G_{2,m_1} = \dots = G_{m_1-1,m_1} \\ &= \min \{G_{h_{p-1},h_{p-1}+1}, G_{h_{p-1}+1,h_p}\} = \dots = \min \{G_{h_{p-1},h_p-1}, G_{h_p-1,h_p}\} \\ &= G_{h_{r-1},h_{r-1}+1} = \dots = G_{h_{r-1},k}, \end{aligned}$$

其中, $h_p = \sum_{j=1}^p m_j, \forall p = 2, 3, \dots, r - 1$.

注释 2 在定理 2 中, $G_{i,t}$ 表示针对方案 i 和 t 比较发生错误概率收敛到 0 的速率. $G_{i,t}$ 越大意味着收敛速率越大. 由于本文不考虑子集 S_p 内的方案排序, 因此对于任意备选方案 $i \in S_p$, 只需与子集 S_p 两端的备选方案比较, 而不需与子集 S_p 内部的备选方案比较. 定理 2 表示最优仿真预算分配规则使得备选方案比较发生错误概率收敛至 0 的速率都相等.

3.2 正态分布下的渐进最优条件

假设备选方案 i 的仿真输出服从正态分布, 即 $X_i^l \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \dots, k$. 由文献 [30] 可知

$$G_{i,t} = \frac{(\mu_i - \mu_t)^2}{2(\sigma_i^2/\alpha_i + \sigma_t^2/\alpha_t)}. \quad (21)$$

对于 $a \in S_1, i \in S_p, p = 2, 3, \dots, r - 1, b \in S_r$, 此时定理 2 中最优条件为

$$\frac{(\mu_a - \mu_{m_1})^2}{2\left(\frac{\sigma_a^2}{\alpha_a} + \frac{\sigma_{m_1}^2}{\alpha_{m_1}}\right)} = \min \left\{ \frac{(\mu_i - \mu_{h_{p-1}})^2}{2\left(\frac{\sigma_i^2}{\alpha_i} + \frac{\sigma_{h_{p-1}}^2}{\alpha_{h_{p-1}}}\right)}, \frac{(\mu_i - \mu_{h_p})^2}{2\left(\frac{\sigma_i^2}{\alpha_i} + \frac{\sigma_{h_p}^2}{\alpha_{h_p}}\right)} \right\} = \frac{(\mu_{h_{r-1}} - \mu_k)^2}{2\left(\frac{\sigma_{h_{r-1}}^2}{\alpha_{h_{r-1}}} + \frac{\sigma_k^2}{\alpha_k}\right)}, \quad (22)$$

其中, $h_p = \sum_{j=1}^p m_j, \forall p = 2, 3, \dots, r - 1$.

当子集数量 $r = 2$ 时, 式 (22) 可以退化为文献 [29] 中选择最优子集的最优条件 (a), 详见推论 1.

推论 1 当 $r = 2, |S_1| = m_1 = m$ 时, 即对所有备选方案进行全排序时, 式 (22) 进一步表示如下:

$$\frac{(\mu_i - \mu_m)^2}{\left(\frac{\sigma_i^2}{\alpha_i} + \frac{\sigma_m^2}{\alpha_m}\right)} = \frac{(\mu_t - \mu_m)^2}{\left(\frac{\sigma_t^2}{\alpha_t} + \frac{\sigma_m^2}{\alpha_m}\right)}, \quad (23)$$

其中, $i, t \neq m$. 式 (23) 与文献 [29] 中最优条件 (a) 相同.

当子集数量 r 与备选方案数量 k 相等时, 式 (22) 可以退化为文献 [31] 中全排序问题的最优条件, 详见推论 2.

推论 2 当 $r = k, |S_p| = m_p = 1, \forall p = 1, 2, \dots, r$ 时, 即对所有备选方案进行全排序时, 式 (22) 进一步表示如下:

$$\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\left(\frac{\sigma_1^2}{\alpha_1} + \frac{\sigma_2^2}{\alpha_2}\right)} = \min \left\{ \frac{(\mu_{i-1} - \mu_i)^2}{\left(\frac{\sigma_{i-1}^2}{\alpha_{i-1}} + \frac{\sigma_i^2}{\alpha_i}\right)}, \frac{(\mu_i - \mu_{i+1})^2}{\left(\frac{\sigma_i^2}{\alpha_i} + \frac{\sigma_{i+1}^2}{\alpha_{i+1}}\right)} \right\} = \frac{(\mu_{k-1} - \mu_k)^2}{\left(\frac{\sigma_{k-1}^2}{\alpha_{k-1}} + \frac{\sigma_k^2}{\alpha_k}\right)}, \quad (24)$$

其中, $i = 2, 3, \dots, k - 2$. 式 (24) 与文献 [31] 中正态分布假设下的最优条件相同.

因此, 文献 [29, 31] 的结论可以看作本研究的特例.

3.3 子集排序问题的仿真算法

为了验证定理 2 中最优条件的有效性, 本小节提出了子集正确排序问题的序贯算法. 由于备选方案真实的性能表现是未知的, 因此需要对每个备选方案在初始阶段进行 n_0 次仿真并基于初始的仿真输出估计 $G_{i,t}$. 之后的每一次仿真预算分配, 算法都将仿真预算增量 Δ 平均分配给使得 $G_{i,t}$ 最小的方案 i^* 和 t^* , G_{i^*,t^*} 表示与最优条件差距最大的速率. 由于 $\partial G_{i,t} / \partial \alpha_i = I_i(x(\alpha_i, \alpha_t)) > 0, \forall i, t = 1, 2, \dots, k$, 因此 $G_{i,t}$ 是一个单调递增函数. 随着 α_i 和 α_t 的增大, G_{i^*,t^*} 也逐渐增大, 进而 G_{i^*,t^*} 与最优条件的差距逐渐缩小. $G_{i,t}$ 的估计步骤如下^[19].

第一步: 计算 $\Lambda_i(\theta)$ 和 $I_i(x(\alpha_i, \alpha_t))$ 的估计值.

$$\hat{\Lambda}_i(\theta) = \log \left(\frac{1}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \exp(\theta X_i^l) \right), \quad (25)$$

$$\hat{I}_i(x(\alpha_i, \alpha_t)) = \sup_{\theta} (\theta x - \hat{\Lambda}_i(\theta)). \quad (26)$$

第二步: 求解 $x(\alpha_i, \alpha_j)$ 的估计值. 由于 $I_i(x(\alpha_i, \alpha_t)) = \sup_{\theta} (\theta x - \Lambda_i(\theta))$ 是一个严格的凸函数, 因此 $I_i(x)$ 在 θ^* 处取到上确界的条件为

$$x = \Lambda_i'(\theta) = \frac{\sum_{l=1}^{n_i} X_i^l \exp(\theta X_i^l)}{\sum_{l=1}^{n_i} \exp(\theta X_i^l)}, \quad (27)$$

于是有 $I_i(x(\alpha_i, \alpha_t)) = \theta_i^* x - \Lambda_i(\theta_i^*)$ 且 $I'_i(x(\alpha_i, \alpha_t)) = \theta_i^*$. 令 $\hat{\theta}_i$ 表示 θ_i^* 的仿真估计值, 则 $x(\alpha_i, \alpha_j)$ 的估计值 $\hat{x}(\alpha_i, \alpha_j)$ 可以通过下式求解:

$$\alpha_i \hat{I}'_i(x(\alpha_i, \alpha_t)) + \alpha_t \hat{I}'_t(x(\alpha_i, \alpha_t)) = 0. \quad (28)$$

第三步: 计算 $G_{i,t}$ 的估计值.

$$\hat{G}_{i,t} = \alpha_i \hat{I}'_i(x(\alpha_i, \alpha_t)) + \alpha_t \hat{I}'_t(x(\alpha_i, \alpha_t)). \quad (29)$$

注释3 若备选方案的仿真输出分布已知, 则可运用仿真输出值估计 $\hat{G}_{i,t}$. 例如, 当已知备选方案的仿真输出服从正态分布时, $\hat{G}_{i,t}$ 可以直接通过式 (21) 用方案 i 与 t 的样本均值差以及方案的样本方差计算得到.

序贯算法 OCBASR+ 如算法 1 所示.

算法 1 OCBASR+

输入: Total number of designs k , total number of simulation replications n , the initial simulation replication number n_0 , the incremental simulation replication number Δ , number of subsets r , and cardinal number of subset $m_p, \forall p=1, 2, \dots, r$;
 1: Initialize: iteration counter $\beta \leftarrow 0, n_i^\beta \leftarrow n_0$, calculate $\alpha_i, \forall i \in \Theta = \{1, \dots, k\}$, and calculate the required $\hat{G}_{i,t}$ according to Theorem 2;
 2: **while** $\sum_{i=1}^k n_i^\beta \leq n$ **do**
 3: Simulation budget increments: locate $\hat{G}_{i^*, t^*} = \arg \min_{i, t \in \Theta} \hat{G}_{i,t}$ and allocate $\Delta/2$ to design i^* and t^* , respectively;
 4: Update: recalculate $\hat{G}_{i,t}$ based on new simulation output: for $i^*, t^*, n_{i^*}^{\beta+1} \leftarrow n_{i^*}^\beta + \Delta/2, n_{t^*}^{\beta+1} \leftarrow n_{t^*}^\beta + \Delta/2$, for other designs, $n_{i^*}^{\beta+1} \leftarrow n_{i^*}^\beta$;
 5: $\beta \leftarrow \beta + 1$;
 6: **end while**
输出: Result of subset ranking.

算法中 n_i^β 表示截至第 β 次循环, 累计分配给第 i 个方案的仿真预算. 在算法初始化阶段, 确定合适的初始仿真次数 n_0 以及仿真预算增量 Δ 的取值十分重要. 初始仿真次数 n_0 的取值过小, 对备选方案性能表现的初始估计较差, 使得速率 $\hat{G}_{i,t}$ 的计算误差较大, 导致预算增量分配出现误差, 进而影响仿真效率; 然而初始仿真次数 n_0 的取值过大, 会在不需进行过多比较的备选方案间浪费仿真预算, 从而影响仿真效率. 同时, Δ 取值过小将会使得算法的迭代次数过多, 计算成本较高; 而 Δ 取值过大会在分配预算增量阶段对某些备选方案分配过多仿真预算.

4 数值实验

4.1 算法对比实验

本小节通过一系列数值实验, 验证了本文提出的 OCBASR+ 算法的有效性. 与以下 5 种算法进行对比实验.

平均分配算法 (equal allocation, EA): EA 算法将仿真预算 n 平均分配到每个备选方案, 即 $\alpha_i = 1/k, i = 1, 2, \dots, k$. EA 算法是最简单的分配方式, 它可以作为其他算法比较的基准^[15].

方差比例算法 (proportional to variance, PTV): PTV 算法也是仿真领域中常被用于比较的算法^[47]. 在数值实验中, PTV 算法通过序贯仿真实现. 每个备选方案初始都有 n_0 个仿真预算, 下一次迭代中的仿真预算比例与其样本方差 s_i^2 成反比, 即 $\alpha_1/s_1^2 = \alpha_2/s_2^2 = \dots = \alpha_k/s_k^2$.

表 2 数值实验参数设定
Table 2 Parameters for numerical experiments

Experiment number	k	r	m_p	Output distribution
1	30	3	$m_1 = m_2 = m_3 = 10$	$N(i, 8^2)$
2	30	3	$m_1 = m_2 = m_3 = 10$	$N(i, ((2i + 3)/4)^2)$
3	30	3	$m_1 = 8, m_2 = 10, m_3 = 12$	$N(i, 8^2)$
4	30	3	$m_1 = 8, m_2 = 10, m_3 = 12$	$N(i, ((2i + 3)/4)^2)$
5	30	5	$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 6$	$N(i, ((2i + 3)/4)^2)$
6	30	5	$m_1 = 3, m_2 = 6, m_3 = 9, m_4 = 7, m_5 = 5$	$N(i, ((2i + 3)/4)^2)$
7	50	4	$m_1 = 5, m_2 = 10, m_3 = 30, m_4 = 5$	$N(i, 8^2)$

无差异区域算法 (IZ): 本文选取的 IZ 算法来自文献 [11].

信息价值算法 (VIP): 本文选取的 VIP 算法来自文献 [13] 中的“LL(b)”算法.

OCBASRmp 算法: 该算法由文献 [37] 提出, OCBASRmp 算法每次仿真迭代中的预算分配比例为

$$\frac{N_i}{N_t} = \frac{\sigma_i^2 / \min((c_p - \bar{X}_i)^2, (c_{p-1} - \bar{X}_i)^2)}{\sigma_t^2 / \min((c_q - \bar{X}_t)^2, (c_{q-1} - \bar{X}_t)^2)},$$

其中, $i \in S_p, t \in S_q$, 常数 $c_p = \frac{\bar{X}_{h_{p-1}} + \bar{X}_{h_{p-1}+1}}{2}, h_{p-1} = \sum_{j=1}^{p-1} m_j$.

为了比较各算法的性能, 本文选取子集正确排序概率 PCR 的值作为衡量标准, 本文设置了一系列实验, 参数设置如表 2 所示.

实验 1~7 设置初始仿真次数 $n_0 = 20$ 和预算增量 $\Delta = 10$. PCR 的值由计算 2000 次独立重复实验中子集正确排序的频率值得到. 图 1~7 展示了 6 种选择算法在实验 1~7 中的比较结果.

从图 1~7 发现, 在所有实验中, 虽然文献 [37] 提出的 OCBASRmp 算法表现优于 IZ 算法、VIP 算法、EA 算法以及 PTV 算法, 但是本文提出的 OCBASR+ 算法表现最好. 在无差异区间法和信息价值法的相关文献中, 目前还没有研究针对子集排序问题提出相应算法. 对比实验选取的 IZ 算法和 VIP 算法是针对选择最优备选方案问题的算法, 由于其算法机制与子集排序问题不匹配, 因此 IZ 算法和 VIP 算法在该实验中表现甚至不如 EA 算法. 当 PCR 的值达到 0.9 时, 6 种算法所需仿真预算量如表 3 所示. 由表 3 可知, PCR 的值达到 0.9 时, OCBASR+ 算法消耗的仿真预算相比起 OCBASRmp 算法在实验 1~7 中分别节省了 500, 1040, 520, 530, 2480, 1690, 400 次仿真预算. 因此表明, 与文献 [37] 相比, 本文提出的 OCBASR+ 算法提高了子集排序问题的仿真效率.

4.2 应用案例

本文考虑再制造系统中的一个应用案例. 制造系统可通过回收报废产品和再制造业务提高可持续性, 但其面临着回收材料的质量不确定性问题, 从而影响回购定价和再制造规划, 因此回收材料的质量分级是再制造业务的一个关键挑战 [42~44]. 材料分级与排序的依据是回收材料的质量评估与公司政策 [44]. 由于对回收材料的物理检测需完全拆卸产品, 因此材料的质量评估耗时费力, 甚至具有破坏性. 因此, 本研究考虑如何尽量减少拆卸检测的次数, 同时又能准确地实现材料质量分级. 假设现在有 k 类具有质量不确定性的材料等待回收. 由文献 [45] 可知, 回收材料的质量不确定性可由一个介于 0 和 1 之间且概率分布已知的连续随机变量来建模. 本文假设第 i 类材料的不确定性质量为 $\pi_i \sim U(l_i, u_i), \forall i = 1, 2, \dots, k$. 问题的目标是在有限的检测次数内最大化产品质量分级的正确性.

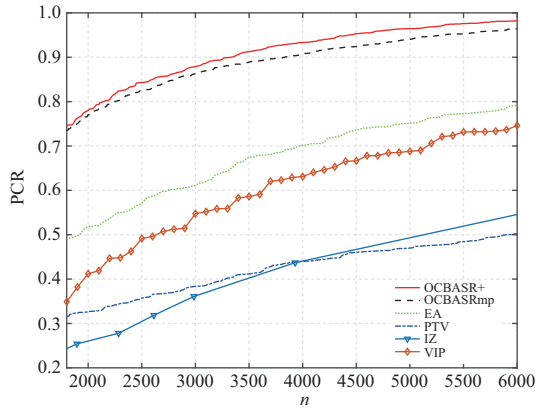


图 1 实验 1 的比较结果

Figure 1 Comparison result for experiment 1

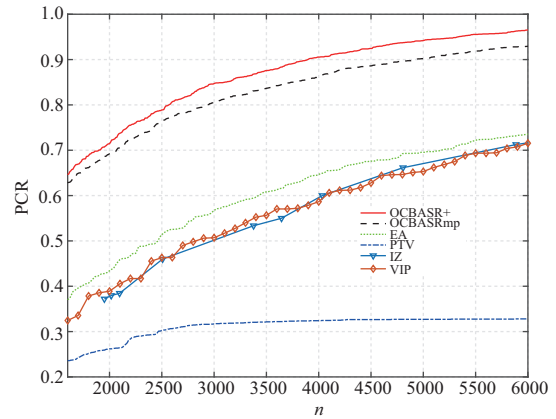


图 2 实验 2 的比较结果

Figure 2 Comparison result for experiment 2

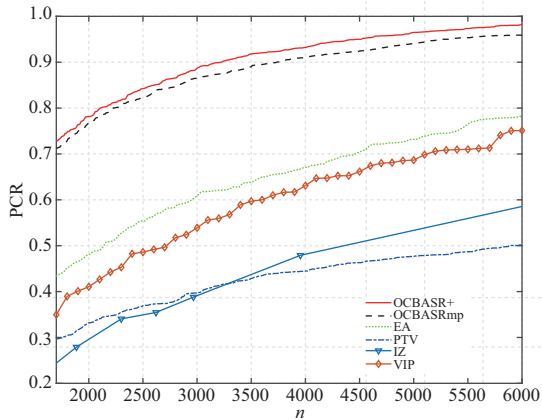


图 3 实验 3 的比较结果

Figure 3 Comparison result for experiment 3

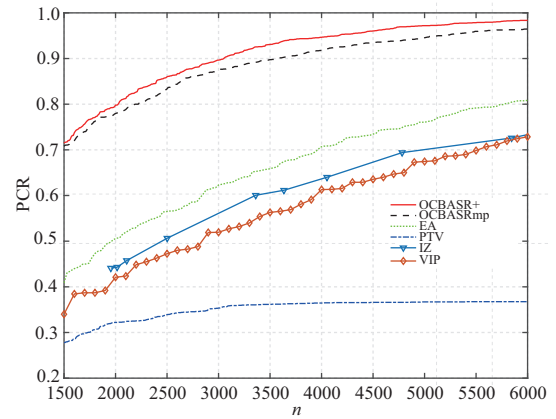


图 4 实验 4 的比较结果

Figure 4 Comparison result for experiment 4

本实验考虑将 15 类材料分为四级, 第一级包含 3 类材料, 第二级包含 4 类材料, 第三级包含 5 类材料, 第四级包含 3 类材料. 即 $m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = 5, m_4 = 3$. 第 i 类材料的不确定性质量为 $\pi_i \sim U(l_i, u_i), \forall i = 1, 2, \dots, k$, 其中 $l_i = 0.1 + 0.2 \times (i - 1), u_i = 0.4 + 0.2 \times (i - 1)$. 本实验设置初始重复次数 $n_0 = 10$ 和预算增量 $\Delta = 20$. 与文献 [15] 一样, 本文直接用正态分布情况下的最优条件实现本实验. 本实验与 4.1 小节对比实验一致, 与 OCBASRmp, EA, PTV, IZ 及 VIP 等 5 种算法进行比较, 图 8 展示了 OCBASR+ 算法应用于回收材料质量分级问题中的对比实验结果.

如图 8 所示, OCBASR+ 算法表现最佳, OCBASRmp 算法次之. 在 PCR 的值达到 0.9 时, OCBASR+ 算法消耗 1210 次仿真预算, 分别比 OCBASRmp 算法、EA 算法、PTV 算法节省了 100, 710, 720 次仿真预算. 然而当 2400 次仿真预算耗尽时, IZ 算法和 VIP 算法的 PCR 值都没有达到 0.9.

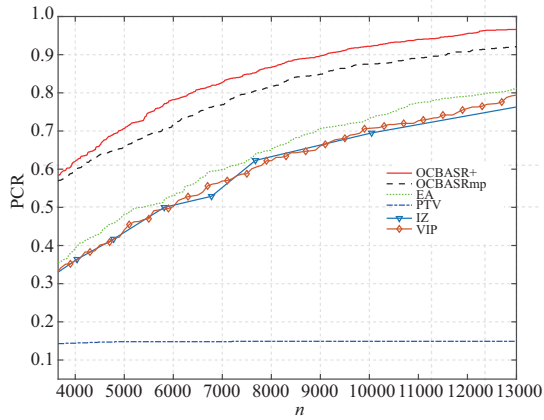


图 5 实验 5 的比较结果

Figure 5 Comparison result for experiment 5

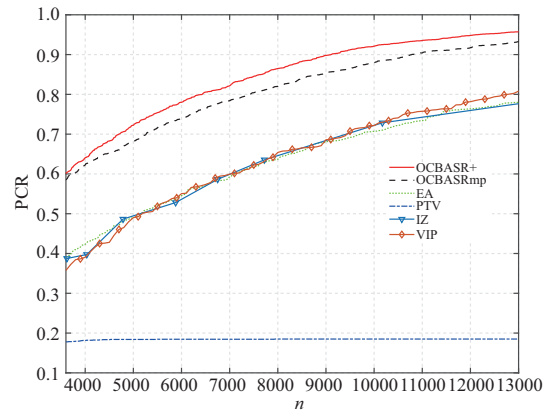


图 6 实验 6 的比较结果

Figure 6 Comparison result for experiment 6

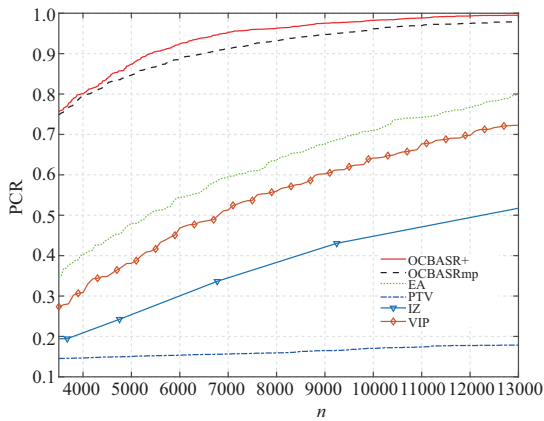


图 7 实验 7 的比较结果

Figure 7 Comparison result for experiment 7

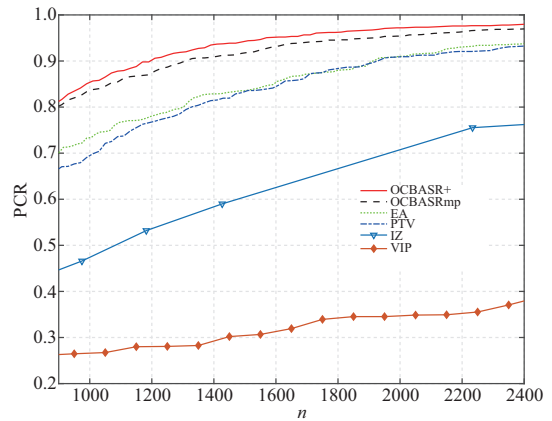


图 8 应用案例的比较结果

Figure 8 Comparison result for the study case

表 3 PCS 值达到 0.9 时消耗的仿真预算

Table 3 Simulation budgets when the PCS achieves 0.9

Experiment number	OCBASR+	OCBASRmp	EA	PTV	IZ	VIP
1	3350	3850	> 6000	> 6000	> 6000	> 6000
2	3900	4940	> 6000	> 6000	> 6000	> 6000
3	3220	3740	> 6000	> 6000	> 6000	> 6000
4	3050	3580	> 6000	> 6000	> 6000	> 6000
5	9100	11580	> 13000	> 13000	> 13000	> 13000
6	9120	10810	> 13000	> 13000	> 13000	> 13000
7	5570	5970	> 13000	> 13000	> 13000	> 13000

5 总结

本文针对离散动态系统中子集排序的仿真优化问题进行研究, 并基于 OCBA 框架建立了以最大化子集正确排序概率为目标的仿真预算优化分配模型. 本研究提出了与现有文献相比更加精细的下界, 并基于该下界运用大偏差技术推导出适用于任意分布的渐进最优条件. 本文提出了 OCBASR+ 算法来实现该最优条件. 7 组数值实验和 1 个应用案例表明, 本文提出的 OCBASR+ 算法与现有文献相比提高了子集排序问题的仿真效率. 未来研究可以考虑具有随机约束条件的子集排序问题以及多目标条件下的子集排序问题.

参考文献

- 1 Jia Q S, Yang Y, Xia L, et al. A tutorial on event-based optimization with application in energy Internet. *Control Theory & Appl*, 2018, 35: 32–40 [贾庆山, 杨玉, 夏俐, 等. 基于事件的优化方法简介及其在能源互联网中的应用. *控制理论与应用*, 2018, 35: 32–40]
- 2 Chen C H, Lee L H. *Stochastic Simulation Optimization: An Optimal Computing Budget Allocation*. Singapore: World Scientific Publishing, 2010. 7–9
- 3 Chen H-C, Chen C-H, Yücesan E. Computing efforts allocation for ordinal optimization and discrete event simulation. *IEEE Trans Automat Contr*, 2000, 45: 960–964
- 4 Jia Q S. Enhancing ordinal optimization: a theory study and applications. Dissertation for Ph.D. Degree. Beijing: Tsinghua University, 2006. 1–5 [贾庆山. 增强序优化理论研究及应用. 博士学位论文. 北京: 清华大学, 2006. 1–5]
- 5 Wang L, Zhang L, Zheng D Z. Advances in simulation optimization. *Control and Decision*, 2003, 18: 257–262, 271 [王凌, 张亮, 郑大钟. 仿真优化研究进展. *控制与决策*, 2003, 18: 257–262, 271]
- 6 Ho Y C, Zhao Q C, Jia Q S. *Ordinal Optimization: Soft Computing for Hard Problems*. New York: Springer, 2007
- 7 Chen C H, Shi L Y, Lee L H. Stochastic systems simulation optimization. *Front Electr Electron Eng China*, 2011, 6: 468–480
- 8 Lee L H, Lau T W E, Ho Y C. Explanation of goal softening in ordinal optimization. *IEEE Trans Automat Contr*, 1999, 44: 94–99
- 9 Xu J, Huang E, Chen C H, et al. Simulation optimization: a review and exploration in the new era of cloud computing and big data. *Asia Pac J Oper Res*, 2015, 32: 1550019
- 10 Nelson B L, Swann J, Goldsman D, et al. Simple procedures for selecting the best simulated system when the number of alternatives is large. *Operations Res*, 2001, 49: 950–963
- 11 Kim S H, Nelson B L. A fully sequential procedure for indifference-zone selection in simulation. *ACM Trans Model Comput Simul*, 1999, 11: 251–273
- 12 Luo J, Hong L J, Nelson B L, et al. Fully sequential procedures for large-scale ranking-and-selection problems in parallel computing environments. *Operations Res*, 2015, 63: 1177–1194
- 13 Chick S E, Inoue K. New two-stage and sequential procedures for selecting the best simulated system. *Operations Res*, 2001, 49: 732–743
- 14 Chick S E, Inoue K. New procedures to select the best simulated system using common random numbers. *Manage Sci*, 2001, 47: 1133–1149
- 15 Chen C H, Lin J W, Yücesan E, et al. Simulation budget allocation for further enhancing the efficiency of ordinal optimization. *Discrete Event Dynamic Syst*, 2000, 10: 251–270
- 16 Chen C H, He D H, Fu M C. Efficient dynamic simulation allocation in ordinal optimization. *IEEE Trans Automat Contr*, 2006, 51: 2005–2009
- 17 Branke J, Chick S E, Schmidt C. Selecting a selection procedure. *Manage Sci*, 2007, 53: 1916–1932
- 18 Fu M C, Hu J Q, Chen C H, et al. Simulation allocation for determining the best design in the presence of correlated sampling. *INFORMS J Computing*, 2007, 19: 101–111
- 19 Glynn P, Juneja S. A large deviations perspective on ordinal optimization. In: *Proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference*, 2004. 577–585

- 20 Lee L H, Chew E P, Teng S Y, et al. Finding the non-dominated Pareto set for multi-objective simulation models. *IIE Trans*, 2010, 42: 656–674
- 21 Lee L H, Pujowidianto N A, Li L W, et al. Approximate simulation budget allocation for selecting the best design in the presence of stochastic constraints. *IEEE Trans Automat Contr*, 2012, 57: 2940–2945
- 22 Xiao H, Chen H, Lee L H. An efficient simulation procedure for ranking the top simulated designs in the presence of stochastic constraints. *Automatica*, 2019, 103: 106–115
- 23 Gao S Y, Chen W W, Shi L Y. A new budget allocation framework for the expected opportunity cost. *Operations Res*, 2017, 65: 787–803
- 24 Gao S Y, Xiao H, Zhou E L, et al. Robust ranking and selection with optimal computing budget allocation. *Automatica*, 2017, 81: 30–36
- 25 Xiao H, Gao S Y. Simulation budget allocation for selecting the top-m designs with input uncertainty. *IEEE Trans Automat Contr*, 2018, 63: 3127–3134
- 26 Xiao H, Gao F, Lee L H. Optimal computing budget allocation for complete ranking with input uncertainty. *IIESE Trans*, 2020, 52: 489–499
- 27 Jia Q S. Efficient computing budget allocation for simulation-based optimization with stochastic simulation time. *IEEE Trans Automat Contr*, 2013, 58: 539–544
- 28 Chen C H, He D, Fu M, et al. Efficient simulation budget allocation for selecting an optimal subset. *INFORMS J Computing*, 2008, 20: 579–595
- 29 Zhang S, Lee L H, Chew E P, et al. A simulation budget allocation procedure for enhancing the efficiency of optimal subset selection. *IEEE Trans Automat Contr*, 2016, 61: 62–75
- 30 Gao S Y, Chen W W. A new budget allocation framework for selecting top simulated designs. *IIE Trans*, 2016, 48: 855–863
- 31 Xiao H, Lee L H, Ng K M. Optimal computing budget allocation for complete ranking. *IEEE Trans Automat Sci Eng*, 2014, 11: 516–524
- 32 Chen C H, Donohue K, Yücesan E, et al. Optimal computing budget allocation for Monte Carlo simulation with application to product design. *Simul Model Pract Theor*, 2003, 11: 57–74
- 33 Lee L H, Teng S Y, Chew E P, et al. Application of multi-objective simulation-optimization techniques to inventory management problems. In: *Proceedings of the 2005 Winter Simulation Conference*, 2005. 1684–1691
- 34 Jia Q S, Tang J X, Wu J J, et al. Reinforcement learning for green and reliable data center. *Chinese J Intell Sci Technol*, 2020, 2: 341–347 [贾庆山, 唐静娴, 吴俊杰, 等. 面向数据中心绿色可靠运行的强化学习方法. *智能科学与技术学报*, 2020, 2: 341–347]
- 35 Long T, Jia Q S, Wang G M, et al. Efficient real-time EV charging scheduling via ordinal optimization. *IEEE Trans Smart Grid*, 2021, 12: 4029–4038
- 36 Jiang Z Y, Jia Q S, Guan X H. A computing budget allocation method for minimizing EV charging cost using uncertain wind power. *IEEE Trans Automat Sci Eng*, 2021, 18: 681–692
- 37 Zhang J Q, Li Z Z, Wang C, et al. Approximate simulation budget allocation for subset ranking. *IEEE Trans Contr Syst Technol*, 2017, 25: 358–365
- 38 Shen W W, Liao C C, Luo L, et al. Study on the establishment of hierarchical admission priority decision of patients in large general hospital. *Modern Preventive Medicine*, 2018, 45: 1424–1427 [申文武, 廖成成, 罗利, 等. 大型综合医院患者分层级入院优先级决策的评价指标体系构建研究. *现代预防医学*, 2018, 45: 1424–1427]
- 39 Song J, Qiu Y, Liu Z. Integrating optimal simulation budget allocation and genetic algorithm to find the approximate pareto patient flow distribution. *IEEE Trans Automat Sci Eng*, 2016, 13: 149–159
- 40 Hall N G, Potts C N. Supply chain scheduling: batching and delivery. *Operations Res*, 2003, 51: 566–584
- 41 Li G Q, Wang W R, Xin Y C, et al. Sub-module grouping modulation strategy of modular multilevel converter. *High Voltage Engin*, 2018, 44: 2107–2114 [李国庆, 王威儒, 辛业春, 等. 模块化多电平换流器子模块分组排序调制策略. *高电压技术*, 2018, 44: 2107–2114]
- 42 Esmaeilian B, Behdad S, Wang B. The evolution and future of manufacturing: a review. *J Manufacturing Syst*, 2016, 39: 79–100
- 43 Souza G C. Closed-loop supply chains: a critical review, and future research. *Decision Sci*, 2013, 44: 7–38
- 44 Mashhadi A R, Behdad S. Optimal sorting policies in remanufacturing systems: Application of product life-cycle data

- in quality grading and end-of-use recovery. *J Manufacturing Syst*, 2017, 43: 15–24
- 45 Panagiotidou S, Nenes G, Zikopoulos C. Optimal procurement and sampling decisions under stochastic yield of returns in reverse supply chains. *OR Spectrum*, 2013, 35: 1–32
- 46 Hu Y Q. *Operations Research Tutorials*. 4th ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2012. 174–175 [胡运权. 运筹学教程. 第四版. 北京: 清华大学出版社, 2012. 174–175]
- 47 Rinott Y. On two-stage selection procedures and related probability-inequalities. *Commun Stat-Theor Methods*, 1978, 7: 799–811

Optimal simulation budget allocation for subset ranking from a large deviation perspective

Hui XIAO¹, Zichun WANG¹, Gang KOU^{2*}, Xianming GU³ & Loo Hay LEE⁴

1. *School of Management Science and Engineering, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China;*

2. *School of Big Data, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China;*

3. *School of Mathematics, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China;*

4. *Department of Industrial and Systems Engineering, National University of Singapore, Singapore 119077, Singapore*

* Corresponding author. E-mail: kougang@swufe.edu.cn

Abstract The ranking and selection method has successfully been used to solve simulation optimization problems for many discrete event dynamic systems. However, little research has focused on optimizing the simulation efficiency of the subset ranking problem, which has wide applications in areas such as intelligent manufacturing, electrical engineering, and supply chain manufacturing. This research studies the simulation budget problem of dividing k simulated alternatives into r subsets and formulates this problem using the optimal computing budget allocation framework. The asymptotic optimality condition that maximizes the probability of correct subset ranking is derived, and a corresponding sequential simulation algorithm for implementing the budget allocation rule is suggested. The results of numerical experiments show that the proposed simulation algorithm significantly improved the simulation optimization efficiency for subset ranking.

Keywords discrete event dynamic systems, simulation optimization, OCBA, large deviation technology, ranking and selection