



有向图中含弹性关节多机械臂系统的分布式一致性

孟祥正, 吴爱国, 梅杰*, 马广富

哈尔滨工业大学(深圳) 机电工程与自动化学院, 深圳 518055

* 通信作者. E-mail: jmei@hit.edu.cn

收稿日期: 2021-10-12; 修回日期: 2021-12-27; 接受日期: 2022-01-19; 网络出版日期: 2023-01-11

科技创新 2030 —“新一代人工智能”重大项目(批准号: 2018AAA0102704)、国家自然科学基金(批准号: U1913209, 62073098, 61822305)、深圳市科技计划项目(批准号: JCYJ20210324132215038, JCYJ2021032413243034, JCYJ20200109113210134)和广东省自然科学基金(批准号: 2019A1515011576, 2019A1515012076)资助项目

摘要 本文主要研究有向图中含弹性关节多机械臂系统的一致性, 利用模型参考自适应一致性方法, 将含弹性关节多机械臂系统的一致性转化成参考模型的一致性和单个机械臂系统的轨迹跟踪问题两个子问题. 考虑到机械臂的相对角速度信息难以获取的情况, 提出了无需相对角速度信息的线性参考模型. 在轨迹跟踪算法设计上, 利用反步法对单个机械臂系统设计了跟踪控制算法, 使得系统达到关节角度趋于一致的结果.

关键词 含弹性关节机械臂, 一致性, 分布式控制, 多智能体系统, 有向图

1 引言

在过去的二十年里, 多智能体系统的协同控制问题受到了各领域学者的广泛关注. 目前关于多智能体系统的研究主要包括一致性、编队、协同探索、分布式优化等^[1~3]. 其中, 一致性问题作为多智能体系统协同控制的基本问题之一得到了深入的研究. 多智能体系统一致性的目的是利用智能体间的局部信息交互使得智能体状态收敛到同一终值. 多智能体系统的一致性算法与编队、聚集、合围控制等算法有着紧密的联系.

早期关于多智能体系统一致性的结果往往集中在线性模型^[4], 而实际系统本质上都是非线性的. 其中, 多机械臂系统的一致性得到了学者们的广泛关注. 在以往多机械臂系统的一致性控制问题上, 通常利用二阶 Euler-Lagrange 方程对系统动力学进行建模. Ren^[5] 在无向图中针对多 Euler-Lagrange 系统提出了一种分布式控制律, 并研究了速度信息未知和存在输入饱和的情形, 利用无向图的对称性构造了 Lyapunov 函数, 进一步证明了系统的稳定性. 由于 Euler-Lagrange 系统的本质非线性, 有向图中多机械臂系统的一致性问题具有较大的挑战. 常用方法是引入分布式滑模变量^[6~18], 其目的是使每个智能体的状态收敛到设计好的滑模面上, 当智能体的状态在滑模面上时, 智能体的状态将趋于一致.

引用格式: 孟祥正, 吴爱国, 梅杰, 等. 有向图中含弹性关节多机械臂系统的分布式一致性. 中国科学: 信息科学, 2023, 53: 81–96, doi: 10.1360/SSI-2021-0349
Meng X Z, Wu A G, Mei J, et al. Consensus of multiple manipulators with elastic joints under a directed graph (in Chinese). Sci Sin Inform, 2023, 53: 81–96, doi: 10.1360/SSI-2021-0349

针对一般有向图下的一致性问题的研究, Nuno 等^[6] 在存在通信时延的情况下, 分别研究了无领航者一致性问题与分布式跟踪问题. 考虑到实际情况下相对速度信息难以精确获取的情况, Mei 等^[7] 提出了无需相对速度信息的一致性算法. Cheng 等^[8] 考虑了运动学不确定性下的机械臂系统末端的一致性. Zhang 等^[9] 提出了一种时变采样数据策略, 实现了多 Euler-Lagrange 系统的无领导一致性控制. 当系统存在参数不确定性和有界外部扰动时, Liu 等^[10] 设计了有向图中带有扰动补偿的自适应算法. Wang^[11] 设计了一种有向图中存在通信时延的多 Euler-Lagrange 系统一致性算法. Miao 等^[12] 考虑了存在随机外界扰动的情形, 在无循环划分网络中提出了分组一致性算法. Cao 等^[13] 提出了无需相对速度信息的分组一致性, 组内智能体的状态趋于一致, 组间状态可以保持不同. Min 等^[14] 分别给出了动态一致性和静态一致性两种算法, 并且讨论了在切换拓扑图下静态一致性算法的稳定性. Chen 等^[15] 针对不确定多机械臂系统设计了全分布式算法, 实现了有限时间跟踪. Meng 等^[16] 针对存在领航者的异质多 Lagrange 系统, 设计了一种自适应协同跟踪控制律, 且避免了智能体邻居速度信息的使用. Zou 等^[17] 考虑了分布式优化问题, 设计了自适应算法使得多 Lagrange 系统在状态实现一致的同时最小化全局代价函数. Wang 等^[18] 将特征建模方法拓展到了多智能体系统领域, 从而提出了离散时间下多机械臂系统的一致性算法.

以上结果中均用二阶 Euler-Lagrange 系统对机械臂进行建模, 适用于刚性机械臂. 而刚性机械臂通常建造得大而重以获得较大的关节刚性, 从而达到抑制振荡的目的. 相对于刚性机械臂, 含弹性关节机械臂具有质量轻、承载比大、生产效率高等优点. 其关节弹性主要来源于关节中的弹性驱动器等部门. 但弹性部件在提高关节承载比的同时也带来了机械臂在运动时的振荡问题, 从而造成系统控制精度降低. 现有针对单个含弹性关节机械臂系统的控制算法已经发展得比较成熟, 控制目标主要包括关节位置/速度控制、末端执行器位置/速度跟踪控制以及有限时间控制等. 所用到的控制方法主要包括: PD 控制方法^[19]、自适应控制^[20]、奇异摄动控制^[21] 和反步法^[22] 等.

总结上述文献可以发现, 关于含弹性关节机械臂的研究大多是针对单个机械臂系统的. 然而, 对于含弹性关节多机械臂系统的协同控制问题, 相关结果比较少, 其主要原因是考虑弹性关节后系统动力学阶次增加, 且存在非匹配的非线性项. Nuño 等^[23] 针对有领航者和无领航者两种情况, 提出了无向图中含弹性关节多机械臂系统的一致性算法, 在补偿重力项的同时保证关节角度一致性, 然而该算法需要假设各个含弹性关节机械臂的动力学参数完全相同. Avila-Becerril 等^[24] 考虑了有向图中存在未知通信时延的含弹性关节多机械臂系统的一致性, 并将关节空间中的一致性算法拓展到任务空间中, 然而该算法需要用到邻居系统状态的各阶导数信息. 针对上述问题, 本文研究有向图中含弹性关节多机械臂系统的一致性, 设计了仅交互相对关节角度信息的分布式算法, 所设计算法无需任何全局信息, 是完全分布式的. 最后, 通过仿真验证了算法的有效性.

与文献 [6~18] 中研究的二阶机械臂系统相比, 本文考虑了机械臂关节存在弹性的情况, 因此所用动力学模型更复杂, 阶次也更高, 而且文献 [6~18] 中的算法无法直接应用到本文所研究的含弹性关节多机械臂一致性问题; 与文献 [23] 中研究无向图中的含弹性关节多机械臂系统的一致性相比, 本文考虑了非对称有向图的情况, 仅要求其含有有向生成树, 因此更具一般性; 与文献 [24] 相比, 本文的一致性算法无需用到相对关节角速度和相对关节角加速度信息, 提高了算法效率.

2 背景知识和问题描述

2.1 代数图论

对一包含 N 个智能体的多智能体系统, 智能体之间的信息交互可通过拓扑图建模. 首先对用到

的代数图论知识进行介绍. 图是由节点和连接节点的边构成的集合, 记为 $\mathcal{G}_N = (\mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N, \mathcal{A}_N)$, 其中点集 $\mathcal{V}_N = \{1, \dots, N\}$ 代表所有节点组成的集合, 边集 $\mathcal{E}_N \subseteq \mathcal{V}_N \times \mathcal{V}_N$ 为连接各个节点的所有边构成的集合, $\mathcal{A}_N = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 代表邻接矩阵, $\mathcal{D}_N = \text{diag}(d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 代表入度矩阵, 入度 $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$. 如果图 \mathcal{G}_N 的边是单向的, 那么称该图为有向图; 反之, 如果图 \mathcal{G}_N 的边是双向的, 则该图为无向图. 在有向图中, 边 $(i, j) \in \mathcal{E}_N$ 表示智能体 j 能够接收到智能体 i 的信息, 节点 j 为节点 i 的子节点, 节点 i 为节点 j 的父节点. 邻接矩阵的元素 a_{ij} 的计算方式为: 当 $(j, i) \in \mathcal{E}_N$ 时, $a_{ij} > 0$; 否则 $a_{ij} = 0$. 有向图的路径是一个采取 $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)$ 形式的边的有限序列, 其中任意一条边 $(i_m, i_{m+1}) \in \mathcal{E}_N$. 通常情况下假设一个节点不需要和自身进行通信, 即 $a_{ii} = 0, \forall i \in \mathcal{V}_N$.

有向图的 Laplacian 矩阵为 $\mathcal{L}_N = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 其中, $l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$, 对于 $i \neq j, l_{ij} = -a_{ij}$. 那么可以得到

$$\sum_{j=1}^N l_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{1}$$

定义一个特殊的 $(N-1) \times N$ 矩阵 Q_N 如下^[25]:

$$Q_N = \begin{bmatrix} -1 + (N-1)v & 1-v & -v & \cdots & -v \\ -1 + (N-1)v & -v & 1-v & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -v \\ -1 + (N-1)v & -v & \cdots & -v & 1-v \end{bmatrix},$$

其中 $v = \frac{N-\sqrt{N}}{N(N-1)}$. 则矩阵 Q_N 具有以下性质:

$$Q_N \mathbf{1}_N = \mathbf{0}_{N-1}, \tag{2}$$

$$Q_N Q_N^T = \mathbf{I}_{N-1}, \tag{3}$$

$$Q_N^T Q_N = \mathbf{I}_N - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T. \tag{4}$$

引理1 ([26]) 在有向图 \mathcal{G}_N 包含一个有向生成树的情况下, $Q_N \mathcal{L}_N Q_N^T$ 的所有特征根均有正实部, 其中, $\mathcal{L}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 为有向图 \mathcal{G}_N 对应的 Laplacian 矩阵.

定义1 ([27]) 考虑系统

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{5}$$

其中, $f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 关于 t 分段连续, 并且关于 x 和 u 是局部 Lipschitz 的. 输入 $u(t)$ 对于所有 $t \geq 0$ 分段连续且有界. 如果存在一个 \mathcal{KL} 类函数 β 和一个 \mathcal{K} 类函数 γ , 使得对于任意初始状态 $x(t_0)$ 和任意有界输入 $u(t)$, 解 $x(t)$ 对所有 $t \geq t_0$ 均存在, 并且满足

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right), \tag{6}$$

那么称该系统是输入到状态稳定的 (input-to-state stable, ISS).

引理2 ([27]) 如果系统 (5) 是输入到状态稳定的, 那么对任意有界输入 $u(t)$, 状态 $x(t)$ 有界. 随着时间 t 的增加, 状态 $x(t)$ 最终关于 \mathcal{K} 类函数 γ 有界. 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$, 那么 $x(t)$ 同样会收敛至零.

2.2 动力学模型

由于对摩擦力、电机阻尼等因素的考虑不同, 含弹性关节机械臂系统的建模各不相同, 通常根据实验需求的精度和复杂度选择相应模型. 本文使用 Spong^[28] 提出的简化动力学模型, 有如下两个基本假设.

假设1 转子的动能主要和自身的旋转有关, 也就是说, 转子的运动是相对于惯性坐标系的简单旋转运动;

假设2 转子/齿轮的惯性关于转子的旋转轴对称.

基于以上假设, 可以将关节弹性等效成弹性系数为 K_i 的弹簧, 同时这个弹簧具有阻尼 B_i , 把每个关节的转子等效成“虚拟连杆”, 则一个 p 连杆含弹性关节机械臂的动力学方程可以写作

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) = K_i(\theta_i - q_i), \quad (7)$$

$$J_i\ddot{\theta}_i + B_i\dot{\theta}_i + K_i(\theta_i - q_i) = u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

其中, $q_i \in \mathbb{R}^p$, $\theta_i \in \mathbb{R}^p$ 是关节角度和转子角度, $M_i(q_i) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 是机械臂惯量矩阵, $C_i(q_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 是科氏力和中心力矩阵, $g_i(q_i) \in \mathbb{R}^p$ 是重力项, $u_i \in \mathbb{R}^p$ 是转子输入力矩, $K_i, J_i, B_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 分别是关节刚度矩阵、转子惯量矩阵和转子阻尼矩阵. 含弹性关节机械臂的动力学模型具有以下性质^[29].

性质1 有界性: 惯量矩阵 $M_i(q_i)$ 是对称正定矩阵, 并且满足 $y \in \mathbb{R}^p$,

$$\underline{m}_i \|y\|^2 \leq y^T M_i(q_i) y \leq \bar{m}_i \|y\|^2,$$

其中, $\underline{m}_i, \bar{m}_i \in \mathbb{R}$ 是正常数.

性质2 反对称性: $\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i)$ 是反对称矩阵.

性质3 参数线性化: $M_i(q_i)\chi + C_i(q_i, \dot{q}_i)\gamma + g_i(q_i) = Y_i(q_i, \dot{q}_i, \chi, \gamma)\theta_{si}$, $\forall \chi, \gamma \in \mathbb{R}^p$. 其中, 回归矩阵 $Y_i(q_i, \dot{q}_i, \chi, \gamma) \in \mathbb{R}^{p \times p\theta}$ 是已知的, $\theta_{si} \in \mathbb{R}^{p\theta}$ 是由第 i 个机械臂的连杆长度、重心、惯量等参数构成的常数矩阵.

性质4 K_i, J_i, B_i 是弹性关节机械参数构成的常对角正定矩阵.

含弹性关节机械臂的动力学可以看成是 Euler-Lagrange 方程和转子动力学方程级联组成的动力学方程. 定义 $x_{i,1} = \theta_i$, $x_{i,2} = \dot{\theta}_i$, 并将其代入动力学 (7) 中, 可得

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) + K_i q_i = K_i x_{i,1}, \quad (9)$$

$$\dot{x}_{i,1} = x_{i,2}, \quad (10)$$

$$\dot{x}_{i,2} = J_i^{-1} u_i - J_i^{-1} B_i x_{i,2} - J_i^{-1} K_i (x_{i,1} - q_i). \quad (11)$$

由式 (9)~(11) 可见, 含弹性关节机械臂系统不同于二阶 Euler-Lagrange 系统, 其动力学中考虑了关节转子带来的影响, 因此无法在真实控制输入 u_i 中直接针对式 (9) 设计一致性算法.

3 分布式一致性算法设计

由于含弹性关节机械臂系统的非线性和强耦合性, 很难直接针对其动力学设计一致性算法. 最近, Mei 等^[30] 提出了一种模型参考自适应一致性方法, 用于解决智能体动力学中存在不确定性的问题. 受

文献 [30] 的启发, 通过对每个机械臂系统设计参考模型, 可以将含弹性关节多机械臂系统的一致性问题转化成参考模型的一致性和单个含弹性关节机械臂系统的跟踪问题两个子问题. 其中, 参考模型是一个具有恒定参数的线性系统, 输入是多机械臂系统关节角度的一致性误差. 参考模型的作用是根据关节角度的一致性误差输出参考轨迹, 而机械臂通过设计控制算法对该参考轨迹进行跟踪. 一般来说, 参考模型设计为与系统动力学模型阶次相同的线性系统, 以便于进行参考模型的一致性分析以及单系统的轨迹跟踪算法设计.

3.1 参考模型设计

本小节将首先设计合适的线性参考模型. 考虑最具一般性的有向图, 即有如下假设.

假设 3 智能体之间的信息交互拓扑图是包含有向生成树的有向图.

注意到含弹性关节机械臂系统具有四阶动力学模型, 在应用模型参考一致性方法时, 需要采用四阶的线性参考模型, 该模型以机械臂系统的关节角度一致性误差 $\tau_i \triangleq -\sum_{j=1}^n a_{ij}(q_i - q_j)$ 作为输入. 定义参考模型的状态为 $(z_i, \dot{z}_i, \ddot{z}_i, z_i^{(3)}) \in \mathbb{R}^{4p}$. 对于机械臂 i , 选取如下的线性参考模型:

$$z_i^{(4)} + a_{i,3}z_i^{(3)} + a_{i,2}\ddot{z}_i + a_{i,1}\dot{z}_i + a_{i,0}z_i = b_i\tau_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (12)$$

其中 $a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, b_i$ 是待设计的参数. 接下来通过设计合适的参数 $a_{i,j}, j = 0, 1, 2, 3$ 和 b_i 便于参考模型 (12) 的一致性分析. 定义跟踪误差为

$$e_i = q_i - z_i.$$

定义堆栈向量 $Z = (z_1^T, z_2^T, \dots, z_n^T)^T, q = (q_1^T, q_2^T, \dots, q_n^T)^T, \tau = (\tau_1^T, \tau_2^T, \dots, \tau_n^T)^T, e = (e_1^T, e_2^T, \dots, e_n^T)^T$. 定义 $A_0 = \text{diag}(a_{1,0}, a_{2,0}, \dots, a_{n,0}), A_1 = \text{diag}(a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{n,1}), A_2 = \text{diag}(a_{1,2}, a_{2,2}, \dots, a_{n,2}), A_3 = \text{diag}(a_{1,3}, a_{2,3}, \dots, a_{n,3}), B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$. 则式 (12) 的向量形式可以写为

$$Z^{(4)} + (A_3 \otimes I_p)Z^{(3)} + (A_2 \otimes I_p)\ddot{Z} + (A_1 \otimes I_p)\dot{Z} + (A_0 \otimes I_p)Z = (B \otimes I_p)\tau. \quad (13)$$

定义如下辅助变量 $\xi_{i,l} = (\xi_{i,l1}, \xi_{i,l2}, \dots, \xi_{i,lp})^T \in \mathbb{R}^p, l = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned} \xi_{i,1} &= z_i, \\ \xi_{i,l} &= \frac{1}{k_i}\dot{\xi}_{i,l-1} + \xi_{i,l-1}, \quad l = 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 k_i 为正常数增益. 通过式 (14) 可以得到 $\xi_{i,4}$ 的表达式为

$$\xi_{i,4} = z_i + \frac{3}{k_i}\dot{z}_i + \frac{3}{k_i^2}\ddot{z}_i + \frac{1}{k_i^3}z_i^{(3)}. \quad (15)$$

对式 (15) 求导可得

$$\dot{\xi}_{i,4} = \dot{z}_i + \frac{3}{k_i}\ddot{z}_i + \frac{3}{k_i^2}z_i^{(3)} + \frac{1}{k_i^3}z_i^{(4)}. \quad (16)$$

定义列向量 $\xi_{*,l} = (\xi_{1,l}^T, \xi_{2,l}^T, \dots, \xi_{n,l}^T)^T \in \mathbb{R}^{np}, l = 1, 2, 3, 4$, 和矩阵 $\tilde{K} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$. 注意到式 (14) 和 (16) 可以写为

$$\dot{\xi}_{*,l} = -(\tilde{K} \otimes I_p)(\xi_{*,l} - \xi_{*,l+1}), \quad l = 1, 2, 3,$$

$$\dot{\xi}_{*,4} = \dot{Z} + 3(\tilde{K}^{-1} \otimes \mathbf{I}_p)\ddot{Z} + 3(\tilde{K}^{-2} \otimes \mathbf{I}_p)Z^{(3)} + (\tilde{K}^{-3} \otimes \mathbf{I}_p)Z^{(4)}. \quad (17)$$

式 (17) 可以写为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{*,4} = & \dot{Z} + 3(\tilde{K}^{-1} \otimes \mathbf{I}_p)\ddot{Z} + 3(\tilde{K}^{-2} \otimes \mathbf{I}_p)Z^{(3)} + (\tilde{K}^{-3} \otimes \mathbf{I}_p)Z^{(4)} \\ & - [(\tilde{K}^{-1}\mathcal{D}) \otimes \mathbf{I}_p]\xi_{*,4} + [(\tilde{K}^{-1}\mathcal{A}) \otimes \mathbf{I}_p]\xi_{*,1} + [(\tilde{K}^{-1}\mathcal{L}) \otimes \mathbf{I}_p]\xi_{*,1} \\ & + [(\tilde{K}^{-1}\mathcal{D}) \otimes \mathbf{I}_p](\xi_{*,4} - \xi_{*,1}), \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $\mathcal{L}, \mathcal{D}, \mathcal{A}$ 分别是多机械臂系统的 Laplacian 矩阵、入度矩阵和邻接矩阵. 将式 (13) 和 (15) 代入式 (18) 中可得

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{*,4} = & - [(\tilde{K}^{-3}A_1 - 3\tilde{K}^{-2}\mathcal{D}) \otimes \mathbf{I}_p - \mathbf{I}_{np}]\dot{Z} - [(\tilde{K}^{-3}A_2 - 3\tilde{K}^{-1} - 3\tilde{K}^{-3}\mathcal{D}) \otimes \mathbf{I}_p]\ddot{Z} \\ & - [(\tilde{K}^{-3}A_3 - 3\tilde{K}^{-2} - \tilde{K}^{-4}\mathcal{D}) \otimes \mathbf{I}_p]Z^{(3)} + [(\tilde{K}^{-3}A_0) \otimes \mathbf{I}_p]Z \\ & - [(\tilde{K}^{-3}B\mathcal{L}) \otimes \mathbf{I}_p]q + [(\tilde{K}^{-1}\mathcal{L}) \otimes \mathbf{I}_p]\xi_{*,1} - [(\tilde{K}^{-1}\mathcal{D}) \otimes \mathbf{I}_p]\xi_{*,4} + [(\tilde{K}^{-1}\mathcal{A}) \otimes \mathbf{I}_p]\xi_{*,1}. \end{aligned} \quad (19)$$

那么选取 $A_0 = 0, A_1 = \tilde{K}^3 + 3\tilde{K}\mathcal{D}, A_2 = 3\tilde{K}^2 + 3\mathcal{D}, A_3 = 3\tilde{K} + \tilde{K}^{-1}\mathcal{D}, B = \tilde{K}^2$, 即 $a_{i,0} = 0, a_{i,1} = k_i^3 + 3k_i \sum_{j=1}^n a_{ij}, a_{i,2} = 3k_i^2 + 3 \sum_{j=1}^n a_{ij}, a_{i,3} = 3k_i + k_i^{-1} \sum_{j=1}^n a_{ij}, b_i = k_i^2$, 则式 (19) 可以写为

$$\dot{\xi}_{*,4} = - [(\tilde{K}^{-1}\mathcal{D}) \otimes \mathbf{I}_p]\xi_{*,4} + [(\tilde{K}^{-1}\mathcal{A}) \otimes \mathbf{I}_p]\xi_{*,1} + [(\tilde{K}^{-1}\mathcal{L}) \otimes \mathbf{I}_p]e. \quad (20)$$

定义堆栈向量 $\xi = (\xi_{*,1}^T, \xi_{*,2}^T, \xi_{*,3}^T, \xi_{*,4}^T)^T$, 则式 (17) 可以写为

$$\dot{\xi} = -(\tilde{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{I}_p)\xi + He, \quad (21)$$

其中,

$$\tilde{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \tilde{K} & -\tilde{K} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \tilde{K} & -\tilde{K} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \tilde{K} & -\tilde{K} \\ -\tilde{K}^{-1}\mathcal{A} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \tilde{K}^{-1}\mathcal{D} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$H \triangleq (\mathbf{0}_{np \times np}, \mathbf{0}_{np \times np}, \mathbf{0}_{np \times np}, -\mathcal{L}^T \tilde{K}^{-1} \otimes \mathbf{I}_p)^T$. 对矩阵 $\tilde{\mathcal{L}}$, 可以看出其行的和为零, 对角元素全部为正, 且非对角线元素为非正, 那么 $\tilde{\mathcal{L}}$ 可以看作是一个包含 $4n$ 个智能体的有向图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 对应的 Laplacian 矩阵. 因为 $\tilde{\mathcal{L}}$ 由 \mathcal{L} 和增益矩阵 \tilde{K} 计算得到, 因此当 \tilde{K} 确定时, 有向图 \mathcal{G} 和 $\tilde{\mathcal{G}}$ 是一一对应的. 参考模型的动力学 (21) 可以看作是由 $4n$ 个一阶线性智能体构成的多智能体系统. 其中, 智能体的状态为 ξ , He 可以看作是外部扰动.

因此对式 (12), 参考模型可设计为

$$z_i^{(4)} + \left(3k_i + k_i^{-1} \sum_{j=1}^n a_{ij} \right) z_i^{(3)} + \left(3k_i^2 + 3 \sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \dot{z}_i + \left(k_i^3 + 3k_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \right) z_i = -k_i^2 \sum_{j=1}^n a_{ij} (q_i - q_j), \quad (23)$$

其初值可以设定为 $z_i(0) = q_i(0), \dot{z}_i(0) = \mathbf{0}_p, \ddot{z}_i(0) = \mathbf{0}_p, z_i^{(3)}(0) = \mathbf{0}_p$. 可以看出, 式 (23) 所示的参考模型为四阶线性系统, 其输入为机械臂系统关节角度的一致性误差, 输出为系统的状态 $(z_i, \dot{z}_i, \ddot{z}_i, z_i^{(3)})$.

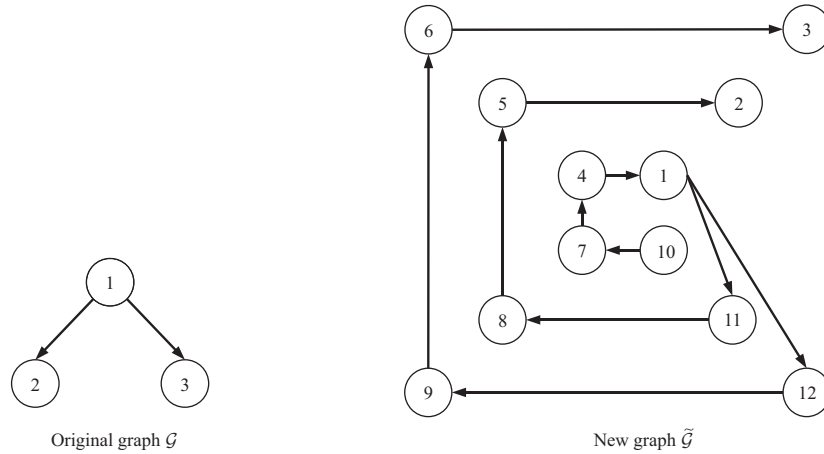


图 1 一个由 3 节点构成的且包含有向生成树的有向图 (左) 通过矩阵变换产生的新图 (右)

Figure 1 A directed graph with a directed spanning tree composed of 3 nodes (left) and a new graph generated by matrix transformation (right)

在上述框架下, 本文接下来的分析分成两步进行. 第 1 步是针对线性参考模型动力学 (21) 的分析, 其关键在于图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 的连通性; 第 2 步是设计控制算法完成单机械臂对线性参考模型输出的跟踪. 在固定拓扑结构下, 一阶多积分器系统可以达成一致的充分必要条件是智能体间的信息交互拓扑图包含有向生成树. 至此, 关于图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 的连通性有以下主要结论.

引理3 如果原图 \mathcal{G} 是包含有向生成树的有向图, 那么新图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 同样是包含有向生成树的有向图.

证明 先根据分块矩阵的定义将智能体分为 4 组, 第 1 组为节点 $\mathcal{V}_1 = \{1, \dots, n\}$, 第 2 组为节点 $\mathcal{V}_2 = \{n+1, \dots, 2n\}$, 第 3 组为节点 $\mathcal{V}_3 = \{2n+1, \dots, 3n\}$, 第 4 组为节点 $\mathcal{V}_4 = \{3n+1, \dots, 4n\}$, 新图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 对应的邻接矩阵 $\tilde{\mathcal{A}}$ 如下所示:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \tilde{K} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \tilde{K} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \tilde{K} \\ \tilde{K}^{-1}\mathcal{A} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

如果原图是包含有向生成树的有向图, 那么在原图 \mathcal{G} 中存在根节点 i , 任取节点 $j, j = 1, \dots, n$ 且 $j \neq i$, 存在有向路径 $(i, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_k, j)$, 其中 i_1, i_2, \dots, i_k 是路径经过的节点. 那么在新图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 中, 则有一条新的路径与其对应: $(i+3n, i+2n), (i+2n, i+n), (i+n, i), (i, i_1+3n), (i_1+3n, i_1+2n), (i_1+2n, i_1+n), (i_1+n, i_1), (i_1, i_2+3n), \dots, (i_k+3n, i_k+2n), (i_k+2n, i_k+n), (i_k+n, i_k), (i_k, j+3n)$, 因此对于第 4 组智能体中的节点 $i+3n$, 任取节点 $j+3n, j = 1, \dots, n$ 且 $j \neq i$, 可以找到一条有向路径通向节点 $j+3n$, 即节点 $i+3n$ 存在有向路径通向第 4 组节点中的其余任意节点.

实际上由第 4 组智能体出发的路径 $(i+3n, i+2n), (i+2n, i+n), (i+n, i), (i, i_1+3n)$ 和 $(j+3n, j+2n), (j+2n, j+n), (j+n, j)$ 可以发现, 节点 $i+3n$ 存在有向路径通向其他所有节点, 也就是说节点 $i+3n$ 实际上是新图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 的一个根节点, 所以新图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 是一个包含有向生成树的有向图.

例如在图 1 中, 原连通图 \mathcal{G} 是一个包含有向生成树的有向图, 节点数 $n = 3$, 其中 1 号节点是根节点. 根据原图 \mathcal{G} 和增益矩阵 \tilde{K} 可以计算出新连通图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 的邻接矩阵 $\tilde{\mathcal{A}}$, 进而画出新连通图 $\tilde{\mathcal{G}}$. 那么

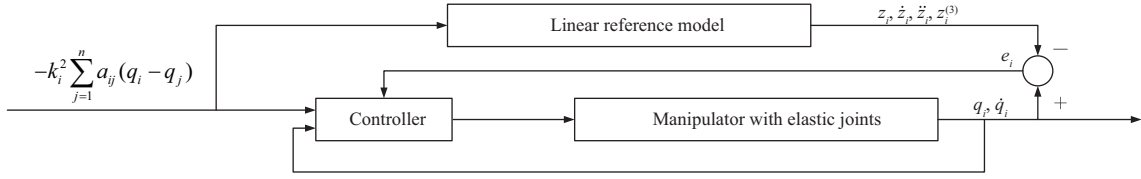

 图 2 第 i 个含弹性关节机械臂系统在模型参考自适应一致性下的流程图

Figure 2 Block diagram of the i th manipulator in the multi-agent system with a model-reference adaptive consensus scheme

根据引理 3, $1 + 3n$ 号节点, 即 10 号节点也是根节点. 可以看出, 10 号节点存在有向路径通向 $\tilde{\mathcal{G}}$ 中的其余节点.

3.2 轨迹跟踪控制算法设计

接下来设计状态反馈跟踪算法, 使得含弹性关节机械臂的关节角度跟踪参考模型的状态 z_i , 即 $q_i - z_i \rightarrow \mathbf{0}_p$. 以式 (23) 为参考模型, 模型参考一致性的控制流程图如图 2 所示.

定义以下辅助变量:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{ri} &= \dot{z}_i - \Lambda_{i,1} e_i, \\ s_i &= \dot{q}_i - \dot{q}_{ri} = \dot{e}_i + \Lambda_{i,1} e_i, \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $\Lambda_{i,1}$ 是正定对称的常数对角矩阵. 针对系统 (9) 选择虚拟输入为 $x_{i,1}$, 对其设计虚拟控制律 $x_{i,1d}$:

$$\begin{aligned} x_{i,1d} &= \alpha_{i,1}(q_i, \dot{q}_i, z_i, \dot{z}_i, \ddot{z}_i) \\ &= q_i + K_i^{-1}[Y_i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_{ri}, \dot{q}_{ri})\theta_{si} - K_{Di}s_i], \end{aligned} \quad (26)$$

其中 K_{Di} 是正定对称的常数对角矩阵.

然而, 式 (9) 的输入并非 $x_{i,1d}$, 由此定义如下误差:

$$w_{i,1} = x_{i,1} - x_{i,1d}, \quad (27)$$

将式 (27) 代入式 (9) 中可得

$$M_i(q_i) \dot{s}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i) s_i + K_{Di} s_i = K_i w_{i,1}. \quad (28)$$

对式 (28) 选取 Lyapunov 候选函数:

$$V_{i,1} = \frac{1}{2} s_i^T M_i(q_i) s_i, \quad (29)$$

求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i,1} &= \frac{1}{2} s_i^T \dot{M}_i(q_i) s_i + s_i^T M_i(q_i) \dot{s}_i \\ &= \frac{1}{2} s_i^T \dot{M}_i(q_i) s_i + s_i^T [-K_{Di} s_i - C_i(q_i, \dot{q}_i) s_i + K_i w_{i,1}] \\ &= -s_i^T K_{Di} s_i + s_i^T K_i w_{i,1} + \frac{1}{2} s_i^T [\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i)] s_i \\ &= -s_i^T K_{Di} s_i + s_i^T K_i w_{i,1}. \end{aligned} \quad (30)$$

注意到 $x_{i,1}$ 不是含弹性关节机械臂系统的实际输入. 对 $w_{i,1}$ 求导可得

$$\begin{aligned}\dot{w}_{i,1} &= \dot{x}_{i,1} - \dot{\alpha}_{i,1} \\ &= x_{i,2} - \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial z_i} \dot{z}_i - \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \dot{z}_i} \ddot{z}_i - \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \ddot{z}_i} z_i^{(3)}.\end{aligned}\quad (31)$$

上式中 \ddot{q}_i 可以通过式 (9) 计算得到:

$$\ddot{q}_i = M_i^{-1}(q_i) [-C_i(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i - g_i(q_i) + K_i(x_{i,1} - q_i)]. \quad (32)$$

将式 (32) 代入式 (31) 可得

$$\dot{w}_{i,1} = x_{i,2} - \rho_{i,1} \left(q_i, \dot{q}_i, z_i, \dot{z}_i, \ddot{z}_i, z_i^{(3)}, x_{i,1} \right), \quad (33)$$

其中,

$$\begin{aligned}\rho_{i,1} &= \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \dot{q}_i} M_i^{-1}(q_i) [-C_i(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i - g_i(q_i) + K_i(x_{i,1} - q_i)] \\ &\quad + \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial z_i} \dot{z}_i + \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \dot{z}_i} \ddot{z}_i + \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial \ddot{z}_i} z_i^{(3)}.\end{aligned}\quad (34)$$

对式 (33) 选取虚拟控制输入 $x_{i,2d}$:

$$\begin{aligned}x_{i,2d} &= \alpha_{i,2} \left(q_i, \dot{q}_i, z_i, \dot{z}_i, \ddot{z}_i, z_i^{(3)}, x_{i,1} \right) \\ &= -s_i - \Lambda_{i,2} w_{i,1} + \rho_{i,1},\end{aligned}\quad (35)$$

其中 $\Lambda_{i,2}$ 是常对角正定矩阵. 定义如下误差:

$$w_{i,2} = x_{i,2} - \alpha_{i,2}, \quad (36)$$

并代入到式 (33) 可得

$$\dot{w}_{i,1} = -s_i - \Lambda_{i,2} w_{i,1} + w_{i,2}. \quad (37)$$

对式 (37) 选择如下的 Lyapunov 候选函数:

$$V_{i,2} = V_{i,1} + \frac{1}{2} w_{i,1}^T K_i w_{i,1}. \quad (38)$$

对式 (38) 求导可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_{i,2} &= \dot{V}_{i,1} + w_{i,1}^T K_i \dot{w}_{i,1} \\ &= -s_i^T K_{D_i} s_i + s_i^T K_i w_{i,1} + w_{i,1}^T K_i (-s_i - \Lambda_{i,2} w_{i,1} + w_{i,2}) \\ &= -s_i^T K_{D_i} s_i - w_{i,1}^T K_i \Lambda_{i,2} w_{i,1} + w_{i,1}^T K_i w_{i,2}.\end{aligned}\quad (39)$$

然而, $x_{i,2}$ 不是系统的实际输入. 对 $w_{i,2}$ 求导可以得到

$$\begin{aligned}\dot{w}_{i,2} &= \dot{x}_{i,2} - \dot{\alpha}_{i,2} \\ &= J_i^{-1} u_i - J_i^{-1} B_i x_{i,2} - J_i^{-1} K_i (x_{i,1} - q_i) - \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial z_i} \dot{z}_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial \dot{z}_i} \ddot{z}_i - \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial \ddot{z}_i} z_i^{(3)} - \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial z_i^{(3)}} z_i^{(4)} - \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial x_{i,1}} \dot{x}_{i,1} \\
 & = J_i^{-1} u_i - \rho_{i,2},
 \end{aligned} \tag{40}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \rho_{i,2} & = \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial z_i} \dot{z}_i + \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial \dot{z}_i} \ddot{z}_i + \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial \ddot{z}_i} z_i^{(3)} + \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial z_i^{(3)}} z_i^{(4)} + \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial x_{i,1}} \dot{x}_{i,1} \\
 & + \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial \dot{q}_i} M_i^{-1}(q_i) [-C_i(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i - g_i(q_i) - K_i(q_i - x_{i,1})] \\
 & + J_i^{-1} B_i x_{i,2} + J_i^{-1} K_i(x_{i,1} - q_i).
 \end{aligned} \tag{41}$$

对式 (40) 选择如下 Lyapunov 候选函数:

$$V_{i,3} = V_{i,2} + \frac{1}{2} w_{i,2}^T K_i J_i w_{i,2}. \tag{42}$$

对式 (42) 求导可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{i,3} & = \dot{V}_{i,2} + w_{i,2}^T K_i J_i \dot{w}_{i,2} \\
 & = -s_i^T K_{D_i} s_i - w_{i,1}^T K_i \Lambda_{i,2} w_{i,1} + w_{i,1}^T K_i w_{i,2} + w_{i,2}^T K_i (u_i - J_i \rho_{i,2}).
 \end{aligned} \tag{43}$$

因此含弹性关节机械臂的控制输入 u_i 可设计为如下形式:

$$u_i = -w_{i,1} - \Lambda_{i,3} w_{i,2} + J_i \rho_{i,2}, \tag{44}$$

其中 $\Lambda_{i,3}$ 是常对角正定矩阵.

3.3 稳定性分析

在控制算法 (44) 的作用下, 有如下主要结论.

定理1 在假设 3 成立的情况下, 对系统 (9)~(11), 在控制算法 (44) 的作用下, 含弹性关节多机械臂系统的关节角度将会达到一致, 并且关节角速度趋于零, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} [q_i(t) - q_j(t)] = \mathbf{0}_p$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_i(t) = \mathbf{0}_p$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$, 且机械臂最终关节角度和转子角度由机械臂的初始状态、增益矩阵 \tilde{K} , 以及原图 \mathcal{G} 的拓扑结构共同决定.

证明 将控制输入 (44) 代入到式 (43) 中可得

$$\dot{V}_{i,3} = -s_i^T K_{D_i} s_i - w_{i,1}^T K_i \Lambda_{i,2} w_{i,1} - w_{i,2}^T K_i \Lambda_{i,3} w_{i,2}. \tag{45}$$

从式 (42) 和 (45) 中可以发现 $V_{i,3}$ 正定, 且 $\dot{V}_{i,3}$ 负定. 由 Lyapunov 稳定性理论可知, 平衡点 $s_i = \mathbf{0}_p$, $w_{i,1} = \mathbf{0}_p$, $w_{i,2} = \mathbf{0}_p$ 是指数稳定的. 根据式 (25) 可得, 当滑模面 s_i 趋于零, 跟踪误差 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = \mathbf{0}_p$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_i = \mathbf{0}_p$, 从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} e = \mathbf{0}_{np}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

定义矩阵 $Q_{\otimes} = Q \otimes I_p$, 其中 $Q \in \mathbb{R}^{(4n-1) \times 4n}$, 如引理 1 所示, 由式 (4) 可得 $Q_{\otimes}^T Q_{\otimes} = (Q^T Q) \otimes I_p = I_{4np} - \frac{1}{4n} (\mathbf{1}_{4n} \mathbf{1}_{4n}^T) \otimes I_p$. 将式 (21) 左乘矩阵 Q_{\otimes} 可得

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\xi}} & = -Q_{\otimes} (\tilde{\mathcal{L}} \otimes I_p) Q_{\otimes}^T \hat{\xi} + Q_{\otimes} H e \\
 & = P \hat{\xi} + Q_{\otimes} H e,
 \end{aligned} \tag{46}$$

其中, $\hat{\xi} \triangleq Q_{\otimes} \xi$, $P = -Q_{\otimes}(\tilde{\mathcal{L}} \otimes I_p)Q_{\otimes}^T$. 在假设 3 成立的条件下, 由引理 3 可知, $\tilde{\mathcal{L}}$ 的新图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 也包含有向生成树. 注意到矩阵 $P = -(Q_{\otimes} I_p)(\tilde{\mathcal{L}} \otimes I_p)(Q_{\otimes}^T I_p) = -(Q \tilde{\mathcal{L}} Q^T) \otimes I_p$, 由引理 1 可知, P 是一个 Hurwitz 矩阵, 其特征值均具有负实部. 对式 (46) 积分可得

$$\hat{\xi}(t) = e^{Pt} \hat{\xi}(0) + \int_0^t e^{-P(\tau-t)} Q_{\otimes} H e(\tau) d\tau, \quad (47)$$

存在常数 $\omega, \delta > 0$ 使得 $\|e^{Pt}\| \leq \delta e^{-\omega t}$, 那么 $\|\hat{\xi}(t)\|$ 满足

$$\|\hat{\xi}(t)\| \leq \delta e^{-\omega t} \|\hat{\xi}(0)\| + \delta \int_0^t e^{-\omega(\tau-t)} \|Q_{\otimes} H\| e(\tau) d\tau \leq \delta e^{-\omega t} \|\hat{\xi}(0)\| + c \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|e(\tau)\|, \quad (48)$$

其中常数 $c = \omega^{-1} \delta \|Q_{\otimes} H\|$. 那么定义 $\beta(\|\hat{\xi}(0)\|, t) = \delta e^{-\omega t} \|\hat{\xi}(0)\|$, $\gamma(r) = cr$, 则 $\beta(\|\hat{\xi}(0)\|, t)$ 和 $\gamma(r)$ 分别是 \mathcal{KL} 类和 \mathcal{K} 类函数. 根据定义 1 可得, 系统 (46) 是一个以 e 为输入, $\hat{\xi}$ 为状态的输入到状态稳定的系统. 又由 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \mathbf{0}_{np}$ 的结果和引理 2 可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\xi}(t) = \mathbf{0}_{4(n-1)p}$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} Q_{\otimes} \xi(t) = \mathbf{0}_{4(n-1)p}$. 由于矩阵 Q 具有由向量 $\mathbf{1}_n$ 张成的零空间, 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} [\xi_{i,l}(t) - \xi_{j,m}(t)] = \mathbf{0}_p$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$, $l, m = 1, 2, 3, 4$. 将其代入到式 (14) 可以得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} [z_i(t) - z_j(t)] = \mathbf{0}_p$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z}_i, \ddot{z}_i, z_i^{(3)} = \mathbf{0}_p$, 由于机械臂的关节角度跟踪误差和关节角速度跟踪误差都趋于零, 因此可以得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} [q_i(t) - q_j(t)] = \mathbf{0}_p$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_i(t) = \mathbf{0}_p$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$.

接下来计算多机械臂系统最终的收敛关节角度位置, 令 $\nu_0 \in \mathbb{R}^n$ 为 \mathcal{L} 零特征值对应的左特征向量, 定义向量 $\nu_p = (\nu_{p,1}, \dots, \nu_{p,n})^T \in \mathbb{R}^n$, $p = 1, 2, 3, 4$, $\nu_* = (\nu_1^T, \nu_2^T, \nu_3^T, \nu_4^T)^T \in \mathbb{R}^{4n}$, 满足

$$\tilde{\mathcal{L}}^T \nu_* = \mathbf{0}_{4n}. \quad (49)$$

由式 (22) 可知 $\nu_p = \tilde{K}^{-1} \mathcal{D} \nu_0$, $p = 1, 2, 3$, $\nu_4 = \tilde{K} \nu_0$, 可以发现 ν_* 是由原图 \mathcal{G} 的拓扑结构和增益矩阵 \tilde{K} 共同决定的. 将式 (21) 左乘 $(\nu_*^T \otimes I_p)$ 可得

$$(\nu_*^T \otimes I_p) \dot{\xi} = (\nu_*^T \otimes I_p) \tilde{\mathcal{L}} \xi + (\nu_*^T \otimes I_p) H e_i = \mathbf{0}_p. \quad (50)$$

那么对式 (50) 积分可得 $(\nu_*^T \otimes I_p) \xi(t) = (\nu_*^T \otimes I_p) \xi(0)$, 又因为 $\lim_{t \rightarrow \infty} [\xi_{i,l}(t) - \xi_{j,m}(t)] = 0$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$, $l, m = 1, 2, 3, 4$, 从而计算出参考模型的最终一致性位置:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_{i,1}(t) = \frac{\sum_{l=1}^4 \sum_{j=1}^n \nu_{l,j} q_i(0)}{\sum_{l=1}^4 \sum_{j=1}^n \nu_{l,j}}. \quad (51)$$

由跟踪误差 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = \mathbf{0}_p$ 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_{i,1}(t)$, 由式 (51) 可以看出机械臂的最终关节角度是由机械臂的初始关节角度、增益矩阵 \tilde{K} , 以及原图 \mathcal{G} 的拓扑结构共同决定的. 平衡点 $s_i = \mathbf{0}_p$, $w_{i,1} = \mathbf{0}_p$, $w_{i,2} = \mathbf{0}_p$ 是指数稳定的, 因此根据式 (27) 和 (36) 可得转子的最终状态为 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{i,1} = \lim_{t \rightarrow \infty} K_i^{-1} g_i(q_i)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_{i,1} = \mathbf{0}_p$.

4 仿真验证

本节通过 2 组含弹性关节机械臂组成的系统仿真验证算法的有效性, 仿真中所用的含弹性关节机械臂的动力学参数如下所示^[31]:

$$M_i(q_i) = \begin{bmatrix} 3.31 + 0.21c_{i,2} & 0.10 + 0.10c_{i,2} \\ 0.10 + 0.10c_{i,2} & 0.10 \end{bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2 / \text{rad},$$

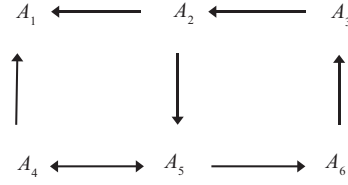


图 3 例 1 中描述信息交互的拓扑图

Figure 3 Topological graph describing the information interaction in Example 1

$$C_i(q_i, \dot{q}_i) = \begin{bmatrix} -0.10s_{i,2}\dot{q}_{i,2} & -0.10s_{i,2}(\dot{q}_{i,1} + \dot{q}_{i,2}) \\ 0.10s_{i,2}\dot{q}_{i,1} & 0 \end{bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad},$$

$$g_i(q_i) = \begin{bmatrix} 51.07c_{i,1} + 2.57c_{i,12} \\ 2.57c_{i,12} \end{bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$K_i = \text{diag}\{150, 18\} \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}, \quad J_i = \text{diag}\{1.22, 0.16\} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2/\text{rad},$$

$$B_i = \text{diag}\{1.25, 0.11\} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad},$$

其中, $c_{i,2}$ 代表 $\cos(q_{i,2})$, $s_{i,2}$ 代表 $\sin(q_{i,2})$, $c_{i,12}$ 代表 $\cos(q_{i,1} + q_{i,2})$. $q_{i,1}$ 和 $q_{i,2}$ 分别是机械臂的第 1 个弹性关节和第 2 个弹性关节的角度. $x_{i,11}$, $x_{i,12}$ 分别是第 1 个电机转子和第 2 个电机转子的角度.

例 1 考虑 6 个二连杆含弹性关节机械臂组成的系统, 机械臂间的信息交互拓扑图如图 3 所示. 其中, 节点 A_i 代表第 i 个含弹性关节机械臂, $i = 1, \dots, 6$.

机械臂初始状态选择为 $q_i(0) = (i, i)^T$, $\dot{q}_i(0) = \mathbf{0}_2$, $x_{i,1}(0) = q_i(0) + K_i^{-1}g_i(q_i(0))$, $\dot{x}_{i,1}(0) = \mathbf{0}_2$. 对于参考模型, 初始状态设定为 $z_i(0) = q_i(0)$, $\dot{z}_i(0) = \mathbf{0}_2$, $\ddot{z}_i(0) = \mathbf{0}_2$, $z_i^{(3)}(0) = \mathbf{0}_2$, $i = 1, \dots, 6$. 在控制增益的选取上, 选择 $\tilde{K} = \mathbf{I}_6$, $K_{Di} = \mathbf{I}_2$, $\Lambda_{i,1} = 5\mathbf{I}_2$, $\Lambda_{i,2} = \mathbf{I}_2$, $\Lambda_{i,3} = \mathbf{I}_2$, $i = 1, \dots, 6$.

图 4(a) 和 (b) 分别是关节角度 $q_{i,1}$ 和 $q_{i,2}$ 的轨迹, 图 4(c) 和 (d) 分别是转子角度 $x_{i,11}$ 和 $x_{i,12}$ 的轨迹, 从仿真结果可以看出, 在控制算法 (44) 的作用下, 各含弹性关节机械臂的各个关节角度在一段时间后趋于一个相同的值, 并且各个关节转子的角度趋于常值, 根据式 (51) 可以计算出机械臂关节角度的最终一致性位置 $\lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) = (4.13, 4.13)^T$, 转子角度的最终位置为 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{i,1}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K_i^{-1}g_i(q_i(t)) = (4.02, 4.58)^T$, 这与仿真结果相一致.

例 2 考虑 10 个二连杆含弹性关节多机械臂系统, 机械臂间的信息交互拓扑图如图 5 所示.

其中机械臂初始状态选为 $q_i(0) = (0.5i, 0.5i)^T$, $\dot{q}_i(0) = \mathbf{0}_2$, $x_{i,1}(0) = q_i(0) + K_i^{-1}g_i(q_i(0))$, $\dot{x}_{i,1}(0) = \mathbf{0}_2$. 参考模型的初始状态选为 $z_i(0) = q_i(0)$, $\dot{z}_i(0) = \mathbf{0}_2$, $\ddot{z}_i(0) = \mathbf{0}_2$, $z_i^{(3)}(0) = \mathbf{0}_2$, $i = 1, \dots, 10$. 控制增益选择为 $\tilde{K} = \mathbf{I}_{10}$, $K_{Di} = \mathbf{I}_2$, $\Lambda_{i,1} = 5\mathbf{I}_2$, $\Lambda_{i,2} = \mathbf{I}_2$, $\Lambda_{i,3} = \mathbf{I}_2$, $i = 1, \dots, 10$.

图 6(a) 和 (b) 分别是关节角度 $q_{i,1}$ 和 $q_{i,2}$ 的轨迹, 图 6(c) 和 (d) 分别是转子角度 $x_{i,11}$ 和 $x_{i,12}$ 的轨迹, 与例 1 中的步骤类似, 可以计算出机械臂关节角度的最终一致性位置 $\lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) = (2.85, 2.85)^T$, 转子角度的最终位置为 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{i,1}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K_i^{-1}g_i(q_i(t)) = (2.87, 2.58)^T$, 由此可以看出, 仿真结果与计算结果相一致.

5 结论

本文主要研究了有向图中含弹性关节多机械臂系统的分布式一致性问题. 与已有的多机械臂系统

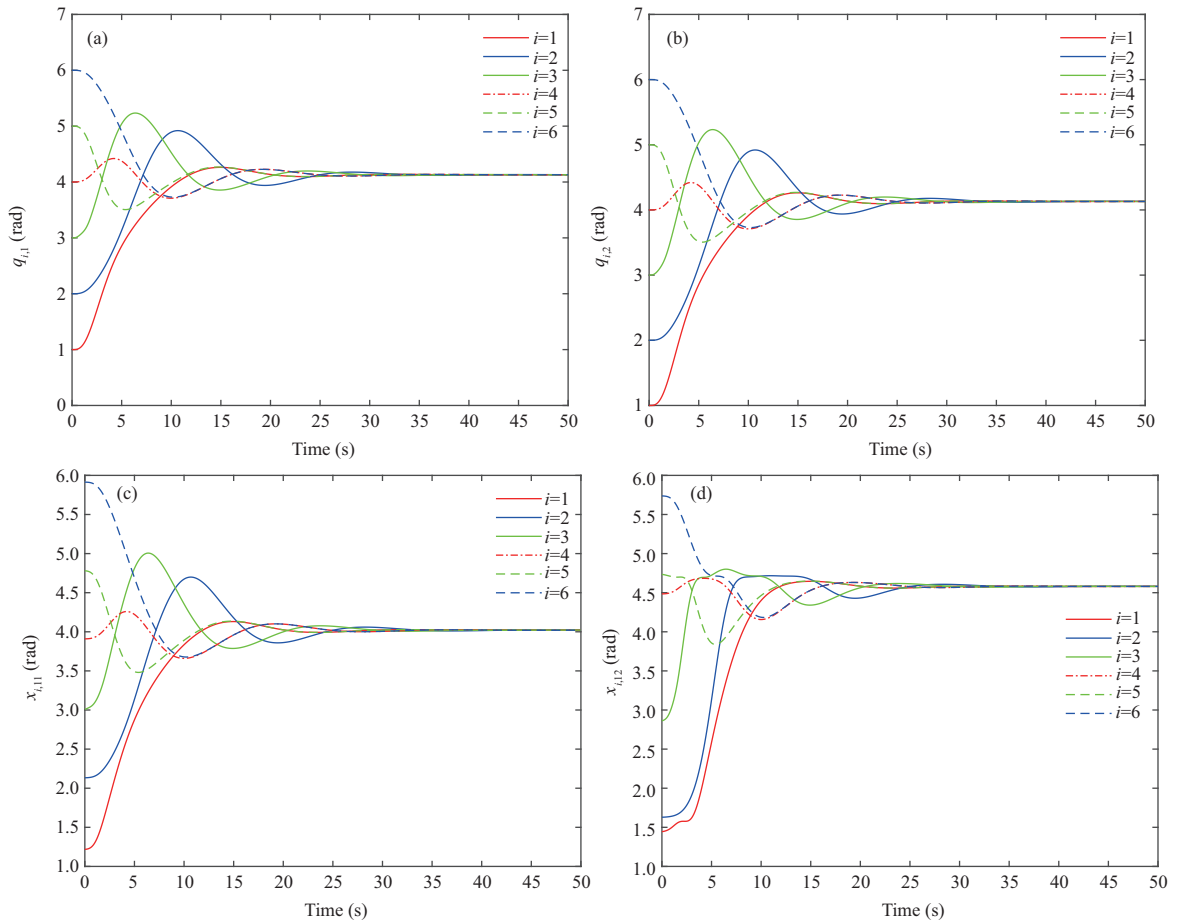


图 4 (网络版彩图) 例 1 中 $q_{i,1}$ (a), $q_{i,2}$ (b), $x_{i,11}$ (c), $x_{i,12}$ (d) 的轨迹
 Figure 4 (Color online) Trajectories of $q_{i,1}$ (a), $q_{i,2}$ (b), $x_{i,11}$ (c), and $x_{i,12}$ (d) in Example 1

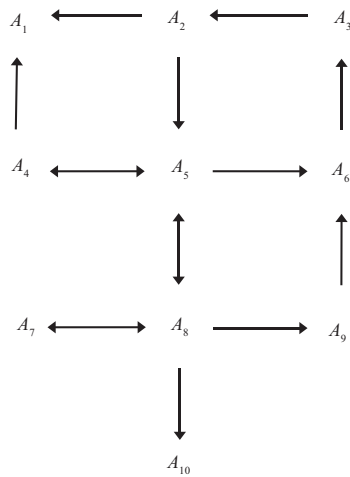


图 5 例 2 中描述信息交互的拓扑图
 Figure 5 Topological graph describing the information interaction in Example 2

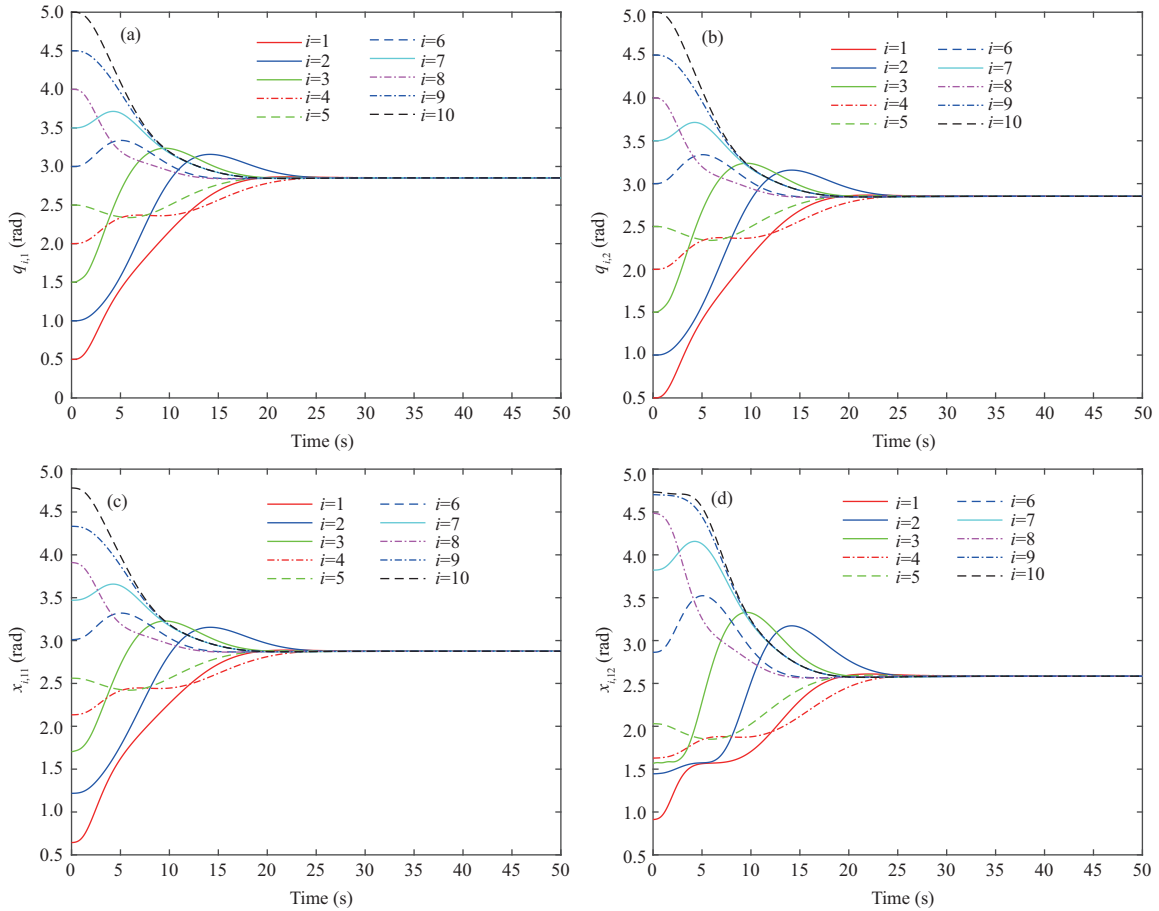


图 6 (网络版彩图) 例 2 中 $q_{i,1}$ (a), $q_{i,2}$ (b), $x_{i,11}$ (c), $x_{i,12}$ (d) 的轨迹
 Figure 6 (Color online) Trajectories of $q_{i,1}$ (a), $q_{i,2}$ (b), $x_{i,11}$ (c), and $x_{i,12}$ (d) in Example 2

一致性算法相比, 本文所提的算法考虑了弹性关节带来的影响且无需使用相对速度信息. 通过模型参考自适应一致性的方法, 构建了线性参考模型并证明了参考模型的一致性. 之后, 针对单个含弹性关节机械臂系统的跟踪控制问题, 利用反步法设计了跟踪控制算法. 在所提分布式控制律的作用下, 处于不同初始状态的机械臂的关节角度最终趋于一致, 且关节角速度趋于零. 最后, 通过仿真验证了所提算法的有效性.

参考文献

- 1 Chen F, Ren W. On the control of multi-agent systems: a survey. *FnT Syst Control*, 2019, 6: 339–499
- 2 Qin J, Ma Q, Shi Y, et al. Recent advances in consensus of multi-agent systems: a brief survey. *IEEE Trans Ind Electron*, 2017, 64: 4972–4983
- 3 Sun J C, Wang J L, Chen J, et al. Cooperative communication based on swarm intelligence: vision, model, and key technology. *Sci Sin Inform*, 2020, 50: 307–317 [孙佳琛, 王金龙, 陈瑾, 等. 群体智能协同通信: 愿景、模型和关键技术. *中国科学: 信息科学*, 2020, 50: 307–317]
- 4 Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans Automat Contr*, 2004, 49: 1520–1533
- 5 Ren W. Distributed leaderless consensus algorithms for networked Euler-Lagrange systems. *Int J Control*, 2009, 82:

- 2137–2149
- 6 Nuno E, Ortega R, Basanez L, et al. Synchronization of networks of nonidentical Euler-Lagrange systems with uncertain parameters and communication delays. *IEEE Trans Automat Contr*, 2011, 56: 935–941
 - 7 Mei J, Ren W, Chen J, et al. Distributed adaptive coordination for multiple Lagrangian systems under a directed graph without using neighbors' velocity information. *Automatica*, 2013, 49: 1723–1731
 - 8 Cheng L, Zeng G H, Min T. Decentralized adaptive consensus control for multi-manipulator system with uncertain dynamics. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Singapore, 2016*. 2712–2717
 - 9 Zhang W, Tang Y, Huang T, et al. Consensus of networked Euler-Lagrange systems under time-varying sampled-data control. *IEEE Trans Ind Inf*, 2018, 14: 535–544
 - 10 Liu Y, Jia Y. Adaptive consensus control for multiple Euler-Lagrange systems with external disturbance. *Int J Control Autom Syst*, 2017, 15: 205–211
 - 11 Wang H. Consensus of networked mechanical systems with communication delays: a unified framework. *IEEE Trans Automat Contr*, 2014, 59: 1571–1576
 - 12 Miao Z H, Liu J, Wang G Q, et al. Group consensus in uncertain networked Euler-Lagrange systems with stochastic disturbances. *Sci Sin Inform*, 2016, 46: 1608–1620 [苗中华, 刘军, 王国强, 等. 随机扰动下不确定网络化 Euler-Lagrange 系统的分群一致性. *中国科学: 信息科学*, 2016, 46: 1608–1620]
 - 13 Cao R, Mei J. Group consensus for networked Euler-Lagrange systems under a directed graph without relative velocity information. *Acta Autom Sin*, 2018, 44: 44–51 [曹然, 梅杰. 有向图中网络 Euler-Lagrange 系统无需相对速度信息的群一致性. *自动化学报*, 2018, 44: 44–51]
 - 14 Min H B, Liu Z G, Liu Y, et al. Coordination control of networked Euler-Lagrange systems with possible switching topology. *Acta Autom Sin*, 2013, 39: 1003–1010 [闵海波, 刘志国, 刘源, 等. 切换网络拓扑下 Euler-Lagrange 系统的分布式协调控制. *自动化学报*, 2013, 39: 1003–1010]
 - 15 Chen G, Song Y D, Guan Y F. Terminal sliding mode-based consensus tracking control for networked uncertain mechanical systems on digraphs. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2018, 29: 749–756
 - 16 Meng Z Y, Dimarogonas D V, Johansson K H. Leader-follower coordinated tracking of multiple heterogeneous Lagrange systems using continuous control. *IEEE Trans Robot*, 2014, 30: 739–745
 - 17 Zou Y, Meng Z Y, Hong Y G. Adaptive distributed optimization algorithms for Euler-Lagrange systems. *Automatica*, 2020, 119: 109060
 - 18 Wang L J, Meng B. Characteristic model-based consensus of networked heterogeneous robotic manipulators with dynamic uncertainties. *Sci China Tech Sci*, 2016, 59: 63–71
 - 19 Kim M J, Chung W K. Disturbance-observer-based PD control of flexible joint robots for asymptotic convergence. *IEEE Trans Robot*, 2015, 31: 1508–1516
 - 20 Meng Q, Lai X, Yan Z, et al. Motion planning and adaptive neural tracking control of an uncertain two-link rigid-flexible manipulator with vibration amplitude constraint. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2022, 33: 3814–3828
 - 21 Kim J, Croft E A. Full-state tracking control for flexible joint robots with singular perturbation techniques. *IEEE Trans Contr Syst Technol*, 2017, 27: 63–73
 - 22 Petit F, Daasch A, Albu-Schaffer A. Backstepping control of variable stiffness robots. *IEEE Trans Contr Syst Technol*, 2015, 23: 2195–2202
 - 23 Nuño E, Valle D, Sarras I, et al. Leader-follower and leaderless consensus in networks of flexible-joint manipulators. *Eur J Control*, 2014, 20: 249–258
 - 24 Avila-Becerril S, Espinosa-Pérez G, Panteley E, et al. Consensus control of flexible-joint robots. *Int J Control*, 2015, 88: 1201–1208
 - 25 Scardovi L, Arcac M, Sontag E D. Synchronization of interconnected systems with applications to biochemical networks: an input-output approach. *IEEE Trans Automat Contr*, 2010, 55: 1367–1379
 - 26 Mei J. Distributed consensus for multiple Lagrangian systems with parametric uncertainties and external disturbances under directed graphs. *IEEE Trans Control Netw Syst*, 2020, 7: 648–659
 - 27 Khalil H K. *Nonlinear Systems*. 3rd. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002. 175–176
 - 28 Spong M W. Modeling and control of elastic joint robots. *J Dynamic Syst Measurement Control*, 1987, 109: 310–318
 - 29 Bridges M M, Dawson D M, Abdallah C T. Control of rigid-link, flexible-joint robots: a survey of backstepping

- approaches. *J Robotic Syst*, 1995, 12: 199–216
- 30 Mei J, Ren W, Song Y D. A unified framework for adaptive leaderless consensus of uncertain multi-agent systems under directed graphs. *IEEE Trans Automat Contr*, 2021, 66: 6179–6186
- 31 Melhem K, Wang W. Global output tracking control of flexible joint robots via factorization of the manipulator mass matrix. *IEEE Trans Robot*, 2009, 25: 428–437

Consensus of multiple manipulators with elastic joints under a directed graph

Xiangzheng MENG, Aiguo WU, Jie MEI* & Guangfu MA

School of Mechanical Engineering and Automation, Harbin Institute of Technology, Shenzhen 518055, China

* Corresponding author. E-mail: jmei@hit.edu.cn

Abstract We investigate the consensus problem of multiple manipulators with elastic joints under a directed graph in this paper. We use model reference adaptive consensus to transform the consensus problem into two subproblems: reference model consensus and trajectory tracking for a single manipulator. We then propose a linear reference model without relative velocity information because determining relative joint angular velocity information among agents is difficult. We finally develop a trajectory tracking algorithm based on the backstepping method and demonstrate that the joint angles of the manipulators asymptotically achieve consensus.

Keywords manipulator with elastic joints, consensus, distributed control, multi-agent systems, directed graph