



# 障碍环境下基于生物捕食逃逸行为的多运动体边界防御博弈方法

全秉达<sup>1</sup>, 段海滨<sup>1,2\*</sup>, 夏洁<sup>1</sup>, 刘小峰<sup>3</sup>

1. 北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院, 飞行器控制一体化技术重点实验室, 仿生自主飞行系统研究组, 北京 100191

2. 鹏城实验室, 深圳 518055

3. 河海大学物联网工程学院, 常州 213022

\* 通信作者. E-mail: hbduan@buaa.edu.cn

收稿日期: 2022-05-28; 修回日期: 2022-08-09; 接受日期: 2022-09-19; 网络出版日期: 2022-12-06

科技创新 2030—“新一代人工智能”重大项目 (批准号: 2018AAA0100803) 和国家自然科学基金 (批准号: U20B2071, 91948204, T2121003, U1913602, U19B2033) 资助项目

**摘要** 基于微分对策的追逃博弈和疆土防御问题是多智能体对抗博弈控制的关键问题之一. 本文研究了含障碍物的有界区域中多运动体边界防御博弈方法. 首先通过对自然界中生物的捕食逃逸行为进行分析, 对多运动体边界防御博弈系统进行了建模, 得到不同情况下博弈终止条件和价值函数. 其次, 本文对含障碍环境下博弈双方的主导区域和界栅面进行了分析, 并与无障碍情况进行了对比. 最后, 数值仿真验证了本文提出的多运动体边界防御方法满足微分对策中的鞍点策略条件和有效性.

**关键词** 捕食逃逸, 协同控制, 边界防御, 微分对策, 鞍点策略

## 1 引言

多智能体系统 (multi-agent systems, MAS) 在自主性和协调性等方面具有天然的优势, 能够完成例如渗透侦查、协同攻击等任务, 近年来得到了广泛的关注<sup>[1~4]</sup>. 本文研究一类多智能体安全和防御领域相关的场景, 场景中有一组防御者团队和一组攻击者团队, 防御者团队的任务是保护一个区域避免受到入侵者团队的攻击, 入侵者团队试图到达受保护区域的边界而不被防御者团队拦截. 上述场景是一类追逃博弈问题的变体, 这类问题通常使用由 Isaacs<sup>[5]</sup> 提出的微分对策理论解决并推导鞍点策略. 本文考虑一类有界矩形区域中的多运动体边界防御博弈问题, 其中矩形博弈区域的一条边被设为攻击者团队的目标边界和防御者团队需要保护的区域边界. 另外, 博弈区域存在一个障碍物阻挡, 使得博弈双方的运动受到限制. 本文的目标是对此类博弈转化为自然界中广泛存在的生物捕食逃逸行为, 对博弈双方参与者的可达性进行分析, 通过双方的初始状态获取博弈结果的先验信息. 另外, 推导博弈

**引用格式:** 全秉达, 段海滨, 夏洁, 等. 障碍环境下基于生物捕食逃逸行为的多运动体边界防御博弈方法. 中国科学: 信息科学, 2022, 52: 2213–2224, doi: 10.1360/SSI-2022-0211  
Tong B D, Duan H B, Xia J, et al. Multi-agent border defense differential game based on biological predation and escape behavior in an obstacle environment (in Chinese). Sci Sin Inform, 2022, 52: 2213–2224, doi: 10.1360/SSI-2022-0211

双方的最优状态反馈策略,使得当其中一方使用非最优策略时,另外一方能够利用机会将博弈向着对自身有利的方向发展.

对于一般的追逃博弈问题,当参与者数量较少,博弈维度较低时,可以通过求解 Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) 方程获取博弈双方的最优控制输入量与最优轨迹.然而,当博弈问题中参与者数量较多或环境较为复杂时,HJI 方法难以获得博弈的精确解析解.为了克服上述维度灾难问题,Garcia 等<sup>[6]</sup>研究了一类多个追捕者与逃逸者的边界防御博弈问题,设计了博弈双方的鞍点策略和价值函数并证明了价值函数是连续可微的且满足 HJI 方程,克服了维度灾难问题.Yan 等<sup>[7]</sup>研究了一类矩形区域上有两名防御者和一名攻击者的边界防御问题,针对双方不同的速度比提出了一种利用 Voronoi 图和 Apollonius 圆解析地构造界栅面与优势区域以解决此类问题.然而上述研究都假设攻击者和防御者双方在博弈区域中均可以自由运动,没有考虑博弈区域中可能存在有障碍物的问题.Oyler 等<sup>[8]</sup>研究了一种博弈区域存在障碍物时的追逃博弈问题,分析了主导区域并与无障碍物时进行了比较.Bhadauria 等<sup>[9]</sup>研究了一类任意复杂多边形区域中的追逃博弈问题,追逃双方受到环境区域的限制.但上述问题仅研究逃跑者的任务为逃离追捕者的情况,与本文研究的边界防御问题攻击者和防御者的目标有很大不同.

自然界中的捕食和逃逸行为影响捕食者和猎物的适应性.个体必须既捕获食物又避免被捕食者吃掉才能生存和繁殖,进而提高种群生存和繁殖能力并将其遗传决定性状遗传给后代.与改善捕食者捕食和猎物逃避被捕食有关的性状往往被自然积极选择,从而使得捕食者和猎物种群相互博弈共同进化<sup>[10]</sup>.猎物能否被捕食者捕获由双方移动速度、方向和时间共同确定.捕食者和猎物通过将感觉信息转化为运动输出的相对简单的行为规则,可以构建出灵活快速的捕食逃逸行为序列(如图 1 所示)<sup>[11]</sup>,进而影响双方的相对位置.对于追捕移动猎物的捕食者而言,只有在进行搜索、追捕和精确打击之后,才有可能将猎物成功捕获.捕食者的追捕策略通常由制导方程确定,这些方程来自于导弹、飞机和船舶制导领域,具有不同的分类和特点,能够准确描述自然界中捕食者复杂的行为数据.例如蜻蜓和蝙蝠等运动速度较低的捕食者在捕食过程中会随时间直接朝向猎物的瞬时位置运动,即使用纯追踪(pure pursuit, PP)策略<sup>[12]</sup>.而像鹰隼等高速运动的猛禽在捕猎过程中一般使用比例导引(proportional navigation, PN)制导策略<sup>[13]</sup>,这种策略适合其在混乱的环境中近距离追捕具有高速机动能力的猎物.

对猎物而言,其必须依靠自身对危险的敏锐反应和快速机动的能力才可能逃脱被捕食者捕获的结果.猎物在逃跑过程中的目标可能是最大程度地与捕食者保持距离,在此过程中使用不同的逃逸策略.例如苍头燕雀和黄雀等雀形目鸟类通常会采取高速爬升、水平转弯和垂直俯冲等逃逸策略躲避捕食者的追捕<sup>[14]</sup>.

本文将边界防御问题与上述自然界中常见的捕食逃逸现象相联系,分析博弈双方的主导区域与界栅面,进而得到此类边界防御问题的鞍点策略.本文结构如下:第 1 节对自然界中生物的捕食逃逸行为进行了分析,介绍了捕食者和逃逸者在运动时采取的几种常见策略.第 2 节在含有障碍物的环境下对多运动体边界防御博弈问题进行了建模,设计了博弈终止条件和价值函数.第 3 节分析了博弈双方的主导区域与界栅面,并定性比较了障碍物对边界防御问题的影响.第 4 节通过数值仿真验证了博弈双方采用最优策略和非最优策略对结果的影响.第 5 节为总结和展望部分.

## 2 含障碍环境下的多运动体博弈系统

本文中的多运动体边界防御问题存在攻击者(逃逸者)和防御者(捕食者)两方,其中逃逸者的数量为 1,捕食者的数量为  $N$ ,本文考虑  $N = 1$  和  $N = 2$  两种情况.逃逸者试图避免被捕食者拦截到达

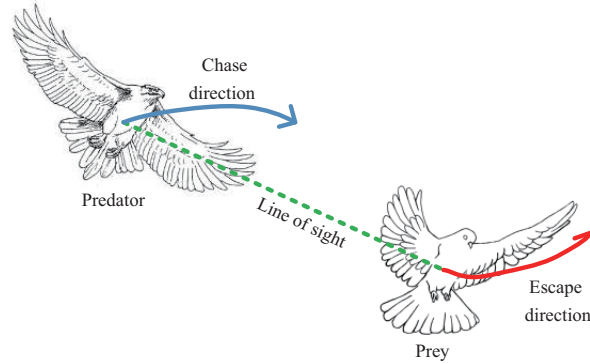


图 1 (网络版彩图) 生物捕食逃逸行为

Figure 1 (Color online) Biological predation and escape behavior

目标边界,而捕食者的目标是拦截逃逸者.当逃逸者到达目标边界或者被捕食者拦截时,博弈结束.

## 2.1 捕食者和逃逸者运动方程与障碍环境建模

本文使用的多运动体博弈系统受自然界中生物捕食逃逸行为的启发,系统中的防御者扮演捕食者的角色,而攻击者扮演逃逸者的角色.系统中的若干捕食者合作捕获拦截逃逸者,而逃逸者需要在到达目标边界之前避免被捕获.捕食者和逃逸者的运动方程基于简化的二维转向粒子模型,捕食者一方的控制输入量为各自航向角  $\mathbf{u}_D = \{\psi_{D1}, \psi_{D2}, \dots, \psi_{DN}\}$ ,逃逸者一方的控制输入量为自身航向角  $\mathbf{u}_A = \{\psi_A\}$ ,系统中的所有参与者均以恒定速度运动.该博弈系统的运动方程  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_D, \mathbf{u}_A)$  由以下微分方程组构成的解耦系统给出:

$$\begin{cases} \dot{x}_{Di} = v_{Di} \cos \psi_{Di}, & x_{Di}(t_0) = x_{Di0}, \\ \dot{y}_{Di} = v_{Di} \sin \psi_{Di}, & y_{Di}(t_0) = y_{Di0}, \\ \dot{x}_A = v_A \cos \psi_A, & x_A(t_0) = x_{A0}, \\ \dot{y}_A = v_A \sin \psi_A, & y_A(t_0) = y_{A0}, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

其中  $v_{Di}$  和  $v_A$  分别为捕食者和逃逸者的速度大小并假设所有捕食者的速度大小均相同,逃逸者与捕食者的速度大小之比为  $\alpha = \frac{v_A}{v_D}$ .由于在本文设定的博弈系统模型中,当  $\alpha > 1$  时,攻击者一定能够防止被防御者拦截,故本文只考虑  $\alpha \leq 1$  这种情况.另外,  $t_0$  表示博弈开始时间,博弈系统控制输入量范围  $\psi_{Di}, \psi_A \in [-\pi, \pi)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ),博弈双方均具有自身和其他参与者的位置信息,但不了解对方所采用的策略和实时控制输入量.

本文研究的多运动体边界防御博弈环境如图 2 所示.双方均在有界二维欧氏空间  $\Omega$  中运动,捕食者的状态由  $\mathbf{x}_{Di} = (x_{Di}, y_{Di})$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 表示,逃逸者的状态由  $\mathbf{x}_A = (x_A, y_A)$  表示,系统的初始状态由  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{Di}, \mathbf{x}_A) \in \mathbb{R}^{2N+2}$  表示.逃逸者的目标边界  $T$  的位置设为  $T = \{(x, y) | x = 0, a \leq y \leq b\}$ ,当攻击者的状态满足  $x_A = x_T, a \leq y_A \leq b$  则表示攻击者到达了目标边界获得胜利.另外该博弈环境中有一线型障碍物  $S$ ,障碍物的两端坐标分别为  $\mathbf{x}_{S1} = (x_{S1}, y_{S1})$  和  $\mathbf{x}_{S2} = (x_{S2}, y_{S2})$ ,参与博弈对抗的任何运动体均不能越过此障碍物.

式 (1) 中使用的一阶运动学系统首先由 Isaacs 提出,并在之后的许多微分对策问题中被广泛使用.该模型在大多数情况下能够推导出博弈双方的闭环策略.因此,捕食者团队或逃逸者团队可以进行合

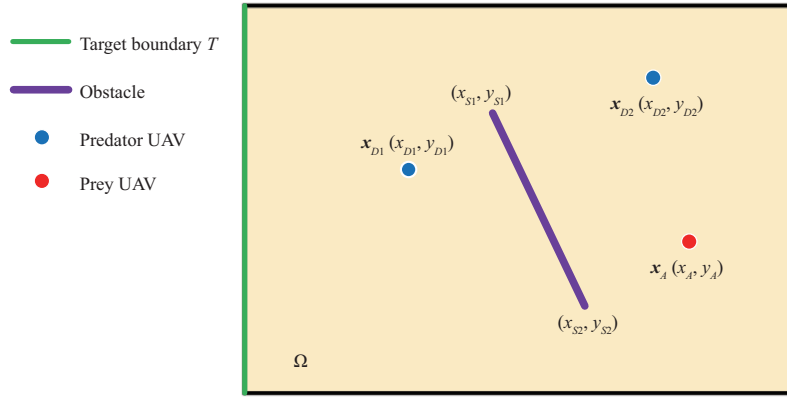


图 2 (网络版彩图) 多运动体边界防御博弈系统

Figure 2 (Color online) Multi-agent border defense differential game system

作, 利用对方团队的非最优策略取得胜利. 实际上, 博弈的参与者可能具有更复杂的动力学和运动学方程, 比如具有转向角速度的约束等, 本文使用的运动学方程可以进行近似求解, 为实际工程验证提供支持.

## 2.2 博弈终止条件和价值函数

本文设定逃逸者被拦截的条件为逃逸者的位置与至少一个捕食者的位置相重合, 即点捕获, 故本文研究的多运动体边界防御博弈问题具有两个终端状态集合. 第一个终端条件  $\Gamma_D$  是逃逸者被任何一个捕食者拦截, 捕食者团队获胜. 另一个终止条件  $\Gamma_A$  为逃逸者能够在被拦截之前到达目标边界  $T$ . 故本文研究的边界防御博弈问题的终止集为

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_A, \quad (2)$$

其中

$$\Gamma_D = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_{D_i}\|_2 = 0, x_A > 0\}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

表示逃逸者在抵达目标边界之前即被任意捕食者拦截, 另外

$$\Gamma_A = \{x \mid x_A \leq 0, a \leq y_A \leq b\} \quad (4)$$

表示逃逸者被捕食者拦截之前即抵达目标边界. 设该博弈系统终端时刻为  $t_f$ , 终端状态  $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t_f) = (\mathbf{x}_{Dif}, \mathbf{x}_{Af})$  为系统第一次满足式 (2) 的时刻.

式 (2) 将本文研究的多运动体目标防御博弈问题表示为定性微分对策. 然而, 在实际应用中获得不同终止状态下对应不同支付函数及策略的定量微分对策更为重要. 本文设计了如下终端性能指标函数, 分别对应于捕食者团队获胜和逃逸者团队获胜两种终端条件. 若捕食者团队最终获胜, 则逃逸者应当试图尽量靠近目标边界, 此时性能指标函数为

$$J_D(\mathbf{u}_D, \mathbf{u}_A; \mathbf{x}_0) = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_D, \mathbf{u}_A) dt + \Phi_D(\mathbf{x}(t_f)) = \Phi_D(\mathbf{x}(t_f)) = x_{Af} - a, \quad (5)$$

对应的值函数  $V(\mathbf{x}_0)$  表示为

$$V(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}_A} \max_{\mathbf{u}_D} J_D(\mathbf{u}_D, \mathbf{u}_A; \mathbf{x}_0). \quad (6)$$

若逃逸者团队最终获胜, 则捕食者团队应当试图缩短终端时刻捕食者与逃逸者的最近距离. 此时终端性能指标函数为

$$J_A(\mathbf{u}_D, \mathbf{u}_A; \mathbf{x}_0) = \Phi_A(\mathbf{x}(t_f)) \\ = \min \{ \|\mathbf{x}_{Af} - \mathbf{x}_{D1f}\|, \|\mathbf{x}_{Af} - \mathbf{x}_{D2f}\|, \dots, \|\mathbf{x}_{Af} - \mathbf{x}_{DNf}\| \}.$$

此时对应的值函数  $V(\mathbf{x}_0)$  为

$$V(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}_D} \max_{\mathbf{u}_A} J_A(\mathbf{u}_D, \mathbf{u}_A; \mathbf{x}_0). \quad (7)$$

在博弈进行过程中, 双方根据博弈态势选择不同的性能指标函数, 进而采取不同的状态反馈策略, 因此本文推导得到的捕食者与逃逸者策略仅为博弈系统当前状态的函数. 另外, 本文假设式 (6) 和 (7) 中的最大值与最小值操作可以互换, 即该博弈系统的鞍点策略存在, 因此存在最优控制输入量  $\mathbf{u}_D^*$  和  $\mathbf{u}_A^*$  使得以下不等式组成立:

$$\begin{cases} J_D(\mathbf{u}_D, \mathbf{u}_A^*; \mathbf{x}_0) \leq J_D(\mathbf{u}_D^*, \mathbf{u}_A^*; \mathbf{x}_0) \leq J_D(\mathbf{u}_D^*, \mathbf{u}_A; \mathbf{x}_0), \\ J_A(\mathbf{u}_D^*, \mathbf{u}_A; \mathbf{x}_0) \leq J_A(\mathbf{u}_D^*, \mathbf{u}_A^*; \mathbf{x}_0) \leq J_A(\mathbf{u}_D, \mathbf{u}_A^*; \mathbf{x}_0), \end{cases} \quad (8)$$

且值函数  $V(\mathbf{x}_0)$  应当满足如下形式的 HJI 方程:

$$-\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_D^*, \mathbf{u}_A^*) + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_D^*, \mathbf{u}_A^*). \quad (9)$$

显然在本文讨论的博弈系统中有  $-\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} = 0$  和  $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_D^*, \mathbf{u}_A^*) = 0$  成立. 以理论推导和数值仿真确定博弈双方不同的优势区域与对应的鞍点策略是本文后续研究内容之一.

### 3 双方主导区域与界栅面

本节我们将解决定性微分对策中的 3 个问题: (1) 给定捕食者团队和逃逸者团队初始位置坐标, 如何确定各自团队的主导区域和边界. (2) 给定捕食者团队初始位置, 如何确定当双方均采用最优策略时能够保证获胜的区域以及分隔不同区域的界栅面. (3) 给定捕食者团队的初始位置, 障碍物  $S$  会导致哪些区域对捕食者团队更有利, 哪些区域对逃逸者团队更有利.

#### 3.1 主导区域及边界分析

受文献 [7] 的启发, 给定捕食者  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 和逃逸者  $A$  在博弈区域  $\Omega$  中的位置, 若存在一点  $P$  使得逃逸者能够到达该点且中途不被捕食者拦截, 则称点  $P$  位于逃逸者的主导区域  $D_A$  中, 否则称点  $P$  位于捕食者的主导区域  $D_D$  中. 分隔  $D_A$  和  $D_D$  两个主导区域的边界记为  $L_\alpha^N$ . 下面分别分析  $N = 1$  和  $N = 2$  时不同速度比  $\alpha$  形成的主导区域和边界满足的条件.

如图 3(a) 所示, 当  $N = 1$  时, 设捕食者与逃逸者的位置分别为  $\mathbf{x}_D = (x_D, y_D)$  和  $\mathbf{x}_A = (x_A, y_A)$ . 若博弈区域  $\Omega$  不存在障碍物, 则捕食者和逃逸者的最优路径均为直线. 当速度比  $\alpha = 1$  时, 分隔  $D_A$  和  $D_D$  两个区域的曲线  $L_{\alpha=1}^N$  为双方位置的垂直平分线. 当速度比  $\alpha < 1$  时, 分隔  $D_A$  和  $D_D$  两个区域的曲线  $L_{\alpha<1}^N$  为 Apollonius 圆或该圆的一部分, 圆心坐标  $\mathbf{x}_c$  和半径  $r_c$  分别满足

$$\mathbf{x}_c = \left( \frac{\alpha^2 x_D - x_A}{\alpha^2 - 1}, \frac{\alpha^2 y_D - y_A}{\alpha^2 - 1} \right) \quad (10)$$

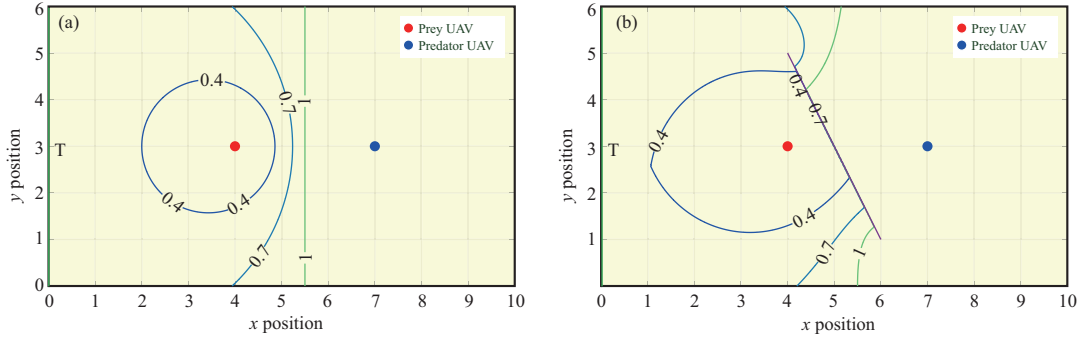


图 3 (网络版彩图)  $N = 1$  时, (a) 不存在障碍物和 (b) 存在障碍物时的主导区域和边界

Figure 3 (Color online) Dominance regions and boundaries when  $N = 1$  in (a) an obstacle-free or (b) a line obstacle environment

和

$$r_c = \frac{\alpha \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}}{\alpha^2 - 1}. \quad (11)$$

如图 3(b) 所示, 若博弈区域  $\Omega$  存在障碍物  $S$ , 则捕食者和逃逸者到达博弈区域中任意一点  $P = (x_P, y_P)$  的最优路径为直线或者折线, 折点为障碍物的两个顶点之一. 定义  $d$  为博弈区域中两点之间最短距离,  $d_{PA}$  为博弈区域中的任意一点  $P$  到逃逸者  $A$  的最短距离,  $d_{PD_i}$  表示点  $P$  到捕食者  $D_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 的最短距离, 则有

$$d_{PA} = \begin{cases} \|P - \mathbf{x}_A\|_2, & PA \cap S = \emptyset, \\ \min \{\|P - \mathbf{x}_{S1}\|_2 + \|\mathbf{x}_{S1} - \mathbf{x}_A\|_2, \|P - \mathbf{x}_{S2}\|_2 + \|\mathbf{x}_{S2} - \mathbf{x}_A\|_2\}, & PA \cap S \neq \emptyset, \end{cases} \quad (12)$$

和

$$d_{PD_i} = \begin{cases} \|P - \mathbf{x}_{D_i}\|_2, & PD_i \cap S = \emptyset, \\ \min \{\|P - \mathbf{x}_{S1}\|_2 + \|\mathbf{x}_{S1} - \mathbf{x}_{D_i}\|_2, \|P - \mathbf{x}_{S2}\|_2 + \|\mathbf{x}_{S2} - \mathbf{x}_{D_i}\|_2\}, & PD_i \cap S \neq \emptyset. \end{cases} \quad (13)$$

$\frac{d_{PA}}{d_{PD}}$ , 即为速度比  $\alpha$ , 当速度比  $\alpha = 1$  时, 曲线  $L_{\alpha=1}^{N=1}$  是直线或者双曲线的一部分. 当速度比  $\alpha < 1$  时, 曲线  $L_{\alpha<1}^{N=1}$  是 Apollonius 圆或帕斯卡蜗线的一部分.

如图 4(a) 所示, 当捕食者的数量  $N = 2$  时, 速度比  $\alpha = 1$  情况下的边界曲线  $L_{\alpha=1}^{N=2}$  可以通过画出 Voronoi 图和捕食者与逃逸者的位置得出类似结论. 对于  $\alpha < 1$  这种情况, 捕食者的主导区域  $D_D = D_{D1} \cup D_{D2}$ . 同样地, 当博弈区域存在障碍物  $S$  时, 计算  $\frac{d_{PA}}{\min\{d_{PD1}, d_{PD2}\}} = \alpha$  可以得到图 4(b) 所示的曲线  $L_{\alpha<1}^{N=2}$  和双方主导区域  $D_A$  和  $D_D$ . 由于边界  $L_\alpha$  具有的性质, 有以下命题成立.

**命题 1** 给定捕食者和逃逸者初始位置和速度比  $\alpha \leq 1$ , 对于边界  $L_{\alpha \leq 1}^{N=1}$  或者  $L_{\alpha \leq 1}^{N=2}$  上任意一点  $P$ , 当且仅当逃逸者沿直线或者沿折线运动, 且运动距离满足式 (12) 时, 无论捕食者团队采取怎样的策略, 逃逸者均可以成功到达点  $P$  而不被捕获.

### 3.2 优势区域与界栅面分析

受文献 [7] 的启发, 给定捕食者团队在博弈区域  $\Omega$  的位置和逃逸者与捕食者的速度比  $\alpha$ , 若逃逸者的初始位置  $\mathbf{x}_A = (x_A, y_A)$  使得当逃逸者使用最优控制策略  $\mathbf{u}_A^*$  时, 无论捕食者使用怎样的控制策

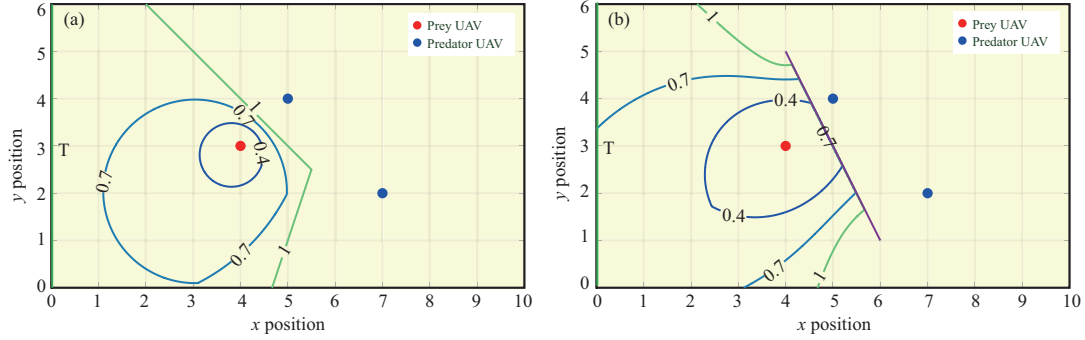


图 4 (网络版彩图)  $N = 2$  时, (a) 不存在障碍物和 (b) 存在障碍物时的主导区域和边界

Figure 4 (Color online) Dominance regions and boundaries when  $N = 2$  in (a) an obstacle-free or (b) a line obstacle environment

略  $u_D$  均不能在逃逸者抵达目标边界  $T$  之前捕获逃逸者, 则此时逃逸者位于优势区域  $W_A$  中. 类似地, 若逃逸者所在位置使得当捕食者团队使用最优控制策略  $u_D^*$  时, 无论逃逸者使用怎样的控制策略  $u_A$  均不能在捕获前抵达目标边界  $T$ , 则此时逃逸者位于优势区域  $W_D$  中. 分隔优势区域  $W_A$  和  $W_D$  的曲线称为界栅面, 记为  $B_{\alpha \leq 1}^N$ . 假设捕食者均在障碍物  $S$  的右侧, 分析  $N = 1$  和  $N = 2$  时不同速度比  $\alpha$  形成的优势区域与界栅面满足的条件.

首先分析博弈区域中有一名捕食者与一名逃逸者的情况. 设点目标边界的两个端点  $T_a$  和  $T_b$  的坐标分别为  $x_{T_a} = (0, a)$  和  $x_{T_b} = (0, b)$ , 有以下定理成立.

**定理1** 给定捕食者  $D$  的位置  $x_D = (x_D, y_D)$ , 当  $\alpha = 1$  时, 界栅面  $B_{\alpha=1}^{N=1}$  满足

$$B_{\alpha=1}^{N=1} = B_{1,\alpha=1}^{N=1} \cup B_{2,\alpha=1}^{N=1}, \quad (14)$$

其中

$$B_{1,\alpha=1}^{N=1} = \{x = (x, y) \in \Omega | d_{xT_a} = d_{DT_a}\} \quad (15)$$

和

$$B_{2,\alpha=1}^{N=1} = \{x = (x, y) \in \Omega | d_{xT_b} = d_{DT_b}\}. \quad (16)$$

**证明** 如图 5(a) 所示, 假设  $d_{AT_a} < d_{DT_a}$ , 则有  $D_A \cap T \neq \emptyset$ , 说明如果逃逸者采用最优策略, 无论捕食者的策略如何, 逃逸者都能够到达目标边界. 此时逃逸者的位置  $x_A = (x_A, y_A) \in W_A$ . 相反, 若  $d_{AT_a} > d_{DT_a}$  则有  $D_A \cap T = \emptyset$ , 说明如果捕食者使用最优策略, 无论逃逸者的策略如何, 捕食者都能在逃逸者到达目标边界前拦截逃逸者. 因此  $B_{1,\alpha=1}^{N=1}$  是界栅面的一部分. 同理可对目标边界的另一个端点进行类似分析.

对于  $\alpha < 1$  的情况, 假设逃逸者可以成功到达目标边界, 则至少存在一点  $P \in T$ , 使得

$$F(P) = d_{PD} - \frac{d_{PA}}{\alpha} > 0 \quad (17)$$

成立. 此时逃逸者的位置在  $W_A$  中, 双方最优目标点  $P^*$  应当满足  $F(P^*) = \max\{F(P)\}$ , 其中  $P \in T$ . 同理, 若假设逃逸者无法在被捕食者拦截之前到达目标边界, 则  $T$  上任意一点  $P$  均满足

$$F(P) = d_{PD} - \frac{d_{PA}}{\alpha} < 0. \quad (18)$$

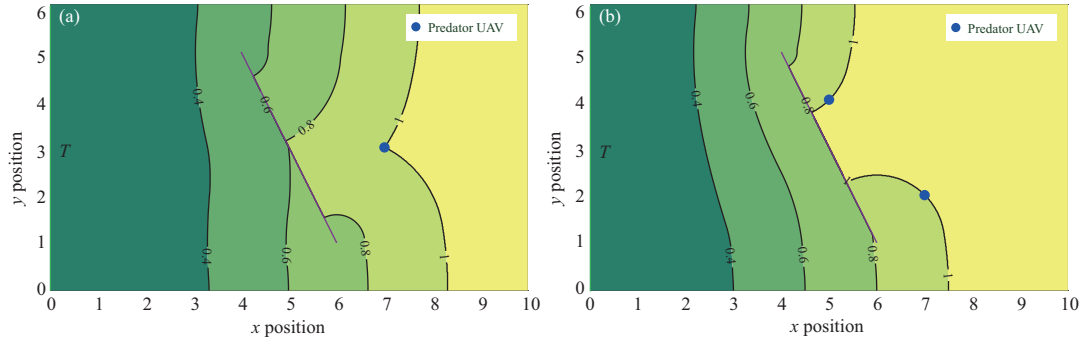


图 5 (网络版彩图) (a)  $N = 1$  且存在障碍物时的优势区域和界栅面; (b)  $N = 2$  且存在障碍物时的优势区域和界栅面

Figure 5 (Color online) Winning regions and barrier surfaces when (a)  $N = 1$  or (b)  $N = 2$  in a line obstacle environment

此时最优目标点  $Q^* = (x_Q^*, y_Q^*) \in L_\alpha^{N=1}$ , 且满足

$$\begin{cases} F(Q^*) = d_{Q^*D} - \frac{d_{Q^*A}}{\alpha} = 0, \\ x_Q^* = \min \{x_Q\}, Q = (x_Q, y_Q) \in L_\alpha^{N=1}. \end{cases} \quad (19)$$

下面研究  $N = 2$  时的优势区域与界栅面. 类似地, 有以下定理成立.

**定理2** 分别给定捕食者  $D_1$  和  $D_2$  的位置  $\mathbf{x}_{D1} = (x_{D1}, y_{D1})$  和  $\mathbf{x}_{D2} = (x_{D2}, y_{D2})$ , 且不失一般性, 设  $y_{D1} \leq y_{D2}$ . 当  $\alpha = 1$  时, 界栅面  $B_{\alpha=1}^{N=2}$  满足

$$B_{1,\alpha=1}^{N=2} = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega | d_{\mathbf{x}T_a} = d_{D1T_a}\}, \quad (20)$$

其中

$$B_{1,\alpha=1}^{N=2} = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega | d_{\mathbf{x}T_a} = d_{D1T_a}\} \quad (21)$$

和

$$B_{2,\alpha=1}^{N=2} = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega | d_{\mathbf{x}T_a} = d_{D2T_a}\}. \quad (22)$$

**证明** 如图 5(b) 所示, 如果  $d_{AT_a} < d_{D1T_a}$ , 说明如果逃逸者采用最优策略, 无论捕食者  $D_1$  的策略如何, 逃逸者都能够在被  $D_1$  拦截之前到达目标边界. 如果  $d_{AT_a} < d_{D2T_b}$ , 则说明无论捕食者  $D_2$  的策略如何, 逃逸者都能够在被  $D_2$  拦截之前到达目标边界. 因此  $B_{1,\alpha=1}^{N=2}$  和  $B_{2,\alpha=1}^{N=2}$  共同构成了  $N = 2$  时的界栅面.

**注释1** 当  $x_{D1}$  与  $x_{D2}$  相差很大时, 界栅面将退化为定理 1 捕食者数量  $N = 1$  的情况, 距离目标边界较远的捕食者对界栅面的确定不起作用.

### 3.3 障碍物 $S$ 对边界防御问题的影响

本小节研究的最后一个问题是, 障碍物  $S$  的存在对捕食者团队和逃逸者团队哪一方更有利. 本文研究捕食者数量为  $N = 1$  和  $N = 2$  两种情况. 给定捕食者的初始位置后, 分别计算博弈区域  $\Omega$  存在和不存在障碍物时双方团队的优势区域并进行比较画出伪彩图. 如图 6(a) 和 (b) 所示, 绿色区域表示有无障碍物不会对任何一方产生影响, 红色区域表示障碍物对逃逸者团队更为有利, 而蓝色区域表示障碍物对捕食者团队更为有利.



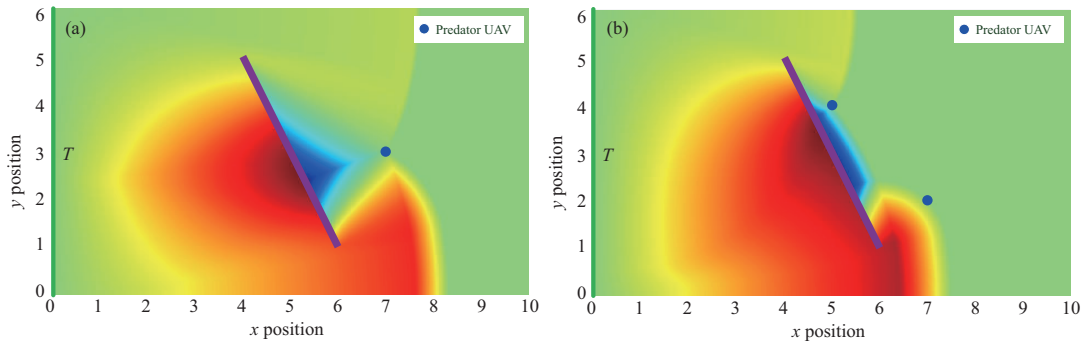


图 6 (网络版彩图) 有无障碍物优势区域对比. (a)  $N = 1$ ; (b)  $N = 2$   
 Figure 6 (Color online) Comparison of winning regions when (a)  $N = 1$  and (b)  $N = 2$

从图 6(a) 和 (b) 中可以看出, 障碍物两侧对博弈双方的影响是不同的. 在障碍物靠近捕食者团队的一侧, 显然障碍物的存在对捕食者团队更为有利; 而在障碍物的另一侧和两个端点附近, 障碍物的存在对逃逸者团队更为有利, 这是因为障碍物的存在会阻挡捕食者团队的运动, 为逃逸者到达目标边界赢得了时间. 另外可从图中得到以下结论, 若捕食者离障碍物较近, 则障碍物可能会对捕食者产生阻挡, 使得逃逸者可成功到达目标边界的区域扩大; 反之, 若逃逸者离障碍物较近, 则障碍物可能会对逃逸者产生阻挡, 使得捕食者团队能够成功捕获逃逸者的区域扩大.

#### 4 数值仿真分析

本节分别对捕食者数量  $N = 1$  和  $N = 2$  两种情况进行数值仿真分析. 设博弈区域目标边界  $T = \{(x_T, y_T) | x_T = 0, 0 \leq y_T \leq 6\}$ , 障碍物  $S$  的两个端点坐标分别为  $\mathbf{x}_{S1} = (6, 1)$  和  $\mathbf{x}_{S2} = (4, 5)$ . 分别仿真了捕食者团队和逃逸者团队均使用最优策略; 捕食者团队使用纯追踪 (PP) 策略, 逃逸者使用最优策略; 捕食者团队使用最优策略, 逃逸者使用垂直向目标边界运动策略时的运动轨迹和结果.

##### 4.1 捕食者数量 $N = 1$

设捕食者  $D$  的初始位置为  $\mathbf{x}_D(t_0) = (7, 3)$ , 逃逸者  $A$  的初始位置为  $\mathbf{x}_A(t_0) = (3.5, 3)$ , 逃逸者与捕食者的速度之比为  $\alpha = 0.6$ . 仿真步长  $\Delta t = 0.1$  s, 当捕食者与逃逸者之间的距离小于 0.05 或者逃逸者与目标边界之间的距离小于 0.05 时视为捕食者成功拦截逃逸者或逃逸者到达目标边界, 博弈结束. 仿真结果轨迹如图 7(a)~(c) 所示.

如图 7(a) 所示, 当捕食者与逃逸者均使用最优鞍点策略时, 双方应当选择的最优目标点坐标为  $P^* = (0, 3.79)$ , 说明此时逃逸者能够在被捕食者拦截之前到达目标边界, 式 (7) 为此时博弈双方应当选择的终端性能指标函数. 博弈结束时逃逸者的位置为  $\mathbf{x}_{Af1}^{N=1} = (0, 3.78)$ , 捕食者的位置为  $\mathbf{x}_{Df1}^{N=1} = (2.62, 2.54)$ ,  $\Phi_{A1}^{N=1}(t_f) = 4.32$ . 图 7(b) 显示了当逃逸者使用非最优策略垂直向目标边界  $T$  运动, 而捕食者使用最优状态反馈策略时的轨迹. 此时博弈结束时逃逸者的位置为  $\mathbf{x}_{Af2}^{N=1} = (0, 3)$ , 而捕食者的位置为  $\mathbf{x}_{Df2}^{N=1} = (2.68, 2.18)$ , 终端性能指标函数值为  $\Phi_{A2}^{N=1}(t_f) = 3.73$ . 图 7(c) 显示了当逃逸者使用最优状态反馈策略, 而捕食者在绕过障碍物后采用纯追踪 (PP) 策略时的轨迹, 博弈结束时逃逸者的位置为  $\mathbf{x}_{Af3}^{N=1} = (0, 3.75)$ , 捕食者的位置为  $\mathbf{x}_{Df3}^{N=1} = (2.76, 2.59)$ , 终端性能指标函数值为  $\Phi_{A3}^{N=1}(t_f) = 4.33$ .

由此可以看出, 当  $N = 1$  时双方使用不同策略时的性能指标函数值  $\Phi_{Af2}^{N=1} \leq \Phi_{Af1}^{N=1} \leq \Phi_{Af3}^{N=1}$ , 满足式 (8), 说明双方均使用最优状态反馈策略是边界防御博弈问题的鞍点策略.

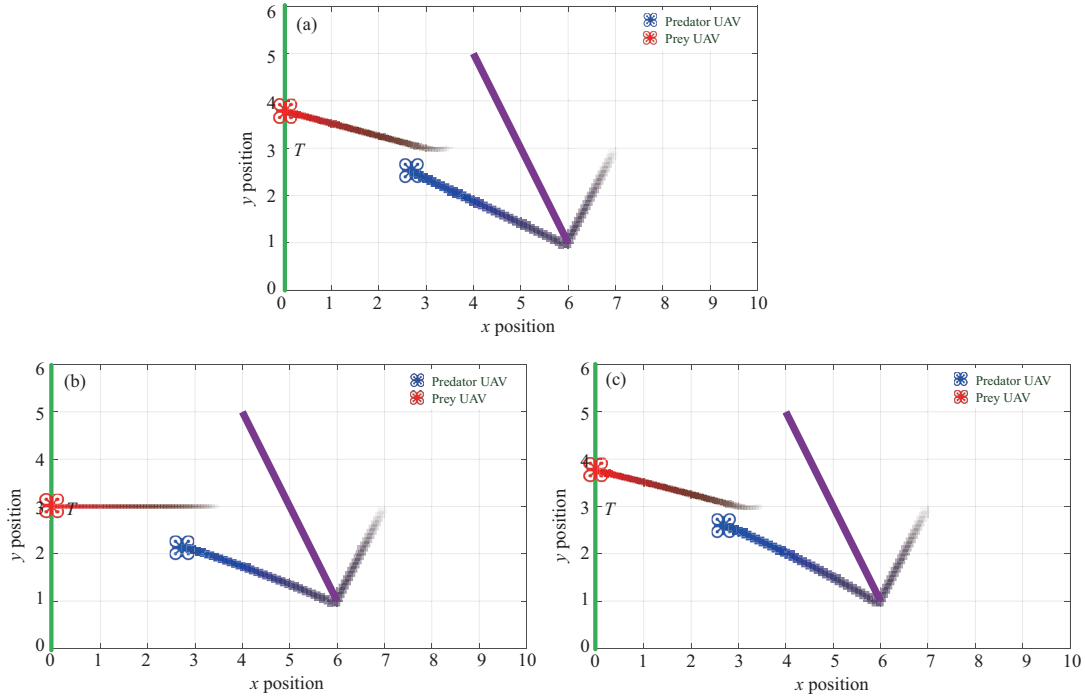


图 7 (网络版彩图)  $N = 1$  时, (a) 博弈双方均使用最优策略时的运动轨迹; (b) 逃逸者使用垂直向目标边界运动策略时的运动轨迹; (c) 捕食者使用纯追踪策略时的运动轨迹

Figure 7 (Color online) (a) Trajectories of UAVs using optimal strategy when  $N = 1$ ; (b) trajectories of the attacker using greedy strategy when  $N = 1$ ; (c) trajectories of the defender using PP strategy when  $N = 1$

#### 4.2 捕食者数量 $N = 2$

以下研究捕食者数量  $N = 2$  的情况, 设捕食者  $D_1$  和  $D_2$  的初始位置分别为  $\mathbf{x}_{D_1}(t_0) = (5, 4)$  和  $\mathbf{x}_{D_2}(t_0) = (7, 2)$ , 逃逸者  $A$  的初始位置为  $\mathbf{x}_A(t_0) = (3.5, 3)$ , 逃逸者与捕食者的速度之比为  $\alpha = 0.55$ , 其他条件与  $N = 1$  时相同. 双方运动轨迹如图 8(a)~(c) 所示, 仿真结果显示 3 种情况下逃逸者均会被捕食者拦截.

如图 8(a)~(c) 所示, 当双方均使用最优状态反馈策略时终端性能指标函数值  $\Phi_{D_1}^{N=2}(t_f) = 0.26$ ; 当逃逸者使用非最优策略垂直向目标边界  $T$  运动, 而捕食者使用最优状态反馈策略时  $\Phi_{D_2}^{N=2}(t_f) = 0.53$ ; 当逃逸者使用最优状态反馈策略, 而捕食者在绕过障碍物后采用纯追踪 (PP) 策略时  $\Phi_{D_3}^{N=2}(t_f) = 0.11$ ; 由此可以看出, 当  $N = 2$  时双方使用不同策略时的性能指标函数值  $\Phi_{D_3}^{N=1} \leq \Phi_{D_1}^{N=1} \leq \Phi_{D_2}^{N=1}$  同样满足式 (8), 说明在  $N = 2$  的情况下双方均使用最优状态反馈策略是边界防御博弈问题的鞍点策略.

### 5 结论

本文提出了一种在含障碍环境下基于生物捕食逃逸行为的多运动体边界防御博弈方法. 首先分析了含障碍环境下边界防御问题的主导区域和边界, 以及构造这些区域的方法. 其次, 分析了  $N = 1$  和  $N = 2$  时不同速度比  $\alpha$  形成的优势区域与界栅面满足的条件. 另外, 通过比较有障碍和无障碍时的优势区域, 定性研究了障碍对博弈双方的影响, 结果表明障碍对捕食者和逃逸者都有好处和缺点. 最后, 数值仿真验证了本文提出的方法满足微分对策的鞍点策略条件.

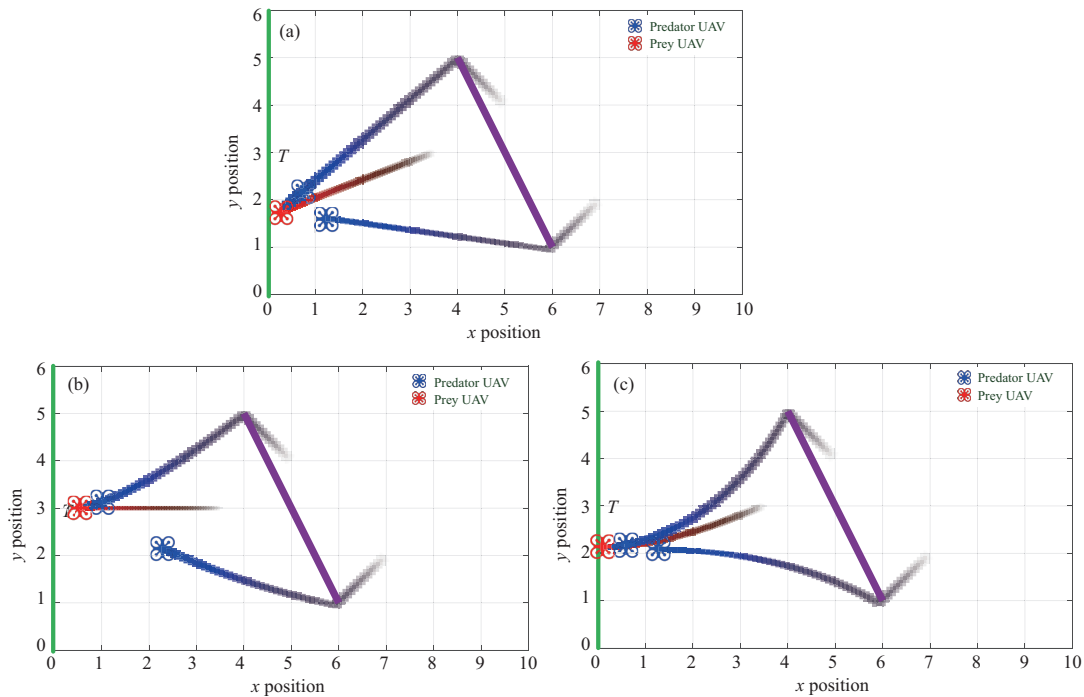


图8 (网络版彩图)  $N = 2$  时, (a) 博弈双方均使用最优策略时的运动轨迹; (b) 逃逸者使用垂直向目标边界运动策略时的运动轨迹; (c) 捕食者使用纯追踪策略时的运动轨迹

Figure 8 (Color online) (a) Trajectories of UAVs using optimal strategy when  $N = 2$ ; (b) trajectories of the attacker using greedy strategy when  $N = 2$ ; (c) trajectories of the defender using PP strategy when  $N = 2$

本文在分析多运动体边界防御问题时,只考虑了逃逸者数量小于等于捕食者数量的情况.未来可以研究当逃逸者数量大于捕食者数量时,博弈双方应当采取的最优鞍点策略.

## 参考文献

- 1 Duan H B, Qiu H X. Unmanned Aerial Vehicle Swarm Autonomous Control Based on Swarm Intelligence. Beijing: Science Press, 2018 [段海滨, 邱华鑫. 基于群体智能的无人机集群自主控制. 北京: 科学出版社, 2018]
- 2 Duan H B, Zhang D F, Fan Y M, et al. From wolf pack intelligence to UAV swarm cooperative decision-making. Sci Sin Inform, 2019, 49: 112–118 [段海滨, 张岱峰, 范彦铭, 等. 从狼群智能到无人机集群协同决策. 中国科学: 信息科学, 2019, 49: 112–118]
- 3 Guo L, Yu X, Zhang X, et al. Safety control system technologies for UAVs: review and prospect. Sci Sin Inform, 2020, 50: 184–194 [郭雷, 余翔, 张霄, 等. 无人机安全控制系统技术: 进展与展望. 中国科学: 信息科学, 2020, 50: 184–194]
- 4 Zhou W Q, Zhu J H, Kuang M C. An unmanned air combat system based on swarm intelligence. Sci Sin Inform, 2020, 50: 363–374 [周文卿, 朱纪洪, 匡敏驰. 一种基于群体智能的无人空战系统. 中国科学: 信息科学, 2020, 50: 363–374]
- 5 Isaacs R. Differential Games: A Mathematical Theory With Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1965. 1–24
- 6 Garcia E, Casbeer D W, von Moll A, et al. Multiple pursuer multiple evader differential games. IEEE Trans Automat Contr, 2020, 66: 2345–2350
- 7 Yan R, Shi Z, Zhong Y. Reach-avoid games with two defenders and one attacker: an analytical approach. IEEE Trans Cybern, 2018, 49: 1035–1046
- 8 Oyler D W, Kabamba P T, Girard A R. Pursuit-evasion games in the presence of obstacles. Automatica, 2016, 65: 1–11
- 9 Bhadauria D, Klein K, Isler V, et al. Capturing an evader in polygonal environments with obstacles: the full visibility

- case. *Int J Robotics Res*, 2012, 31: 1176–1189
- 10 Stevens A. Predation, herbivory, and parasitism. *Nature Education Knowledge*, 2010, 3: 36
  - 11 Peterson A N, Soto A P, McHenry M J. Pursuit and evasion strategies in the predator-prey interactions of fishes. *Integrative Comp Biol*, 2021, 61: 668–680
  - 12 Hein A M, Altshuler D L, Cade D E, et al. An algorithmic approach to natural behavior. *Curr Biol*, 2020, 30: 663–675
  - 13 Brighton C H, Taylor G K. Hawks steer attacks using a guidance system tuned for close pursuit of erratically manoeuvring targets. *Nat Commun*, 2019, 10: 2462
  - 14 Hedenstrom A, Rosén M. Predator versus prey: on aerial hunting and escape strategies in birds. *Behav Ecol*, 2001, 12: 150–156

## Multi-agent border defense differential game based on biological predation and escape behavior in an obstacle environment

Bingda TONG<sup>1</sup>, Haibin DUAN<sup>1,2\*</sup>, Jie XIA<sup>1</sup> & Xiaofeng LIU<sup>3</sup>

1. *Bio-inspired Autonomous Flight Systems Research Group, Science and Technology on Aircraft Control Laboratory, School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China;*

2. *Peng Cheng Laboratory, Shenzhen 518055, China;*

3. *College of IoT Engineering, Hohai University, Changzhou 213022, China*

\* Corresponding author. E-mail: hbduan@buaa.edu.cn

**Abstract** The pursuit-evasion and reach-avoid problems based on differential games are the key problems of multi-agent confrontation control. This paper studies a multi-agent border defense differential game in a bounded area with a line obstacle. First, by analyzing the predation and escape behavior of creatures in nature, the multi-agent border defense differential game system is modeled, and the game termination conditions and value functions are obtained in different situations. Second, this paper analyzes the dominance regions and barrier surfaces of the game in the presence of a line obstacle and compares it with the obstacle-free situation. Finally, numerical simulations show that the proposed method satisfies the conditions of the saddle-point strategy in the differential game and verify the effectiveness of the proposed method.

**Keywords** predation and escape, cooperative control, border defense, differential games, saddle point strategy