



无线信号交汇定位的奇异解问题表征与解决

刘公绪^{1,2*}, 李龙^{1,2*}, 路建民^{1,2}, 高新波^{1,3}

1. 西安电子科技大学电子工程学院, 西安 710071

2. 西安电子科技大学超高速电路设计与电磁兼容教育部重点实验室, 西安 710071

3. 重庆邮电大学图像认知重庆市重点实验室, 重庆 400065

* 通信作者. E-mail: liugongxu@xidian.edu.cn, lilong@mail.xidian.edu.cn

收稿日期: 2022-03-28; 修回日期: 2022-05-21; 接受日期: 2022-06-29; 网络出版日期: 2022-11-10

国家自然科学基金青年项目 (批准号: 62101399)、中国博士后科学基金 (批准号: 2021M692497)、国家自然科学基金面上项目 (批准号: 61871453) 和中央高校基本科研业务费项目 (批准号: XJS210209) 资助

摘要 无线信号交汇定位是最常见的几何定位技术, 在通信与定位领域具有广泛的应用. 然而人们对无线信号交汇定位所产生的奇异解问题本质认识不足, 对相关解决方法缺少基础和深入的研究. 针对上述问题, 本文基于最小二乘法推导了相关一维/二维/三维定位的解析式, 从新的角度发现了用来表征奇异解的八条几何拓扑约束关系, 并提出了参数微调法和空时自调节法来解决奇异解相关问题. 实验结果表明所提出的几何拓扑约束关系是可信的, 使奇异解问题易表征、可解释; 此外, 所提出的解决方法可实现对奇解问题的高效解决, 且有高精度定位近似解. 总之, 该工作对几何定位、基站布设、奇异解表征和鲁棒定位算法设计等提供了有益指导.

关键词 无线信号交汇定位, 几何定位, 最小二乘法, 奇异解, 拓扑约束

1 引言

终端用户 (user equipment, UE) 可与多个基站 (base station, BS) 进行通信, 获得时间、距离或角度相关信息, 形成一组超定方程, 进而可通过无线信号交汇定位技术^[1]如到达时间 (time of arrival, TOA)^[2]、到达时间差 (time difference of arrival, TDOA)^[3]、到达角 (angle of arrival, AOA)^[4]等进行定位. 针对一组超定方程的求解, 最常见的是使用最小二乘法 (least square method, LSM)^[5,6], 然而 LSM 在进行位置估计时涉及到矩阵求逆运算, 会出现定位奇异解问题.

虽然已有广义逆矩阵^[7]、奇异值分解^[8]等技术手段可以解决某些条件下的矩阵奇异问题, 但这里所述的定位解奇异问题是典型的方阵无逆情况, 不能通过常规的变换进行求逆, 因此该问题或被认为无解、或被长期忽略、或缺少系统深入研究悬而未决. 对其进一步解释如下: 当前人们普遍接受的观点是该问题已在数学上被定性为无解, 其数学本质是逆矩阵不存在, 遇到该问题人们往往会直接放弃

引用格式: 刘公绪, 李龙, 路建民, 等. 无线信号交汇定位的奇异解问题表征与解决. 中国科学: 信息科学, 2022, 52: 1992–2010, doi: 10.1360/SSI-2022-0127
Liu G X, Li L, Lu J M, et al. Representation and solution of singular positioning issues from wireless signal intersection location technology (in Chinese). Sci Sin Inform, 2022, 52: 1992–2010, doi: 10.1360/SSI-2022-0127

那些导致方程无解的量测值,用新量测值去进行定位.对该问题的深入认识和解决方法还几乎没有过.因此,本文针对无线信号交汇定位的奇异解相关问题开展研究,主要工作与贡献总结如下:(1)从数理一体化分析的角度,对无线信号交汇定位的奇异解问题进行表征,并得出了 TOA, TDOA, AOA 等定位技术下用来表征定位奇异解的八条几何拓扑约束关系.(2)针对 LSM 奇异解与近似奇异解问题,分析其物理本质是不满足几何拓扑约束关系或近似满足几何拓扑约束关系,并提出了参数微调方法,该方法对定位场景中可通信基站进行监控,根据可参与定位的基站数和几何拓扑约束关系的判断进行降维估计、局部参数微调和全局参数微调,有效解决了定位奇异解或近似奇异解问题,并获得了可信的和高精度的定位结果.(3)针对 LSM 近似奇异解问题和定位误差的轴相关性问题,提出空时自调节方法,即在进行定位求解时,先对空间尺度进行非线性映射,使各坐标轴均匀地映射到一个新的空间,然后自适应调节定位算法中时间相关的参数,进行定位求解,最后再把定位解反映射回真实物理空间,所提出的方法能够有效解决近似奇异解问题,或在正常解时基本消除坐标轴间尺度差异对定位误差带来的影响,并改善了定位精度.本文的研究工作对通导一体化中基站布设、奇异解表征和鲁棒定位算法设计等提供了有益指导.

2 奇异解问题与几何拓扑约束关系

2.1 LSM 的推导与满秩分析

这里首先从矩阵运算的角度来推导最小二乘法.定义系数矩阵 $\mathbf{A}$ 如下所示:

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{Ax} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (1)$$

则最小二乘的矩阵约束形式为

$$\exists \mathbf{b} \notin \mathbf{R}(\mathbf{A}), \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2, \quad (2)$$

其中 $\mathbf{b}$ 为偏置矩阵.由于 2-范数与 2-范数的平方对状态量 $\mathbf{x}$ 的约束等价,目标函数可以改为

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2. \quad (3)$$

对式 (3) 关于状态量 $\mathbf{x}$ 求偏导,最优解在导数为零时取得,即

$$\frac{\partial \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{b} = 0, \quad (4)$$

进一步得状态量 $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (5)$$

从式 (5) 和系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的定义不难看出,状态量 $\mathbf{x}$ 有解的条件是

$$\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = n, \quad (6)$$

即 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 满秩,此时 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 存在逆矩阵,状态量 $\mathbf{x}$ 有解.然而针对多基站定位,满足式 (6) 的物理意义何在?以及不满足式 (6) 时又该如何进行位置估计呢?这两个问题及其延伸问题将结合具体的技术在下面探讨.为便于讨论,定义如下概念:奇异解空间、近似奇异解空间和正常解空间,从数值角度来看,3 个空间是无缝衔接的.通常奇异解或绝大多数近似奇异解都显著偏离真值,且缺少意义或可解释性,当然也存在某些近似奇异解与真值很接近.本文要解决的不仅是奇异、近似奇异的表征问题,还包括奇异、近似奇异问题的解决方法.从解空间的角度来说,本文工作是把解从奇异解空间、近似奇异解空间拉到正常解空间,或者拉到非常靠近正常解空间的近似奇异解空间.

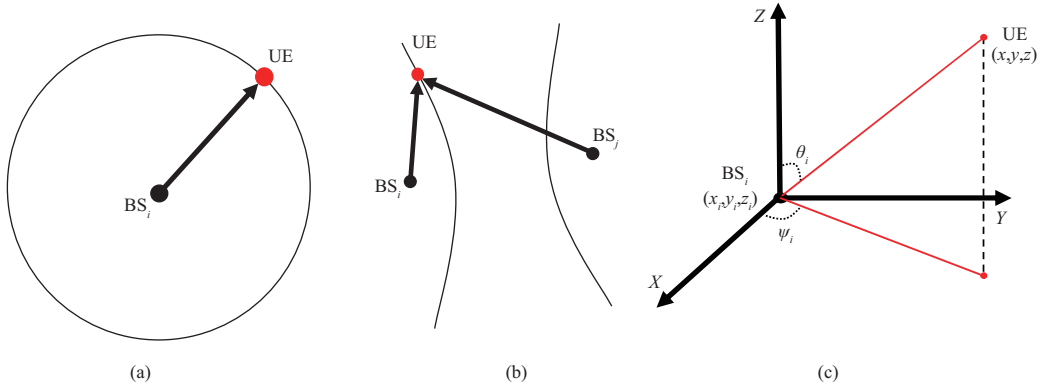


图 1 (网络版彩图) (a) TOA 定位原理示意图; (b) TDOA 定位原理示意图; (c) AOA 定位原理示意图

Figure 1 (Color online) Schematic diagrams of (a) TOA, (b) TDOA, and (c) AOA

2.2 基于 TOA 的 LSM 多基站位置估计 (TOA-LSM)

如图 1(a) 所示, 设共有 n 个 BS 参与定位, BS_i 与 UE 之间信号单向传播时间为 t_i , 电磁波在自由空间的传播速度为 c , $i \in [1, 2, \dots, n]$ 表示 BS 的序号, BS_i 与 UE 之间距离 d_i 为

$$d_i = ct_i. \quad (7)$$

设 BS_i 的坐标为 (x_i, y_i, z_i) , UE 的坐标为 (x, y, z) , 则 BS_i 与 UE 之间的距离为

$$d_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}. \quad (8)$$

BS_i 到原点的距离为

$$r_i = \|(x_i, y_i, z_i)\|_2 = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}. \quad (9)$$

UE 到原点的距离为

$$r = \|(x, y, z)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (10)$$

将式 (7) 代入式 (8), 两边平方后整理得

$$-2x_ix - 2y_iy - 2z_iz + r^2 = c^2t_i^2 - r_i^2. \quad (11)$$

结合式 (5) 即可得到最优解, 其中

$$\begin{cases} \mathbf{x} = (x, y, z, r^2)^T, \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2x_i & -2y_i & -2z_i & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} c^2t_1^2 - r_1^2 \\ \vdots \\ c^2t_i^2 - r_i^2 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (12)$$

进一步分析可得如下结论. (1) 在进行 TOA 三维 (3D) 位置估计时, 此时 $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 4$, 满秩, 至少需要 4 个 BS 才能进行 LSM 求解; 将 $z_i, z \equiv 0$ 代入式 (8)~(12), 则退化为 TOA 二维 (2D) 位置估计, 此时 $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 3$, 满秩, 则至少需要 3 个 BS 才能进行 LSM 求解; 进一步地将 $y_i, y, z_i, z \equiv 0$ 代入式 (8)~(12), 则退化为 TOA 一维 (1D) 位置估计, 此时 $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 2$, 满秩, 则至少需要 2 个 BS 才能进行 LSM 求解. 最少 BS 数总比要求解的位置维度大 1 是因为状态量 $\mathbf{x}$ 引入了 1 个额外的中间状态量.

(2) 考虑到 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 所对应的矩阵不满秩的数学操作总可以通过初等行/列变换使某行/列全为 0; 矩阵初等行/列变换所对应的物理解释是所布设 BS、待定位的 UE 在选定坐标系中的存在某种几何拓扑结构关系. 进而有以下结论: 需要满足 3D 位置估计时, 每 4 个 BS 不共面; 或 2D 位置估计时, 每 3 个 BS 不共线; 或 1D 位置估计时, 每 2 个 BS 不共点. BS 几何拓扑结构不满足上述约束关系则 $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 不满秩, 用 LSM 求解状态量 $\mathbf{x}$ 时出现奇异解; 基站几何拓扑结构近似满足上述约束关系则在求解时出现近似奇异解. 理论上, 传统稀疏布站中该情况不易出现, 但针对多密集基站定位则出现概率会明显增加. 值得注意的是, 有一种特殊情况是 $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 满秩, 但 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 此时与上述拓扑关系无关, 且此时状态量 $\mathbf{x}$ 只有零解, 这除了 UE 在坐标原点这一极端情况基本可以认为无解.

(3) 当实际 BS 数 $n > \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$, 对所有 BS 的拓扑约束关系进行遍历, 发现有 m 个 BS 不满足 (2) 中的几何拓扑约束关系, 则实际参与定位的 BS 数等效为 $n - m$ 个. 若 $n - m$ 个 BS 所对应的 $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 满秩则正常用 LSM 求解, 否则就需要额外的方法去处理, 将在 3.1 小节介绍.

2.3 基于 TDOA 的 LSM 多基站位置估计 (TDOA-LSM)

如图 1(b) 所示, 以 BS_j 为参考 BS. 设 t_{ij} 为 UE 发出的信号到达 BS_i 和 BS_j 的时间差, 则 BS_i 和 BS_j 的距离差为 d_{ij} :

$$d_{ij} = d_i - d_j = ct_{ij}. \quad (13)$$

由式 (8) 和 (9) 得

$$d_i^2 - d_j^2 = r_i^2 - r_j^2 - 2(x_i - x_j)x - 2(y_i - y_j)y - 2(z_i - z_j)z. \quad (14)$$

联立式 (13) 和 (14) 得

$$(x_i - x_j)x + (y_i - y_j)y + (z_i - z_j)z + ct_{ij}d_j = 0.5(r_i^2 - r_j^2 - c^2 t_{ij}^2). \quad (15)$$

结合式 (5) 即可得到最优解, 其中

$$\begin{cases} \mathbf{x} = (x, y, z, d_j)^T, \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 - x_j & y_1 - y_j & z_1 - z_j & ct_{1j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i - x_j & y_i - y_j & z_i - z_j & ct_{ij} \end{bmatrix}, \quad i \neq j, \\ \mathbf{b} = 0.5 \begin{bmatrix} r_1^2 - r_j^2 - c^2 t_{1j}^2 \\ \vdots \\ r_i^2 - r_j^2 - c^2 t_{ij}^2 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (16)$$

不失一般地, 若依次将参与定位解算的 BS 作为参考 BS, 则式 (16) 可以拓展为式 (17).

与 2.2 小节分析类似, 可以得到位置估计与布设 BS 的几何拓扑约束关系如下: 3D 位置估计时每 5 个 BS 不共面、2D 位置估计时每 4 个 BS 不共线、1D 位置估计时每 3 个 BS 不共点, 且 UE 位置只能在由 3 个 BS 一维坐标点形成的线段内被非奇异估计 (不含线段端点). 与 TOA 位置估计不同, 在进行 TDOA 位置估计时, 需要选定一个 BS 作为参考 BS, 并将其作为状态量, 同时在系数矩阵中包含其他 BS 与各参考 BS 的相对位置量, 使得有效量测方程总比 BS 数少 1 (将每个参考 BS 与待估计位置协同来看), 在进行各维位置估计时, 所需要的最少 BS 总数总比 TOA 的多 1. 也正是由于 TDOA 本身考虑的是信号到达两 BS 的时间差, 在进行 1D 位置估计时, 3 个 BS 点形成的线段以外的区域被等效消除了, 也就是说线段以外的区域是位置估计的盲区; 此时用户位置只能在线段覆盖的区域且不包括线段两端点才能被正确估计.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = (x, y, z, d_1, d_2, \dots, d_j, \dots)^T, \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & ct_{21} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i - x_1 & y_i - y_1 & z_i - z_1 & ct_{i1} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 - x_j & y_1 - y_j & z_1 - z_j & 0 & ct_{1j} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i - x_j & y_i - y_j & z_i - z_j & 0 & ct_{ij} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \quad i \neq j, \\ \mathbf{b} = 0.5 \begin{bmatrix} r_1^2 - r_j^2 - c^2 t_{1j}^2 \\ \vdots \\ r_i^2 - r_j^2 - c^2 t_{ij}^2 \end{bmatrix}, \quad i \neq j. \end{array} \right. \quad (17)$$

2.4 基于 AOA 的 LSM 多基站位置估计 (AOA-LSM)

设 BS_{*i*} 与 UE 之间信号方位角为 $\psi_i \in (-\pi, \pi]$, 俯仰角为 $\theta_i \in (-\pi, \pi]$, 如图 1(c) 所示, 则满足以下关系:

$$x - x_i = d_i \sin \theta_i \cos \psi_i, \quad (18)$$

$$y - y_i = d_i \sin \theta_i \sin \psi_i, \quad (19)$$

$$z - z_i = d_i \cos \theta_i. \quad (20)$$

联立式 (18) 和 (19) 可得

$$x \sin \psi_i - y \cos \psi_i = x_i \sin \psi_i - y_i \cos \psi_i. \quad (21)$$

结合式 (5) 即可得到最优解, 其中

$$\begin{cases} \mathbf{x} = (x, y)^T, \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin \psi_1 & -\cos \psi_1 \\ \vdots & \vdots \\ \sin \psi_i & -\cos \psi_i \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_1 \sin \psi_1 - y_1 \cos \psi_1 \\ \vdots \\ x_i \sin \psi_i - y_i \cos \psi_i \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (22)$$

由式 (20) 和 (22) 进一步求得 z :

$$z = \begin{cases} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (z_i + d_i(z = z_i) \cot \theta_i), & \theta_i \neq 0, \\ \frac{1}{m'} \sum_{i=1}^{m'} z_i, & \theta_i = 0, \end{cases} \quad 2 \leq m + m' \leq n, \quad (23)$$

其中 $d_i(z = z_i)$ 表示 d_i 在水平面上的投影模值. 这样处理的问题是对 UE 垂直距离 z 的估计耦合了 x, y 的误差; 但优点是只需两个 BS 以及知道 BS 与 UE 之间的方向关系, 就可以获得 3D 位置估计. 值得注意的是, 为了使 $\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{b}$ 在 ψ 取任意值时都有物理意义, $\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{b}$ 的元素应避免用正切或余切函数来表示; 同时为避免 $\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{b}$ 奇异, $|\psi_i|$ 不全为 $\pi/2$.

下面将给出另外一种方法, 直接对 UE 进行三维位置估计. 联立式 (18)~(20), 消去 d_i , 同时保留 x, y, z 的相关项, 可得

$$\begin{aligned} & x \sin \psi_i \cos \theta_i - 2y \cos \psi_i \cos \theta_i + 0.5z \sin 2\psi_i \sin \theta_i \\ & = x_i \sin \psi_i \cos \theta_i - 2y_i \cos \psi_i \cos \theta_i + 0.5z_i \sin 2\psi_i \sin \theta_i. \end{aligned} \quad (24)$$

结合式 (5) 即可得到最优解, 其中

$$\begin{cases} \mathbf{x} = (x, y, z)^T, \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin \psi_1 \cos \theta_1 & -2 \cos \psi_1 \cos \theta_1 & 0.5 \sin 2\psi_1 \sin \theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin \psi_i \cos \theta_i & -2 \cos \psi_i \cos \theta_i & 0.5 \sin 2\psi_i \sin \theta_i \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_1 \sin \psi_1 \cos \theta_1 - 2y_1 \cos \psi_1 \cos \theta_1 + 0.5z_1 \sin 2\psi_1 \sin \theta_1 \\ \vdots \\ x_i \sin \psi_i \cos \theta_i - 2y_i \cos \psi_i \cos \theta_i + 0.5z_i \sin 2\psi_i \sin \theta_i \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (25)$$

值得注意的是, 为了使 $\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{b}$ 在 ψ 和 θ 取任意值时都有物理意义, $\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{b}$ 的元素应避免用正切或余切函数来表示; 同时为避免 $\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{b}$ 奇异, $|\psi_i|$ 不全为 $\pi/2$, 且 $|\theta_i|$ 不全为 $\pi/2$. 式 (25) 可以同时估

计 3D 位置, 但至少需要 3 个 BS, 相比于式 (22) 和 (23) 复杂度要高一些. 同时式 (25) 的兼容性 (通过对 3D 位置估计对应的 LSM 参数进行简化, 使其适合 2D 位置估计或 1D 位置估计) 不好, 并不能通过对 θ_i 或 ϕ_i 的赋值使其退化为 2D 或 1D 位置估计. 总之, AOA 进行 3D 位置估计时至少需要 3 个 BS (3D 位置信息同时估计, 需要 UE 与各 BS_{*i*} 间的俯仰角和航向角信息) 或 2 个基站 (先估计 2D 位置, 再根据俯仰角和航向角信息估计第 3 个维的位置); AOA 进行 2D 位置估计时至少需要 2 个 BS (含航向角或俯仰角信息); AOA 进行一维位置估计时至少需要 1 个 BS (含角度约束). 从数学和物理概念上来看, 无论是式 (22)/(23), 还是式 (24), 都有多种表现形式. 基于式 (18)~(20), 可以得到 AOA 3D, 2D, 1D 位置估计的关系如下:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_i \equiv \pi/2, & \text{2D position representation in the } XOY \text{ plane,} \\ \psi_i \equiv 0, & \text{2D position representation in the } XOZ \text{ plane,} \\ \psi_i \equiv \pi/2, & \text{2D position representation in the } YOZ \text{ plane,} \\ \theta_i \equiv \pi/2 \text{ and } \psi_i \equiv 0, & \text{1D position representation in the } X \text{ axis,} \\ \theta_i \equiv \pi/2 \text{ and } \psi_i \equiv \pi/2, & \text{1D position representation in the } Y \text{ axis,} \\ \theta_i \equiv 0, & \text{1D position representation in the } Z \text{ axis.} \end{array} \right. \quad (26)$$

与 2.2 小节分析类似, 可以得到位置估计与布设 BS 的几何拓扑结构关系, 由于 AOA 位置估计时引入了角度信息, 使得最小 BS 数均有所下降. 相应的结论如下: 针对 AOA 3D 位置估计, UE 与任 3 个 BS 形成的向量两两作 Hadamard 积, 所得的 3 个向量不共面 (UE 在任意 BS 的正上/下方除外); 或 AOA 2D 位置估计时, UE 与任两 BS 不共线. 若 BS 几何拓扑结构不满足上述约束关系则 $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 不满秩, 位置估计时出现奇异解. 而 AOA 1D 位置估计则由多 BS 定位退化为单 BS 定位, 此时不管是从物理概念上, 还是从是否使用 LSM 方法上, 基站几何拓扑结构关系不再存在, 换句话说, BS 几何拓扑结构关系是针对多 BS 而言的 (不少于 2 个 BS), 且与 UE 位置、与坐标系选择都有关系.

2.5 基于 TOA/AOA 单基站位置估计

前述讨论的是单独测距或单独测角的多 BS 定位; 单 BS 定位需要同时具备测距和测角功能, TOA 与 AOA 融合是单 BS 定位的基本原理, 对其探讨可以在某种程度上对大规模 MIMO 与其他技术的融合带来启发意义. 相比于多 BS 定位, 单 BS 定位具有以下优势: (1) 允许在 BS 不足的情况下实现 3D 定位; (2) 降低了由建筑物遮挡等因素造成的非视距问题的影响; (3) 对 BS 间的精确时间同步不做要求, 只依赖 BS 与 UE 间的时间同步.

定义 ${}^i \mathbf{x} = ({}^i x, {}^i y, {}^i z)^T$ 为 UE 借助 BS_{*i*} 获得的 3D 位置, 联合式 (7), (18)~(20) 直接获得 TOA/AOA 单 BS 3D 定位解 ${}^i \mathbf{x}$, 如下所示:

$${}^i \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_i + ct_i \sin \theta_i \cos \psi_i \\ y_i + ct_i \sin \theta_i \sin \psi_i \\ z_i + ct_i \cos \theta_i \end{bmatrix}. \quad (27)$$

同时考虑到环境中 n 个 BS 参与定位, 每组定位解的权重为 w_i , 则协同考虑 n 个 BS_{*i*} 后 UE 的最终位置 $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ 如下:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n w_i \cdot {}^i \mathbf{x}, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1. \quad (28)$$

表 1 无线信号交汇定位技术特性与对应的几何拓扑约束关系

Table 1 Technical characteristics of wireless signal intersection location and corresponding geometric topology constraints

Method	Equation	Minimum BSs			Pros and cons	Geometric topology constraints
		3D	2D	1D		
TOA	(12)	4	3	2	Simple principle, required time synchronization, and sensitive to NLOS.	3D: no coplanarity every 4 BSs; 2D: no colinearity every 3 BSs; 1D: no Uni-Q every 2 BSs.
TDOA	(16)	5	4	3	Simple principle, required time synchronization between BSs, and sensitive to NLOS.	3D: no coplanarity every 5 BSs; 2D: no colinearity every 4 BSs; 1D: no Uni-Q every 3 BSs and in line segment without endpoints.
AOA	(22), (23), (25)	3(2)	2	—	No requirement for time synchronization, and high positioning accuracy in close range. High hardware cost and complexity, and sensitive to NLOS.	3D: no coplanarity of Hadamard product formed by an UE and any 3 BSs (except that the UE is directly above/below any BSs); 2D: no colinearity of an UE and any 2 BSs; 1D: no geometric topological constraints.
TOA+AOA	(27)~(29)	1	1	1	Single BS positioning, low sensitive to NLOS. Time synchronization is required between UE and BS.	3D/2D/1D: no geometric topology constraints (single BS positioning).

特殊地, 当参与定位的各 BS 等权重时,

$$\mathbf{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i. \quad (29)$$

其他关于 w_i 的确定方法将在第 4 节介绍. 将本节所讨论的不同定位技术的特点与几何拓扑约束关系进行梳理和总结, 如表 1 所示.

3 奇异解相关问题的解决方法

3.1 参数微调法 (parameter fine tuning method, PFTM)

第 2.2 小节有一个遗留问题, 若 $n - m$ 个 BS 所对应的 $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 不满秩, 此时无法用 LSM 求解. 若将不满足前文所讨论的几何拓扑约束关系的 m 个 BS 中选择 q 个作为备选 (即准 BS, 指按几何拓扑约束关系被移除, 但导致参与位置估计的 BS 数不够又重新选中参与位置估计的 BS), 对这 q 个准 BS 的坐标叠加一个小量 σ , 此时 $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 就满秩了, 进而可以用 LSM 求解. 由于上述操作相当于对 LSM 参数微调, 我们将这种方法称为参数微调法, 该方法的具体流程图如图 2 所示. 具体步骤如下.

(1) 可通信 BS 监控是指在直接使用 LSM 出现定位解奇异问题后, 统计当前可通信 BS 的标号 i 与位置信息 (x_i, y_i, z_i) , 并假设当前可通信 BS 的总数为 n .

(2) BS 数较少判断是将当前可通信 BS 总数 n 与相应技术下实现三维位置估计时所需的最少基站数 (见表 1) 进行比较, 以判断可通信 BS 数量是否较少, 若较少则判断为是, 否则判断为否.

(3) 拓扑约束判断是指逐个遍历 BS_i . 以 TOA 3D 位置估计为例, 起初 $i = 1$, 若 $n - i$ 个 BS 中任意 3 个都不与 BS_i 共面, 则继续遍历 $\text{BS}_{i=i+1}$, 并在剩下的 $n - i$ 个 BS 中重复上述操作, 直到剩下的

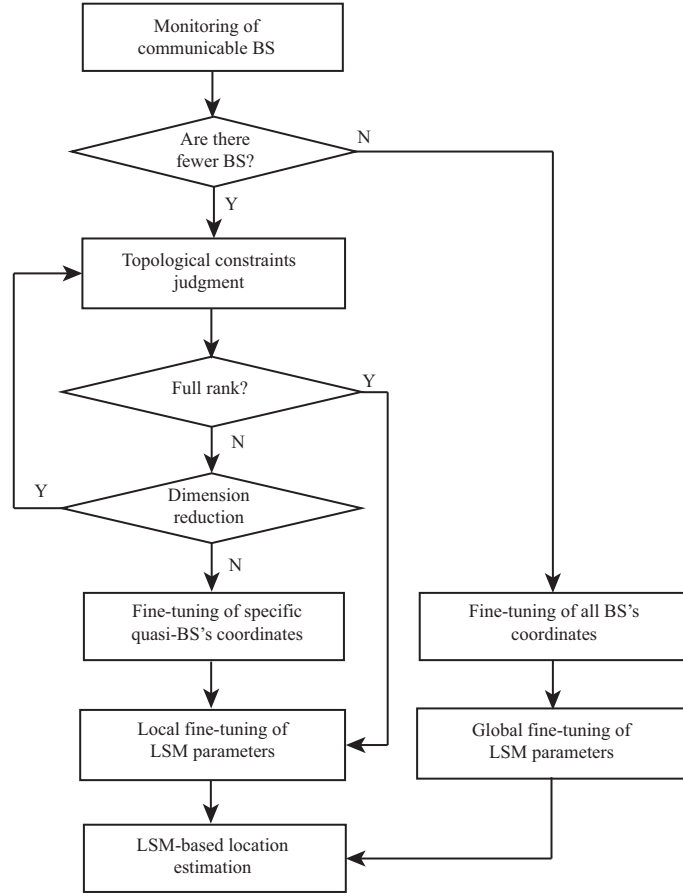


图 2 参数微调法流程图

Figure 2 Flow chart of the parameter fine-tuning method

BS 数为 3; 遍历期间, 若在 $n-i$ 个 BS 中存在 3 个 BS 与 BS_i 共面则将 BS_i 从参与 UE 定位的 BS 中暂时移除, 并统计这类 BS_i 的总数为 m , 即可确定有 $n-m$ 个 BS 参与 UE 的位置估计. 4 个 BS 是否共面可以这样来判定, 选中一个 BS 为基准点, 该基准点分别指向另外 3 个 BS 的坐标, 这样形成 3 个向量, 然后考察 3 个向量所形成的 3 行 3 列行列式是否为 0, 为零则共面, 否则不共面.

(4) 满秩判断, 即判断 $n-m$ 个 BS 所形成的系数矩阵 $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 是否满秩, 这里可以等效判断若 $n-m \geq$ 最少基站数 (见表 1), 则 $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 必满秩, 然后确定 LSM 参数, 包括 $\mathbf{x}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ 等, 进而借助式 (5) 进行 LSM 位置估计. 此时若 $n-m <$ 最少基站数, 则 $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 不满秩, 需要进行降维估计判断.

(5) 降维估计是指通过上述步骤已经知道有 m 个准 BS, 这要分以下两种情况来讨论: 情况 1, 若 m 个准 BS 都参与位置估计, 仍不能使 $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 满秩, 则需要降维估计, 并相应地改变几何拓扑约束关系后重新进行拓扑约束判断; 情况 2, 在 m 个准 BS 中选择 q 个准 BS, $n-m+q \geq$ 最少基站数, 此时则对 q 个准基站进行局部准 BS 坐标微调.

(6) 局部准 BS 坐标微调, 是指随机给局部准 BS 的 1 个或多个坐标叠加一个偏置小量 σ , σ 的取值满足 σ 取值原则; 平衡好定位精度和奇异问题, 即从精度方面而言, σ 不要超过原坐标的 1%, 否则 σ 过大会引起较大的定位解估计误差, 同时 σ 要比数据截断误差至少高一个量级, 否则 σ 过小就会被数据截断误差覆盖而无法解决奇异问题, σ 取值原则规定了 σ 不能取得太大, 也不能太小. 然后将已

有的 BS 和坐标微调后的准 BS 放在一起, 进行 LSM 参数确定.

(7) 所有可通信 BS 坐标微调是指在可通信 BS 数较多时, 给所有可通信准 BS 的所有坐标随机叠加不同的偏置小量 σ , σ 的取值同样满足 σ 取值原则; 然后进行 LSM 参数确定.

(8) LSM 参数确定是根据参与定位的 BS 的变化来适当调整 LSM 参数包括状态量 $\mathbf{x}$ 、系数矩阵 $\mathbf{A}$ 和偏置矩阵 $\mathbf{b}$; 比如若 BS 数量减少或者进行了降维估计, 则状态量 $\mathbf{x}$ 的维度也要相应降低; 若 BS 坐标局部或者整体微调, 则系数矩阵 $\mathbf{A}$ 和偏置矩阵 $\mathbf{b}$ 中与 BS 坐标直接相关的量也需要调整.

(9) LSM 位置估计即是获得 LSM 参数后按照式 (5) 进行求解.

由上述步骤可知, (i) 所提出的参数微调法主要是解决 LSM 定位解奇异或近似奇异问题的, 其中采用几何拓扑约束关系判断后若参与定位的 BS 数明显不足时, 采用降维估计, 避免全维或高维位置估计时的奇异; 若 BS 数可以基本满足全维或高维位置估计, 则调整对奇异性有贡献的 BS 坐标 (准 BS 坐标), 即采用部分参数微调法解决奇异或近似奇异问题. (ii) 针对少量的 BS, 步骤 (3) 所增加的复杂度是可以接受的, 但当 BS 数显著增加, 步骤 (3) 所给出的遍历方法并不高效. 考虑到在实际场景中, 针对 5G 超密网, 当可通信的 BS 数量较多时, 甚至非常多时, 会相当比例地出现 $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 不满秩的情况, 为了避免步骤 (3) 引入的复杂度, 将局部参数微调法扩展为全局参数微调法, 即对所有参与定位计算的 BS 的位置进行随机 σ 叠加, 这样各 BS 就在空间中“随机”的分布, 不再满足几何拓扑约束关系所对应的奇异条件, $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 满秩的概率也大大提升. (iii) 关于 σ 取值的讨论如下: $\sigma = 0$, 即不做任何处理, 方程奇异无解, 或者处于非常靠近奇异解空间的近似奇异解空间; σ 为理想值则方程不奇异, 有高精度解; 考虑到 σ 值的连续性, 以及解空间的连续性, 则必然会存在一种中间状态, 即近似奇异解. 近似奇异解表示方程有解, 但误差非常大, 甚至是“随机”给出的. 上述分析表明 σ 取值是有约束条件的, 如果值太大, 坐标偏离实际情况太多, 解的误差就大, 如果值太小, 则又没有很好地跳出奇异解空间或近似奇异解空间, 出现较大误差. 因此, 提出了步骤 (6) 和 (7) 中的 σ 取值原则. 为避免引起歧义, 本文所述的可通信 BS 即可以与 UE 进行通信交互并参与 UE 位置估计的 BS, 这里可通信与可定位不加区分. 此外, 对可通信 BS 的监控还有非常重要的作用, 比如启发我们通过对通信与定位中所参与 BS 的动态监控, 设置自适应的参数, 对各参与定位的 BS 加以区分, 从而设计出更有弹性和鲁棒的定位估计方法.

3.2 空时自调节法 (spatio-temporal autoregulation method, STAM)

通过前面的讨论可知, $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 满秩与否在物理层面与 BS 的几何拓扑约束关系密切相关. 同时在 3.1 小节中讨论到近似奇异问题. 这里对其从数值角度进一步分析, 由于其近似满足几何拓扑约束关系, 使得在 LSM 求解过程中某些分量 (如 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 的逆) 中的元素量级普遍较大, 考虑到计算机本身精度有限, 导致 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 近似奇异. 同时, 通过前期数值仿真实验发现, BS 或 UE 所在坐标轴相对量级的差异会使得最终定位误差的分布出现轴相关性, 即误差主要分布在坐标量级较小的轴向上, 这与实际经验不符.

为了缓解近似奇异导致的数值问题, 同时针对正常解时各种有显著轴向量级差的场景能使定位误差均匀分布在各轴上, 我们提出了空时自调节方法, 相关原理框图如图 3 所示.

图 3 中绿色框表示的是传统定位方法, 即对物理场景建立原坐标系, 在原坐标系进行位置估计, 以及对定位解进行评估. 所提出的方法的基本原理如下: 首先对 BS 和 UE 所在的原坐标系经变换函数 f 进行空间压缩变换和时间压缩变换, 使坐标轴的相对量级变平缓, 从而改变了 LSM 参数, 进而把改变后的 LSM 参数代入式 (5) 进行 LSM 最优解估计, 得到压缩后的定位解, 由于该解只有空间属性, 再将其经过空间反变换函数 f^{-1} 变换到原坐标系就得到最终的定位解, 并在原坐标系中进行定位解评

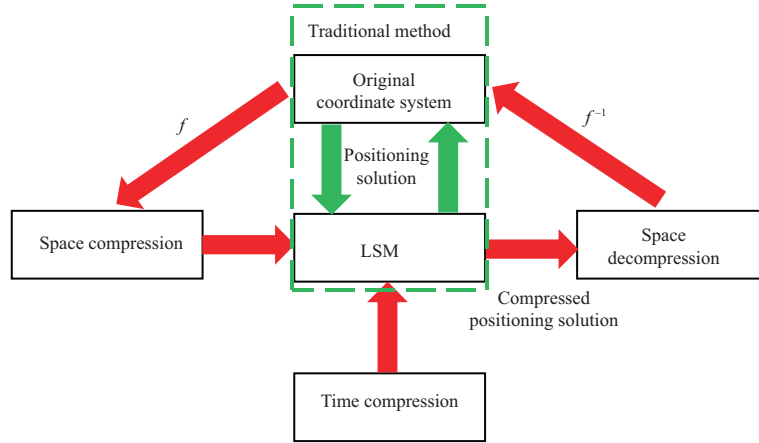


图 3 (网络版彩图) 空时自调节法原理框图

Figure 3 (Color online) Schematic diagram of spatio-temporal autoregulation method

估. 其中关键步骤和参数的选择如下.

针对实际物理场景选择合适的直角坐标系, 坐标系的 x, y, z 轴分别对应定位场景中的长宽高或实际空间中的东向、北向和天向, 并据此限定各轴所能取到的最大值, 我们定义上述坐标系为原标系 (简称 O 空间), 各轴所能表示的物理量级为 $O(x_{\max}, y_{\max}, z_{\max})^T$; O 空间经压缩变换函数 f 处理后, 变为 $O'(x'_{\max}, y'_{\max}, z'_{\max})^T$, 简称 O' 空间. 定义 O 空间轴间的最大相对量级为

$$\rho = \log_{10} \left(\max \left(\frac{x_{\max}}{y_{\max}}, \frac{y_{\max}}{x_{\max}}, \frac{z_{\max}}{x_{\max}}, \frac{x_{\max}}{z_{\max}}, \frac{y_{\max}}{z_{\max}}, \frac{z_{\max}}{y_{\max}} \right) \right). \quad (30)$$

相应地, 可以得到 f 处理后 O' 空间轴间的最大相对量级为

$$\rho' = \log_{10} \left(\max \left(\frac{x'_{\max}}{y'_{\max}}, \frac{y'_{\max}}{x'_{\max}}, \frac{z'_{\max}}{x'_{\max}}, \frac{x'_{\max}}{z'_{\max}}, \frac{y'_{\max}}{z'_{\max}}, \frac{z'_{\max}}{y'_{\max}} \right) \right). \quad (31)$$

显然理想的结果是 f 处理后 $\rho' \cong 0$, 且 $\max()$ 中的各项都接近于 1. 在实际中根据 ρ 的大小, 以及 O 空间中各轴的绝对大小选择合理的 f . 这里给出 f 的一种形式如下:

$$f \rightarrow \text{sign}(\chi) \log_{10}(\tau_1 + \log_{10}(\tau_2 + |\chi|)) = \chi', \quad (32)$$

其中 τ_1, τ_2 为两个偏置参数, 默认地, 都可以取 10, 用来控制新映射空间的最小尺度, χ 表示 O 空间中任意点的任一轴的坐标值, χ' 表示 χ 映射到 O' 空间中相应轴的坐标值, $\text{sign}()$ 为符号函数; 式 (32) 已经足以把 10 个量级的 ρ 压缩为近似于 1, 经过 f 处理, 新的 O' 空间各轴变得均匀平滑. 相应地可以获得 f 逆变换的表达式, 如下所示:

$$f^{-1} \rightarrow \text{sign}(\chi')(10^{(10^{|\chi'|} - \tau_1)} - \tau_2) = \chi. \quad (33)$$

通过式 (33) 就可以将 O' 空间中压缩后的定位解, 反映射回 O 空间.

考虑到自由空间电磁波速度 c 恒定, 因此对空间的压缩必然转化为对时间的压缩, 这样才能保证整个空间中与尺度相关的度量被一致的压缩, 而时间的压缩量由式 (34) 给出. 其中 χ_1, χ_2 表示 O 空间中的值, 它们在 O' 空间中的映射分别为 χ'_1 和 χ'_2 .

$$\zeta = \frac{\chi_1 - \chi_2}{\chi'_1 - \chi'_2}. \quad (34)$$

至此, 文本介绍了空时自调节法, 用于解决近似奇异的数值问题和轴间数量级不平衡导致的定位误差分布的轴相关问题. 相关实验验证与讨论部分见第 4 节.

4 实验验证和讨论

4.1 几何拓扑约束关系验证

本文围绕“奇异解相关问题表征”和“奇异解相关问题解决”开展研究, 其中几何拓扑约束关系是进行奇异解表征的核心. 所提出的 8 条几何拓扑约束关系的逻辑合理性如下: 利用最小二乘法推导了 TOA/TDOA/AOA 3 种最常见的无线信号交汇定位的解析表达式, 指出定位奇异解的数学本质是 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 不满秩, 进一步从数学和物理一体化角度构思, 这种数学上的不满秩应该存在着某种关系并在物理上对应着某种解释, 我们将其定义为“几何拓扑约束关系”, 如果找到这种关系则其不仅解释了数学上的不满秩问题, 更在某种程度上解释和表征了定位奇异解相关问题. 上述是我们提出和发现“几何拓扑约束关系”的思想脉络. 基于上面的思想指导, 通过实验的手段去发现这种约束关系, 针对 TOA/TDOA/AOA 3D/2D/1D 定位奇异解相关问题, 先后提出 8 条几何拓扑约束关系. 虽然它们不是严格推导出来的, 却是在上述思想引导下通过不断实验发现和总结出来的, 且其科学性和正确性将在下面进一步分析. 将表 1 中的 8 条几何拓扑约束关系分为 3 类, 共面约束 (TOA 3D, TDOA 3D)、共线约束 (TOA 2D, TDOA 2D, TDOA 1D, AOA 3D, AOA 2D) 和共点约束 (TOA 1D). 按照如下思路开展了大量正反向测试. 思路 1: 若出现奇异或近似奇异则必能用上述共面/共线/共点的约束关系描述; 思路 2: 若满足上述共面/共线/共点的约束则必出现奇异或近似奇异; 思路 3: 若没有奇异或近似奇异则必不满足上述共面/共线/共点的约束关系; 思路 4: 若不满足上述共面/共线/共点的约束关系则必没有奇异或近似奇异. 首先针对共面约束, 随机生成 (a, b, c, d) 一组参数, 再随机生成若干组基站的 (x, y) 参数 (可以在 3 个位置参数任选两个进行组合, 组数取决于几何拓扑约束关系所要求的最少基站数), 然后根据式 (35) 求得上述若干组基站的 z 参数. 这样就随机生成了若干组满足共面约束关系的 BS, 随后基于这些 BS, 结合对应位置估计方法进行用户位置估计, 大量重复上述过程, 测试结果为奇异或近似奇异, 均不能对用户位置进行有效估计.

$$\begin{cases} \text{面约束方程: } ax + by + cz + d = 0, \\ \text{线约束方程: } ax + by + c = 0, z \text{ 任意}, \\ \text{点约束方程: } ax + b = 0, y \text{ 任意}, z \text{ 任意}. \end{cases} \quad (35)$$

我们也可以对上述步骤进行反向验证, 即针对每一次奇异解或近似奇异解估计, 验证总能找到唯一一组参数 (a, b, c, d) , 使若干组 BS 共面; 或者针对每一次正常解估计, 验证总无法找到一组参数 (a, b, c, d) , 使这若干组 BS 共面. 类似地, 也可以进行线约束验证和点约束验证, 所有正反向测试均通过. 由于 AOA 3D 位置估计所对应的几何拓扑约束关系比较复杂, 这里重点对其验证过程进行展示. 首先给定 UE 位置的参考值为 (30, 40, 50), 随机生成 3 个 BS 的 3D 坐标 (假定其中一个坐标未知), 接着计算各 BS 与 UE 之间的相对向量; 然后对上述 3 个向量两两作 Hadamard 积, 形成 3 个新向量, 借助 Matlab 工具 (solve 函数) 求解 3 个新向量所对应行列式为 0 时 (3 个向量共面则行列式为 0) BS 中的一个未知量, 这样就按所述几何拓扑约束关系生成了需要给定的 BS 坐标; 最后借助 AOA-LSM 方法进行求解, 按不同规模重复上述实验, 统计定位解的情况, 包括: 用户位置正好在任意基站正上/下方的次数为 L , 奇异解与近似奇异解的次数 M . 理论上 $L + M$ 为规模数可以认为所挖掘的几何拓扑

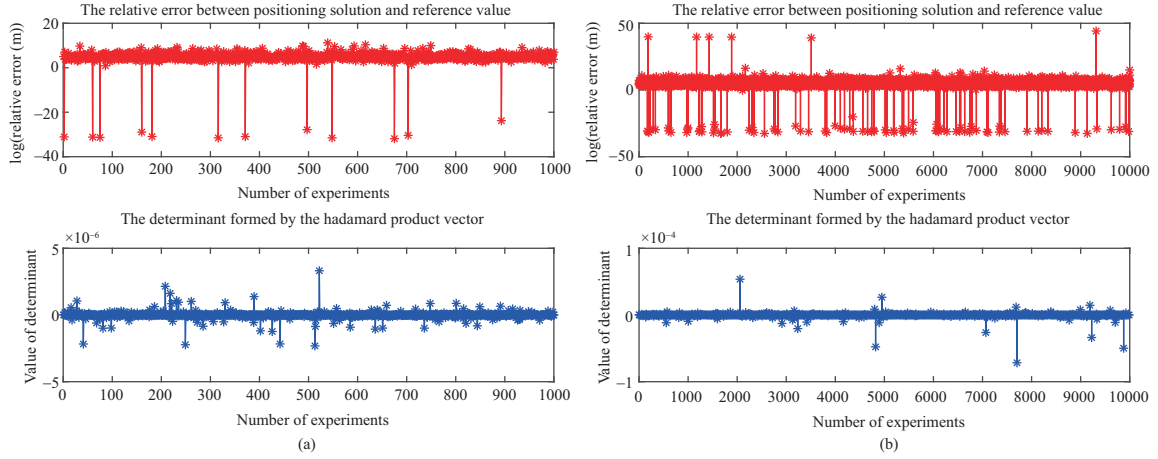


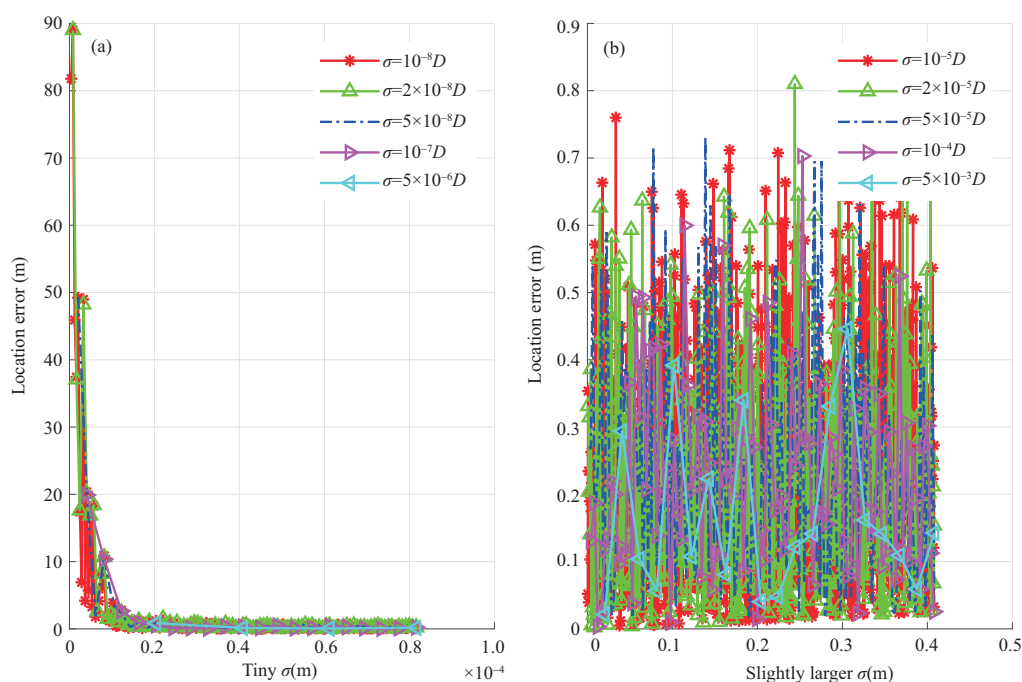
图 4 (网络版彩图) (a) 1000 次和 (b) 10000 次测试规模下几何拓扑约束关系的验证

Figure 4 (Color online) Verification of geometric topological constraints under the scales of (a) 1000 experiments and (b) 10000 experiments

约束关系是合理的. 图 4(a) 和 (b) 分别给出了 1000 和 10000 次测试规模下几何拓扑约束关系的验证. 在 1000 次规模测试中, 统计出 $L = 9$, $M = 991$, 两者之和为规模 1000; 在 10000 次规模测试中, 统计出 $L = 91$, $M = 9909$, 两者之和为规模 10000. 在图 4(a) 或 (b) 中, 上图是定位解与参考值的相对误差, 由于是按照几何拓扑关系生成基站坐标的, 若所发现的几何拓扑约束关系正确, 其导致的必然结果就是出现奇异解或近似奇异解, 因此 Y 轴所表示的相对误差会较大 (偏离 0). 由于 Y 轴数值已经进行对数处理, 因此其值应大多数集中在某个正值区间附近. 关于结果中有小比例误差显著增大的情况, 这是由于定位解出现在靠近奇异解空间的近似奇异解空间, 此时解具有混沌和大误差特性; 同样也会有小比例的结果偏小, 这是由于解出现在靠近正常解空间的近似奇异解空间, 在该处定位解逼近甚至非常逼近参考值. 图 4(a) 和 (b) 的下图表示用行列式的值是否接近 0 来描述 Hadamard 积向量是否共面或近似共面, 由于是按照 Hadamard 积向量共面或近似共面这种几何拓扑来生成基站坐标的, 所以行列式的值应无一例外地接近于 0, 而这里行列式的值在 10^{-6} (图 4(a)) 量级和 10^{-4} (图 4(b)) 量级, 不是严格的 0, 这主要在于计算过程中会产生不可避免的数值截断误差. 关于 3 个空间的定义和性质参考 2.1 和 4.4.4 小节.

4.2 参数微调法验证

在 4.1 小节验证的基础上, 每当出现奇异解或近似奇异解时, 采用参数微调法, 均可以得到正确解或高精度近似解. 以下面一个例子来做说明. 假定用户的坐标为 (30, 40, 50), 根据几何拓扑约束关系生成 3 个 BS, 其中 3 个 BS 的 3D 坐标分别为: BS_1 : (50.9424, 21.9885, 78.3622), BS_2 : (67.4857, 7.7604, 31.2019), BS_3 : (12.3241, 55.2022, 70.2657) 满足 AOA 3D 位置估计所对应的几何拓扑约束关系. 此时出现近似奇异解, 对 UE 位置估计结果为 (103.4474, 36.3443, 50.0000); 采用参数微调法对准 BS_1 的 y 轴叠加一个微小偏置量 $\sigma = 0.001$ 后变为 (50.9424, 21.9895, 78.3622), 将其替换为原先的 BS, 重新基于式 (25) 进行位置解算. 此时由于 AOA 3D 位置估计时满足不共面约束关系, $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 满秩, 近似奇异解问题消失, 得到用户的高精度近似解为 (29.9998, 40.0001, 50.0000); 若 σ 很小, 定位解仍会出现近似奇异问题甚至奇异问题. 我们对比了不同 σ 累加下的定位误差, 如图 5 所示, 在起初 σ 很小时, 定位误差最大. 图 5 显示了按不同步长 σ 累加的结果进行参数微调得到的相应位置估计误

图 5 (网络版彩图) 不同 σ 累加对位置估计误差的影响Figure 5 (Color online) Influence of different cumulative σ on the location estimation error

差, 其中左图表示 σ 在 $10^{-8}D \sim 10^{-6}D$ 范围内按 5 种比较小的步长进行累加, D 为参考坐标系的量级, 这里 D 约为 100. 此时整体 σ 累加结果偏小, 尤其在最初阶段累加后的 σ 比较小时会产生很大的定位误差. 由于 σ 取值太小, 没有起到参数微调的效果, 即定位解仍没有跳出奇异解空间或近似奇异解空间而出现大的定位误差, 直到在 σ 不断累加下, 定位解跳出了近似奇异解空间而使误差快速减小. 同时, 不同 σ 步长累加的初始阶段, 定位误差具有较大的跳跃性, 这与近似奇异解空间的特性有关. 当 σ 累加到一定阶段后误差收敛的趋势是非常一致的, 这由定位解由近似奇异解空间到正常解空间过渡时两空间的性质决定. 图 5 的右图则显示了当初始 σ 在 $10^{-5}D \sim 10^{-3}D$ 范围内按 5 种比较大的步长进行累加时, 定位解已经完全由近似奇异解空间进入了正常解空间, 此时误差主要与 σ 累加后坐标偏离的程度有关, 且偏离越大定位误差也就越大.

4.3 空时自调节法验证

首先在一个东向、北向不超过 100 m, 天向不超过 10 m 的场景内随机生成 100 个 BS 和 9 个 UE 的三维坐标, 如图 6 所示. 显然坐标系各轴有 1 个数量级的差距. 事实上, 各坐标轴在数量级上的差距可以设置的很大, 但 1 个数量级的差距已足以说明问题. 本文所提出的 STAM 可以与前文各种技术进行无缝融合, 形成 TOA-LSM-STAM, TDOA-LSM-STAM, AOA-LSM-STAM 等, 这里先对 TOA-LSM-STAM 进行验证, 其他方法验证结果类似. 我们设置如下参数, 各 UE 位置坐标每秒更新 30 次, 每次引入均值为 0 s, 方差为 10^{-8} s^2 量级的时间相关噪声, 各 UE 初始位置为参考值, 针对同一组测量数据分别用一般方法 (TOA-LSM) 和提出的 TOA-LSM-STAM 进行测试, 统计各 UE 的各方向的定位误差, 对误差进行排序, 并用箱线图和误差累计分布函数 (cumulative distribution function, CDF) 表示. 其中 E 表示东向误差, N 表示北向误差, U 表示天向误差, M 表示各方向误差矢量的模值. 测

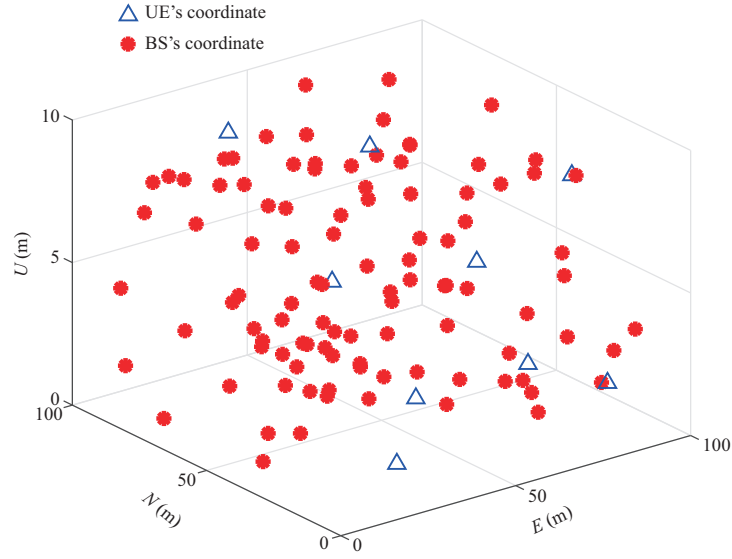


图 6 (网络版彩图) 随机生成 100 个 BS 与 9 个 UE 的 3D 坐标示意图

Figure 6 (Color online) Schematic diagram of randomly generated 3D coordinates of 100 BSs and 9 UEs

试结果分别如图 7 和 8 所示. 其中图 7(a) 和图 8(a) 是采用 TOA-LSM 处理, 和前文讨论的一致, 定位误差出现轴相关性问题, 这里 9 个 UE 的平均误差约为 1 m, 其中 95% 的误差由天向误差贡献; 而用空时自调节方法进行位置估计, 结果如图 7(b) 和图 8(b) 所示. 此时 9 个 UE 的平均误差约为 0.1 m, 且由各轴向误差均匀贡献, 可见轴相关性问题被解决, 且整体定位误差明显减少. 对这一结果的解释是所提出的空时自调节方法显著压缩了各 BS 的坐标, 间接压缩了 LSM 中空间相关参数, 使 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{b}$ 各元素大小分布均匀, 各轴向的时间相关噪声被自适应地调节, 使定位精度有所提高. 不同偏置参数下空间压缩的程度如图 9 所示. 下面验证 STAM 对近似奇异问题的解决效果. 为突出 STAM 的一般性, 对 TDOA-LSM-STAM 进行验证, 对其他方法的验证结果类似. 先按共面约束生成 100 个 BS, 同时随机生成 9 个 UE, UE 位置每秒更新 30 次, 每次引入均值为 0 s, 方差为 10^{-16} s² 量级的时间相关噪声. 由前文分析可知, 由于各 BS 不满足几何约束关系, 所以 TDOA-LSM 产生奇异解或近似奇异解, 如图 10(a) 所示, 各 UE 各轴都产生了 10^4 量级甚至 10^5 量级的定位误差, 此时定位失败. 而所提出的 TDOA-LSM-STAM 则得到了高精度近似解, 如图 10(b) 所示, 定位均方根误差约为 2 m. 有趣的是虽然 TDOA-LSM-STAM 可以将近似奇异问题解决, 但若近似奇异问题耦合了轴相关问题, 此时 TDOA-LSM-STAM 对轴相关性问题几乎不起作用, 这是由于近似奇异问题作为主要问题贡献了相当量级的定位误差而覆盖掉了轴相关性问题及其误差影响.

4.4 讨论

4.4.1 几何拓扑约束关系

几何拓扑约束关系在本质上与各 BS 和坐标系的选择有关. 坐标系选择不合理, 比如坐标系中各 BS 坐标的量级很大, 则用 LSM 处理时容易出现近似奇异问题; 而坐标系和各 BS 坐标一旦给定, 也就决定了在坐标系空间中存在部分盲区, 不能准确估计用户位置. 因此几何拓扑约束关系在数学层面区分出了坐标系、BS 和 UE 共同决定的非奇异解空间, 在物理层面给出了坐标系、BS 和 UE 的空间拓扑结构, 为拓扑布站提供了有益的理论指导. 同时, 从本文数学和物理统一分析的角度来看, 这种拓扑

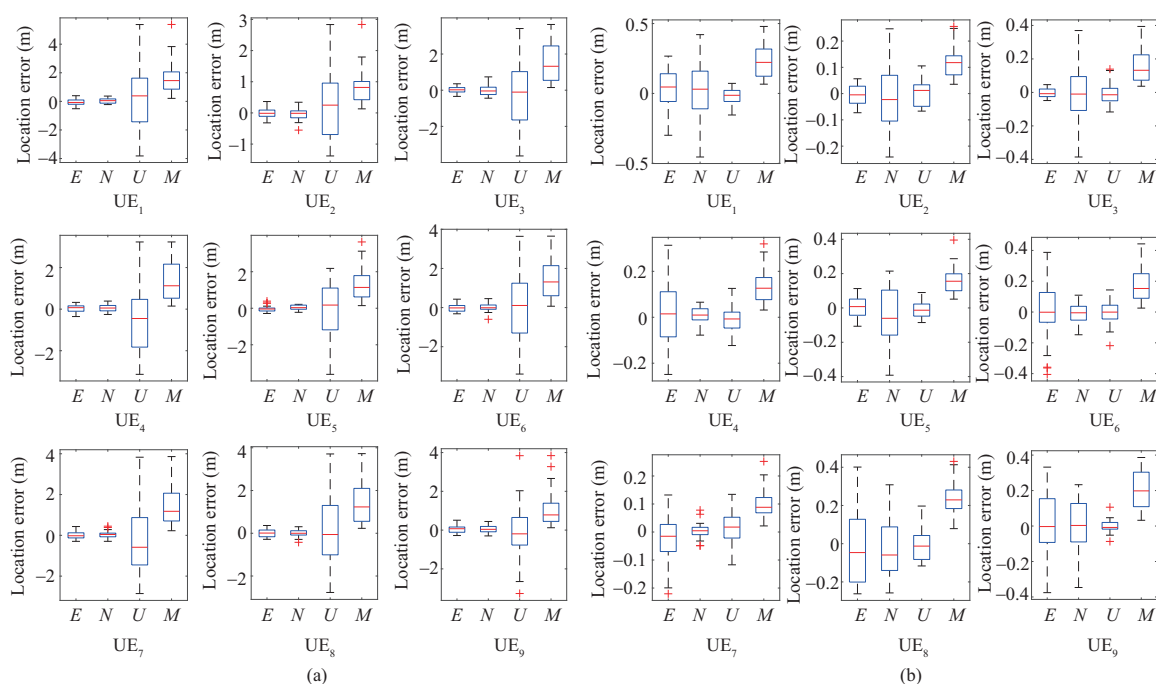


图 7 (a) TOA-LSM 和 (b) TOA-LSM-STAM 对 UEs 位置估计的箱线图
Figure 7 Boxplot position estimation of UEs by (a) TOA-LSM and (b) TOA-LSM-STAM

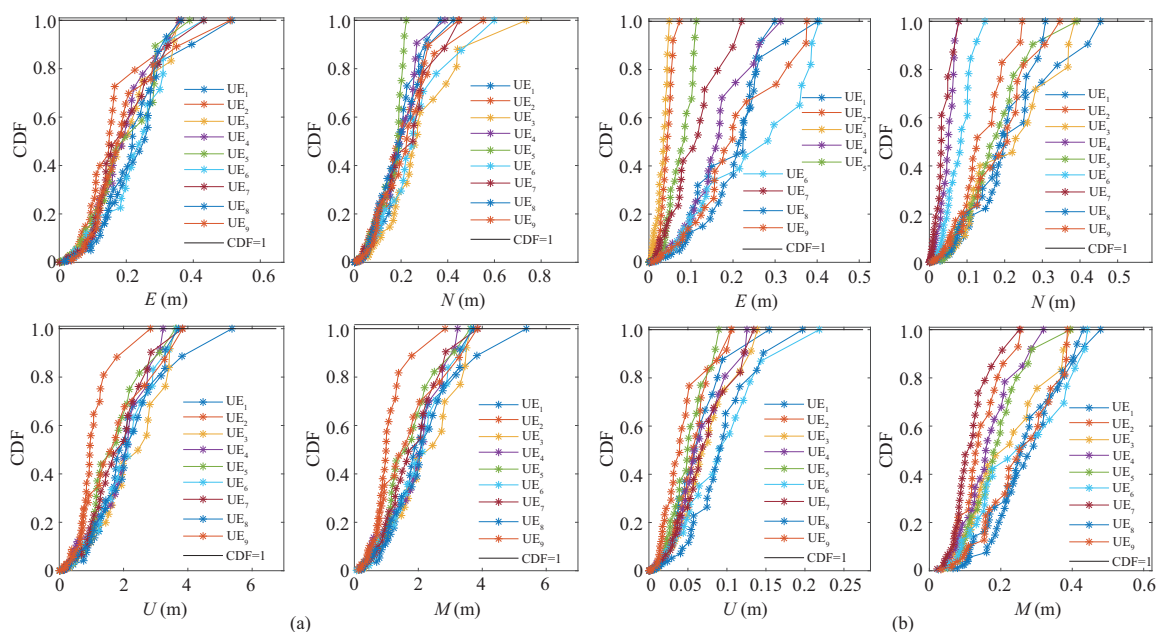


图 8 基于 (a) TOA-LSM 和 (b) TOA-LSM-STAM 进行 UEs 位置估计的 CDF
Figure 8 CDF of location estimation of UEs by (a) TOA-LSM and (b) TOA-LSM-STAM

关系或许也隐藏在其他先进的定位算法中。

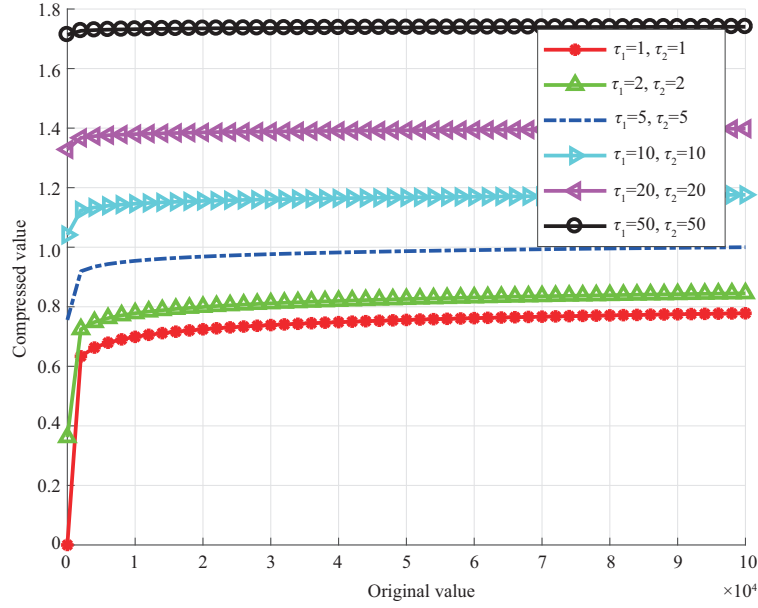


图 9 (网络版彩图) 不同偏置参数下空间压缩的程度

Figure 9 (Color online) Degree of spatial compression under different bias parameters

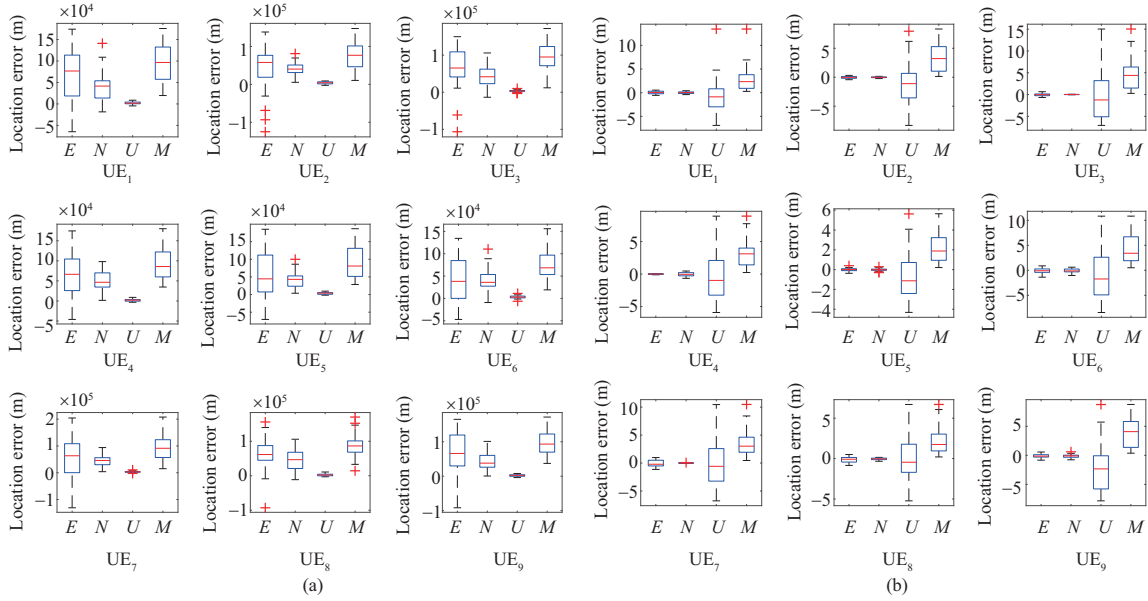


图 10 (网络版彩图) (a) TDOA-LSM 和 (b) TDOA-LSM-STAM 估计 UEs 位置

Figure 10 (Color online) Location estimation of UEs by (a) TDOA-LSM and (b) TDOA-LSM-STAM

4.4.2 参数微调法

全局参数微调法性能要比局部参数微调法性能差, 因此如何快速锁定 LSM 参数中对奇异性和近似奇异性贡献大的参数是难点之一; 如何对奇异性或近似奇异性贡献大的 LSM 参数进行微调, 把解从奇异解空间、近似奇异解空间拉回正常解空间, 或者拉回非常靠近正常解空间的近似奇异解空间则

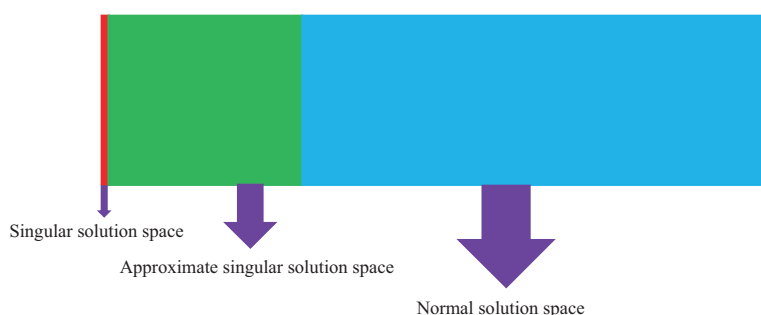


图 11 (网络版彩图) 3 个空间的概念和关系图

Figure 11 (Color online) Concept and relationship diagram of three spaces

是难点之二. 本文提出的参数微调法只是从基本数理机制和几何拓扑约束关系上入手, 后续若结合混沌矩阵、广义逆矩阵、群论等, 有望对奇异问题、近似奇异问题有更本质的解决方法.

4.4.3 空时自调节法

所提出的空时自调节法可以较好地解决定位误差的轴相关性问题和 LSM 近似奇异解问题. 值得一提的是若坐标系各轴相对量级变化不显著, 或者用户活动空间、基站布设空间, 以及坐标系选择不合适时, STAM 的优越性会降低. 同时考虑到 STAM 前后有很大的空间压缩和反压缩操作, 其对时间噪声敏感, 若系统中时间测量精度不高, 则使用 STAM 会引入一定误差.

4.4.4 3 个空间及其特性

作为对本文工作的一个整体梳理, 我们定义了 3 个空间及其关系, 即奇异解空间、近似奇异解空间和正常解空间, 如图 11 所示. 3 个空间无缝衔接. 其中奇异解空间具有无解的性质, 近似奇异解空间具有大误差且混沌的性质, 正常解空间具有误差较小且可解释的性质. 本文工作概括来说就是用几何拓扑约束关系表征了奇异解和近似奇异解相关问题, 并在此基础上提出参数微调法和空时自调节法把解从奇异解空间和近似奇异解空间拉到正常解空间或靠近正常解空间的近似奇异解空间.

5 结论

本文针对无线信号交汇定位的奇异解相关问题开展系统研究, 独辟蹊径地从数理一体化角度提出了表征定位奇异解的 8 条几何拓扑约束关系; 然后针对奇异解与近似奇异解问题, 利用所提出的几何拓扑约束关系作为重要判据, 提出了参数微调方法, 该方法集降维估计、局部参数微调和全局参数微调于一体, 有效解决了定位奇异解或近似奇异解问题, 并获得了可信的和高精度的定位结果. 此外, 针对 LSM 近似奇异解问题和定位误差的轴相关性问题 (奇异解相关问题), 提出空时自调节方法, 该方法通过对运算空间的非线性映射, 实现了与参数微调法类似的效果, 能够有效解决近似奇异解问题或定位误差的轴相关性问题. 本文的研究工作推动了人们对无线信号交汇定位的奇异解相关问题的深入认识, 对奇异解表征、奇异解相关问题解决给出了创新方案和有益指导.

致谢 刘公绪博士感谢他的妻子李玉娜女士, 对完善本文技术路线提出了中肯建议; 感谢博士生夏得校对本文用到的实验图片进行的格式转化处理; 感谢 CDEMC 各位老师的帮助; 最后感谢各位审稿专家和编委们的宝贵建议.

参考文献

- 1 Laoudias C, Moreira A, Kim S, et al. A survey of enabling technologies for network localization, tracking, and navigation. *IEEE Commun Surv Tut*, 2018, 20: 3607–3644
- 2 Zhao S, Zhang X P, Cui X, et al. Optimal two-way TOA localization and synchronization for moving user devices with clock drift. *IEEE Trans Veh Technol*, 2021, 70: 7778–7789
- 3 Zhang L, Zhang T, Shin H S. An efficient constrained weighted least squares method with bias reduction for TDOA-based localization. *IEEE Sens J*, 2021, 21: 10122–10131
- 4 Zheng Q, Luo L, Song H, et al. A RSSI-AOA-based UHF partial discharge localization method using MUSIC algorithm. *IEEE Trans Instrum Meas*, 2021, 70: 1–9
- 5 Cengiz K. Comprehensive analysis on least-squares lateration for indoor positioning systems. *IEEE Int Things J*, 2021, 8: 2842–2856
- 6 de Oliveira R M S, Paiva R R. Least squares finite-difference time-domain. *IEEE Trans Antennas Propagat*, 2021, 69: 6111–6115
- 7 Penrose R. A generalized inverse for matrices. *Math Proc Camb Phil Soc*, 1955, 51: 406–413
- 8 Huang T, Zhao R, Bi L, et al. Neural embedding singular value decomposition for collaborative filtering. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2021. doi: 10.1109/TNNLS.2021.3070853

Representation and solution of singular positioning issues from wireless signal intersection location technology

Gongxu LIU^{1,2*}, Long LI^{1,2*}, Jianmin LU^{1,2} & Xinbo GAO^{1,3}

1. *School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China;*

2. *Key Laboratory of High-Speed Circuit Design and Electro Magnetic Compatibility, Ministry of Education, Xidian University, Xi'an 710071, China;*

3. *Chongqing Key Laboratory of Image Cognition, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China*

* Corresponding author. E-mail: liugongxu@xidian.edu.cn, lilong@mail.xidian.edu.cn

Abstract The wireless signal intersection location is the most common geometric positioning technology, with several applications in communication and positioning. However, it is difficult to understand the singular solution issues generated by the wireless signal intersection location. Additionally, there are limited basic and in-depth research studies on the related solutions. To solve the above issues, we derive the analytic expressions of the relevant one-, two-, and three-dimensional positioning based on the least squares method and discover eight geometric topological constraints to characterize the singular solution from a new perspective. Besides, we propose fine-tuning the parameters and space-time self-adjustment methods to solve the singular related issues. The results show that the proposed geometric topology constraints are credible, easing the characterization and explanation of the singular solution problem. Besides, the proposed solution can realize an efficient solution to the singular solution issues with high precision location results. This study provides useful guidance for geometric positioning, base station layout, singular solution characterization, and robust positioning algorithm.

Keywords wireless signal intersection location, geometric positioning, least square method, singular solution, topological constraints