



平面上带次模惩罚费用的最小能量部分覆盖问题

刘晓非¹, 代涵², 李思哲³, 李伟东^{2*}

1. 云南大学信息学院, 昆明 650500

2. 云南大学数学与统计学院, 昆明 650500

3. 华中科技大学计算机科学与技术学院, 武汉 430074

* 通信作者. E-mail: weidong@ynu.edu.cn

收稿日期: 2021-12-31; 修回日期: 2022-02-19; 接受日期: 2022-04-12; 网络出版日期: 2022-06-06

国家自然科学基金(批准号: 12071417)资助项目

摘要 给定平面上的 n 个用户、 m 个传感器和一个正整数 $k (\leq n)$, 任意传感器 s 均可以通过提供能量 $p(s)$ 产生一个圆形的覆盖区域, 覆盖区域的半径 $r(s)$ 与 $p(s)$ 满足 $p(s) = r(s)^\alpha$, 其中, $\alpha \geq 1$ 为衰减系数. 平面上带次模惩罚费用的最小能量部分覆盖问题尝试寻找传感器的一个能量供应方案, 使得至少有 k 个用户被覆盖且总能量与未覆盖用户的惩罚费用之和达到最小, 其中惩罚费用由一个次模函数确定. 该问题推广了最小能量覆盖问题、最小能量部分覆盖问题和带惩罚费用的最小能量部分覆盖问题. 通过深入挖掘平面上半不相交圆盘集合的几何性质, 本文设计了一个基于原始对偶框架的两阶段多项式时间 $(5 \cdot 2^\alpha + 1)$ -近似算法. 当惩罚费用函数是线性函数时, 此算法的近似比为 $5 \cdot 2^\alpha$.

关键词 能量部分覆盖问题, 次模惩罚费用, 原始对偶方法, 半不相交, 近似算法

1 引言

传感器网络由许多固定位置的传感器组成, 主要功能是服务用户. 每个传感器 s 的服务区域是以传感器为中心的圆盘 $D(s, r(s))$, 圆盘的半径 $r(s)$ 与提供给传感器的能量 $p(s)$ 相关且满足

$$p(s) = r(s)^\alpha,$$

其中, 衰减系数 $\alpha \geq 1$ 为一个常数. 若用户所在位置在圆盘 $D(s, r(s))$ 内, 则称此用户被传感器 s 覆盖. 给定平面上 n 个用户和 m 个传感器. 平面上最小能量覆盖问题^[1] 尝试寻找传感器的一个最小能量分配方案, 使得每一个用户至少被一个传感器覆盖.

现实中, 运营商往往并不能赋予传感器足够能量使得全部用户被覆盖. 为了保证大多数用户的利益, 平面上最小能量部分覆盖问题^[2] 被提出. 该问题尝试寻找传感器的一个最小能量覆盖方案, 使得

引用格式: 刘晓非, 代涵, 李思哲, 等. 平面上带次模惩罚费用的最小能量部分覆盖问题. 中国科学: 信息科学, 2022, 52: 947–959, doi: 10.1360/SSI-2021-0445
Liu X F, Dai H, Li S Z, et al. k -prize-collecting minimum power cover problem with submodular penalties on a plane (in Chinese). Sci Sin Inform, 2022, 52: 947–959, doi: 10.1360/SSI-2021-0445

至少有 k 个用户被传感器覆盖, 其中 $k (\leq n)$ 为传感器网络最小覆盖用户数目. 为了提升用户满意度, 运营商往往会为未覆盖用户进行补偿, 此补偿可视为对运营商的惩罚费用. 通过对每一个用户定义一个惩罚费用, 平面上带惩罚费用的最小能量覆盖问题^[3] 被提出, 该问题尝试寻找传感器的一个能量供应方案, 使得传感器使用总能量与未覆盖用户的惩罚费用之和达到最小.

次模函数是具有边界效益递减性质的集合函数, 在运筹学、经济学、计算机科学等方面具有广泛的应用^[4,5]. 其中, 带次模惩罚费用的组合最优化问题逐渐成为理论计算机和组合最优化领域重要的研究内容与研究热点^[6~9]. 因此, 本文提出了平面上带次模惩罚费用的最小能量部分覆盖问题, 该问题试图寻找传感器的一个能量供应方案, 使得至少有 k 个用户被覆盖且总能量与未覆盖用户的惩罚费用之和达到最小, 其中未覆盖用户的惩罚费用由一个次模函数确定.

1.1 相关工作

最小能量覆盖问题是一类经典的组合最优化问题, 试图寻找一个最小能量分配方案, 使得每一个用户 u 至少被一个传感器覆盖. 方便起见, 将传感器与用户所在的空间定义为 S . 当 S 为直线时, 该问题可以在多项式时间内求到最优解^[10]. 当 S 为平面时, 针对衰减系数 $\alpha \geq 2$ 的情况, Biló 等^[10] 证明该问题是 NP- 难的, Alt 等^[1] 证明该问题是 NP- 难的当衰减系数 $2 > \alpha > 1$ 时; 针对衰减系数 $\alpha = 1$ 的情况, Lev-Tov 和 Peleg^[11] 设计了一个多项式时间近似方案 (polynomial time approximation scheme); 通过进一步研究该问题的平面几何性质, 对于衰减系数 $\alpha \geq 1$ 的情况, Biló 等^[10] 设计了一个多项式时间近似方案, 值得指出的是, 该算法可以被推广至有限维欧式空间.

最小能量多覆盖问题是最小能量覆盖问题的一个重要推广, 试图寻找一个最小能量分配方案, 使得全部用户均满足其覆盖需求, 其中每一个用户 u 均有一个覆盖需求 c_u . 当 S 为平面时, 针对任意用户 u 均满足 $c_u = k$ 的情况, Abu-Affash 等^[12] 设计了一个 $(23.02 + 63.91 \cdot (k - 1))$ - 近似算法. 当 S 为有限维欧式空间时, Bhowmick 等^[13] 设计了一个 $(2 \cdot d) \cdot (27\sqrt{d})^\alpha$ - 近似算法, 其中 d 为欧式空间的维度; 最近, 利用平衡递归 (balanced recursive) 和平面细分技术, Huang 等^[14] 设计了一个多项式时间近似方案. 当 S 为度量空间时, 利用局部比率法 (local ratio method), Bar-Yehuda 和 Rawitz^[15] 设计了一个 $(3^\alpha \cdot c_{\max})$ - 近似算法, 其中 $c_{\max} = \max_{u: u \in U} c_u$ 为用户中最大的覆盖需求.

最小能量部分覆盖问题是当前的一个研究热点, 试图寻找一个最小能量分配方案, 使得至少有 $k (\leq n)$ 个用户被传感器覆盖. 当 S 为有限维欧式空间时, 针对衰减系数 $\alpha = 2$ 的情况, Freund 和 Ranwiz^[16] 设计了一个 $(12 + \epsilon)$ - 近似算法, 其中 $\epsilon > 0$ 为任意常数; 针对衰减系数 $\alpha \geq 1$ 的情况, Li 等^[2] 利用原始对偶方法设计了一个 3^α - 近似算法. 最近, Liu 等^[3] 研究了最小能量部分覆盖问题的一个推广——带惩罚费用的最小能量部分覆盖问题, 其中每一个用户 $u \in U$ 有一个未被覆盖的惩罚费用 π_u , 目标要最小化总能量与未被覆盖的惩罚费用之和. 利用原始对偶框架, 他们提出了一个 3^α - 近似算法.

最小能量部分多覆盖问题试图寻找一个最小能量分配方案, 使得至少有 $k (\leq n)$ 个用户满足其覆盖需求. 当 S 为直线时, Liang 等^[17] 利用动态规划方法设计了一个能在多项式时间内求到最优解的算法. 当 S 为有限维欧式空间时, 针对最大的覆盖要求 c_{\max} 不超过一个给定常数的情况, Ran 等^[18] 设计了一个多项式时间近似方案.

1.2 主要工作

本文研究了平面上带次模惩罚费用的最小能量部分覆盖问题, 设计了一个多项式时间 $(5 \cdot 2^\alpha + 1)$ - 近似算法. 当惩罚费用是线性函数时, 该算法的近似比为 $5 \cdot 2^\alpha$. 此算法基于原始对偶方法, 首先分两

阶段增加对偶变量确定备选圆盘集合;而后,在备选圆盘集合中寻找半不相交 (semi-disjoint) 圆盘集合;利用平面上半不相交圆盘集合的几何性质,仅需将该集合中的圆盘半径扩大 2 倍就可保证输出解的可行性.通过深入挖掘平面上半不相交圆盘集合的几何性质,本文证明该平面上的任意用户最多被半不相交圆盘集合中 5 个不同的圆盘覆盖,此性质是证明所设计算法近似比的关键.

本文主要结构如下:第 2 节介绍与平面上带次模惩罚费用的最小能量部分覆盖问题相关的基础知识,第 3 节是该问题的两阶段原始对偶算法及相关理论证明,最后在第 4 节对该问题进行总结.

2 基础知识

集合函数 $\pi(\cdot):2^U \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个定义在全集 U 子集簇上的函数.对于任意两个集合 $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U$,如果 $\pi(\cdot)$ 满足 $\pi(U_1) \leq \pi(U_2)$,则称 $\pi(\cdot)$ 是单调函数;如果 $\pi(\cdot)$ 满足

$$\pi(U_1) + \pi(U_2) \geq \pi(U_1 \cup U_2) + \pi(U_1 \cap U_2),$$

则称 $\pi(\cdot)$ 是次模函数;如果 $\pi(\emptyset) = 0$ 且满足

$$\pi(U_1) + \pi(U_2) = \pi(U_1 \cup U_2) + \pi(U_1 \cap U_2),$$

则称 $\pi(\cdot)$ 是线性函数.

平面上带次模惩罚费用的最小能量部分覆盖问题 (the k -prize-collecting minimum power cover problem with submodular penalties, 简记为 k -PCS 问题) 的具体定义如下:在平面上,给定包含 n 个点的用户集合 U ,包含 m 个点的传感器集合 S ,一个正整数 $k (\leq n)$ 和一个单调的次模函数 $\pi(\cdot):2^U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.每一个传感器 $s \in S$ 均可以通过提供能量 $p(s)$ 产生一个覆盖区域 $D(s, r(s))$,其中 $D(s, r(s))$ 是一个以 s 为圆心 $r(s)$ 为半径的圆盘, $p(s)$ 与 $r(s)$ 相关且满足 $p(s) = r(s)^\alpha$,其中 $\alpha \geq 1$ 为一个常数.用户在圆盘 $D(s, r(s))$ 内则称此用户被传感器 s 覆盖, k -PCS 问题试图寻找传感器的一个能量供应方案 $p:S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,使得至少有 k 个用户被覆盖,同时使得总能量与未覆盖用户集合 R 的惩罚费用之和达到最小,其中未覆盖用户集合 R 的惩罚费用由次模函数 $\pi(\cdot)$ 确定,即 $\min \sum_{s:s \in S} p(s) + \pi(R)$.

当 $k = n$ 时, k -PCS 问题是平面上最小能量覆盖问题^[1];当任意用户子集 $U' \subseteq U$ 均满足 $\pi(U') = 0$ 时, k -PCS 问题是平面上最小能量部分覆盖问题^[2];当 $\pi(\cdot)$ 是线性函数时, k -PCS 问题是平面上带惩罚费用的最小能量部分覆盖问题^[3].根据最小能量覆盖问题的 NP 完备性^[1], k -PCS 问题是 NP- 难的.

任给 k -PCS 问题的一个实例 \mathcal{I} ,对于每一个传感器 $s \in S$ 和每一个用户点 $u \in U$,构造一个圆盘 $D_{(s,u)} = D(s, d(s, u))$,其中, $d(s, u)$ 是点 s 到点 u 的欧式距离.令

$$\mathcal{D} = \{D_{(s,u)} | s \in S, u \in U\}.$$

令 p^* 是实例 \mathcal{I} 的一个最优能量供应方案.对于任意的传感器 $s \in S$ 且满足 $p^*(s) > 0$,至少有一个用户在其覆盖区域 $D(s, r(s))$ 的边界上;否则,通过减少该传感器供应的能量,可以得到一个使用更少能量的可行供应方案.此结论与 p^* 是最优能量供应方案矛盾.因此,最优能量供应方案 p^* 确定的圆盘集合是圆盘集合 \mathcal{D} 的子集,亦即 k -PCS 问题仅需考虑集合 \mathcal{D} 中的圆盘且该问题的实例 \mathcal{I} 可以描述为 $(U, \mathcal{D}; k; \pi)$.定义 (\mathcal{D}^*, R^*) 为实例 $(U, \mathcal{D}; k; \pi)$ 的最优解,可以得到圆盘集合 \mathcal{D}^* 与最优能量供应方案 p^* 确定的圆盘集合相同.

方便起见, 将圆盘 $D(s, r(s))$ 简记为 D ; 将圆盘 D 的半径, 圆心和其所需的能量分别记为 $r(D)$, $c(D)$ 和 $p(D)$, 其中圆盘 D 的半径与它所需的能量相关且满足 $p(D) = r(D)^\alpha$; 将圆盘 D 覆盖的用户集合记为 $U(D)$; 对于任意圆盘集合 $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$, 将 \mathcal{D}' 覆盖的用户集合记为 $U(\mathcal{D}')$, 即 $U(\mathcal{D}') = \bigcup_{D \in \mathcal{D}'} U(D)$; 将 \mathcal{D}' 使用的总能量记为 $p(\mathcal{D}')$, 即 $p(\mathcal{D}') = \sum_{D \in \mathcal{D}'} p(D)$.

类似于文献 [2], 定义 \mathcal{D}^* 中半径最大的圆盘为 D_{\max}^* , 即 $D_{\max}^* = \arg \max_{D \in \mathcal{D}^*} r(D)$. 构造辅助圆盘集合 $\mathcal{D}_{\leq r(D_{\max}^*)} = \{D \in \mathcal{D} | r(D) \leq r(D_{\max}^*)\} \setminus \{D_{\max}^*\}$ 和辅助实例 $\mathcal{I}_{D_{\max}^*} = (U \setminus U(D_{\max}^*), \mathcal{D}_{\leq r(D_{\max}^*)}; k - |U(D_{\max}^*)|; \pi)$.

引理1 ([2]) $\text{OPT}(\mathcal{I}) = \text{OPT}(\mathcal{I}_{D_{\max}^*}) + p(D_{\max}^*)$, 其中 $\text{OPT}(\mathcal{I})$ 与 $\text{OPT}(\mathcal{I}_{D_{\max}^*})$ 分别为实例 \mathcal{I} 和实例 $\mathcal{I}_{D_{\max}^*}$ 的最优值.

3 k -PCS 问题的多项式时间 $(5 \cdot 2^\alpha + 1)$ - 近似算法

本节首先介绍半不相交圆盘集合的定义并证明用户被半不相交圆盘集合覆盖的上界; 而后, 基于此上界与原始对偶方法, 设计一个求解辅助实例 $\mathcal{I}_{D_{\max}^*}$ 的两阶段近似算法; 最后利用此算法, 给出实例 \mathcal{I} 的 $(5 \cdot 2^\alpha + 1)$ - 近似算法.

定义1 ([11]) 如果两个圆盘 D_1 和 D_2 满足 $d(c(D_1), c(D_2)) > \max\{r(D_1), r(D_2)\}$, 则称这两个圆盘是半不相交的 (semi-disjoint). 如果圆盘集合 \mathcal{D}' 中的任意两个圆盘均是半不相交的, 则称 \mathcal{D}' 是半不相交圆盘集合.

定理1 对于任意一个平面上半不相交圆盘集合 \mathcal{D}' , 该平面上的任意用户 $u \in U$ 最多被 \mathcal{D}' 中 5 个不同的圆盘覆盖.

证明 对于平面上任意一个用户 $u \in U$, 假设 u 被该平面上 2 个半不相交的圆盘 D_1 和 D_2 覆盖, 不妨使用 c_1 和 c_2 分别代表圆盘 D_1 和 D_2 的圆心. 因为 \mathcal{D}' 是半不相交圆盘集合, 所以 $d(c_1, c_2) > \max\{r(D_1), r(D_2)\} \geq \max\{d(u, c_1), d(u, c_2)\}$. 在 $\triangle c_1 c_2 u$ 中, 如图 1 所示, 根据正弦定理

$$\frac{d(c_1, c_2)}{\sin \angle c_1 u c_2} = \frac{d(u, c_1)}{\sin \angle c_1 c_2 u} = \frac{d(u, c_2)}{\sin \angle u c_1 c_2},$$

可得 $\angle c_1 u c_2 > \max\{\angle c_1 c_2 u, \angle u c_1 c_2\}$, 亦即

$$\angle c_1 u c_2 > 60^\circ. \tag{1}$$

下面利用反证法, 假设存在一个用户 $u \in U$ 被 \mathcal{D}' 中 6 个不同的圆盘覆盖, 不妨假设这 6 个圆盘的圆心与该用户组成的位置关系如图 1 所示, 因为 $\sum_{i=1}^6 \angle i = 360^\circ$, 所以

$$\min_{i: i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}} \angle i \leq 60^\circ,$$

此结论与不等式 (1) 矛盾, 说明假设不成立, 结论得证.

3.1 求解辅助实例的算法

方便起见, 本小节使用符号 $\mathcal{I} = (U, \mathcal{D}; k; \pi)$ 代表辅助实例 $\mathcal{I}_{D_{\max}^*} = (U \setminus U(D_{\max}^*), \mathcal{D}_{\leq r(D_{\max}^*)}; k - |U(D_{\max}^*)|; \pi)$, 则对于任意圆盘 $D \in \mathcal{D}$ 均满足

$$p(D) \leq p(D_{\max}^*). \tag{2}$$

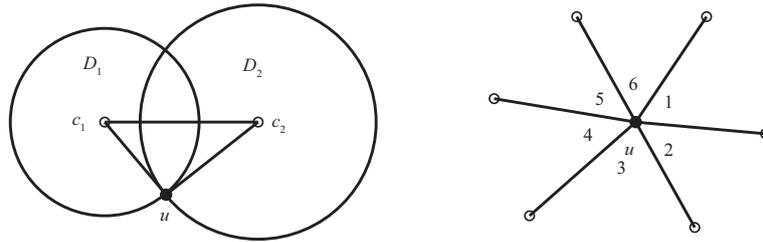


图 1 实心点代表用户, 空心点代表圆盘的圆心

Figure 1 A user is represented by a solid point, and the center of the disk is represented by the hollow point

此问题的整数规划形式是

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{D:D \in \mathcal{D}} p(D)x_D + \sum_{T:T \subseteq U} \pi(T)z_T \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{D:u \in U(D)} x_D + \sum_{T:T \subseteq U \text{ and } u \in T} z_T \geq 1, \forall u \in U, \\
 & \sum_{T:T \subseteq U} |T| \cdot z_T \leq n - k, \\
 & x_D, z_T \in \{0, 1\}, \forall D \in \mathcal{D}, \forall T \subseteq U,
 \end{aligned} \tag{3}$$

其中二元变量 x_D 代表圆盘 D 是否被选择, 二元变量 z_T 代表用户 T 是否为未覆盖用户集合. 整数规划 (3) 中, 第一组限制条件保证每个用户至少被一个选择的圆盘覆盖或属于未覆盖用户集合; 第二个限制条件保证未覆盖用户的数目不超过 $n - k$ 个. 通过松弛 (3) 的整数限制条件, 可以得到 (3) 的松弛规划, 其对偶规划形式是

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{u:u \in U} y_u - (n - k)\gamma \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{u:u \in U(D)} y_u \leq p(D), \forall D \in \mathcal{D}, \\
 & \sum_{u:u \in T} y_u - |T| \cdot \gamma \leq \pi(T), \forall T \subseteq U, \\
 & \gamma \geq 0, y_u \geq 0, \forall u \in U.
 \end{aligned} \tag{4}$$

根据经典的互补松弛性, 可以得到如下引理.

引理2 ([19]) $\text{OPT}_{\mathcal{I}} \geq \text{OPT}_{\text{DP}}$, 其中 $\text{OPT}_{\mathcal{I}}$ 和 OPT_{DP} 分别为整数规划 (3) 和对偶线性规划 (4) 的最优值.

求解辅助实例的算法可以分为如下 3 个步骤: (1) 确定备选圆盘集合 \mathcal{F} , 基于原始对偶方法, 通过两阶段增加对偶变量的方式 (第一和二个 while 循环), 确定恰当的备选圆盘集合; (2) 确定半不相交圆盘集合 \mathcal{M} , 定义 D_{last} 为最后一个加入备选圆盘集合 \mathcal{F} 的圆盘, 在圆盘集合 $\mathcal{F} \setminus \{D_{\text{last}}\}$ 中使用贪婪算法, 确定半不相交圆盘集合 (第三个 while 循环); (3) 构造输出解 $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{R})$, 将集合 \mathcal{M} 中的每个圆盘的半径扩大为原来的 2 倍后, 与圆盘 D_{last} 组成算法输出圆盘集合 $\bar{\mathcal{S}}$, 其中 $\bar{R} = U \setminus U(\bar{\mathcal{S}})$ 为未被 $\bar{\mathcal{S}}$ 覆盖的用户集合. 具体算法伪代码见算法 1.

下面具体介绍确定备选圆盘集合 \mathcal{F} 的两阶段算法 (第一和第二个 while 循环), 其中第一阶段保证算法输出的未覆盖用户的惩罚费用不会太高; 第二阶段保证备选圆盘集合 \mathcal{F} 至少覆盖 k 个用户. 算

算法 1 TPD($U, \mathcal{D}; k; \pi$)

Input: An instance $(U, \mathcal{D}; k; \pi)$;

Ensure:

 1: $X \leftarrow U, \mathcal{F} \leftarrow \emptyset, \mathcal{M} \leftarrow \emptyset, D_{\text{last}} = \emptyset, y_u = 0, \forall u \in U$;

 2: **while** $X \neq \emptyset$ **do**

3:

$$\Delta_D = \min_{D: D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}} \frac{p(D) - \sum_{u \in U(D) \setminus X} y_u}{|U(D) \cap X|}, \Delta_{U_X} = \min_{U': U' \subseteq U \text{ and } U' \cap X \neq \emptyset} \frac{\pi(U') - \sum_{u \in U' \setminus X} y_u}{|U' \cap X|};$$

 4: **if** $\Delta_D \leq \Delta_{U_X}$ **then**

 5: $D \leftarrow \arg \min_{D: D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}} \frac{p(D) - \sum_{u \in U(D) \setminus X} y_u}{|U(D) \cap X|}, \mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cup \{D\}, y_u = \Delta_D, \forall u \in U(D) \cap X, X \leftarrow X \setminus U(D)$;

 6: **else** $\{\Delta_D > \Delta_{U_X}\}$

 7: $U_X \leftarrow \arg \min_{U': U' \subseteq U \text{ and } U' \cap X \neq \emptyset} \frac{\pi(U') - \sum_{u \in U' \setminus X} y_u}{|U' \cap X|}, y_u = \Delta_{U_X}, \forall u \in U_X \cap X, X \leftarrow X \setminus U_X$;

 8: **end if**

 9: **end while**

 10: **while** $|U(\mathcal{F})| < k$ **do**

 11: $D \leftarrow \arg \min_{D: D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F}} \frac{p(D) - \sum_{u \in U(D) \setminus X} y_u}{|U(D) \cap X|}, \mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cup \{D\}, y_u = \frac{p(D) - \sum_{u \in U(D) \setminus X} y_u}{|U(D) \cap X|}, \forall u \in U(D) \cap X$;

 12: **end while**

 13: Let D_{last} be the last disk added into \mathcal{F} ;

 14: **while** $\mathcal{F} \setminus \{D_{\text{last}}\} \neq \emptyset$ **do**

 15: $D' \leftarrow \arg \max_{D: D \in \mathcal{F}} r(D); \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{M} \cup \{D'\}$;

 16: **for** $D \in \mathcal{F} \setminus \{D'\}$ **do**

 17: **if** $d(r(D), r(D')) \leq \max\{r(D), r(D')\}$ **then**

 18: $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \setminus \{D\}$;

 19: **end if**

 20: **end for**

 21: **end while**

 22: $\bar{S} \leftarrow \{D(c(D), 2r(D)) \mid D \in \mathcal{M}\} \cup \{D_{\text{last}}\}, \bar{R} \leftarrow U \setminus U(\bar{S})$;

Output: (\bar{S}, \bar{R}) .

法 1 中使用 X 代表未被处理的用户集合, 初始时 $X = U$.

第一阶段算法 (第一个 while 循环) 从平凡对偶可行解 $(\{y_u\}_{u \in U}, \gamma) = (\{0\}_{u \in U}, 0)$ 开始, 同时增加集合 X 中用户的对偶变量 $\{y_u\}_{u \in X}$, 保持其余对偶变量不变, 直到对偶线性规划 (4) 中第一组或第二组某个限制条件的等式成立. 如果第一组限制条件中对应圆盘 D 的等式成立, 即 $\sum_{u: u \in U(D)} y_u = p(D)$, 将圆盘 D 加入备选圆盘集合 \mathcal{F} , 并从集合 X 中移除被圆盘 D 覆盖的全部用户; 如果第二组限制条件中对应用户集合 U_X 的等式成立, 即 $\sum_{u: u \in U_X} y_u = \pi(U_X)$, 将用户集合 U_X 中全部用户加入临时惩罚用户集合 R^{temp} , 并从集合 X 中移除集合 U_X 中全部的用户, 其中 R^{temp} 仅用于算法分析, 并没有出现在算法伪代码中. 当集合 $X = \emptyset$ 时, 第一阶段算法完成, 定义此时对偶变量值为 $(\{y'_u\}_{u \in U}, 0)$. 当第一阶段算法将某个用户从未被处理的用户集合 X 中移除后, 该用户的对偶变量将不会再变大, 不难得出对偶变量一直保持可行性, 亦即 $(\{y'_u\}_{u \in U}, 0)$ 是对偶线性规划 (4) 的可行解. 若 $U(\mathcal{F}) \geq k$, 则两阶段算法完成; 否则进入第二阶段算法.

第二阶段算法 (第二个 while 循环) 从对偶可行解 $(\{y_u\}_{u \in U}, \gamma) = (\{y'_u\}_{u \in U}, 0)$ 开始, 同时增加对偶变量 γ 和未被集合 \mathcal{F} 覆盖用户的对偶变量 $\{y_u\}_{u \in U \setminus U(\mathcal{F})}$, 其余对偶变量保持不变, 直到对偶线性规划 (4) 中第一组某个限制条件的等式成立. 如果第一组限制条件中对应圆盘 D 的等式成立, 将圆盘 D 加入备选圆盘集合 \mathcal{F} , 当 $U(\mathcal{F}) \geq k$ 时, 第二阶段算法完成, 定义此时对偶变量值为 $(\{y''_u\}_{u \in U}, \gamma'')$.

引理3 $(\{y''_u\}_{u \in U}, \gamma'')$ 是对偶线性规划 (4) 的可行解.

证明 在第一和第二阶段算法中, 因为被集合 \mathcal{F} 覆盖的用户对应的对偶变量将不再增加, 所以对偶变量 $(\{y''_u\}_{u \in U}, \gamma'')$ 满足对偶线性规划 (4) 中第一组全部限制条件.

在第二阶段算法中, 对偶变量 γ 一直增加直至算法停止, 所以

$$\gamma'' = \max_{u: u \in U} \{y''_u - y'_u\},$$

其中 $(\{y'_u\}_{u \in U}, 0)$ 为完成第一阶段算法后对偶变量的值. 因此, 任意用户 $u \in U$ 均满足

$$y''_u - \gamma'' \leq y'_u. \quad (5)$$

对于任意用户集合 $U' \subseteq U$, 可以得到

$$\sum_{u: u \in U'} y''_u - |U'| \gamma'' = \sum_{u: u \in U'} (y''_u - \gamma'') \leq \sum_{u: u \in U'} y'_u \leq \pi(U').$$

根据不等式 (5), 上式中第一个不等式成立; 根据 $(\{y'_u\}_{u \in U}, 0)$ 是对偶线性规划 (4) 的可行解, 上式中第二个不等式成立. 基于用户集合 U' 的任意性, 对偶变量 $(\{y''_u\}_{u \in U}, \gamma'')$ 满足对偶线性规划 (4) 中第二组全部限制条件.

引理4 算法 1 可以在多项式时间内输出辅助实例 \mathcal{I} 的一个可行解 $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{R})$.

证明 不难看出, 第一阶段算法决定了算法 1 的时间复杂性, 对于第一阶段算法的任意一次循环, 通过计算每个未被选择的圆盘, Δ_D 的值可以在 $O(mn)$ 时间内确定; 稍微修改文献 [20] 中的算法, Δ_{U_X} 的值可以在多项式时间内确定, 因此任意一次循环均可以在多项式时间内完成. 完成第一阶段算法的任意一次循环, 至少有一个用户从集合 X 中移除, 因此第一阶段算法的循环次数至多为 n . 综上所述, 算法 1 可以在多项式时间内完成.

令 \mathcal{F} 和 \mathcal{M} 为算法 1 确定的备选圆盘集合和半不相交圆盘集合, 考虑任意一个被备选圆盘集合 \mathcal{F} 覆盖的用户 $u \in U(\mathcal{F})$, 如果此用户被 \mathcal{M} 或 D_{last} 覆盖, 则此用户一定被圆盘集合 $\bar{\mathcal{S}}$ 覆盖, 其中 D_{last} 为最后加入备选圆盘集合 \mathcal{F} 的圆盘; 否则, 不妨假设圆盘 $D \in \mathcal{F} \setminus (\mathcal{M} \cup \{D_{\text{last}}\})$ 为覆盖用户 u 的圆盘, 根据圆盘 $D \notin \mathcal{M} \cup \{D_{\text{last}}\}$, 可得半不相交集 \mathcal{M} 中存在一个圆盘 D' , 满足 $r(D') \geq r(D)$ 且

$$d(c(D), c(D')) \leq \max\{r(D), r(D')\}.$$

用户 u 到圆盘 D' 圆心的距离

$$d(u, c(D')) \leq d(u, c(D)) + d(c(D), c(D')) \leq r(D) + \max\{r(D), r(D')\} \leq 2 \cdot r(D'),$$

亦即圆盘 D' 的半径扩大 2 倍后一定会覆盖用户 u , 因此用户 u 一定被圆盘集合 $\bar{\mathcal{S}}$ 覆盖. 综上, 圆盘集合 $\bar{\mathcal{S}}$ 覆盖 $U(\mathcal{F})$ 中的全部用户, 因为 $U(\mathcal{F}) \geq k$, 所以 $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{R})$ 是辅助实例 \mathcal{I} 的一个可行解.

根据引理 4, $U(\mathcal{F}) \subseteq U(\bar{\mathcal{S}})$, 根据 $U(\mathcal{F}) \cup R^{\text{temp}} = U$ 与 $\bar{R} = U \setminus U(\bar{\mathcal{S}})$, 可得

$$\bar{R} \subseteq R^{\text{temp}}, \quad (6)$$

其中 R^{temp} 为完成第一阶段算法后确定的临时惩罚用户集合.

引理5 $\pi(R^{\text{temp}}) = \sum_{u: u \in R^{\text{temp}}} y'_u$.

证明 与上文定义一致, $(\{y'_u\}_{u \in U}, 0)$ 为第一阶段算法完成后对偶变量的值, 因为其是对偶线性规划 (4) 的可行解, 所以任意用户集合 $U' \subseteq U$ 均满足

$$\sum_{u:u \in U'} y'_u \leq \pi(U'). \quad (7)$$

对于任意一个用户集合 U' , 如果第一阶段算法在某次循环中将其加入临时惩罚用户集合 R^{temp} , 则有

$$\pi(U') = \sum_{u:u \in U'} y'_u.$$

不妨定义 \mathcal{U} 为在第一阶段算法中加入 R^{temp} 的用户集合组成的集合, 对于任意两个用户集合 $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{u:u \in U_1} y'_u + \sum_{u:u \in U_2} y'_u &= \pi(U_1) + \pi(U_2) \\ &\geq \pi(U_1 \cup U_2) + \pi(U_1 \cap U_2) \\ &\geq \pi(U_1 \cup U_2) + \sum_{u:u \in U_1 \cap U_2} y'_u. \end{aligned}$$

根据 $\pi(\cdot)$ 是次模函数, 上式中第一个不等式成立; 根据 $U_1 \cap U_2 \subseteq U$ 和不等式 (7), 上式中第二个不等式成立. 整理上式可得

$$\sum_{u:u \in U_1 \cup U_2} y'_u \geq \pi(U_1 \cup U_2).$$

结合 $U_1 \cup U_2 \subseteq U$ 和不等式 (7), 可得

$$\pi(U_1 \cap U_2) = \sum_{u:u \in U_1 \cap U_2} y'_u.$$

又因为 $R^{\text{temp}} = \bigcup_{U':U' \in \mathcal{U}} U'$, 所以引理得证.

下面证明算法 1 输出解 $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{R})$ 的性质.

定理 2 $p(\bar{\mathcal{S}}) + \pi(\bar{R}) \leq (5 \cdot 2^\alpha + 1)\text{OPT}(\mathcal{I}) + p(D_{\max}^*)$.

证明 令 $(\{y_u\}_{u \in U}, \gamma)$ 为算法 1 完成两阶段算法后对偶变量的值, 因为 $D \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$, 所以可以得到

$$p(D) = \sum_{u:u \in U(D)} y_u,$$

且

$$p(\mathcal{M}) = \sum_{D:D \in \mathcal{M}} \sum_{u:u \in U(D)} y_u = \sum_{u:u \in U(\mathcal{M})} y_u \cdot |\{D \in \mathcal{M} | u \in U(D)\}| \leq 5 \sum_{u:u \in U(\mathcal{M})} y_u. \quad (8)$$

根据定理 1, 上面不等式成立. 因此, 算法 1 的输出解 $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{R})$ 的值为

$$p(\bar{\mathcal{S}}) + \pi(\bar{R}) \leq \sum_{D:D \in \bar{\mathcal{S}} \setminus \{D_{\text{last}}\}} r(D)^\alpha + p(D_{\text{last}}) + \pi(R^{\text{temp}})$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{D:D \in \mathcal{M}} (2 \cdot r(D))^\alpha + p(D_{\max}^*) + \pi(R^{\text{temp}}) \\
 &= 2^\alpha \cdot p(\mathcal{M}) + p(D_{\max}^*) + \pi(R^{\text{temp}}) \\
 &\leq 2^\alpha \cdot 5 \sum_{u:u \in U(\mathcal{M})} y_u + p(D_{\max}^*) + \sum_{u:u \in R^{\text{temp}}} y'_u.
 \end{aligned}$$

根据不等式 (6) 和函数 $\pi(\cdot)$ 的单调性, 上式中的第一个不等式成立; 根据不等式 (2), 上式中的第二个不等式成立; 根据不等式 (8) 和引理 5, 上式中的第三个不等式成立.

情况 1. 完成第一阶段算法后, 如果备选圆盘集合 \mathcal{F} 满足 $|U(\mathcal{F})| \geq k$, 则算法 1 将不会进入第二阶段算法, 因此, $(\{y_u\}_{u \in U}, \gamma) = (\{y'_u\}_{u \in U}, 0)$, 算法 1 的输出解 $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{R})$ 的值为

$$\begin{aligned}
 p(\bar{\mathcal{S}}) + \pi(\bar{R}) &\leq 2^\alpha \cdot 5 \sum_{u:u \in U(\mathcal{M})} y_u + p(D_{\max}^*) + \sum_{u:u \in R^{\text{temp}}} y'_u \\
 &\leq (5 \cdot 2^\alpha + 1) \sum_{u:u \in U} y'_u + p(D_{\max}^*) \\
 &\leq (5 \cdot 2^\alpha + 1) \text{OPT}(\mathcal{I}) + p(D_{\max}^*).
 \end{aligned}$$

根据 $U(\mathcal{M}) \subseteq U$ 和 $R^{\text{temp}} \subseteq U$, 上式中的第二个不等式成立; 根据 $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{R})$ 是对偶线性规划 (4) 的可行解和互补松弛性, 上式中的第三个不等式成立.

情况 2. 完成第一阶段算法后, 如果备选圆盘集合 \mathcal{F} 满足 $|U(\mathcal{F})| < k$, 则算法 1 进入第二阶段算法, 因此 $(\{y_u\}_{u \in U}, \gamma) = (\{y''_u\}_{u \in U}, \gamma)$. 因为 D_{last} 是最后加入备选圆盘集合 \mathcal{F} 的圆盘, 所以

$$|U(\mathcal{F} \setminus \{D_{\text{last}}\})| < k. \quad (9)$$

对于任意一个用户 $u \in U \setminus \{U(\mathcal{F} \setminus \{D_{\text{last}}\})\}$, 它的对偶变量在第二阶段算法一直随着 γ 增加, 可以得到

$$\gamma = y''_u - y'_u.$$

半不相交集 \mathcal{M} 的值为

$$\begin{aligned}
 p(\mathcal{M}) &= \sum_{D:D \in \mathcal{M}} \sum_{u:u \in U(D)} y_u = \sum_{D:D \in \mathcal{M}} \sum_{u:u \in U(D)} y''_u \\
 &= \sum_{u:u \in U(\mathcal{M})} y''_u \cdot |\{D \in \mathcal{M} | u \in U(D)\}| \\
 &\leq 5 \sum_{u:u \in U(\mathcal{M})} y''_u = 5 \left(\sum_{u:u \in U} y''_u - \sum_{u:u \in U \setminus U(\mathcal{M})} y''_u \right) \\
 &\leq 5 \left(\sum_{u:u \in U} y''_u - \sum_{u:u \in U \setminus U(\mathcal{F} \setminus \{D_{\text{last}}\})} (y'_u + \gamma) \right) \\
 &\leq 5 \left(\sum_{u:u \in U} y''_u - (n - k)\gamma \right) \\
 &\leq 5 \sum_{u:u \in U} \text{OPT}(\mathcal{I}). \quad (10)
 \end{aligned}$$

根据定理 1, 上式中的第一个不等式成立; 根据 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F} \setminus \{D_{\text{last}}\}$, 上式中的第二个不等式成立; 根据不等式 (9), 上式中的第三个不等式成立; 根据引理 2 和 3, 上式中的最后一个不等式成立. 因此, 算法 1

的输出解 $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{R})$ 的值为

$$\begin{aligned} p(\bar{\mathcal{S}}) + \pi(\bar{R}) &\leq 2^\alpha \cdot p(\mathcal{M}) + p(D_{\max}^*) + \pi(R^{\text{temp}}) \\ &\leq (5 \cdot 2^\alpha + 1)\text{OPT}(\mathcal{I}) + p(D_{\max}^*). \end{aligned}$$

综上所述, $p(\bar{\mathcal{S}}) + \pi(\bar{R}) \leq (5 \cdot 2^\alpha + 1)\text{OPT}(\mathcal{I}) + p(D_{\max}^*)$.

下面讨论此实例的一种特殊情况.

推论 1 当 $\pi(\cdot)$ 是线性函数时, 算法 1 输出解 $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{R})$ 满足 $p(\bar{\mathcal{S}}) + \pi(\bar{R}) \leq 5 \cdot 2^\alpha \text{OPT}(\mathcal{I}) + p(D_{\max}^*)$.

证明 结合引理 5 和 $\pi(\cdot)$ 是线性函数, 可以得到

$$\pi(\bar{R}) = \sum_{u: u \in \bar{R}} y'_u.$$

因为 $\bar{R} = U \setminus U(\bar{\mathcal{S}}) \subseteq U \setminus U(\mathcal{F}) \subseteq U \setminus U(\mathcal{M})$, 所以

$$\bar{R} \cup U(\mathcal{M}) \subseteq U.$$

与定理 2 类似, 如果完成第一阶段算法备选圆盘集合 \mathcal{F} 满足 $|U(\mathcal{F})| \geq k$, 则算法 1 的输出解 $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{R})$ 满足

$$\begin{aligned} p(\bar{\mathcal{S}}) + \pi(\bar{R}) &\leq 2^\alpha \cdot 5 \sum_{u: u \in U(\mathcal{M})} y_u + p(D_{\max}^*) + \sum_{u: u \in \bar{R}} y'_u \\ &\leq (5 \cdot 2^\alpha) \sum_{u: u \in U} y'_u + p(D_{\max}^*) \\ &\leq 5 \cdot 2^\alpha \cdot \text{OPT}(\mathcal{I}) + p(D_{\max}^*). \end{aligned}$$

如果完成第一阶段算法备选圆盘集合 \mathcal{F} 满足 $|U(\mathcal{F})| < k$, 则算法 1 进入第二阶段算法. 因此, 算法 1 的输出解 $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{R})$ 的值为

$$\begin{aligned} p(\bar{\mathcal{S}}) + \pi(\bar{R}) &\leq 2^\alpha \cdot p(\mathcal{M}) + p(D_{\max}^*) + \sum_{u: u \in \bar{R}} y'_u \\ &\leq 5 \cdot 2^\alpha \left(\sum_{u: u \in U} y''_u - \sum_{u: u \in U \setminus U(\mathcal{F} \setminus \{D_{\text{last}}\})} (y'_u + \gamma) \right) + p(D_{\max}^*) + \sum_{u: u \in \bar{R}} y'_u \\ &\leq 5 \cdot 2^\alpha \left(\sum_{u: u \in U} y''_u - (n - k)\gamma \right) + p(D_{\max}^*) - \sum_{u: u \in U \setminus U(\mathcal{F} \setminus \{D_{\text{last}}\})} (y'_u) + \sum_{u: u \in \bar{R}} y'_u \\ &\leq 5 \cdot 2^\alpha \left(\sum_{u: u \in U} y''_u - (n - k)\gamma \right) + p(D_{\max}^*) \\ &\leq 5 \cdot 2^\alpha \cdot \text{OPT}(\mathcal{I}) + p(D_{\max}^*). \end{aligned}$$

根据不等式 (10), 上式中的第二个不等式成立; 根据不等式 (9), 上式中的第三个不等式成立; 根据 $\bar{R} \subseteq U \setminus U(\mathcal{F} \setminus \{D_{\text{last}}\})$, 上式中的第四个不等式成立; 根据引理 2 和 3, 上式中的最后一个不等式成立.

3.2 k -PCS 问题的完整算法

对于 k -PCS 问题任意一个实例 \mathcal{I} , 依次将集合 \mathcal{D} 中的圆盘 D 为最优解中最大半径的圆盘 D_{\max}^* , 按照第 2 节介绍的方式构造辅助实例 $\mathcal{I}_D = (U \setminus U(D), \mathcal{D}_{\leq r(D)}; k - |U(D)|; \pi)$. 如果 $U(\mathcal{D}_{\leq r(D)}) \geq k - |U(D)|$, 则调用算法 1 求解辅助实例 \mathcal{I}_D , 其输出解定义为 $(\bar{\mathcal{S}}_D, \bar{R}_D)$, 并构造实例 \mathcal{I} 的可行解 $(\bar{\mathcal{S}}_D \cup \{D\}, \bar{R}_D)$, 其值为 $\text{OUT}_D = p(\bar{\mathcal{S}}_D) + p(\{D\}) + \pi(\bar{R}_D)$; 否则, 即 $U(\mathcal{D}_{\leq r(D)}) < k - |U(D)|$, 令其值为 $\text{OUT}_D = +\infty$. 选择最小值的可行解输出. 具体算法伪代码见算法 2.

算法 2 k -PCS

Input: An instance $\mathcal{I} = (U, \mathcal{D}; k; \pi)$;

Output: (\mathcal{S}, R) ;

```

1: for  $D \in \mathcal{D}$  do
2:   Construct the auxiliary instance  $\mathcal{I}_D = (U \setminus U(D), \mathcal{D}_{\leq r(D)}; k - |U(D)|; \pi)$  defined above;
3:   if  $U(\mathcal{D}_{\leq r(D)}) \geq k - |U(D)|$  then
4:      $(\bar{\mathcal{S}}_D, \bar{R}_D) \leftarrow \text{TPD}(U \setminus U(D), \mathcal{D}_{\leq r(D)}; k - |U(D)|; \pi)$ ,  $\text{OUT}_D = p(\bar{\mathcal{S}}_D) + p(D) + \pi(\bar{R}_D)$ ;
5:   else
6:      $\text{OUT}_D = +\infty$ ;
7:   end if
8: end for
9:  $D' \leftarrow \arg \min_{D: D \in \mathcal{D}} \text{OUT}_D$ ,  $(\mathcal{S}, R) \leftarrow (\bar{\mathcal{S}}_{D'} \cup \{D'\}, \bar{R}_{D'})$ .

```

定理3 算法 2 是 k -PCS 问题的一个 $(5 \cdot 2^\alpha + 1)$ - 多项式时间近似算法.

证明 因为 $D_{\max}^* \in \mathcal{D}$ 和 $D' \leftarrow \arg \min_{D: D \in \mathcal{D}} \text{OUT}_D$, 所以输出解 (\mathcal{S}, R) 的值为

$$\begin{aligned}
 \text{OUT} &= \text{OUT}_{D'} \leq \text{OUT}_{D_{\max}^*} = p(\bar{\mathcal{S}}_{D_{\max}^*}) + p(D_{\max}^*) + \pi(\bar{R}_{D_{\max}^*}) \\
 &\leq (5 \cdot 2^\alpha + 1) \text{OPT}(\mathcal{I}_{D_{\max}^*}) + p(D_{\max}^*) + p(D_{\max}^*) \\
 &\leq (5 \cdot 2^\alpha + 1) (\text{OPT}(\mathcal{I}_{D_{\max}^*}) + p(D_{\max}^*)) \\
 &\leq (5 \cdot 2^\alpha + 1) \text{OPT}(\mathcal{I}).
 \end{aligned}$$

根据定理 2, 上式中的第二个不等式成立; 根据 $\alpha \geq 1$, 上式中的第三个不等式成立; 根据引理 1, 上式中的最后一个不等式成立.

对集合 \mathcal{D} 中的每个圆盘 D , 算法 2 均调用了一次算法 1, 结合引理 4, 算法 2 是多项式时间算法, 定理得证.

推论2 算法 2 是带惩罚费用的最小能量部分覆盖问题的一个 $5 \cdot 2^\alpha$ - 多项式时间近似算法,

证明 类似定理 3 的证明, 输出解 (\mathcal{S}, R) 的值为

$$\begin{aligned}
 \text{OUT} &= \text{OUT}_{D'} \leq \text{OUT}_{D_{\max}^*} = p(\bar{\mathcal{S}}_{D_{\max}^*}) + p(D_{\max}^*) + \pi(\bar{R}_{D_{\max}^*}) \\
 &\leq 5 \cdot 2^\alpha \text{OPT}(\mathcal{I}_{D_{\max}^*}) + p(D_{\max}^*) + p(D_{\max}^*) \\
 &\leq (5 \cdot 2^\alpha) (\text{OPT}(\mathcal{I}_{D_{\max}^*}) + p(D_{\max}^*)) \\
 &\leq (5 \cdot 2^\alpha) \text{OPT}(\mathcal{I}).
 \end{aligned}$$

根据推论 1, 上式中的第二个不等式成立; 根据 $\alpha \geq 1$, 上式中的第三个不等式成立; 根据引理 1, 上式中的最后一个不等式成立.

4 结束语

本文研究平面上带次模惩罚费用的最小能量部分覆盖问题, 利用原始对偶方法和不相交圆盘集合的几何性质, 设计了一个多项式时间 $(5 \cdot 2^\alpha + 1)$ - 近似算法, 当惩罚函数是线性函数时, 该算法的近似比为 $5 \cdot 2^\alpha$. 这说明, 针对最小能量部分覆盖问题或带惩罚费用的最小能量部分覆盖问题, 当衰减系数比较大 ($\alpha \geq 4$) 时, 该算法的近似比小于文献 [2, 3] 中算法的近似比.

本文证明的关于平面上半不相交圆盘集合的定理具有可推广性, 此特性将被尝试应用于其他类似的组合最优化问题, 例如平面上的圆盘覆盖和能量多覆盖等问题. 对于多维欧式空间或度量空间的半不相交圆盘集合, 是否也可以得到类似的性质, 这需要进行进一步研究.

值得注意的是, 当任意用户集合的惩罚费用等于 0 时, Ran 等^[18] 提出了平面上带惩罚费用的最小能量部分覆盖问题的一个多项式时间近似方案. 但是, 该方案尚不能处理用户集合的惩罚费用大于 0 的情况. 因此, 如何设计一般情况下该问题的多项式时间近似方案是一个需要进一步研究的课题.

参考文献

- 1 Alt H, Arkin E M, Brönnimann H, et al. Minimum-cost coverage of point sets by disks. In: Computational Geometry—SCG’06. New York: ACM, 2006. 449–458
- 2 Li M, Ran Y, Zhang Z. A primal-dual algorithm for the minimum power partial cover problem. J Comb Optim, 2020. doi: 10.1007/s10878-020-00567-3
- 3 Liu X, Li W, Xie R. A primal-dual approximation algorithm for the k-prize-collecting minimum power cover problem. Optim Lett, 2021. doi: 10.1007/s11590-021-01831-z
- 4 Kumari L, Bilmes J. Submodular span, with applications to conditional data summarization. In: Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-21). Palo Alto: AAAI Press, 2021. 35: 12344–12352
- 5 Wei K, Iyer R, Wang S, et al. Mixed robust/average submodular partitioning: fast algorithms, guarantees, and applications. In: Proceedings of the 28th International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 2015). Cambridge: MIT Press, 2015. 2233–2241
- 6 Du D, Lu R, Xu D. A primal-dual approximation algorithm for the facility location problem with submodular penalties. Algorithmica, 2012, 63: 191–200
- 7 Xu D, Wang F, Du D, et al. Approximation algorithms for submodular vertex cover problems with linear/submodular penalties using primal-dual technique. Theor Comput Sci, 2016, 630: 117–125
- 8 Liu X, Li W. Combinatorial approximation algorithms for the submodular multicut problem in trees with submodular penalties. J Comb Optim, 2020. doi: 10.1007/s10878-020-00568-2
- 9 Li Y, Du D, Xiu N, et al. Improved approximation algorithms for the facility location problems with linear/submodular penalties. Algorithmica, 2015, 73: 460–482
- 10 Biló V, Caragiannis I, Kaklamanis C, et al. Geometric clustering to minimize the sum of cluster sizes. In: Algorithms—ESA 2005. Berlin: Springer-Verlag, 2005. 460–471
- 11 Lev-Tov N, Peleg D. Polynomial time approximation schemes for base station coverage with minimum total radii. Comput Netw, 2005, 47: 489–501
- 12 Abu-Affash A K, Carmi P, Katz M J, et al. Multi cover of a polygon minimizing the sum of areas. Int J Comput Geom Appl, 2011, 21: 685–698
- 13 Bhowmick S, Varadarajan K, Xue S K. A constant-factor approximation for multi-covering with disks. J Comput Geom, 2005, 6: 220–234
- 14 Huang Z, Feng Q, Wang J, et al. PTAS for minimum cost multi-covering with disks. In: Proceedings of the Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA). Alexandria: ACM, 2021. 840–859
- 15 Bar-Yehuda R, Rawitz D. A note on multicovering with disks. Comput Geometry, 2013, 46: 394–399
- 16 Freund A, Rawitz D. Combinatorial interpretations of dual fitting and primal fitting. In: Approximation and Online Algorithms—WAOA 2003. Berlin: Springer, 2003. 137–150
- 17 Liang W, Li M, Zhang Z, et al. Minimum power partial multi-cover on a line. Theor Comput Sci, 2021, 864: 118–128

- 18 Ran Y, Huang X, Zhang Z, et al. Approximation algorithm for minimum power partial multi-coverage in wireless sensor networks. *J Glob Optim*, 2021, 80: 661–677
- 19 Vazirani V V. *Approximation Algorithms*. Berlin: Springer, 2001. 1–399
- 20 Fleischer L, Iwata S. A push-relabel framework for submodular function minimization and applications to parametric optimization. *Discrete Appl Math*, 2003, 131: 311–322

k -prize-collecting minimum power cover problem with submodular penalties on a plane

Xiaofei LIU¹, Han DAI², Sizhe LI³ & Weidong LI^{2*}

1. *School of Information Science and Engineering, Yunnan University, Kunming 650500, China;*

2. *School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming 650500, China;*

3. *School of Computer Science & Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*

* Corresponding author. E-mail: weidong@ynu.edu.cn

Abstract Given a set of n points, a set of m sensors on a plane, and a positive integer k ($\leq n$). Each sensor s can adjust its power $p(s)$ and covering range, which is a disk of radius $r(s)$ satisfying $p(s) = r(s)^\alpha$, where $\alpha \geq 1$ is called the attenuation factor of power. The k -prize-collecting minimum power cover problem with submodular penalties on a plane determines a power assignment such that at least k users are covered. The goal is to minimize the overall power of the power assignment plus the penalty of the uncovered user set, where the penalty is determined by a submodular function. This problem generalizes the well-known minimum power cover problem, minimum power partial cover problem, and k -prize-collecting minimum power cover problem. Based on the geometric properties of the semi-disjoint disk set and primal-dual method, we present a two-phase $(5 \cdot 2^\alpha + 1)$ -approximation algorithm. When the penalty function is linear, the approximation ratio of our algorithm is at most $5 \cdot 2^\alpha$.

Keywords k -prize-collecting power cover problem, submodular penalties, primal-dual method, semi-disjoint, approximation algorithm