



基于地球高程信息的运动辐射源时差频差无源定位算法

裴禹豪¹, 张敏^{1*}, 郭福成¹, 王垚^{1,2}

1. 国防科技大学电子信息系统复杂电磁环境效应国家重点实验室, 长沙 410073

2. 陆军工程大学通信士官学校, 重庆 400035

* 通信作者. E-mail: zhangmin1984@126.com

收稿日期: 2021–12–20; 修回日期: 2022–03–03; 接受日期: 2022–04–29; 网络出版日期: 2022–11–10

国家自然科学基金 (批准号: 61901494, 62101563) 资助项目

摘要 本文研究利用时差频差以及地球高程信息对运动辐射源的定位测速问题. 针对高程信息精确已知的情况, 提出一种鲁棒迭代约束加权最小二乘法 RICWLS-noAE (robust iterative constrained weighted least squares without altitude error). 方法通过引入多个辅助变量将测量方程伪线性化, 而后根据加权最小二乘准则构建含 4 个二次约束的代价函数, 最后通过将二次约束近似成伪线性约束的方式迭代求解出辐射源的位置和速度. 当高程信息存在误差时, 对算法进行拓展, 提出 RICWLS-AE (robust iterative constrained weighted least squares under altitude error) 以解决对运动辐射源定位测速问题. 数值仿真表明本文所提 RICWLS-noAE 法的定位和测速性能要好于现有的两步加权最小二乘法, 并且 RICWLS-AE 方法在中等信噪比下也能达到 CRLB.

关键词 无源定位, 运动辐射源, 时差, 频差, 高程信息

1 引言

对运动辐射源的定位在雷达、声呐以及传感器网络等领域都有重要的应用^[1~4]. 定位系统通常由多个空间散布的观测平台 (卫星、无人机、地面移动平台等) 组成, 平台上搭载的信号传感器通过接收辐射源信号并从中提取诸如接收信号强度 (received signal strength, RSS)、到达角 (angle of arrival, AOA)、到达时间差 (time difference of arrival, TDOA) 和到达频率差 (frequency difference of arrival, FDOA) 等参数对目标进行瞬时定位^[5~8]. 当观测站与辐射源之间存在相对运动时, 可以联合时差频差对其进行瞬时定位测速.

目前解决运动辐射源定位问题的方法主要有: 闭合解法^[9~12]、凸优化法^[13~15]和迭代法^[16~19]. 作为闭合解的代表, 经典两步加权最小二乘法 (two-step weighted least squares, TSWLS) 通过引入辅

引用格式: 裴禹豪, 张敏, 郭福成, 等. 基于地球高程信息的运动辐射源时差频差无源定位算法. 中国科学: 信息科学, 2022, 52: 1974–1991, doi: 10.1360/SSI-2021-0423
Pei Y H, Zhang M, Guo F C, et al. Moving source localization using TDOA and FDOA measurements in the presence of altitude knowledge (in Chinese). Sci Sin Inform, 2022, 52: 1974–1991, doi: 10.1360/SSI-2021-0423

助变量将测量方程伪线性化, 第一步将辅助变量和辐射源的位置及速度参数视为相互独立的变量运用加权最小二乘法求得初始估计, 第二步根据辅助变量与辐射源位置和速度参数的约束关系构建新的代价函数, 再次利用加权最小二乘准则求得最终解^[9]. 该方法在中高信噪比下能够达到克拉美罗下界 (Cramér-Rao lower bound, CRLB), 但是随着测量噪声增大, 第二步容易出现虚根现象. 为此, 文献 [11] 对经典两步加权最小二乘法的第二步进行改进, 增强了算法的鲁棒性. 凸优化方法的核心思想是通过松弛技术将非凸问题转化成凸问题进行求解. 文献 [13] 运用半定松弛 (semidefinite relaxation, SDR) 技术将带约束加权最小二乘问题转化成半定规划问题, 取得了较好的定位性能. 文献 [15] 同时运用半定松弛和线性重构技术 (reformulation linearization technique, RLT) 得到具有更紧约束的半定规划问题. 凸优化方法通常可以获得较高的定位精度, 不足的是其计算复杂度较高 (通常是闭合解方法的近千倍). 相比较而言, 迭代法的计算复杂度介于闭合解法和凸优化法之间. 文献 [17] 通过坐标系转换, 将带地球约束问题转换成无约束问题, 而后采用高斯牛顿迭代法 (Gauss-Newton iteration) 求解目标位置. 文献 [18] 提出迭代约束加权最小二乘法, 通过将非凸约束近似为线性等式约束, 得到具有线性等式约束的凸二次规划问题, 迭代更新辐射源的位置、速度以及权重矩阵, 直到收敛. 文献 [19] 提出一种交替迭代法求解时频差对运动辐射源定位问题.

实际生活中, 地面移动的车辆、海面航行的船只以及巡航模式飞行的飞机等辐射源, 由于存在高程信息, 其位置和速度通常满足地球约束关系 (椭球面约束), 充分利用约束关系可以提高定位精度. 以往对存在地球高程信息辐射源定位的研究主要针对静止目标^[20~24]. 文献 [21] 利用拉格朗日 (Lagrange) 法求解联合时频差对地球静止辐射源定位. 拉格朗日乘数通过牛顿迭代法求出, 过程涉及求解关于目标 - 参考传感器之间距离的七阶多项式, 在大噪声下容易出现虚根和负根. 文献 [24] 采用二分法在正区间内搜索目标 - 参考传感器之间距离, 搜索过程中需求解关于拉格朗日乘数的四阶方程, 具有较好的鲁棒性. 该方法仅适用于空中观测平台对地面辐射源定位, 否则不存在搜索的正区间. 文献 [23] 首先构建约束最大似然估计器, 而后利用广义信赖域子问题法迭代求解辐射源位置, 方法对初始值的要求较高. 上述方法对于带地球约束的运动辐射源都不适用. 值得注意的是, 文献 [12] 提出一种改进两步加权最小二乘法用于求解地球约束下运动辐射源的定位测速问题, 不足的是该方法对近场辐射源定位的鲁棒性较差.

除此之外, 先前的研究都是假设辐射源的高程先验信息精确已知. 在非合作定位场景下, 对于海面航行的船只, 其高程信息可以精确已知; 但对于空中巡航模式的飞机, 其高程先验信息通常存在较大的误差. 因此本文研究高程信息精确已知以及高程信息存在误差两种情况下, 利用时差频差对运动辐射源进行定位和测速. 与无高程信息下的运动辐射源定位问题相比, 高程信息增加了辐射源位置和速度与测量参数之间的非线性程度, 同时又降低了参数估计的自由度.

本文首先推导地球高程信息精确已知和高程信息存在误差情况下对运动辐射源定位测速的 CRLB; 接着运用重参数化法对假设高程信息精确已知但实际上存在误差的定位情形进行一阶扰动误差分析, 用来佐证研究存在高程误差情况的必要性; 然后提出一种鲁棒迭代约束加权最小二乘法 (robust iterative constrained weighted least squares, RICWLS) 实现地球高程信息精确已知情况下, 利用时差频差对运动辐射源进行定位测速; 紧接着对算法进行拓展, 以解决高程存在误差情况下对运动辐射源的定位测速问题; 最后通过仿真验证本文所提算法的性能.

2 定位模型

如图 1 所示, 考虑具有单个运动辐射源和 M 个运动观测站的定位场景. 假设辐射源位置和速度

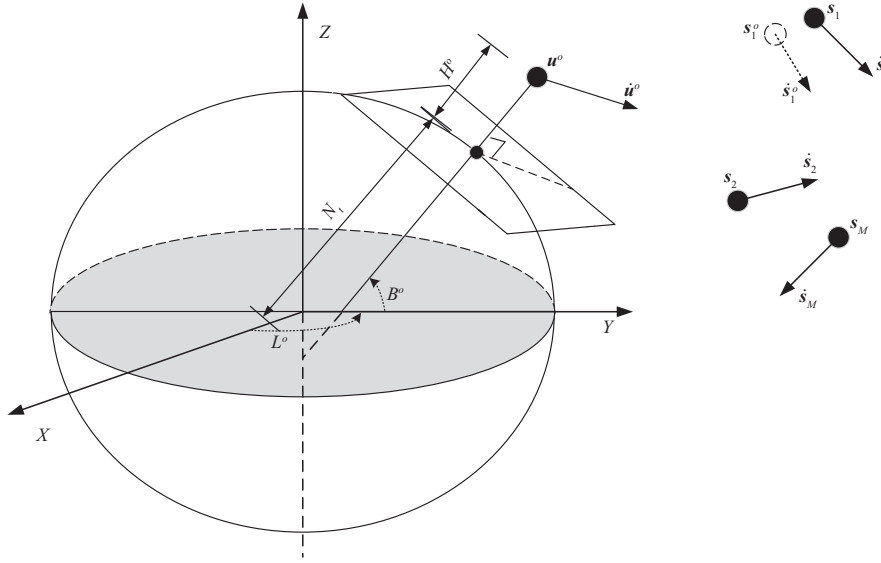


图 1 定位场景

Figure 1 Geolocation geometry

的真值分别为 $\mathbf{u}^o = [x^o, y^o, z^o]^T$ 和 $\dot{\mathbf{u}}^o = [\dot{x}^o, \dot{y}^o, \dot{z}^o]^T$, 记 $\boldsymbol{\theta}^o = [\mathbf{u}^{oT}, \dot{\mathbf{u}}^{oT}]^T$. 在 WGS-84 地球模型下, 地球高程信息精确已知辐射源的位置应满足 [21]

$$\mathbf{u}^{oT} \mathbf{P}_1 \mathbf{u}^o = (\mathbf{u}^{oT} \mathbf{P}_2)(\mathbf{P}_2 \mathbf{u}^o) = (N_t + H^o)^2 = R^{o2}, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{P}_1 = \text{diag}([1, 1, (N_t + H^o)^2 / [(1 - e^2)N_t + H^o]^2])$, $\mathbf{P}_2 = \sqrt{\mathbf{P}_1}$, $N_t = R_e / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B^o}$, $R_e = 6378137$ m, H^o 表示辐射源高程, e 表示地球偏心率, B^o 表示辐射源所在纬度, R^o 表示辐射源所在位置处的地球半径与高程之和. 辐射源的速度与其位置所在的正球面相切, 该正球的半径为 $N_t + H^o$, 该处的法向量为 $\mathbf{P}_2 \mathbf{u}^o$, 因此辐射源的速度与位置应满足

$$\mathbf{u}^{oT} \mathbf{P}_2 \dot{\mathbf{u}}^o = 0. \quad (2)$$

观测站位置和速度的测量值分别为 $\mathbf{s}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ 和 $\dot{\mathbf{s}}_i = [\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i]^T$, 相对应的真实值分别为 $\mathbf{s}_i^o = [x_i^o, y_i^o, z_i^o]^T$ 和 $\dot{\mathbf{s}}_i^o = [\dot{x}_i^o, \dot{y}_i^o, \dot{z}_i^o]^T$, 有 $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i^o + \Delta \mathbf{s}_i$ 和 $\dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\mathbf{s}}_i^o + \Delta \dot{\mathbf{s}}_i$, 其中 $i = 1, 2, \dots, M$. 记观测站位置和速度的测量矢量为 $\boldsymbol{\beta} = [\mathbf{s}^T, \dot{\mathbf{s}}^T]^T$, 其中 $\mathbf{s} = [s_1^T, s_2^T, \dots, s_M^T]^T$, $\dot{\mathbf{s}} = [\dot{s}_1^T, \dot{s}_2^T, \dots, \dot{s}_M^T]^T$. 对应的真值记为 $\boldsymbol{\beta}^o$. 观测站位置和速度的测量误差矢量为 $\Delta \boldsymbol{\beta} = [\Delta \mathbf{s}^T, \Delta \dot{\mathbf{s}}^T]^T$, 其中 $\Delta \mathbf{s} = [\Delta s_1^T, \Delta s_2^T, \dots, \Delta s_M^T]^T$, $\Delta \dot{\mathbf{s}} = [\Delta \dot{s}_1^T, \Delta \dot{s}_2^T, \dots, \Delta \dot{s}_M^T]^T$. 假设 $\Delta \boldsymbol{\beta}$ 服从均值为零, 协方差矩阵为 \mathbf{Q}_β 的高斯 (Gauss) 分布.

不失一般性, 选取第一个观测站为主站, 则第 i 个观测站相对于主站的时频差测量值可表示为

$$t_{i1} = r_{i1}/c = (r_i^o - r_1^o + \Delta r_{i1})/c, \quad (3)$$

$$f_{i1} = \dot{r}_{i1}/c = (\dot{r}_i^o - \dot{r}_1^o + \Delta \dot{r}_{i1})/c. \quad (4)$$

其中 $r_i^o = \|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o\|$, $\dot{r}_i^o = (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o)^T (\dot{\mathbf{u}}^o - \dot{\mathbf{s}}_i^o) / r_i^o$ 分别表示主站与辐射源距离差和距离差变化率的真实值, $\Delta r_{i1}/c$ 和 $\Delta \dot{r}_{i1}/c$ 分别表示时差和频差的测量噪声. 为便于后面的计算, 将时差和频差值乘以信号传播速度 c , 得到距离差和速度差. 下文称 r_{i1} 和 \dot{r}_{i1} 为时频差值, 相应的 Δr_{i1} 和 $\Delta \dot{r}_{i1}$ 为时差和频差的测量噪声. 记 $\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\gamma}^T, H]^T$ 为联合时频差测量和高程信息的矢量, 其中 $\boldsymbol{\gamma} = [r^T, \dot{r}^T]^T$,

$\mathbf{r} = [r_{21}, r_{31}, \dots, r_{M1}]^T$ 表示时差测量矢量, $\dot{\mathbf{r}} = [\dot{r}_{21}, \dot{r}_{31}, \dots, \dot{r}_{M1}]^T$ 表示频差测量矢量, H 为高程先验值. 对应的真值矢量为 $\boldsymbol{\alpha}^o$. 记时频差测量和高程误差矢量为 $\Delta\boldsymbol{\alpha} = [\Delta\boldsymbol{\gamma}^T, \Delta H]^T$, 其中 $\Delta\boldsymbol{\gamma} = [\Delta\mathbf{r}^T, \Delta\dot{\mathbf{r}}^T]^T$, $\Delta\mathbf{r} = [\Delta r_{21}, \Delta r_{31}, \dots, \Delta r_{M1}]^T$ 为时差测量噪声, 服从零均值高斯分布, 其协方差矩阵为 \mathbf{Q}_t , $\Delta\dot{\mathbf{r}} = [\Delta\dot{r}_{21}, \Delta\dot{r}_{31}, \dots, \Delta\dot{r}_{M1}]^T$ 为频差测量噪声也服从零均值高斯分布, 其协方差矩阵为 \mathbf{Q}_f , ΔH 为高程信息误差, 也服从零均值高斯分布.

3 一阶扰动误差分析与 CRLB

CRLB 给出任意无偏估计器方差的理论下界, 本节首先分别推导高程信息精确已知和高程信息存在误差情况下对运动辐射源定位测速的 CRLB; 然后运用重参数化法和泰勒 (Taylor) 级数展开法对假设高程信息精确已知但实际存在误差情况下的定位和测速性能进行一阶扰动误差分析, 目的是证明是否有必要研究存在高程误差下的定位算法.

3.1 CRLB

3.1.1 高程信息精确已知 CRLB (CRLB without altitude error, CRLB-noAE)

辐射源的位置和速度矢量 $\boldsymbol{\theta}^o = [\mathbf{u}^{oT}, \dot{\mathbf{u}}^{oT}]^T$ 以及观测站的位置和速度矢量 $\boldsymbol{\beta}^o = [\mathbf{s}^{oT}, \dot{\mathbf{s}}^{oT}]^T$ 都未知, 原定位问题等价于如下带约束的极大似然问题:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\theta}^o, \boldsymbol{\beta}^o} & (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}^o(\boldsymbol{\theta}^o, \boldsymbol{\beta}^o))^T \mathbf{Q}_\gamma^{-1} (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}^o(\boldsymbol{\theta}^o, \boldsymbol{\beta}^o)) + (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^o)^T \mathbf{Q}_\beta^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^o), \\ \text{s.t.} & \mathbf{u}^{oT} \mathbf{P}_1 \mathbf{u}^o = R^2, \quad \mathbf{u}^{oT} \mathbf{P}_2 \dot{\mathbf{u}}^o = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\mathbf{Q}_\gamma = \text{diag}(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_f)$. 本文待求解的变量为联合辐射源位置和速度的矢量 $\boldsymbol{\theta}^o$. 在不考虑约束的情况下, 其费舍尔 (Fisher) 信息矩阵为^[10]

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^o) = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Y}^T, \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{X} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}^o}{\partial \boldsymbol{\theta}^o} \right)^T \mathbf{Q}_\gamma^{-1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}^o}{\partial \boldsymbol{\theta}^o} \right), \quad \mathbf{Y} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}^o}{\partial \boldsymbol{\theta}^o} \right)^T \mathbf{Q}_\gamma^{-1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}^o}{\partial \boldsymbol{\beta}^o} \right), \quad \mathbf{Z} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}^o}{\partial \boldsymbol{\beta}^o} \right)^T \mathbf{Q}_\gamma^{-1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}^o}{\partial \boldsymbol{\beta}^o} \right) + \mathbf{Q}_\beta^{-1}. \quad (7)$$

下面给出 $\partial \boldsymbol{\gamma}^o / \partial \boldsymbol{\theta}^o$ 和 $\partial \boldsymbol{\gamma}^o / \partial \boldsymbol{\beta}^o$ 的具体形式:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}^o}{\partial \boldsymbol{\theta}^o} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{O}_{(M-1) \times 3M} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix} \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}^o}{\partial \boldsymbol{\beta}^o} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1 & \mathbf{O}_{(M-1) \times 3M} \\ -\mathbf{C}_2 & -\mathbf{C}_1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中 $\mathbf{E} = (\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{1}_M) \otimes \mathbf{I}_3$, \otimes 表示 Kronecker 积.

$$\mathbf{C}_1(i, :) = [-\mathbf{a}_1^T, \mathbf{0}_{3(i-1)}^T, \mathbf{a}_{i+1}^T, \mathbf{0}_{3(M-i-1)}^T], \quad \mathbf{C}_2(i, :) = [-\mathbf{b}_1^T, \mathbf{0}_{3(i-1)}^T, \mathbf{b}_{i+1}^T, \mathbf{0}_{3(M-i-1)}^T], \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o}{r_i^o}, \quad \mathbf{b}_i = \frac{\dot{\mathbf{u}}^o - \dot{\mathbf{s}}_i^o}{r_i^o} - \frac{\dot{r}_i^o}{r_i^{o2}} (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o). \quad (10)$$

根据文献 [21] 可得高程信息精确已知情况下定位测速的 CRLB 为

$$\text{CRLB}_1^0(\boldsymbol{\theta}^o) = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^o)^{-1} - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} (\mathbf{F}^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^o)^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^o)^{-1}, \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial \mathbf{u}^o & \partial f_2 / \partial \mathbf{u}^o \\ \mathbf{0}_3 & \partial f_2 / \partial \dot{\mathbf{u}}^o \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} f_1 &= \mathbf{u}^{oT} \mathbf{P}_1 \mathbf{u}^o - (N_t + H^o)^2, \\ f_2 &= \mathbf{u}^{oT} \mathbf{P}_2 \dot{\mathbf{u}}^o, \end{aligned} \quad (12)$$

\mathbf{F} 的具体形式由附录 A 的式 (A2) 给出.

3.1.2 高程信息存在误差 CRLB (CRLB with altitude error, CRLB-AE)

辐射源的位置与速度 $\boldsymbol{\theta}^o = [\mathbf{u}^{oT}, \dot{\mathbf{u}}^{oT}]^T$ 以及观测站的位置和速度矢量 $\boldsymbol{\beta}^o = [\mathbf{s}^{oT}, \dot{\mathbf{s}}^{oT}]^T$ 都未知, 不同的是由于存在高程误差, 式 (5) 中仅存在第二个约束, 高程信息被当作含有测量误差的元素写进了时频差测量矢量. 此时的定位问题等价于如下带约束的极大似然代价函数:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\theta}^o, \boldsymbol{\beta}^o} & (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^o(\boldsymbol{\theta}^o, \boldsymbol{\beta}^o))^T \mathbf{Q}_\alpha^{-1} (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^o(\boldsymbol{\theta}^o, \boldsymbol{\beta}^o)) + (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^o)^T \mathbf{Q}_\beta^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^o), \\ \text{s.t.} & \mathbf{u}^{oT} \mathbf{P}_2 \dot{\mathbf{u}}^o = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\mathbf{Q}_\alpha = \text{diag}(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_f, \Delta H^2)$. 待求解的变量仍为联合辐射源位置和速度的矢量 $\boldsymbol{\theta}^o$. 在不考虑约束的情况下, 其费舍尔信息矩阵为

$$\tilde{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\theta}^o) = \tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{Z}}^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}^T, \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^o}{\partial \boldsymbol{\theta}^o} \right)^T \mathbf{Q}_\alpha^{-1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^o}{\partial \boldsymbol{\theta}^o} \right), \quad \tilde{\mathbf{Y}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^o}{\partial \boldsymbol{\theta}^o} \right)^T \mathbf{Q}_\alpha^{-1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^o}{\partial \boldsymbol{\beta}^o} \right), \\ \tilde{\mathbf{Z}} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^o}{\partial \boldsymbol{\beta}^o} \right)^T \mathbf{Q}_\alpha^{-1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^o}{\partial \boldsymbol{\beta}^o} \right) + \mathbf{Q}_\beta^{-1}, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^o}{\partial \boldsymbol{\theta}^o} &= \begin{bmatrix} \partial \gamma^o / \partial \boldsymbol{\theta}^o \\ [\partial H^o / \partial \mathbf{u}^{oT}, \mathbf{0}_3^T] \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^o}{\partial \boldsymbol{\beta}^o} = \begin{bmatrix} \partial \gamma^o / \partial \boldsymbol{\beta}^o \\ \mathbf{0}_6^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

附录 A 中给出 $\partial H^o / \partial \mathbf{u}^{oT}$ 的具体形式. 进一步可得高程信息存在误差情况下定位测速的 CRLB 为

$$\text{CRLB}_1^1(\boldsymbol{\theta}^o) = \tilde{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\theta}^o)^{-1} - \tilde{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\theta}^o)^{-1} \tilde{\mathbf{F}} (\tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\theta}^o)^{-1} \tilde{\mathbf{F}})^{-1} \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\theta}^o)^{-1}, \quad (16)$$

其中 $\tilde{\mathbf{F}} = [\partial f_2 / \partial \mathbf{u}^o; \partial f_2 / \partial \dot{\mathbf{u}}^o]$, $f_2 = \mathbf{u}^{oT} \mathbf{P}_2 \dot{\mathbf{u}}^o$, $\tilde{\mathbf{F}}$ 的具体形式由附录 A 的式 (A3) 给出.

3.2 一阶扰动误差分析

本小节对假设高程信息精确已知, 但实际上存在高程误差的情况进行一阶扰动误差分析. 当高程信息精确已知时, 由于辐射源的位置和速度满足两个地球约束方程, 参数估计的自由度实质上为 4, 因此本文采用重参数化法将原问题从地固坐标系下带约束问题转换成大地经纬坐标系下无约束问题, 而后运用泰勒展开法进行研究.

将辐射源位置从地固坐标系转换到大地经纬坐标系有

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} (N_t + H) \cos B \cos L \\ (N_t + H) \cos B \sin L \\ [(1 - e^2)N_t + H] \sin B \end{bmatrix}, \quad (17)$$

其中 B 表示辐射源的纬度, L 表示辐射源的经度. 对式 (17) 两边同时求关于时间的导数得到

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} \dot{B} \\ \dot{L} \\ \dot{H} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

其中

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -(M_t + H) \sin B \cos L & -(N_t + H) \cos B \sin L & \cos B \cos L \\ -(M_t + H) \sin B \sin L & (N_t + H) \cos B \cos L & \cos B \sin L \\ (M_t + H) \cos B & 0 & \sin B \end{bmatrix}, \quad (19)$$

\dot{B} , \dot{L} , 和 \dot{H} 分别表示辐射源在纬度、经度以及高程方向的速度, $M_t = R_e(1 - e^2)/(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}$.

由于辐射源的高程信息已知, 高程方向的速度为 0, 因此辐射源实际需要估计的参数为 $\varphi^o = [B^o, L^o, \dot{B}^o, \dot{L}^o]^T$. 至此通过重参数化法将原来的带约束问题转换成如下的无约束问题:

$$\min_{\varphi} (\gamma - \gamma^o(\varphi^o, H^o))^T \mathbf{W} (\gamma - \gamma^o(\varphi^o, H^o)), \quad (20)$$

其中 $\mathbf{W} = (\mathbf{Q}_\gamma + \frac{\partial \gamma^o}{\partial \beta^o} \mathbf{Q}_\beta (\frac{\partial \gamma^o}{\partial \beta^o})^T)^{-1}$.

将 $\gamma^o(\varphi^o, H^o)$ 在含有噪声的 φ 以及 H 处进行一阶泰勒级数展开有

$$\begin{aligned} \gamma^o(\varphi^o, H^o) &\approx \tilde{\gamma}(\varphi, H) + \mathbf{H}_1(\varphi^o - \varphi) + \mathbf{H}_2(H^o - H) \\ &= \tilde{\gamma}(\varphi, H) - \mathbf{H}_1 \Delta \varphi - \mathbf{H}_2 \Delta H, \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \quad \mathbf{H}_2 = \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial H}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(:, 1:2) & \mathbf{O}_{3 \times 2} \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1(:, 1:2) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(:, 3) \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2(1, 1) &= -\dot{B}(E_t + H) \cos B \cos L + \dot{L}(M_t + H) \sin B \sin L, \\ \mathbf{A}_2(1, 2) &= \dot{B}(M_t + H) \sin B \sin L - \dot{L}(N_t + H) \cos B \cos L, \\ \mathbf{A}_2(2, 1) &= -\dot{B}(E_t + H) \cos B \sin L - \dot{L}(M_t + H) \sin B \cos L, \\ \mathbf{A}_2(2, 2) &= -\dot{B}(M_t + H) \sin B \cos L - \dot{L}(N_t + H) \cos B \sin L, \\ \mathbf{A}_2(3, 1) &= -\dot{B}(F_t + H) \sin B, \quad \mathbf{A}_2(3, 2) = 0, \\ E_t &= R_e(1 - e^2)(1 + 2e^2 \sin^2 B)/(1 - e^2 \sin^2 B)^{5/2}, \\ F_t &= R_e(1 - e^2)(1 - e^2 - 2e^2 \cos^2 B)/(1 - e^2 \sin^2 B)^{5/2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -\sin B \cos L & -\cos B \sin L \\ -\sin B \sin L & \cos B \cos L \\ \cos B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{B} \\ \dot{L} \end{bmatrix}.$$

将式 (21) 代入式 (20), 然后运用 WLS 估计器求得

$$\Delta\varphi = (\mathbf{H}_1^T \mathbf{W} \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{H}_1^T \mathbf{W} (\Delta\gamma - \mathbf{H}_2 \Delta H). \quad (24)$$

接下来将 θ 在 φ 和 H 处进行一阶泰勒展开有

$$\Delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} \Delta\varphi + \frac{\partial\theta}{\partial H} \Delta H. \quad (25)$$

将式 (24) 代入式 (25) 得到

$$\Delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} \mathbf{H}_1^* - \left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} \mathbf{H}_1^* \mathbf{H}_2 - \frac{\partial\theta}{\partial H} \right) \Delta H, \quad (26)$$

其中 $\mathbf{H}_1^* = (\mathbf{H}_1^T \mathbf{W} \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{H}_1^T \mathbf{W}$. 根据式 (26) 求得均方误差 (mean squared error, MSE) 为

$$\text{cov}(\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} (\mathbf{H}_1^T \mathbf{W} \mathbf{H}_1)^{-1} \left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} \right)^T + \left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} \mathbf{H}_1^* \mathbf{H}_2 - \frac{\partial\theta}{\partial H} \right) \left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} \mathbf{H}_1^* \mathbf{H}_2 - \frac{\partial\theta}{\partial H} \right)^T \mathbb{E}(\Delta H^2). \quad (27)$$

从式 (27) 的第二项可以看出高程信息存在误差必然会导致定位和测速的误差增大. 接下来通过仿真进一步说明高程误差对定位性能的影响. 仿真中考虑 6 个运动观测站, 分别对辐射源到观测站距离与基线 (主站与其余各站之间的距离) 之比小于 20 的海上辐射源 $\mathbf{u}_{\text{near}}^o$ (近场辐射源) 和辐射源到观测站距离与基线之比大于 20 的空中辐射源 $\mathbf{u}_{\text{far}}^o$ (远场辐射源) 进行定位, 辐射源和观测站的位置和速度如表 1 所示. 时差和频差测量误差的协方差阵为 $\mathbf{Q}_\gamma = \sigma^2 \text{diag}(\mathbf{R}, 0.1\mathbf{R})$, 其中 $\mathbf{R} = 0.5(\mathbf{I}_{M-1} + \mathbf{1}_{M-1}\mathbf{1}_{M-1}^T)$. 观测站位置和速度误差的协方差矩阵为 $\mathbf{Q}_\beta = \text{diag}(\sigma_s^2 \mathbf{I}_{3M}, \sigma_s^2 \mathbf{I}_{3M})$, 其中 σ_s 和 σ_s 分别表示观测站的位置和速度测量误差的标准差, 仿真中固定 $\sigma_s = 1$ m 和 $\sigma_s = 0.1$ m/s. 图 2(a) 和 (b) 分别展示了近场源和远场源定位下的 CRLB-noAE、无高程信息 CRLB (CRLB without altitude information, CRLB-noAI) 以及假设高程信息精确已知但实际具有高程误差的理论 RMSE (theoretical root mean squared error, theoretical RMSE) 随高程误差变化的情况. 仿真中固定时差频差测量噪声为 $\sigma^2 = 0.01$ dBm². 观察发现: (1) 定位和测速性能对较小的高程误差不敏感, 辐射源与主站之间的距离越大对高程误差越不敏感 (近场源 CRLB-AE 在 $\Delta H^2 \geq 5$ dBm² 时显著偏离 CRLB-noAE, 远场源 CRLB-AE 在 $\Delta H^2 \geq 30$ dBm² 时才显著偏离 CRLB-noAE); (2) 随着高程误差的增大, 定位 CRLB-AE 逐渐趋于定位 CRLB-noAI, 但是测速 CRLB-AE 仍然低于测速 CRLB-noAI, 因为辐射源位置和速度的约束关系将速度参数的自由度从 3 降低为 2, 具有额外的信息增益. 综上所述, 研究对高程信息存在误差的运动辐射源定位测速具有重要的价值.

4 定位算法

本节首先针对地球高程信息精确已知的场景, 提出一种鲁棒迭代约束加权最小二乘估计器 (robust iterative constrained weighted least squares without altitude error, RICWLS-noAE); 而后针对高程信息存在误差的情况, 对算法进行拓展, 提出 (robust iterative constrained weighted least squares with altitude error, RICWLS-AE) 法对运动辐射源进行定位测速; 最后对算法性能进行分析.

4.1 无高程误差鲁棒迭代约束加权最小二乘法

将 $r_{i1}^o + r_1^o = r_i^o$ 两边同时平方并代入 $r_i^{o2} = (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o)^T (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i^o)$ 可得

$$0.5(r_{i1}^{o2} + \mathbf{s}_1^{oT} \mathbf{s}_1^o - \mathbf{s}_i^{oT} \mathbf{s}_i^o) + (\mathbf{s}_i^o - \mathbf{s}_1^o)^T \mathbf{u}^o + r_{i1}^o r_1^o = 0. \quad (28)$$

表 1 辐射源和观测站位置和速度的真实值

Table 1 True positions and velocities of source and sensors

	Longitude (°E)	Latitude (°N)	Altitude (m)	Velocity (m/s)
\mathbf{s}_1^o	120.000000	30.000000	1100	$[0, 20, 0]^T$
\mathbf{s}_2^o	120.103132	30.085944	2200	$[0, 0, 0]^T$
\mathbf{s}_3^o	120.057295	29.931245	400	$[20, 20, 0]^T$
\mathbf{s}_4^o	119.931245	29.908326	1500	$[20, 0, 0]^T$
\mathbf{s}_5^o	119.914056	30.074485	860	$[10, 10, -10]^T$
\mathbf{s}_6^o	120.063025	30.080214	1800	$[-15, -5, 5]^T$
$\mathbf{u}_{\text{near}}^o$	120.171887	29.828113	0	$[-31, -32, 21]^T$
$\mathbf{u}_{\text{far}}^o$	121.145916	28.854084	8000	$[-86, 130, 123]^T$

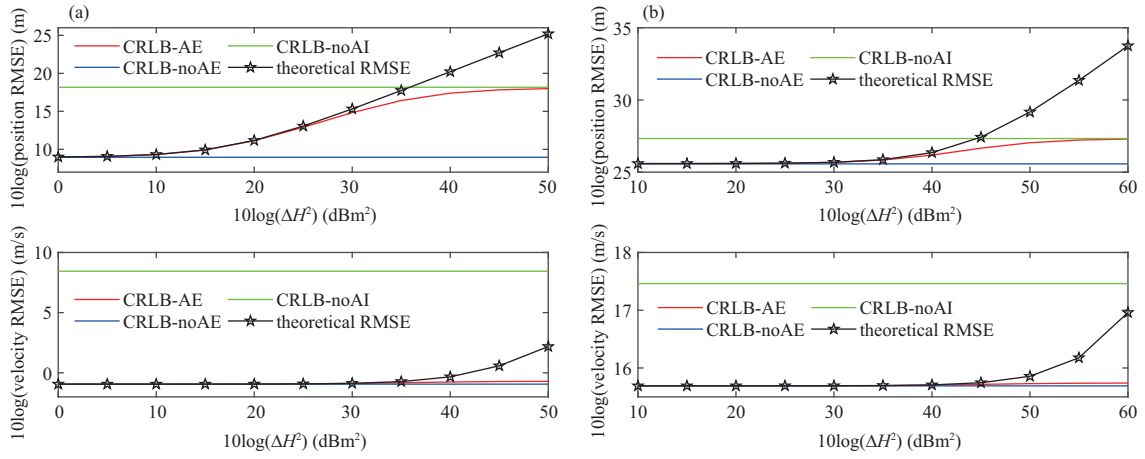


图 2 CRLBs 和理论 RMSE 随高程误差变化. (a) 近场源定位; (b) 远场源定位

Figure 2 Comparisons of the CRLBs and theoretical RMSE under altitude error for (a) the near-field source localization and (b) the far-field source localization

对 r_1^o 在主站位置观测值 \mathbf{s}_1 处进行一阶泰勒级数展开得到

$$r_1^o \approx r_1 + \boldsymbol{\omega}^T \Delta \mathbf{s}_1, \quad (29)$$

其中 $r_1 = \|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1\|$, $\boldsymbol{\omega} = (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1)/r_1$. 将 $r_{i1}^o = r_{i1} - \Delta r_{i1}$, $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i^o + \Delta \mathbf{s}_i$, $\dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\mathbf{s}}_i^o + \Delta \dot{\mathbf{s}}_i$ 以及式 (29) 代入式 (28) 并忽略二阶噪声项得到

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t,i} &\approx r_i \Delta r_{i1} + (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i)^T \Delta \mathbf{s}_i - (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1 + r_{i1} \boldsymbol{\omega})^T \Delta \mathbf{s}_1 \\ &\approx 0.5(r_{i1}^2 + \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i) + (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_1)^T \mathbf{u}^o + r_{i1} r_1. \end{aligned} \quad (30)$$

对式 (30) 两边同时求关于时间的导数可得如下频差测量方程:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{f,i} &\approx \dot{r}_i \Delta r_{i1} + r_i \Delta \dot{r}_{i1} + (\dot{\mathbf{u}}^o - \dot{\mathbf{s}}_i)^T \Delta \mathbf{s}_i - (\dot{\mathbf{u}}^o - \dot{\mathbf{s}}_1 + \dot{r}_{i1} \boldsymbol{\omega} + r_{i1} \dot{\boldsymbol{\omega}})^T \Delta \mathbf{s}_1 \\ &\quad + (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i)^T \Delta \dot{\mathbf{s}}_i - (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1 + r_{i1} \boldsymbol{\omega})^T \Delta \dot{\mathbf{s}}_1 \\ &\approx (\dot{r}_{i1} r_{i1} + \dot{\mathbf{s}}_1^T \mathbf{s}_1 - \dot{\mathbf{s}}_i^T \mathbf{s}_i) + (\dot{\mathbf{s}}_i - \dot{\mathbf{s}}_1)^T \mathbf{u}^o + (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_1)^T \dot{\mathbf{u}}^o + \dot{r}_{i1} r_1 + r_{i1} \dot{r}_1, \end{aligned} \quad (31)$$

其中 $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{I}_3 - \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}^T)(\dot{\mathbf{u}}^o - \dot{\mathbf{s}}_1)/r_1$.

将上述时差和频差测量方程整理成矩阵形式有

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \boldsymbol{\theta}_1, \quad (32)$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_1 &= [\mathbf{u}^{oT}, \dot{\mathbf{u}}^{oT}, r_1, \dot{r}_1]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 = [\boldsymbol{\varepsilon}_t^T, \boldsymbol{\varepsilon}_f^T]^T, \quad \mathbf{h}_1 = [\mathbf{h}_t^T, \mathbf{h}_f^T]^T, \quad \mathbf{G}_1 = [\mathbf{G}_t^T, \mathbf{G}_f^T]^T, \\ [\boldsymbol{\varepsilon}_t]_{i-1} &= \varepsilon_{t,i}, \quad [\boldsymbol{\varepsilon}_f]_{i-1} = \varepsilon_{f,i}, \quad [\mathbf{h}_t]_{i-1} = 0.5(r_{i1}^2 - \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1), \\ [\mathbf{h}_f]_{i-1} &= r_{i1} \dot{r}_{i1} - \dot{\mathbf{s}}_i^T \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{s}}_1^T \mathbf{s}_1, \quad \mathbf{G}_t(i-1, :) = -[(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_1)^T, \mathbf{0}_3^T, r_{i1}, 0], \\ \mathbf{G}_f(i-1, :) &= -[(\dot{\mathbf{s}}_i - \dot{\mathbf{s}}_1)^T, (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_1)^T, \dot{r}_{i1}, r_{i1}], \quad i = 2, 3, \dots, M. \end{aligned} \quad (33)$$

根据式 (30) 和 (31) 的第一行有

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{B}_1 \Delta \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{D}_1 \Delta \boldsymbol{\beta}, \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{O}_{M-1} \\ \dot{\mathbf{B}} & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{O}_{M-1} \\ \dot{\mathbf{D}} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \text{diag}(r_2, r_3, \dots, r_M), \quad \dot{\mathbf{B}} = \text{diag}(\dot{r}_2, \dot{r}_3, \dots, \dot{r}_M), \\ \mathbf{D}(i-1, :) &= [-(\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1 + r_{i1} \boldsymbol{\omega})^T, \mathbf{0}_{3(i-2)}^T, (\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i)^T, \mathbf{0}_{3(M-i)}^T], \\ \dot{\mathbf{D}}(i-1, :) &= [-(\dot{\mathbf{u}}^o - \dot{\mathbf{s}}_1 + \dot{r}_{i1} \boldsymbol{\omega} + r_{i1} \dot{\boldsymbol{\omega}})^T, \mathbf{0}_{3(i-2)}^T, (\dot{\mathbf{u}}^o - \dot{\mathbf{s}}_i)^T, \mathbf{0}_{3(M-i)}^T]. \end{aligned} \quad (35)$$

对原定位问题的求解转化成求解如下带约束的加权最小二乘代价函数:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\theta}_1} \quad & (\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \boldsymbol{\theta}_1)^T \mathbf{W}_1 (\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \boldsymbol{\theta}_1), \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{\theta}_1(7) = \|\boldsymbol{\theta}_1(1:3) - \mathbf{s}_1\|, \quad \boldsymbol{\theta}_1(7) \boldsymbol{\theta}_1(8) = (\boldsymbol{\theta}_1(1:3) - \mathbf{s}_1)^T (\boldsymbol{\theta}_1(4:6) - \dot{\mathbf{s}}_1), \\ & \boldsymbol{\theta}_1(1:3)^T \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\theta}_1(1:3) = R^2, \quad \boldsymbol{\theta}_1(1:3)^T \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\theta}_1(4:6) = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

其中 $\mathbf{W}_1 = (\mathbf{B}_1 \mathbf{Q}_\gamma \mathbf{B}_1^T + \mathbf{D}_1 \mathbf{Q}_\beta \mathbf{D}_1^T)^{-1}$.

观察发现式 (36) 的目标函数是凸函数, 但是 4 个等式约束是非凸的, 本文所提算法的关键就是将等式约束近似凸化. 首先对优化变量 $\boldsymbol{\theta}_1$ 作仿射变换得到

$$\boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\rho}, \quad (37)$$

其中 $\boldsymbol{\rho} = [\mathbf{s}_1^T, \dot{\mathbf{s}}_1^T, 0, 0]^T$. 将式 (37) 代入式 (36) 的目标函数, 除去不包含待优化变量 $\boldsymbol{\theta}_2$ 的项得到

$$\boldsymbol{\theta}_2^T \mathbf{G}_2 \boldsymbol{\theta}_2 - 2\mathbf{h}_2^T \boldsymbol{\theta}_2, \quad (38)$$

其中 $\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_1 \mathbf{G}_1$, $\mathbf{h}_2 = \mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_1 (\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \boldsymbol{\rho})$. 根据仿射变换的保凸性可知式 (38) 为凸函数. 接着将式 (37) 分别代入式 (36) 的 4 个等式约束得到

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\theta}_2 = \mathbf{b}, \quad (39)$$

其中 $\mathbf{b} = [0, 0, R^2 - \mathbf{s}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{s}_1, -\mathbf{s}_1^T \mathbf{P}_2 \mathbf{s}_1]^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\theta}_1(1:3) - \mathbf{s}_1)^T & \mathbf{0}_3^T & -\boldsymbol{\theta}_1(7) & 0 \\ \mathbf{0}_3^T & (\boldsymbol{\theta}_1(1:3) - \mathbf{s}_1)^T & 0 & -\boldsymbol{\theta}_1(7) \\ (\boldsymbol{\theta}_1(1:3) + \mathbf{s}_1)^T \mathbf{P}_1 & \mathbf{0}_3^T & 0 & 0 \\ \boldsymbol{\theta}_1(4:6)^T \mathbf{P}_2 & \mathbf{s}_1^T \mathbf{P}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

至此原定位问题被等价转换成如下形式:

$$\min_{\boldsymbol{\theta}_2} \boldsymbol{\theta}_2^T \mathbf{G}_2 \boldsymbol{\theta}_2 - 2\mathbf{h}_2^T \boldsymbol{\theta}_2, \quad \text{s.t. } \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}_2 = \mathbf{b}. \quad (41)$$

观察变换后的式(41), 由于仿射变换没有改变等式约束的凸性, \mathbf{A} 中仍然包含辐射源位置和速度参数, 等式约束仍然是非凸的. 假设已经得到辐射源位置和速度的初始估计值并将其代入矩阵 \mathbf{A} 中, 则原来的等式约束就转换成了伪仿射集约束, 根据仿射函数的凸性可知原问题被近似转换成了凸优化问题. 本文辐射源位置和速度的初始估计值由 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = (\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{G}_1^T \mathbf{h}_1$ 给出. 据此计算出 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k$, $\hat{\mathbf{A}}$ 以及 $\hat{\mathbf{b}}$, 其中 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k$ 的上标 k 表示第 k 次估计值, $\hat{\mathbf{A}}$ 和 $\hat{\mathbf{b}}$ 分别表示将辐射源位置和速度第 k 次估计值代入的结果. 需要说明的是, 在每一次迭代的过程中需要根据上一次辐射源位置和速度的估计值更新权重矩阵 \mathbf{W}_1 以及地球卯酉圈半径 N_t , 更新 N_t 时采用如下公式计算辐射源纬度^[21]:

$$B = \tan^{-1} \left\{ \frac{[\mathbf{u}]_3}{\sqrt{[\mathbf{u}]_1^2 + [\mathbf{u}]_2^2(1 - e^2)}} \right\}. \quad (42)$$

命题1 若有第 k 次的估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k$, 则第 $k+1$ 次的估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{k+1}$ 为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{k+1} = \lambda \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k + (1 - \lambda)(\hat{\mathbf{A}}^\dagger \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{P}\boldsymbol{\xi}), \quad (43)$$

其中 $\hat{\mathbf{A}}^\dagger = \hat{\mathbf{A}}^T (\hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{A}}^T)^{-1}$, $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}^\dagger \hat{\mathbf{A}}$ 为投影矩阵, $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{P} \mathbf{G}_2 \mathbf{P})^\dagger \mathbf{P}(\mathbf{h}_2 - \mathbf{G}_2 \hat{\mathbf{A}}^\dagger \hat{\mathbf{b}})$, λ 为权重因子, 满足 $0 < \lambda < 1$.

下面证明命题1. 首先将 $\hat{\mathbf{A}}$ 和 $\hat{\mathbf{b}}$ 代入式(41)的约束 $\mathbf{A}\boldsymbol{\theta}_2 = \mathbf{b}$ 并运用伪逆的性质求得

$$\boldsymbol{\theta}_2 = \hat{\mathbf{A}}^\dagger \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{P}\boldsymbol{\xi}, \quad (44)$$

其中 $\boldsymbol{\xi}$ 是任意取值的矢量, 然后将式(44)代入式(41)的代价函数并化简得到

$$\boldsymbol{\theta}_2^T \mathbf{G}_2 \boldsymbol{\theta}_2 - 2\mathbf{h}_2^T \boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P} \mathbf{G}_2 \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} - 2(\mathbf{h}_2 - \mathbf{G}_2 \hat{\mathbf{A}}^\dagger \hat{\mathbf{b}})^T \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} + \chi, \quad (45)$$

$\chi = \hat{\mathbf{b}}^T \hat{\mathbf{A}}^{\dagger T} \mathbf{G}_2 \hat{\mathbf{A}}^\dagger \hat{\mathbf{b}} - 2\mathbf{h}_2^T \hat{\mathbf{A}}^\dagger \hat{\mathbf{b}}$ 是与 $\boldsymbol{\xi}$ 无关的常数, 这里将其忽略. 求式(45)的最小值得到 $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{P} \mathbf{G}_2 \mathbf{P})^\dagger \mathbf{P}(\mathbf{h}_2 - \mathbf{G}_2 \hat{\mathbf{A}}^\dagger \hat{\mathbf{b}})$, 最终得到式(43).

4.2 有高程误差鲁棒迭代约束加权最小二乘法

当高程信息存在误差时, 得到如下高程方程:

$$\varepsilon_H = \Delta H = R - \|\mathbf{P}_2 \mathbf{u}^o\|, \quad (46)$$

其中 $R = N_t + H$. 将时频差测量方程以及高程方程整理成如下矩阵形式:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = \tilde{\mathbf{h}}_1 - \tilde{\mathbf{G}}_1 \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1, \quad (47)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1 &= [\boldsymbol{\theta}_1^T, \|\mathbf{P}_2 \mathbf{u}^o\|^T]^T, \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = [\boldsymbol{\varepsilon}_1^T, \varepsilon_H]^T, \quad \tilde{\mathbf{h}}_1 = [\mathbf{h}_1^T, R]^T, \quad \tilde{\mathbf{G}}_1 = [\tilde{\mathbf{G}}_t^T, \tilde{\mathbf{G}}_f^T, \mathbf{G}_H^T]^T, \\ \tilde{\mathbf{G}}_t(i-1, :) &= [\mathbf{G}_t(i-1, :), 0], \quad \tilde{\mathbf{G}}_f(i-1, :) = [\mathbf{G}_f(i-1, :), 0], \quad \mathbf{G}_H = [\mathbf{0}_8^T, 1]. \end{aligned} \quad (48)$$

误差项经过整理有

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = \tilde{\mathbf{B}}_1 \Delta \boldsymbol{\alpha} + \tilde{\mathbf{D}}_1 \Delta \boldsymbol{\beta}, \quad (49)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0}_{2(M-1)} \\ \mathbf{0}_{2(M-1)}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{D}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{0}_{6M}^T \end{bmatrix}. \quad (50)$$

根据式 (47) 建立如下带约束的加权最小二乘代价函数:

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1} & (\tilde{\mathbf{h}}_1 - \tilde{\mathbf{G}}_1 \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1)^T \tilde{\mathbf{W}}_1 (\tilde{\mathbf{h}}_1 - \tilde{\mathbf{G}}_1 \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1) \\ \text{s.t.} & \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(7) = \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(1:3) - \mathbf{s}_1\|, \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(7) \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(8) = (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(1:3) - \mathbf{s}_1)^T (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(4:6) - \dot{\mathbf{s}}_1), \\ & \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(9) = \|\mathbf{P}_2 \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(1:3)\|, \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(1:3)^T \mathbf{P}_2 \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(4:6) = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

权重矩阵 $\tilde{\mathbf{W}}_1 = (\tilde{\mathbf{B}}_1 \mathbf{Q}_\alpha \tilde{\mathbf{B}}_1^T + \tilde{\mathbf{D}}_1 \mathbf{Q}_\beta \tilde{\mathbf{D}}_1^T)^{-1}$.

通过与式 (37)~(40) 同样的数学操作将式 (51) 转换成如下形式:

$$\min_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2^T \tilde{\mathbf{G}}_2 \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2 - 2 \tilde{\mathbf{h}}_2^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2, \quad \text{s.t.} \quad \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2 = \tilde{\mathbf{b}}, \quad (52)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2 &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1 - \tilde{\boldsymbol{\rho}}, \quad \tilde{\mathbf{G}}_2 = \tilde{\mathbf{G}}_1^T \tilde{\mathbf{W}}_1 \tilde{\mathbf{G}}_1, \quad \tilde{\mathbf{h}}_2 = \tilde{\mathbf{G}}_1^T \tilde{\mathbf{W}}_1 (\tilde{\mathbf{h}}_1 - \tilde{\mathbf{G}}_1 \tilde{\boldsymbol{\rho}}), \\ \tilde{\boldsymbol{\rho}} &= [\boldsymbol{\rho}^T, \|\mathbf{s}_1\|]^T, \quad \tilde{\mathbf{b}} = [0, 0, \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{s}_1, -\mathbf{s}_1^T \mathbf{P}_2 \dot{\mathbf{s}}_1]^T, \\ \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(1:3) - \mathbf{s}_1)^T & \mathbf{0}_3^T & -\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(7) & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_3^T & (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(1:3) - \mathbf{s}_1)^T & 0 & -\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(7) & 0 \\ (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(1:3) - \mathbf{s}_1)^T \mathbf{P}_1 + 2 \mathbf{s}_1^T \mathbf{P}_1 & \mathbf{0}_3^T & 0 & 0 & -(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(9) + 2 \|\mathbf{s}_1\|) \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_1(4:6)^T \mathbf{P}_2 & \mathbf{s}_1^T \mathbf{P}_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (53)$$

接下来运用式 (43) 迭代求解 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2$. 两种算法的具体计算流程分别如算法 1 和 2 所示.

4.3 算法性能分析

本小节对算法所需观测站个数及其收敛性能进行分析. 对于 RICWLS-noAE 算法, 优化变量 $\boldsymbol{\theta}_2$ 是一个 8 维向量, 在第一步初始化时, 为保证 \mathbf{G}_2^0 矩阵非奇异, 必须满足 $2(M-1) \geq 8$, 即 $M \geq 5$; 对于 RICWLS-AE 算法, 优化变量 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2$ 是 9 维向量, 在初始化时, 为保证 $\tilde{\mathbf{G}}_2^0$ 矩阵非奇异, 必须满足 $2M-1 \geq 9$, 即 $M \geq 5$.

本文所提的鲁棒迭代约束加权最小二乘法属于迭代类算法, 需要考察其收敛性能. 根据文献 [18] 所述, 带有单个二次等式约束的二次规划问题 (利用时差对静止辐射源定位问题) 具有隐凸性, 但是对于包含 4 个二次等式约束的含高程信息运动辐射源定位测速问题 (属于 NP-hard 复杂度的非凸优化

Algorithm 1 RICWLS-noAE algorithm

Input: TDOA and FDOA measurement vectors \mathbf{r} , $\hat{\mathbf{r}}$; sensor positions and velocities \mathbf{s} , $\hat{\mathbf{s}}$; source altitude H^o ; TDOA and FDOA noise covariance \mathbf{Q}_γ ; sensor noise covariance \mathbf{Q}_β ; maximum time of iterations N ; threshold ϵ ;

Algorithm process:

- 1: Initialize: $k = 0$, $\mathbf{W}_1^0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{G}_2^0 = \mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_1^0 \mathbf{G}_1$, $\mathbf{h}_2^0 = \mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_1^0 (\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \boldsymbol{\rho})$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^0 = (\mathbf{G}_2^0)^{-1} \mathbf{h}_2^0$;
- 2: **while** $k \leq N$ **do**
- 3: Update \mathbf{W}_1^k , \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , and R^o according to $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k$;
- 4: Substitute $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k$, \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , and R^o into (40), obtain $\hat{\mathbf{A}}$ and $\hat{\mathbf{b}}$;
- 5: Obtain $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{k+1}$ by (43);
- 6: Calculate $\Delta \boldsymbol{\theta}_2(k) = \|\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{k+1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k\|$;
- 7: **if** $\Delta \boldsymbol{\theta}_2(k) < \epsilon$ **then**
- 8: Break;
- 9: **end if**
- 10: **end while**
- 11: Calculate $\zeta = \Delta \boldsymbol{\theta}_2(2:k) / \Delta \boldsymbol{\theta}_2(1:k-1)$;
- 12: **if** $k = N$ & $(\text{sum}(\zeta \geq 1) > 1)$ **then**
- 13: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k(1:3) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^0(1:3)$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k(4:6) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^0(4:6)$;
- 14: **end if**

Output: source position estimation $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k(1:3) + \mathbf{s}_1$, source position estimation $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k(4:6) + \hat{\mathbf{s}}_1$.

Algorithm 2 RICWLS-AE algorithm

Input: TDOA and FDOA measurement vectors \mathbf{r} , $\hat{\mathbf{r}}$; sensor positions and velocities \mathbf{s} , $\hat{\mathbf{s}}$; source altitude H ; TDOA, FDOA, and altitude noise covariance \mathbf{Q}_α ; sensor noise covariance \mathbf{Q}_β ; maximum time of iterations N ; threshold ϵ ;

Algorithm process:

- 1: Initialize: Calculate $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = (\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{G}_1^T \mathbf{h}_1$, obtain R using (42) and (1); $k = 0$, $\tilde{\mathbf{W}}_1^0 = \mathbf{I}$, $\tilde{\mathbf{G}}_2^0 = \tilde{\mathbf{G}}_1^T \tilde{\mathbf{W}}_1^0 \tilde{\mathbf{G}}_1$, $\tilde{\mathbf{h}}_2^0 = \tilde{\mathbf{G}}_1^T \tilde{\mathbf{W}}_1^0 (\tilde{\mathbf{h}}_1 - \tilde{\mathbf{G}}_1 \hat{\boldsymbol{\rho}})$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^0 = (\tilde{\mathbf{G}}_2^0)^{-1} \tilde{\mathbf{h}}_2^0$;
- 2: **while** $k \leq N$ **do**
- 3: Update $\tilde{\mathbf{W}}_1^k$, \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , and $\tilde{\mathbf{h}}_1$ according to $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k$;
- 4: Substitute $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k$, \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , and $\tilde{\mathbf{h}}_1$ into (53), obtain $\hat{\mathbf{A}}$ and $\hat{\mathbf{b}}$;
- 5: Obtain $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{k+1}$ by (43);
- 6: Calculate $\Delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(k) = \|\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{k+1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k\|$;
- 7: **if** $\Delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(k) < \epsilon$ **then**
- 8: Break;
- 9: **end if**
- 10: **end while**
- 11: Calculate $\tilde{\zeta} = \Delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(2:k) / \Delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2(1:k-1)$;
- 12: **if** $k = N$ & $(\text{sum}(\tilde{\zeta} \geq 1) > 1)$ **then**
- 13: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k(1:3) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^0(1:3)$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k(4:6) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^0(4:6)$;
- 14: **end if**

Output: source position estimation $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k(1:3) + \mathbf{s}_1$, source velocity estimation $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^k(4:6) + \hat{\mathbf{s}}_1$.

问题), 无法找到迭代收敛的充要条件. 不过文献 [18] 已经证明, 一旦该种迭代算法收敛, 将求得全局最优解. 大量的数值仿真结果表明, 所提方法出现迭代发散的极概率, 在大多数场景下都可以得到辐射源位置和速度最优解. 当算法发散时, 可以采用重新初始化的策略^[25] 或选择本文所提算法初始化的值作为最终解.

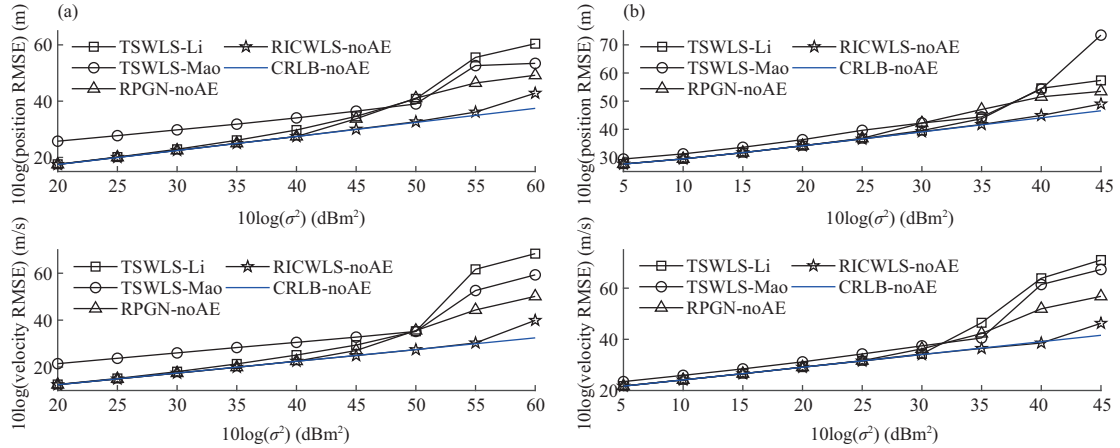


图 3 (网络版彩图) 高程信息精确已知情况下算法的定位测速性能随时频差测量误差变化. (a) 近场源; (b) 远场源
 Figure 3 (Color online) Localization performance without altitude error under TDOA and FDOA measurement noise. (a) The near-field source; (b) the far-field source

5 数值仿真

本节通过 Monte Carlo 实验验证本文所提算法在高程信息精确已知和高程信息存在误差情况下对运动辐射源的定位测速性能. 仿真实验中辐射源和观测站的位置速度参数设置同 3.2 小节. 仿真主要考察时频差和高程信息误差对定位测速性能的影响, 因此将观测站站址误差固定为 $\sigma_s = 1$ m 和 $\sigma_s = 0.1$ m/s. 采用均方根误差 (root mean squared error, RMSE) 来衡量算法定位和测速的性能, $RMSE = \sqrt{\sum_{l=1}^L \|\hat{\theta}_l - \theta\|^2 / L}$, 其中 L 表示 Monte Carlo 的总次数, 没有特别说明 $L = 5000$; $\hat{\theta}_l$ 表示第 l 次辐射源位置和速度的估计值. 仿真中本文所提算法的停止阈值为 $\epsilon = 10^{-5}$.

5.1 高程信息精确已知

本小节通过两个实验考察在高程信息精确已知的情况下, 所提 RICWLS-noAE 算法的定位和测速性能. 这里选取文献 [12] 所提出的针对地球约束的改进两步加权最小二乘法 (记作 TSWLS-Li) 作为对比算法之一. 本文还选取文献 [17] 的重参数化高斯牛顿法 (re-parameterization Gauss-Newton, RPGN-noAE) 作为另一种对比算法, 其迭代初值与本文所提算法的初值相同. 除此之外, 还选取文献 [1] 的针对无约束的两步加权最小二乘法 (记作 TSWLS-Mao) 作为对比算法.

第一个实验考察算法对近场和远场辐射源随时频差测量误差变化的定位性能, 辐射源与观测站的位置和速度在表 1 中给出. 图 3(a) 展示了 4 种算法对近场辐射源的定位测速性能随时频差测量误差变化情况. 在噪声较低时, 除 TSWLS-Mao 法因为没有利用地球约束外, 其余 3 种算法都能达到 CRLB-noAE; 当 $\sigma^2 > 30$ dBm² 时, TSWLS-Li 法首先偏离 CRLB-noAE; 当 $\sigma^2 > 40$ dBm² 时, RPGN-noAE 法也开始偏离 CRLB-noAE, 本文所提的 RICWLS-noAE 法仍能保持 CRLB-noAE.

如图 3(b) 所示, 对于远场辐射源定位, 本文所提算法的定位性能仍然好于其他 3 种对比算法; 所提算法的测速性能在 $\sigma^2 < 40$ dBm² 时, 要优于其他算法. 值得注意的是, 远场条件下 RPGN-noAE 比 TSWLS-Li 法早偏离 CRLB-noAE, 由于近场情况下 TSWLS-Li 法会出现矩阵奇异情况, 这一现象在图 4(b) 中具体体现.

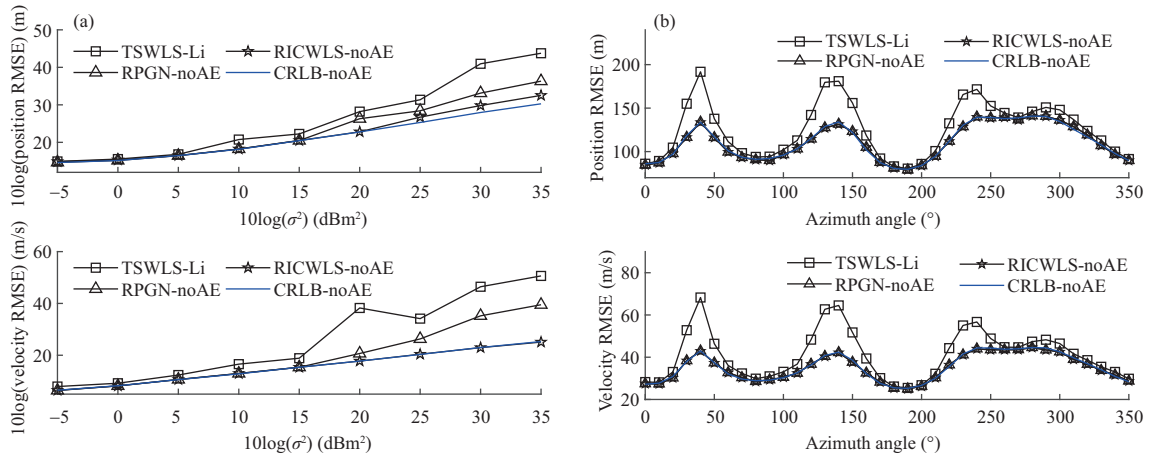


图 4 (网络版彩图) 时频差测量噪声下, (a) 观测站随机分布的定位性能和 (b) 辐射源呈圆型分布的定位性能

Figure 4 (Color online) Localization performance of (a) sensors random distribution and (b) sources with circular distribution under TDOA and FDOA measurement noise

接下来考察算法的稳健性, 由于 TSWLS-Mao 法并没有利用地球约束, 无法达到 CRLB-noAE, 这里只考察其余 3 种算法的稳健性. 第二个实验设置了两种场景. 在第一个场景中, 辐射源在大地经纬坐标系下的位置坐标为 (120.171887°E, 29.8281127°N, 5000 m), 其速度为 $[-80, 130, 120]^T$ m/s; 观测站的位置在以 (120°E, 30°N, 0 m) 为中心, 长为 20 km, 高为 3 km 的长方体区域内服从均匀分布, 速度坐标在 $[-30, 30]$ m/s \times $[-30, 30]$ m/s \times $[-30, 30]$ m/s 的长方体区域内服从均匀分布. 图 4(a) 展示了在该场景下定位和测速性能随时频差测量噪声变化情况. 可以看出 TSWLS-Li 法在某些观测站构型下可能会出现矩阵奇异的现象, 定位和测速的性能相比其他方法较差; 本文所提的 RICWLS-noAE 法要优于另外两种算法.

在第二个场景中, 以 (120°E, 30°N, 6000 m) 为圆心, 半径为 20 km 的圆上每隔 10° 抽取一个点作为辐射源位置进行定位. 观测站的位置和速度如表 1 所示. 时频差测量噪声固定为 $\sigma^2 = 30$ dBm². 图 4(b) 展示了 3 种算法在该场景下定位和测速性能的稳健性. 观察发现由于 TSWLS-Li 法对某些角度的辐射源定位会出现矩阵奇异的现象, 因此在定位时会出现 3 个明显偏离 CRLB-noAE 的尖峰. 综合两个场景, 本文所提 RICWLS-noAE 算法的定位结果相较文献 [12] 具有更强的稳健性.

5.2 高程信息存在误差

本小节通过两个实验考察高程信息存在误差的情况下, 所提 RICWLS-AE 算法的定位和测速性能. 由于没有研究高程信息存在误差情况下对运动辐射源定位测速的相关算法, 本文对文献 [17] 的重参数化高斯牛顿法 (RPGN-AE) 做改进, 作为对比算法, 其迭代初值与所提的 RICWLS-AE 算法初值相同. 此外, 还选取 TSWLS-Mao 法作为对比算法, 以说明利用存在误差的高程信息与不利用高程信息对定位性能的影响.

第一个实验考察所提的 RICWLS-AE 算法对近场和远场辐射源的定位测速性能随时频差测量误差变化. 辐射源与观测站的位置和速度在表 1 中给出, 高程误差设置成 $\Delta H^2 = 10^5$ m². 图 5(a) 和 (b) 分别展示了 3 种算法对近场辐射源和远场辐射源定位测速性能随时频差测量误差的变化情况. 在时频差测量噪声较小时, 除 TSWLS-Mao 法因没有利用地球约束, 其余两种算法都能达到 CRLB-AE; 随着测量噪声的增大, 两种场景中 RPGN-AE 法都比 RICWLS-AE 法提前偏离 CRLB-AE. 在远场条件

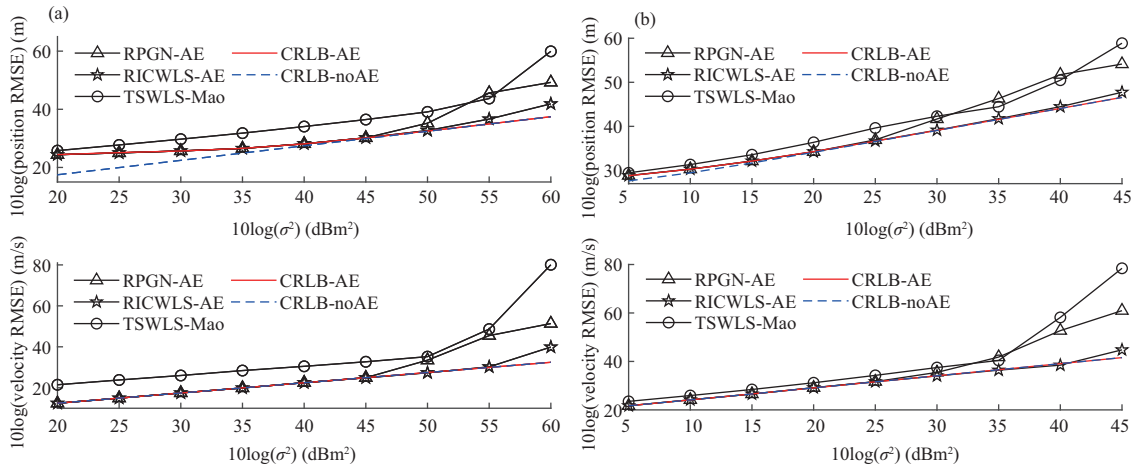


图 5 高程信息存在误差情况下算法的定位测速性能随时频差测量误差变化. (a) 近场源; (b) 远场源

Figure 5 Localization performance of (a) the near-field source and (b) the far-field source with altitude error under TDOA and FDOA measurement noise

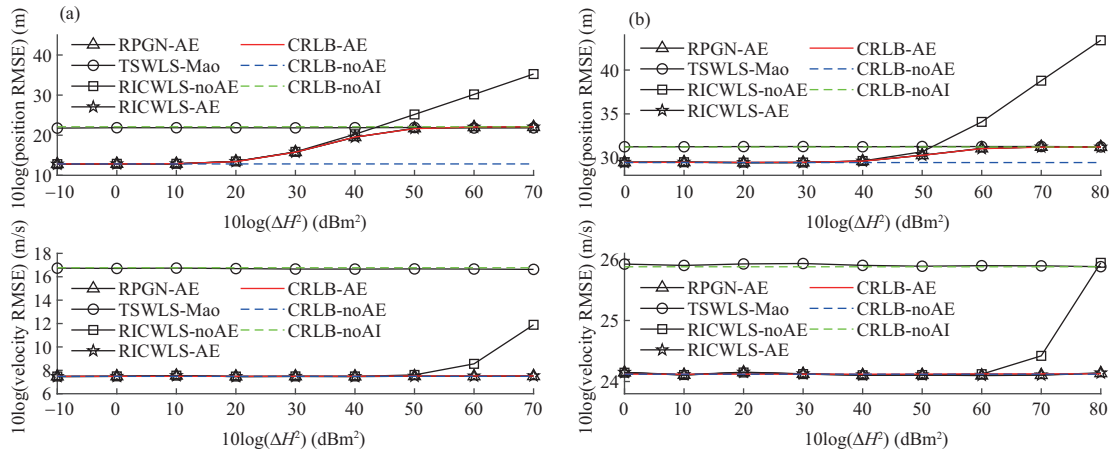


图 6 远场源算法的定位测速性能随高程信息误差变化. (a) 近场源; (b) 远场源

Figure 6 Localization performance of (a) the near-field source and (b) the far-field source under altitude error

下, 本文所提的 RICWLS-AE 算法对时频差测量噪声的鲁棒性比 RPGN-AE 法提高 15 dBm².

第二个实验考察所提的 RICWLS-AE 算法对近场和远场辐射源的定位测速性能随高程信息误差的变化情况. 辐射源与观测站的位置和速度在表 1 中给出, 时频差测量误差设置成 $\sigma^2 = 10 \text{ dBm}^2$. 为了充分证明提出 RICWLS-AE 算法的必要性, 仿真中加入 RICWLS-noAE 算法作为对比, 将含有高程误差的值输入 RICWLS-noAE 算法中估计辐射源的位置和速度. 如图 6(a) 和 (b) 所示, 当高程误差较小时, RICWLS-noAE 法也能达到 CRLB-AE, 证明该方法对小高程误差不敏感; 当高程误差继续增大时, RICWLS-noAE 法的定位测速误差急剧增大, 而 RICWLS-AE 法仍可以到达 CRLB-AE. 此外, 在时频差测量噪声较小的条件下, 高程误差的不断增大并不会导致 RICWLS-AE 法定位测速误差的无限增大, 而是会趋向 CRLB-noAI, 说明该算法对高程误差有较强的鲁棒性.

最后, 表 2 给出算法在近场和远场辐射源下运行时间对比. 当高程信息精确已知时, 对于近场源定位, 本文所提算法的计算时间约为 TSWLS-Li 方法的 8 倍, 约为 TSWLS-Mao 方法的 5 倍, 约为

表 2 算法对近场和远场辐射源定位的运行时间 (单位: 秒)

Table 2 Runtime (in seconds) of the algorithms for localization in near-field and far-field

	TSWLS-Li	TSWLS-Mao	RPGN-noAE	RICWLS-noAE	RPGN-AE	RICWLS-AE
Near-field	3.25×10^{-4}	4.86×10^{-4}	6.01×10^{-4}	2.49×10^{-3}	1.73×10^{-3}	2.45×10^{-3}
Far-field	3.66×10^{-4}	5.11×10^{-4}	1.75×10^{-3}	2.58×10^{-3}	3.45×10^{-3}	6.12×10^{-3}

RPGN-noAE 方法的 4 倍; 在远场源定位中, 本文所提算法的计算时间约为 TSWLS-Li 方法的 7 倍, 约为 TSWLS-Mao 方法的 5 倍, 约为 RPGN-noAE 方法的 1.5 倍. 当高程信息存在误差时, 对于近场源定位, 本文所提算法的计算时间约为 RPGN-AE 方法的 1.5 倍; 在远场源定位中, 本文所提算法的计算时间约为 RPGN-AE 方法的 2 倍. 综合来看, 两种情况下本文所提的算法在可接受的计算复杂度下取得了优于其他方法的定位性能.

6 总结

本文研究了地球高程信息精确已知和高程信息存在误差两种情况下的运动辐射源定位测速问题. 首先推导了两种情况下定位和测速的 CRLB; 接着为了佐证研究高程信息存在误差情况的必要性, 运用重参数化法和泰勒展开法对假设高程信息精确已知但是实际存在高程误差情形进行一阶扰动误差分析; 然后针对两种情况分别提出了一种鲁棒迭代约束加权最小二乘法, 两种方法都首先通过引入辅助变量 (RICWLS-noAE 法引入 2 个辅助变量, RICWLS-AE 法引入 3 个辅助变量) 将测量方程伪线性化, 接着根据加权最小二乘准则构建带 4 个约束的代价函数, 最后通过将二次约束近似成伪线性约束的方式迭代求解辐射源的位置和速度; 数值仿真表明, 所提 RICWLS-noAE 法的定位和测速性能要好于现有的两步加权最小二乘法, 并且 RICWLS-AE 法在中等信噪比下也可以达到 CRLB.

参考文献

- 1 Mao Z, Su H T, He B, et al. Moving source localization in passive sensor network with location uncertainty. *IEEE Signal Process Lett*, 2021, 28: 823–827
- 2 Zhang H W, Zheng Z, Wang W Q, et al. Source localisation using TDOA and FDOA measurements under unknown noise power knowledge. *IET signal process*, 2020, 14: 435–439
- 3 Zou Y B, Liu H P, Wan Q. An iterative method for moving target localization using TDOA and FDOA measurements. *IEEE Access*, 2018, 6: 2746–2754
- 4 Sun M, Ho K C. An asymptotically efficient estimator for TDOA and FDOA positioning of multiple disjoint sources in the presence of sensor location uncertainties. *IEEE Trans Signal Process*, 2011, 59: 3434–3440
- 5 Wen K, Seow C K, Tan S Y. An indoor localization and tracking system using successive weighted RSS projection. *Antennas Wirel Propag Lett*, 2020, 19: 1620–1624
- 6 Chen X J, Wang G, Ho K C. Semidefinite relaxation method for unified near-field and far-field localization by AOA. *Signal Processing*, 2021, 181: 107916
- 7 Qi H N, Wu X P, Jia L Q. Semidefinite programming for unified TDOA-based localization under unknown propagation speed. *IEEE Commun Lett*, 2020, 24: 1971–1975
- 8 Ahmed M M, Ho K C, Wang G. Localization of a moving source by frequency measurements. *IEEE Trans Signal Process*, 2020, 68: 4839–4854
- 9 Ho K C, Xu W W. An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements. *IEEE Trans Signal Process*, 2004, 52: 2453–2463
- 10 Ho K C, Lu X N, Kovavisaruch L. Source localization using TDOA and FDOA measurements in the presence of receiver location errors: analysis and solution. *IEEE Trans Signal Process*, 2007, 55: 684–696

- 11 Noroozi A, Oveis A H, Hosseini S M R, et al. Improved algebraic solution for source localization from TDOA and FDOA measurements. *IEEE Wireless Commun Lett*, 2017, 7: 352–355
- 12 Li M Z, Li X J. A closed-form solution for moving target localization with sphere constraint. *IEEE Commun Lett*, 2019, 23: 1207–1210
- 13 Wang G, Li Y, Ansari N. A semidefinite relaxation method for source localization using TDOA and FDOA measurements. *IEEE Trans Veh Technol*, 2012, 62: 853–862
- 14 Wang Y, Wu Y. An efficient semidefinite relaxation algorithm for moving source localization using TDOA and FDOA measurements. *IEEE Commun Lett*, 2017, 21: 80–83
- 15 Zheng Z, Zhang H, Wang W Q, et al. Source localization using TDOA and FDOA measurements based on semidefinite programming and reformulation linearization. *J Franklin Institute*, 2019, 356: 11817–11838
- 16 Guo F C, Ho K C. A quadratic constraint solution method for TDOA and FDOA localization. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Prague, 2011*. 2588–2591
- 17 Prévost R, Coulon M, Paimblanc P, et al. Ship localization using AIS signals received by satellites. In: *Proceedings of European Signal Processing Conference, Marrakech, 2013*. 1–5
- 18 Qu X M, Xie L H, Tan W R. Iterative constrained weighted least squares source localization using TDOA and FDOA measurements. *IEEE Trans Signal Process*, 2017, 65: 3990–4003
- 19 Zhu G H, Feng D Z. Bi-iterative method for moving source localisation using TDOA and FDOA measurements. *Electron Lett*, 2015, 51: 8–10
- 20 Deng B, Yang L, Sun Z B, et al. Geolocation of a known altitude target using TDOA and GROA in the presence of receiver location uncertainty. *Int J Antennas Propagation*, 2016, 2016: 1–11
- 21 Ho K C, Chan Y T. Geolocation of a known altitude object from TDOA and FDOA measurements. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 1997, 33: 770–783
- 22 Li X, He C C, Guo F C, et al. Geolocation of a known altitude target using azimuth angle measurements. In: *Proceedings of IEEE 13th International Conference on Signal Processing, Chengdu, 2016*. 1876–1881
- 23 Cao Y L, Peng L, Li J, et al. A new iterative algorithm for geolocating a known altitude target using TDOA and FDOA measurements in the presence of satellite location uncertainty. *Chin J Aeronaut*, 2015, 28: 1510–1518
- 24 Li X, Guo F C, Yang L, et al. Improved solution for geolocating a known altitude source using TDOA and FDOA under random sensor location errors. *Electron Lett*, 2018, 54: 597–599
- 25 Lu X N, Ho K C. Taylor-series technique for moving source localization in the presence of sensor location errors. In: *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Kos, 2006*. 1075–1078

附录 A

根据式 (17) 和 (18) 将辐射源位置和速度的真实值从地固坐标系转换到大地经纬坐标系, 有下式成立:

$$\mathbf{A}_1^{-1} \dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \dot{B}^\circ \\ \dot{L}^\circ \\ \dot{H}^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial B^\circ / \partial \mathbf{u}^{\circ T} \\ \partial L^\circ / \partial \mathbf{u}^{\circ T} \\ \partial H^\circ / \partial \mathbf{u}^{\circ T} \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^\circ}{\partial t}. \quad (\text{A1})$$

对比式 (A1) 左右两边得到 $\partial H^\circ / \partial \mathbf{u}^{\circ T} = \bar{\mathbf{A}}_1(3, :)$, 其中 $\bar{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A}_1^{-1}$.

当高程信息精确已知时, 高程 H° 为常数, 地球的卯酉圈半径 N_t 也是关于辐射源位置的函数, 因此对式 (5) 中的约束求导数得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{u}^\circ} &= 2\mathbf{P}_1 \mathbf{u}^\circ + 2p_2 z^{\circ 2} \frac{\partial p_2}{\partial \mathbf{u}^\circ} - 2(N_t + H^\circ) N_t' \bar{\mathbf{A}}_1(1, :)^T, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{u}^\circ} &= \mathbf{P}_2 \dot{\mathbf{u}}^\circ + z^\circ \dot{z}^\circ \frac{\partial p_2}{\partial \mathbf{u}^\circ}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\mathbf{u}}^\circ} = \mathbf{P}_2 \mathbf{u}^\circ, \quad p_2 = \mathbf{P}_2(3, 3), \\ N_t' &= \frac{R_e e^2 \cos B^\circ \sin B^\circ}{(1 - e^2 \sin^2 B^\circ)^{3/2}}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial \mathbf{u}^\circ} = \frac{N_t' H^\circ e^2 \bar{\mathbf{A}}_1(1, :)}{(N_t(1 - e^2) + H^\circ)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

当高程信息存在误差时, 高程 H 和地球的卯酉圈半径 N_t 都是关于辐射源位置的函数, 因此对式 (13) 中的约束求导数得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{u}^o} &= \mathbf{P}_2 \dot{\mathbf{u}}^o + z^o \dot{z}^o \frac{\partial p_2}{\partial \mathbf{u}^o}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\mathbf{u}}^o} = \mathbf{P}_2 \mathbf{u}^o, \quad p_2 = \mathbf{P}_2(3, 3), \\ \frac{\partial p_2}{\partial \mathbf{u}^o} &= \frac{N_t' H^o e^2 \overline{\mathbf{A}_1}(1, :) - N_t e^2 \overline{\mathbf{A}_1}(3, :)}{(N_t(1 - e^2) + H^o)^2}, \quad N_t' = \frac{R e^2 \cos B^o \sin B^o}{(1 - e^2 \sin^2 B^o)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

Moving source localization using TDOA and FDOA measurements in the presence of altitude knowledge

Yuhao PEI¹, Min ZHANG^{1*}, Fucheng GUO¹ & Yao WANG^{1,2}

1. State Key Laboratory of Complex Electromagnetic Environment Effects on Electronics and Information System, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. The College of Communication NCO, Army Engineering University of PLA, Chongqing 400035, China

* Corresponding author. E-mail: zhangmin1984@126.com

Abstract This study investigates the moving source localization using the time difference of arrival (TDOA) and frequency difference of arrival (FDOA) measurements in the presence of altitude knowledge. A robust iterative constrained weighted least squares method is proposed for source localization with precise altitude data (RICWLS-noAE). The algorithm pseudo-linearizes the measurement equations by introducing multiple auxiliary variables. Afterward, it constructs a cost function with four quadratic constraints based on the weighted least squares criterion. The source position and velocity are iteratively obtained by approximating the quadratic constraints as pseudo-linear constraints. The algorithm is further extended to address the source localization in the presence of altitude errors (RICWLS-AE). Additionally, numerical simulations indicate the superiority of the localization accuracy of the RICWLS-noAE to that of existing algorithms, and the RICWLS-AE can achieve the Cramér-Rao lower bound (CRLB) at moderate noise levels.

Keywords passive localization, moving source, time difference of arrival, frequency difference of arrival, altitude knowledge