中国科学: 信息科学　2022 年　第 52 卷　第 7 期: 1302–1316
SCIENTIA SINICA Informationis
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

论文

基于半张量积的双合作博弈 Shapley 值计算

李志强[1*], 李文鸽[1], 何秋锦[2*], 宋金利[1], 杨俊起[3]

1. 河南财经政法大学数学与信息科学学院, 郑州 450046
2. 广州城市理工学院计算机工程学院, 广州 510800
3. 河南理工大学电气工程与自动化学院, 焦作 454000
* 通信作者. E-mail: lizhiqiang@amss.ac.cn, heqj@gcu.edu.cn

收稿日期: 2021–09–29; 修回日期: 2021–12–10; 接受日期: 2022–01–24; 网络出版日期: 2022–07–15

国家自然科学基金 (批准号: 11872175, 62073122)、河南省高等学校重点科研项目 (批准号: 20A120003, 21A120001, 22A880007)、河南财经政法大学国家一般项目培育项目和河南财经政法大学青年拔尖人才资助计划资助

摘要　合作博弈中的参与人只将合作、不合作作为自己的策略, 而双合作博弈是合作博弈的一般化, 参与者以合作、不合作和弃权作为自己的策略, 以获得自己所在的联盟利益的最大化, 从而使自己的收益达到最优. 与合作博弈一样, 如何分配参与者联盟获得的总收益是双合作博弈的一个重要研究问题. 本文利用矩阵半张量积工具, 研究了双合作博弈的 Shapley 值计算问题. 首先构造了双合作博弈的 Shapley 矩阵, 然后将双合作博弈的 Shapley 值计算转化为双合作博弈的特征函数矩阵与 Shapley 矩阵乘积形式. 本文得到的 Shapley 值矩阵计算公式形式简洁, 不但简化了计算, 而且为双合作博弈的研究提供了新的工具.

关键词　合作博弈, 双合作博弈, Shapley 值, Shapley 矩阵, 矩阵半张量积

1　引言

博弈论是研究理性参与者之间博弈互动的数学模型 [1], 有着广泛的应用, 涉及领域包括心理学、进化生物学、政治学、经济学等. 为了使博弈论模型更好地刻画现实经济现象, 文献 [1] 分别对动态和静态的信息完全、信息不完全博弈理论进行了讨论. 博弈论模型与大多数其他经济模型一样, 通常假设博弈模型中的参与人都是理性的参与者, 自利且效用最大化, 典型的案例是囚徒困境 [2]. 然而现实社会中的人, 经常会以自己的利益为代价, 关心他人的收益, 相互形成合作 [3~5]. 博弈论在经济学中的应用研究最为深入, 模型中参与人的收益取决于其他玩家的策略. 尽管对博弈论的研究已经有很多研究成果, 但它仍然是一门年轻且正在发展的科学.

博弈论分为合作博弈和非合作博弈两类, 著名的经济学家、诺贝尔奖获得者纳什 (Nash) 在文献 [6] 中介绍了合作博弈和非合作博弈的关系, 并在数学上证明了在有限参与人的非合作博弈中, 至少存在

引用格式: 李志强, 李文鸽, 何秋锦, 等. 基于半张量积的双合作博弈 Shapley 值计算. 中国科学: 信息科学, 2022, 52: 1302–1316, doi: 10.1360/SSI-2021-0337
Li Z Q, Li W G, He Q J, et al. The Shapley value for bicooperative games based on the semi-tensor product (in Chinese). Sci Sin Inform, 2022, 52: 1302–1316, doi: 10.1360/SSI-2021-0337

一个均衡点, 即纳什均衡点. 非合作博弈论中, 参与人之间信息不互通, 相互之间也没有强制性的联盟约定, 主要研究参与人个体做出独立的决策时, 最终所有局中人采取的均衡策略 (或混合策略); 而合作博弈中允许参与人之间信息互通交流, 参与人可以组成各种不同的联盟, 使自己在博弈中获得的利益最大化. 两者的主要区别在于博弈中的局中人之间是否存在具有相互制约力的合作协议.

一般地, 合作博弈可表示为 (N, w), 其中 N 表示有限个局中人全体的集合, 特征函数 $w : 2^N \to \mathbb{R}$ 满足 $w(\emptyset) = 0$ [7,8]. 对于 $S \subset N$, $w(S)$ 可以理解为联盟 S 中的局中人相对于联盟 $N\backslash S$ 而获得的收益. 各个参与者形成联盟以寻求联盟集体的利益最大化, 同时实现参与者自己利益的最优化. 合作博弈研究的一个重要问题是如何将联盟获得的总收益合理地分配给联盟中的参与人, 以满足参与者进行合作的动机. 各种分配联盟利益的方式称为合作博弈的解, 文献 [8, 9] 介绍了联盟收益的分配有不同的分配方式, 比如 Shapley 值 [10]、核心 (core) [11]、τ 值 [12,13]、Weber 集 [14]、Selectope 集值 [15] 等. 文献 [15] 指出 Selectope 集包含所有合理的联盟利益分配方式, 并从集合论的角度证明了核心 (core) $\subseteq$ Selectope 集值 $\subseteq$ Weber 集, 同时指出 Selectope 集中包含了 Shapley 值. 文献 [10] 定义的 Shapley 值是唯一的一个满足可加性、有效性、对称性、冗员性的联盟收益分配方法 [16]. 合作博弈的 Shapley 值计算比较复杂 [9], 文献 [17] 利用矩阵的半张量积 [18], 得到了计算合作博弈加权 Shapley 值的矩阵公式, 有效降低了 Shapley 值计算的复杂性. 文献 [19] 研究了参与人合作联盟受图结构约束的合作博弈的 Shapley 值矩阵计算公式. 文献 [20] 给出了一个新的基于载体的合作博弈 Shapley 值计算, 并证明了 Shapley 值只依赖于最小载体, 文章优化了 Shapley 值得算法并大大降低了原有文献计算公式的计算复杂度.

合作博弈中, 参与人集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ 被无交分解分为两部分, 当 $S \in 2^N$ 表示合作联盟时, $N\backslash S$ 表示没有参与合作联盟的参与人. 作为合作博弈的一般化, 文献 [7] 提出了双合作博弈, 双合作博弈中, 参与人集合 N 被无交分解为 S, T, $N\backslash(S \cup T)$ 3 部分, 其中 $S \cap T = \emptyset$. 比如, 对于某一项提案, 集合 S 中的参与者对提案表示支持, T 中的参与者对提案表示明确反对, 而 $N\backslash(S \cup T)$ 中的参与者既不支持也不反对, 持中立态度. 双合作博弈模型具有很强的应用背景, 关于双合作博弈研究的相关文献也比较多. 文献 [21] 研究了三值投票博弈, 将弃权作为支持、反对之外的第 3 种选择. 这是典型的双合作博弈. 另一方面, 通过对博弈参与人的约束, 文献 [22] 研究了基于网络拓扑的双合作博弈. 与合作博弈类似, 如何分配双合作博弈中合作联盟取得的收益也是一个重要的研究内容. 合作博弈的联盟利益分配函数均被推广到了双合作博弈, 比如双合作博弈的概率值 [23]、Shapley 值 [24]、伪 Banzhaf 值 [25] 等. 在文献 [26] 针对三值投票博弈提出了 Shapley-Shubik 指标作为分配合作联盟收益的准则. 作为合作博弈联盟收益分配方式的一般推广, 文献 [27] 研究了具有多种合作层次的博弈模型的 Shapley-Shubik 指标. 文献 [28] 提出用有限分配格理论研究具有多种合作层次的合作博弈. 特别是文献 [24] 定义了双合作博弈的 Shapley 值, 并指出该值是唯一满足 5 条公理的分配值, 关于双合作博弈的综述可参看文献 [29].

近年来, 矩阵的半张量积的工具被用于研究博弈论, 在矩阵的半张量积框架下, 贝叶斯 (Bayes) 博弈 [30]、博弈的控制与优化 [31,32]、势博弈 [33]、博弈学习理论 [34]、有限博弈的空间分解 [35] 等都得到了深入的研究. 比如合作博弈 [36]、非合作博弈 [37,38]、演化博弈 [39~41], 文献 [42] 是一篇全面的关于矩阵半张量积在博弈理论研究中应用的综述. 本文的主要任务是利用矩阵半张量积研究双合作博弈的 Shapley 值的计算, 通过构造 Shapley 矩阵给出双合作博弈 Shapley 值计算的矩阵公式. 文章结构安排如下: 第 2 节简单介绍本文用到的主要工具矩阵半张量积以及双合作博弈; 第 3 节利用矩阵半张量积, 构造了双合作博弈的 Shapley 值矩阵, 将 Shapley 值的计算转化为矩阵公式; 第 4 节用一个例子验证了双合作博弈 Shapley 值计算的优越性; 第 5 节是总结与未来研究的展望.

为了叙述方便, 先给出本文用到的记号: $\mathbb{R}$ 表示实数集合, $\mathbb{R}^m$ 表示 m 维向量空间, $\mathcal{D}=\{0,1\}$ 表示逻辑变量值域; $\mathcal{M}_{m\times n}$ 表示全体 $m\times n$ 实矩阵的集合. $\mathrm{Col}_i(M)$ 表示矩阵 M 的第 i 列; δ_n^i 表示单位矩阵 I_n 的第 i 列, $\Delta_n=\{\delta_n^i, i=1,2,\ldots\}$; $\mathbf{1}_n=[\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n}]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{0}_n=[\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n}]^{\mathrm{T}}$.

2 准备工作

2.1 矩阵半张量积

矩阵的半张量积是在状态空间框架下研究逻辑动态系统等有限值系统的主要工具 [43, 44], 在研究有限值系统演化时, 发挥了重要的作用 [42]. 首先简要回顾矩阵的半张量积的定义和相关性质 [18].

定义1 ([18]) 设矩阵 $A\in\mathcal{M}_{m\times n}$, $B\in\mathcal{M}_{p\times q}$, 记 $t=\mathrm{lcm}(n,p)$ 为 n 和 p 的最小公倍数. 矩阵 A 和 B 的半张量积定义如下:

$$A\ltimes B=(A\otimes I_{t/n})(B\otimes I_{t/p})\in\mathcal{M}_{mt/n\times qt/p}. \tag{1}$$

矩阵的半张量积是普通矩阵乘法的推广, 当 $n=p$ 时, 矩阵的半张量积就是普通矩阵乘法. 矩阵半张量积具有普通矩阵乘法的所有性质, 同时还有一些特殊的性质, 比如伪交换性 [18]. 矩阵半张量积的伪交换性在矩阵的相关运算推导中起了重要作用, 在不致混淆的情况下, 本文的矩阵乘法均指半张量积, 通常省略 $\ltimes$.

定义2 ([18]) 定义换位矩阵 $W_{[m,n]}\in\mathcal{M}_{mn\times mn}$,

$$W_{[m,n]}=\delta_{mn}[\,1\ \ 1+m\ \cdots\ 1+(n-1)m\ \cdots\ m\ \ m+m\ \cdots\ m+(n-1)m\,]. \tag{2}$$

例如, 当 $m=3, n=9$ 时, $W_{[3,9]}\in\mathcal{M}_{27\times 27}$, 并且有

$$W_{[3,9]}=\delta_{27}[1\ 4\ 7\ 10\ 13\ 16\ 19\ 22\ 25\ 2\ 5\ 8\ 11\ 14\ 17\ 20\ 23\ 26\ 3\ 6\ 9\ 12\ 15\ 18\ 21\ 24\ 27].$$

在换位矩阵的作用下, 可以实现两个向量因子在半张量积意义下的交换, 比如对于向量 $\delta_{3^n}^i$ 和 δ_3^j,

$$W_{[3,3^n]}\delta_3^j\ltimes\delta_{3^n}^i=\delta_{3^n}^i\ltimes\delta_3^j.$$

下述命题给出了伪逻辑函数的代数表示. 在有限博弈模型中, 参与人的收益函数均可看作伪逻辑函数.

命题1 ([18]) 设 $x_1,\ldots,x_n$ 是 n 个三值逻辑变量, $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}$ 是一个伪逻辑函数, 则存在唯一矩阵 $M_f\in\mathcal{M}_{1\times 3^n}$, 使得

$$f(x_1,\ldots,x_n)=M_f\ltimes_{i=1}^n x_i,\quad x_i\in\Delta_3,$$

其中 M_f 称为伪逻辑函数 f 的结构矩阵.

2.2 双合作博弈

双合作博弈中, 有限元素集合 $N=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 表示有限个参与人集合, 对于集合 N 的无交分割 $3^N=\{(S,T):S,T\subseteq N, S\cap T=\emptyset\}$, 文献 [45] 中定义了 3^N 的一个关系 $\sqsubseteq$, 即 $(A,B)\sqsubseteq(C,D)$ 当且仅当 $A\subseteq C, D\subseteq B$. 集合 $(3^N,\sqsubseteq)$ 是一个偏序集, 同时也是一个分配格, 有如下性质:

(1) 对任意的 $(A,B)\in 3^N$, 满足 $(\emptyset,N)\sqsubseteq(A,B)$.

(2) 对任意的 $(A,B)\in 3^N$, 满足 $(A,B)\sqsubseteq(N,\emptyset)$.

(3) 对任意的 $(A,B),(C,D)\in 3^N$, 满足如下的并 $\vee$ (最小上界) 和交 $\wedge$ (最大下界) 运算:

$$(A,B)\vee(C,D)=(A\cup C,B\cap D),\quad (A,B)\wedge(C,D)=(A\cap C,B\cup D).$$

在双合作博弈模型中, 参与人集合 $S\subseteq N$ 表示愿意接受某种建议的局中人联盟, 集合 $T\subseteq N$ 表示不接受某种建议的局中人联盟, 而 $N\backslash(S\cup T)$ 中的局中人对某种建议持中立态度, 即不反对也不接受. 对任意 $(S,T)\in 3^N$, 定义一个函数 $v:3^N\to\mathbb{R}$, 满足 $v(\emptyset,\emptyset)=0$. 一般地, $v(S,T)$ 表示当集合 S 中的局中人接受新建议 (愿意合作) 而 T 中的局中人不接受新建议 (不愿意合作), $N\backslash(S\cup T)$ 中的局中人保持中立时, 联盟 S 的最大收益或者最小损失. 函数 $v:3^N\to\mathbb{R}$ 称为双合作博弈的特征函数. 特别地, $v(N,\emptyset)$ 表示所有局中人均愿意接受新建议时获得的最大收益或者最小损失, $v(\emptyset,N)$ 表示所有局中人均不愿意接受新建议时获得的最大收益或者最小损失. 因此 $v(N,\emptyset)-v(\emptyset,N)$ 表示新建议对局中人集合 N 的总收益.

一般地, 双合作博弈可以用一个二元结构 (N,v) 来表示, N 是一个有限集合, $v(S,T):3^N\to\mathbb{R}$, 满足 $v(\emptyset,\emptyset)=0$. 如果当 $(S,T)\sqsubseteq(S',T')$ 时, $v(S,T)\leqslant v(S',T')$, 那么 (N,v) 称为单调的.

在文献 [24] 中定义双合作博弈的恒等博弈 (identity game) $\delta_{(S,T)}(A,B):3^N\to\mathbb{R}$:

$$\delta_{(S,T)}(A,B)=\begin{cases}1, & \text{如果}(A,B)=(S,T),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

文献 [24] 指出, 恒等博弈集合 $\{\delta_{(S,T)}:(S,T)\in 3^N,(S,T)\neq(\emptyset,\emptyset)\}$ 构成双合作博弈的一组基, 同时文献 [24] 从概率角度定义了双合作博弈的 Shapley 值的表达式, 即对任意参与人 $i\notin S\cup T$, 以概率 $\bar{p}_{S,T}$ 使联盟局势由 (S,T) 变为 $(S,T\cup i)$, 此时导致的联盟边界收益为 $v(S,T)-v(S,T\cup i)$, 以概率 $\underline{p}_{S,T}$ 使联盟局势由 $(S\cup i,T)$ 变为 (S,T), 此时导致的联盟收益为 $v(S\cup i,T)-v(S,T)$, 并给出双合作博弈的 Shapley 值的定义.

定义3 ([24]) 对于双合作博弈 (N,v), 其 Shapley 值是一个 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $\Phi(v)=(\Phi_i(v),\ldots,\Phi_n(v))$, 其中

$$\Phi_i(v)=\sum_{(S,T)\in 3^{N\backslash i}}[\bar{p}_{s,t}(v(S\cup i,T)-v(S,T))+\underline{p}_{s,t}(v(S,T)-v(S,T\cup i))],\tag{3}$$

$s=|S|$, $t=|T|$,

$$\bar{p}_{s,t}=\frac{(n+s-t)!(n+t-s-1)!}{(2n)!}2^{n-s-t},\quad \underline{p}_{s,t}=\frac{(n+t-s)!(n+s-t-1)!}{(2n)!}2^{n-s-t}.\tag{4}$$

命题2 ([24]) 双合作博弈 (N,v), 式 (3) 中定义的 Shapley 值是唯一一个满足以下 5 个合理性公理的联盟分配方式.

(1) 线性公理 (linearity axiom). 对 $a,b\in\mathbb{R}$, 双合作博弈 $(N,v),(N,w)$, $\Phi_i(av+bw)=a\Phi_i(v)+b\Phi_i(w)$.

(2) 哑参与者公理 (dummy axiom). 对任意的 $(S,T)\in 3^{N\backslash i}$, 如果满足

$$v(S\cup i,T)-v(S,T)=v(\{i\},\emptyset),\quad v(S,T)-v(S,T\cup i)=-v(\emptyset,\{i\}),$$

那么 $\Phi_i(v)=v(\{i\},\emptyset)-v(\emptyset,\{i\})$.

(3) 匿名公理 (anonymity axiom). 对双合作博弈 (N,v) 和集合 $N=\{1,2,\dots,n\}$ 的任意一个对换 π, 对 $i\in N$, $\Phi_{\pi i}(\pi v)=\Phi_i(v)$, 其中 $\pi v(\pi S,\pi T)=v(S,T)$, $\pi S=\{\pi i, i\in S\}$, $\pi T=\{\pi i, i\in T\}$.

(4) 有效性公理 (efficiency axiom). 对任意的双合作博弈 (N,v), $\Sigma_{i\in N}\Phi_i(v)=v(N,\emptyset)-v(\emptyset,N)$.

(5) 结构性公理 (structural axiom). 对任意的 $(S,T)\in 3^{N\backslash i}$, $j\in S$, $k\in T$, 满足

$$\frac{c([(\emptyset,N),(S\backslash j,T)])}{c([(\emptyset,N),(S,T\cup i)])}=-\frac{\Phi_j(\delta_{(S,T)})}{\Phi_i(\delta_{(S,T\cup i)})},\quad \frac{c([(S,T\backslash k),(N,\emptyset)])}{c([(S\cup i,T),(N,\emptyset)])}=-\frac{\Phi_k(\delta_{(S,T)})}{\Phi_i(\delta_{(S\cup i,T)})},$$

其中 $c([(A,B),(C,D)])$ 表示子格 $[(A,B),(C,D)]$ 中从 (A,B) 到 (C,D) 的最大链的条数, $\delta_{(S,T)}$ 表示恒等博弈.

命题 2 中提到的 5 个公理中前 4 个公理对于合作博弈的 Shapley 值也是成立的, 而在双合作博弈中, 从 $(\emptyset,N)$ 到 $(A\backslash j,B)$ 的最长链路个数与从 $(\emptyset,N)$ 到 $(A,B\backslash i)$ 的最长链路个数不一定相等, 博弈参与人在恒等博弈中的收益与相应子格中的最长链路的个数是成比例的, 为此, 在文献 [24] 中要求双合作博弈的 Shapley 值要满足结构性公理.

3 双合作博弈的 Shapley 值的矩阵表示

对于双合作博弈 (N,v), 设 $(S,T)\in 3^N$, $v(S,T)$ 表示双合作博弈的特征函数. 根据参与人的参与联盟的情况, 定义 $x_i^{(S,T)}$ 如下:

$$x_i^{(S,T)}=\begin{cases}\delta_3^1, & i\in S,\\ \delta_3^2, & i\notin S\cup T,\\ \delta_3^3, & i\in T.\end{cases} \tag{5}$$

记 $x^{(S,T)}=x_1^{(S,T)}\ltimes\cdots\ltimes x_n^{(S,T)}\in\Delta_{3^n}$. 由命题 1, 双合作博弈 (N,v) 的特征函数 $v(S,T)$ 可被表示为

$$v(S,T)=M_v x^{(S,T)}, \tag{6}$$

其中 $M_v\in\mathcal{M}_{1\times 3^n}$, M_v 称为双合作博弈 (N,v) 的特征矩阵.

利用特征函数的矩阵表示式 (6), 接下来将文献 [24] 定义的双合作博弈的 Shapley 值 (3) 的计算转化为矩阵计算. 设 $(S,T)\in 3^{N\backslash i}$, 首先分别考虑式 (3) 中的 $v(S\cup\{i\},T)-v(S,T)$ 和 $v(S,T)-v(S,T\cup\{i\})$, 注意到

$$\begin{aligned}&v(S\cup\{i\},T)-v(S,T)\\&=M_v x_1^{(S,T)}\cdots x_{i-1}^{(S,T)}\delta_3^1 x_{i+1}^{(S,T)}\cdots x_n^{(S,T)}-M_v x_1^{(S,T)}\cdots x_{i-1}^{(S,T)}\delta_3^2 x_{i+1}^{(S,T)}\cdots x_n^{(S,T)}\\&=M_v x_1^{(S,T)}\cdots x_{i-1}^{(S,T)}(\delta_3^1-\delta_3^2)x_{i+1}^{(S,T)}\cdots x_n^{(S,T)}\\&=M_v W_{[3,3^{i-1}]}(\delta_3^1-\delta_3^2)x_1^{(S,T)}\cdots x_{i-1}^{(S,T)}x_{i+1}^{(S,T)}\cdots x_n^{(S,T)}.\end{aligned} \tag{7}$$

同理有,

$$\begin{aligned}&v(S,T)-v(S,T\cup\{i\})\\&=M_v x_1^{(S,T)}\cdots x_{i-1}^{(S,T)}\delta_3^2 x_{i+1}^{(S,T)}\cdots x_n^{(S,T)}-M_v x_1^{(S,T)}\cdots x_{i-1}^{(S,T)}\delta_3^3 x_{i+1}^{(S,T)}\cdots x_n^{(S,T)}\\&=M_v x_1^{(S,T)}\cdots x_{i-1}^{(S,T)}(\delta_3^2-\delta_3^3)x_{i+1}^{(S,T)}\cdots x_n^{(S,T)}\end{aligned}$$

表 1 s 与 t 的值 $(n=2)$

Table 1 The values of s and t $(n=2)$

S	T	$x_1^{(S,T)}$	$x_2^{(S,T)}$	$x^{(S,T)}$	$s=\|S\|$	$t=\|T\|$
$\{x_1,x_2\}$	$\emptyset$	δ_3^1	δ_3^1	$\delta_{3^2}^1$	2	0
$\{x_1\}$	$\emptyset$	δ_3^1	δ_3^2	$\delta_{3^2}^2$	1	0
$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	δ_3^1	δ_3^3	$\delta_{3^2}^3$	1	1
$\{x_2\}$	$\emptyset$	δ_3^2	δ_3^1	$\delta_{3^2}^4$	1	0
$\emptyset$	$\emptyset$	δ_3^2	δ_3^2	$\delta_{3^2}^5$	0	0
$\emptyset$	$\{x_2\}$	δ_3^2	δ_3^3	$\delta_{3^2}^6$	0	1
$\{x_2\}$	$\{x_1\}$	δ_3^3	δ_3^1	$\delta_{3^2}^7$	1	1
$\emptyset$	$\{x_1\}$	δ_3^3	δ_3^2	$\delta_{3^2}^8$	0	1
$\emptyset$	$\{x_1,x_2\}$	δ_3^3	δ_3^3	$\delta_{3^2}^9$	0	2

$$= M_v W_{[3,3^{i-1}]}(\delta_3^2-\delta_3^3)x_1^{(S,T)}\cdots x_{i-1}^{(S,T)}x_{i+1}^{(S,T)}\cdots x_n^{(S,T)}. \tag{8}$$

记 $x_1^{(S,T)}\cdots x_{i-1}^{(S,T)}x_{i+1}^{(S,T)}\cdots x_n^{(S,T)}=\delta_{3^{n-1}}^j$, 代入式 (7) 和 (8), 得到

$$\begin{aligned} v(S\cup\{i\},T)-v(S,T) &= M_vW_{[3,3^{i-1}]}[1\quad -1\quad 0]'\delta_{3^{n-1}}^j,\\ v(S,T)-v(S,T\cup\{i\}) &= M_vW_{[3,3^{i-1}]}[0\quad 1\quad -1]'\delta_{3^{n-1}}^j. \end{aligned} \tag{9}$$

设 $\alpha_1=[1\quad 0\quad 0]'$, $\beta_1=[0\quad 0\quad 1]'$, 利用如下递推方式构造向量序列 $\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{R}^{3^k}, k=1,2,\ldots$,

$$\alpha_{k+1}=\begin{pmatrix}\alpha_k+\mathbf{1}_{3^k}\\ \alpha_k\\ \alpha_k\end{pmatrix},\quad \beta_{k+1}=\begin{pmatrix}\beta_k\\ \beta_k\\ \beta_k+\mathbf{1}_{3^k}\end{pmatrix}, k=1,\ldots, \tag{10}$$

其中 $\mathbf{1}_{3^k}=(1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{3^k}$.

引理1 设集合 $S,T\subset N$, $S\cap T=\emptyset$, 记 $x^{(S,T)}=x_1^{(S,T)}\ltimes\cdots\ltimes x_n^{(S,T)}=\delta_{3^n}^j$, 则

$$s=|S|=\alpha_n^j,\quad t=|T|=\beta_n^j, \tag{11}$$

其中 α_n^j 为向量 α_n 的第 j 个分量, β_n^j 为向量 β_n 的第 j 个分量.

证明 下面用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时, $\alpha_2=(2\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$, $\beta_2=(0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 2)^{\mathrm{T}}$.

从表 1 可以看出, 式 (11) 显然成立.

结论显然成立.

假设 $n=k$ 时结论成立, 若 $x^{(S,T)}=x_1^{(S,T)}\ltimes\cdots\ltimes x_k^{(S,T)}=\delta_{3^k}^j$, 则有 $s=|S|=a_k^j, t=|T|=b_k^j$.

当 $n=k+1$ 时, 不妨设

$$x^{(S,T)}=x_1^{(S,T)}\ltimes x_2^{(S,T)}\ltimes\cdots\ltimes x_{k+1}^{(S,T)}=\delta_{3^{k+1}}^j.$$

记集合 $S',T'\subseteq N=\{x_2,\ldots,x_n\}$, $S'\cap T'=\emptyset$, 易知

$$x_2^{(S,T)}\ltimes\cdots\ltimes x_{k+1}^{(S,T)}=x_2^{(S',T')}\ltimes\cdots\ltimes x_{k+1}^{(S',T')}=\delta_{3^k}^{j'},$$

其中 $j'=1,\dots,3^k$. 由假设可知 $|S'|=\alpha_k^{j'},|T'|=\beta_k^{j'}$.

当 $x_1\in S$ 时, $x_1^{(S,T)}=\delta_3^1$, 可知 $\delta_{3^{k+1}}^j=\delta_3^1\ltimes\delta_{3^k}^{j'}$. 此时 $|S|=|S'\cup\{x_1\}|=a_k^{j'}+1$, 即

$$\alpha_{k+1}^j=\begin{cases}\alpha_k^{j'}+1, & 1\leqslant j=j'\leqslant 3^k,\\ \alpha_k^{j'}, & 3^k+1\leqslant j=j'+3^k\leqslant 2\times 3^k,\\ \alpha_k^{j'}, & 2\times 3^k+1\leqslant j=j'+2\times 3^k\leqslant 3^{k+1};\end{cases}$$

$$\beta_{k+1}^j=\begin{cases}\beta_k^{j'}, & 1\leqslant j=j'\leqslant 3^k,\\ \beta_k^{j'}, & 3^k+1\leqslant j=j'+3^k\leqslant 2\times 3^k,\\ \beta_k^{j'}, & 2\times 3^k+1\leqslant j=j'+2\times 3^k\leqslant 3^{k+1}.\end{cases}$$

当 $x_1\in T$ 时, $x_1^{(S,T)}=\delta_3^3$, 可知 $\delta_{3^{k+1}}^j=\delta_3^3\ltimes\delta_{3^k}^{j'}$. 此时 $|T|=|T'\cup\{x_1\}|=\beta_k^{j'}+1$, 即

$$\alpha_{k+1}^j=\begin{cases}\alpha_k^{j'}, & 1\leqslant j=j'\leqslant 3^k,\\ \alpha_k^{j'}, & 3^k+1\leqslant j=j'+3^k\leqslant 2\times 3^k,\\ \alpha_k^{j'}, & 2\times 3^k+1\leqslant j=j'+2\times 3^k\leqslant 3^{k+1};\end{cases}$$

$$\beta_{k+1}^j=\begin{cases}\beta_k^{j'}, & 1\leqslant j=j'\leqslant 3^k,\\ \beta_k^{j'}, & 3^k+1\leqslant j=j'+3^k\leqslant 2\times 3^k,\\ \beta_k^{j'}+1, & 2\times 3^k+1\leqslant j=j'+2\times 3^k\leqslant 3^{k+1}.\end{cases}$$

当 $x_1\in N\backslash(S\cup T)$ 时, $x_1^{(S,T)}=\delta_3^2$, 可知 $\delta_{3^{k+1}}^j=\delta_3^2\ltimes\delta_{3^k}^{j'}$. 此时 $|S|=|S'|=a_k^{j'}$, $|T|=|T'|=\beta_k^{j'}$, 即

$$\alpha_{k+1}^j=\begin{cases}\alpha_k^{j'}, & 1\leqslant j=j'\leqslant 3^k,\\ \alpha_k^{j'}, & 3^k+1\leqslant j=j'+3^k\leqslant 2\times 3^k,\\ \alpha_k^{j'}, & 2\times 3^k+1\leqslant j=j'+2\times 3^k\leqslant 3^{k+1};\end{cases}$$

$$\beta_{k+1}^j=\begin{cases}\beta_k^{j'}, & 1\leqslant j=j'\leqslant 3^k,\\ \beta_k^{j'}, & 3^k+1\leqslant j=j'+3^k\leqslant 2\times 3^k,\\ \beta_k^{j'}, & 2\times 3^k+1\leqslant j=j'+2\times 3^k\leqslant 3^{k+1}.\end{cases}$$

综上所述,

$$\alpha_{k+1}=\begin{pmatrix}\alpha_k+\mathbf{1}_{3^k}\\ \alpha_k\\ \alpha_k\end{pmatrix},\quad \beta_{k+1}=\begin{pmatrix}\beta_k\\ \beta_k\\ \beta_k+\mathbf{1}_{3^k}\end{pmatrix},$$

引理得证.

向量 α_n,β_n 与式 (3) 中系数的表示有重要的联系. 利用 α_{n-1} 和 β_{n-1} 构造向量 $\gamma=[\gamma^1,\dots,\gamma^{3^{n-1}}]^{\mathrm{T}}$, $\tau=[\tau^1,\dots,\tau^{3^{n-1}}]^{\mathrm{T}}$, 其中

$$\gamma^j=\frac{(n+\alpha_{n-1}^j-\beta_{n-1}^j)!(n-\alpha_{n-1}^j+\beta_{n-1}^j-1)!}{2^{\alpha_{n-1}^j+\beta_{n-1}^j}},\quad j=1,2,\dots,3^{n-1},\tag{12}$$

$$\tau^j = \frac{(n-\alpha_{n-1}^j+\beta_{n-1}^j)!(n+\alpha_{n-1}^j-\beta_{n-1}^j-1)!}{2^{\alpha_{n-1}^j+\beta_{n-1}^j}}, \quad j=1,2,\ldots,3^{n-1}. \tag{13}$$

由引理 1, 对于 $(S,T)\in 3^{N\backslash i}$, 如果 $x^{(S,T)}=\delta_{3^{n-1}}^j$, $j=1,2,\ldots,3^{n-1}$, 那么

$$\begin{aligned}\bar{p}_{s,t} &= \frac{(n+s-t)!(n+t-s-1)!}{(2n)!}2^{n-s-t}\\ &= \frac{2^n}{(2n)!}\frac{(n+\alpha_{n-1}^j-\beta_{n-1}^j)!(n-\alpha_{n-1}^j+\beta_{n-1}^j-1)!}{2^{\alpha_{n-1}^j+\beta_{n-1}^j}}=\frac{2^n}{(2n)!}\gamma^j, \end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}\underline{p}_{s,t} &= \frac{(n+t-s)!(n+s-t-1)!}{(2n)!}2^{n-s-t}\\ &= \frac{2^n}{(2n)!}\frac{(n-\alpha_{n-1}^j+\beta_{n-1}^j)!(n+\alpha_{n-1}^j-\beta_{n-1}^j-1)!}{2^{\alpha_{n-1}^j+\beta_{n-1}^j}}=\frac{2^n}{(2n)!}\tau^j. \end{aligned}\tag{15}$$

为后文使用方便, 依次将向量 γ, τ 等分成 k 个列向量块, 其中 $k=1,3,3^2,\ldots,3^{n-1}$, 分别记为

$$\gamma=\gamma_1^1=\begin{pmatrix}\gamma_2^1\\ \gamma_2^2\\ \gamma_2^3\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}\gamma_n^1\\ \gamma_n^2\\ \vdots\\ \gamma_n^{3^{n-1}}\end{pmatrix}, \tau=\tau_1^1=\begin{pmatrix}\tau_2^1\\ \tau_2^2\\ \tau_2^3\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}\tau_n^1\\ \tau_n^2\\ \vdots\\ \tau_n^{3^{n-1}}\end{pmatrix}, \tag{16}$$

其中 $\gamma_i^j,\tau_i^j\in\mathbb{R}^{3^{n-i}}$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,\ldots,3^{i-1}$.

接下来考虑参与人 i 的 Shapley 值, 将式 (9), (14), (15) 代入到式 (3), 得到

$$\begin{aligned}\Phi_i(v) &= \sum_{(S,T)\in 3^{N\backslash i}}(\bar{p}_{s,t}(v(S\cup i,T)-v(S,T))+\underline{p}_{s,t}(v(S,T)-v(S,T\cup i)))\\ &= \sum_{j=1}^{3^{n-1}}\frac{2^n}{(2n)!}\Big(\gamma^j M_v W_{[3,3^{i-1}]}[1\ \ -1\ 0]'x_1^{(S,T)}\cdots x_{i-1}^{(S,T)}x_{i+1}^{(S,T)}\cdots x_n^{(S,T)}\\ &\quad +\tau^j M_v W_{[3,3^{i-1}]}[0\ 1\ \ -1]'x_1^{(S,T)}\cdots x_{i-1}^{(S,T)}x_{i+1}^{(S,T)}\cdots x_n^{(S,T)}\Big)\\ &= \frac{2^n}{(2n)!}M_v\sum_{j=1}^{3^{n-1}}\Big(\gamma^j W_{[3,3^{i-1}]}[1\ \ -1\ 0]'\delta_{3^{n-1}}^j+\tau^j W_{[3,3^{i-1}]}[0\ 1\ \ -1]'\delta_{3^{n-1}}^j\Big)\\ &= \frac{2^n}{(2n)!}M_v\left(\sum_{j=1}^{3^{n-1}}\gamma^j W_{[3,3^{i-1}]}[1\ \ -1\ 0]'\delta_{3^{n-1}}^j+\sum_{j=1}^{3^{n-1}}\tau^j W_{[3,3^{i-1}]}[0\ 1\ \ -1]'\delta_{3^{n-1}}^j\right). \end{aligned}\tag{17}$$

首先, 考虑式 (17) 中括号内第 1 部分,

$$\sum_{j=1}^{3^{n-1}}\gamma^j W_{[3,3^{i-1}]}[1\ \ -1\ 0]'\delta_{3^{n-1}}^j. \tag{18}$$

由矩阵半张量积的定义,

$$W_{[3,3^{i-1}]}[1\ \ -1\ 0]'\delta_{3^{n-1}}^j=\big((W_{[3,3^{i-1}]}[1\ \ -1\ 0]')\otimes I_{3^{n-i}}\big)\times\delta_{3^{n-1}}^j.$$

记 $\Gamma_i = \left(W_{[3,3^{i-1}]}[1\ \ -1\ 0]'\right) \otimes I_{3^{n-i}} \in \mathcal{M}_{3^n \times 3^{n-1}}$, 进一步有

$$\Gamma_i = \left(W_{[3,3^{i-1}]}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right) \otimes I_{3^{n-i}} = \operatorname{diag}\Bigg[\underbrace{\begin{bmatrix}I_{3^{n-i}}\\-I_{3^{n-i}}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}I_{3^{n-i}}\\-I_{3^{n-i}}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}}_{3^{i-1}}\Bigg], \tag{19}$$

其中 $\mathbf{0}$ 表示 $3^{n-i} \times 3^{n-i}$ 的零矩阵.

注意到

$$W_{[3,3^{i-1}]}[1\ \ -1\ 0]'\delta_{3^{n-1}}^j = \operatorname{Col}_j(\Gamma_i),$$

因此,

$$\sum_{j=1}^{3^{n-1}} \gamma^j W_{[3,3^{i-1}]}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\delta_{3^{n-1}}^j = \sum_{j=1}^{3^{n-1}} \gamma^j \operatorname{Col}_j(\Gamma_i) = \begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_i^1\\-\gamma_i^1\\0\end{pmatrix}\\ \vdots \\ \begin{pmatrix}\gamma_i^{3^{i-1}}\\-\gamma_i^{3^{i-1}}\\0\end{pmatrix}\end{bmatrix} := E_i, \tag{20}$$

这里 E_i 是 3^n 维列向量, 其中 $\gamma_i^j \in \mathbb{R}^{3^{n-i}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, 3^{i-1}$.

同样的方法考虑式 (17) 中括号内第 2 部分, 可以得到

$$\sum_{j=1}^{3^{n-1}} \gamma^j W_{[3,3^{i-1}]}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\delta_{3^{n-1}}^j = \sum_{j=1}^{3^{n-1}} \gamma^j \operatorname{Col}_j(\Gamma_i) = \begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\\tau_i^1\\-\tau_i^1\end{pmatrix}\\ \vdots \\ \begin{pmatrix}0\\\tau_i^{3^{i-1}}\\-\tau_i^{3^{i-1}}\end{pmatrix}\end{bmatrix} := F_i, \tag{21}$$

其中 F_i 是 3^n 维列向量, $\tau_i^j \in \mathbb{R}^{3^{n-i}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, 3^{i-1}$.

将式 (20) 和 (21) 代入式 (17), 可得

$$\begin{aligned}\Phi_i(v) &= \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus i}} \left(\bar{p}_{s,t}(v(S\cup i,T) - v(S,T)) + \underline{p}_{s,t}(v(S,T) - v(S,T\cup i))\right)\\ &= \frac{2^n}{(2n)!} M_v\left(E_i + F_i\right), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}\tag{22}$$

基于上述分析, 可以得到双合作博弈的 Shapley 值的矩阵计算公式.

定理1 双合作博弈 (N,v), 其中 $N=\{1,2,\ldots,n\}$, M_v 是 v 的特征矩阵, 则该双合作博弈的 Shapley 值可以计算如下:

$$\Phi(v)=(\Phi_1(v)\cdots\Phi_n(v))=M_v\Theta_n, \tag{23}$$

其中

$$\begin{aligned}\Theta_n&=\frac{2^n}{(2n)!}[E_1+F_1\quad\cdots\quad E_n+F_n]\\&=\frac{2^n}{(2n)!}\left[\begin{pmatrix}\gamma_1^1\\-\gamma_1^1+\tau_1^1\\-\tau_1^1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_2^1\\-\gamma_2^1+\tau_2^1\\-\tau_2^1\\\vdots\\\gamma_2^3\\-\gamma_2^3+\tau_2^3\\-\tau_2^3\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\gamma_n^1\\-\gamma_n^1+\tau_n^1\\-\tau_n^1\\\vdots\\\gamma_n^{3^{n-1}}\\-\gamma_n^{3^{n-1}}+\tau_n^{3^{n-1}}\\-\tau_n^{3^{n-1}}\end{pmatrix}\right].\end{aligned} \tag{24}$$

Θ_n 是一个 $3^n\times n$ 的矩阵, 称为双合作博弈 (N,v) 的 Shapley 矩阵.

作为总结, 将上述双合作博弈的 Shapley 矩阵 Θ_n 的构造方法表示如算法 1 所示.

Algorithm 1 The construction of Shapley matrix Θ_n for bicooperative games

Step 1 Set $\alpha_1=[1\ 0\ 0]',\beta_1=[0\ 0\ 1]'$. Construct α_{n-1},β_{n-1} as follows:

$$\alpha_k=\begin{pmatrix}\alpha_k+\mathbf{1}_{3^k}\\\alpha_k\\\alpha_k\end{pmatrix},\ \beta_{k+1}=\begin{pmatrix}\beta_k\\\beta_k\\\beta_k+\mathbf{1}_{3^k}\end{pmatrix},k=1,\ldots,n-2.$$

Step 2 From α_{n-1} and β_{n-1}, obtain $\gamma=[\gamma^1,\ldots,\gamma^{3^{n-1}}]^{\mathrm{T}}$, $\tau=[\tau^1,\ldots,\tau^{3^{n-1}}]^{\mathrm{T}}$, where

$$\begin{aligned}\gamma^j&=\frac{(n+\alpha_{n-1}^j-\beta_{n-1}^j)!(n-\alpha_{n-1}^j+\beta_{n-1}^j-1)!}{2^{\alpha_{n-1}^j+\beta_{n-1}^j}},\ j=1,2,\ldots,3^{n-1},\\\tau^j&=\frac{(n-\alpha_{n-1}^j+\beta_{n-1}^j)!(n+\alpha_{n-1}^j-\beta_{n-1}^j-1)!}{2^{\alpha_{n-1}^j+\beta_{n-1}^j}},\ j=1,2,\ldots,3^{n-1}.\end{aligned}$$

Step 3 Construct two matrices $E,F\in\mathbb{R}^{3^n\times n}$, where the columns of E,F are obtained from (20) and (21).

Step 4 Compute the matrix $\Theta_n=\frac{2^n}{(2n)!}(E+F)$.

例1 对于不同的 n, 我们可以构造出相应的 Θ_n.

(1) 当 $n=2$ 时, $\alpha_1=(1\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$, $\beta_1=(0\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$.

$$\gamma=\begin{bmatrix}\frac{(2+1-0)!(2-1+0-1)!}{2^{1+0}}\\\frac{(2+0-0)!(2-0+0-1)!}{2^{0+0}}\\\frac{(2+0-1)!(2-0+1-1)!}{2^{0+1}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix},\ \tau=\begin{bmatrix}\frac{(2-1+0+1)!(2+0-1)!}{2^{1+0}}\\\frac{(2+0-0)!(2-0+0-1)!}{2^{0+0}}\\\frac{(2+0-1)!(2-0+1-1)!}{2^{0+1}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

因此, 可以计算出双合作博弈的 Shapley 值矩阵 Θ_2 如下:

$$\Theta_2 = \frac{2^2}{(2\times 2)!}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 & 0 & 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 & 0 & 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

(2) 当 $n=3$ 时, $\alpha_2 = (2\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}, \beta_2 = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 2)^{\mathrm{T}}$. 利用式 (12), 可以计算出

$$\gamma_2 = [30\ 12\ 3\ 12\ 12\ 6\ 3\ 6\ 6]^{\mathrm{T}}, \quad \tau_2 = [6\ 6\ 3\ 6\ 12\ 12\ 3\ 12\ 30]^{\mathrm{T}}.$$

因此, 可以计算出双合作博弈的 Shapley 值矩阵 $\Theta_3 = \frac{2^3}{(2\times 3)!}(E+F)$, 其中矩阵 $E+F \in \mathcal{M}_{27\times 3}$ 计算如下:

$$\begin{bmatrix} 30 & 12 & 3 & 12 & 12 & 6 & 3 & 6 & 6 & -24 & -6 & 0 & -6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 24 & -6 & -6 & -3 & -6 & -12 & -12 & -3 & -12 & -30 \\ 30 & 12 & 3 & -24 & -6 & 0 & -6 & -6 & -3 & 12 & 12 & 6 & -6 & 0 & 6 & -6 & -12 & -12 & 3 & 6 & 6 & 0 & 6 & 24 & -3 & -12 & -30 \\ 30 & -24 & -6 & 12 & -6 & -6 & 3 & 0 & -3 & 12 & -6 & -6 & 12 & 0 & -12 & 6 & 6 & -12 & 3 & 0 & -3 & 6 & 6 & -12 & 6 & 24 & -30 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

4 应用

本节考虑文献 [46] 中的一个双合作博弈模型, 并利用定理 1 的方法计算双合作博弈的 Shapley 值. 设有两个保险公司 A_1 和 A_2, 它们为了得到一个地区的较多的客户展开竞争. 设 $N=\{1,2,3\}$ 表示保险代理人集合, 每个保险代理人都有一份关于客户名单. 定义双合作博弈 (N,v), 其中特征函数 $v(S,T)$ 表示当 S 中的保险代理人为 A_1 公司服务, T 中的保险代理人为 A_2 公司服务, $N\setminus(S\cup T)$ 中的保险代理人既不为 A_1 公司服务也不为 A_2 公司服务时, 公司 A_1 获得的收益. $v(S,T)$ 的值如下:

$$\begin{array}{llll} v(\{1,2,3\},\emptyset)=100, & v(\emptyset,\emptyset)=0, & v(\emptyset,\{1,2,3\})=-60, & v(\{1,3\},\emptyset)=85, \\ v(\{2,3\},\emptyset)=75, & v(\{1,2\},\emptyset)=90, & v(\{1,3\},\{2\})=50, & v(\{2,3\},\{1\})=20, \\ v(\{1,2\},\{3\})=60, & v(\{3\},\emptyset)=65, & v(\{2\},\emptyset)=70, & v(\{1\},\emptyset)=80, \\ v(\{3\},\{1\})=5, & v(\{3\},\{2\})=15, & v(\{2\},\{1\})=10, & v(\{2\},\{3\})=35, \\ v(\{1\},\{2\})=40, & v(\{1\},\{3\})=50, & v(\{3\},\{1,2\})=-25, & v(\{2\},\{1,3\})=-20, \\ v(\{1\},\{2,3\})=5, & v(\emptyset,\{1\})=-30, & v(\emptyset,\{2\})=-15, & v(\emptyset,\{3\})=-10, \\ v(\emptyset,\{2,3\})=-30, & v(\emptyset,\{1,3\})=-40, & v(\emptyset,\{1,2\})=-50. & \end{array}$$

首先利用定义 3 中式 (3) 计算 Shapley 值. 对于参与人 $i=1$, 表 2 列出了所有可能的 (S,T) 联盟组合, $(S,T)\in 3^{N\setminus\{1\}}$.

在表 2 中, $\underline{p}_{s,t}$ 和 $\bar{p}_{s,t}$ 计算如下:

$$\bar{p}_{s,t} = \frac{2^3}{(2\times 3)!}\frac{(n+s-t)!(n+t-s-1)!}{2^{s+t}}, \quad \underline{p}_{s,t} = \frac{2^3}{(2\times 3)!}\frac{(n+t-s)!(n+s-t-1)!}{2^{s+t}}.$$

代入式 (3),

$$\Phi_1(v) = \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{1\}}} [\bar{p}_{s,t}(v(S\cup i,T)-v(S,T)) + \underline{p}_{s,t}(v(S,T)-v(S,T\cup i))]$$

表 2　参与人 $i=1$ 相关的各种联盟收益

Table 2　The profits of coalitions with respect to $i=1$

S	T	$S\cup\{1\}$	$T\cup\{1\}$	$v(S\cup\{1\},T)$	$v(S,T)$	$v(S,T\cup\{1\})$	$s=\lvert S\rvert$	$t=\lvert T\rvert$	$\bar{p}_{s,t}$	$\underline{p}_{s,t}$
$\{2,3\}$	$\emptyset$	$\{1,2,3\}$	$\{1\}$	100	75	20	2	0	$\frac{2^3\times30}{6!}$	$\frac{2^3\times6}{6!}$
$\{2\}$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	90	70	10	1	0	$\frac{2^3\times12}{6!}$	$\frac{2^3\times6}{6!}$
$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	60	35	-20	1	1	$\frac{2^3\times3}{6!}$	$\frac{2^3\times3}{6!}$
$\{3\}$	$\emptyset$	$\{1,3\}$	$\{1\}$	85	65	5	1	0	$\frac{2^3\times12}{6!}$	$\frac{2^3\times6}{6!}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{1\}$	80	0	-30	0	0	$\frac{2^3\times12}{6!}$	$\frac{2^3\times12}{6!}$
$\emptyset$	$\{3\}$	$\{1\}$	$\{1,3\}$	50	-10	-40	0	1	$\frac{2^3\times6}{6!}$	$\frac{2^3\times12}{6!}$
$\{3\}$	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2\}$	50	15	-25	1	1	$\frac{2^3\times3}{6!}$	$\frac{2^3\times3}{6!}$
$\emptyset$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	40	-15	-50	0	1	$\frac{2^3\times6}{6!}$	$\frac{2^3\times12}{6!}$
$\emptyset$	$\{2,3\}$	$\{1\}$	$\{1,2,3\}$	5	-30	-60	0	2	$\frac{2^3\times6}{6!}$	$\frac{2^3\times30}{6!}$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{2^3}{(2\times3)!}\{[30\times(100-75)+6\times(75-20)]+[12\times(90-70)+6\times(70-10)]\\
&+[3\times(60-35)+3\times(35+20)]+[12\times(85-65)+6\times(65-5)]\\
&+[12\times(80-0)+12\times(0+30)]+[6\times(50+10)+12\times(-10+40)]\\
&+[3\times(50-15)+3\times(15+25)]+[6\times(40+15)+12\times(-15+50)]\\
&+[6\times(5+30)+30\times(-30+60)]\}\\
=&73.8333.
\end{aligned}\tag{25}
$$

类似地, 可计算出 $\Phi_2(v)=49.6777$, $\Phi_3(v)=36.5000$.

接下来利用定理 1 的式 (24) 计算 Shapley 值, 易知双合作博弈的特征函数 $v(S,T)$ 的结构矩阵表示为

$$
\begin{aligned}
M_v=[&100\ 90\ \ 60\ \ \ 85\ \ 80\ 50\ \ 50\ \ 40\ \ \ 5\ \ \ \ 75\ \ \ 70\ \ \ 35\ \ \ 65\ \ 0\\
&-10\ 15\ -15\ -30\ 20\ 10\ -20\ \ 5\ \ -30\ -40\ -25\ -50\ -60\ ].
\end{aligned}
$$

利用例 1 中得到的双合作博弈的 Shapley 矩阵 Θ_3, 根据定理 1, 可以计算

$$
\Phi(v)=M_v\Theta_3=\begin{bmatrix}\frac{443}{6} & \frac{149}{3} & \frac{73}{2}\end{bmatrix}=[73.8333\ \ 49.6777\ \ 36.5000].
$$

用定义方式和利用本文矩阵方式计算结果是相同的. 容易检验,

$$
\Phi_1(v)+\Phi_2(v)+\Phi_3(v)=160=v(\{1,2,3\},\emptyset)-v(\emptyset,\{1,2,3\}),
$$

满足命题 2 中 Shapley 值满足的 5 个公理中的有效性公理, 即各参与人的收益之和 $\Phi_1(v)+\Phi_2(v)+\Phi_3(v)$ 等于博弈中参与人合作获得的最大收益 $v(\{1,2,3\},\emptyset)-v(\emptyset,\{1,2,3\})$.

5　结论

本文首先利用矩阵的半张量积, 构造出了 Shapley 矩阵 Θ_n, 然后将双合作博弈的 Shapley 值表示为双合作博弈的特征函数矩阵与 Shapley 矩阵的乘积形式, Shapley 矩阵 Θ_n 仅仅与双合作博弈参与

人个数 n 有关, 当双合作博弈的特征函数发生变化时, 只需得到特征函数 $v(S,T)$ 的矩阵 M_v, 就可迅速计算出双合作博弈的 Shapley 值 $\Phi(v)=(\Phi_1(v),\ldots,\Phi_n(v))$. 给出的矩阵形式的 Shapley 值计算方法不但简化了原来计算, 同时也为理论上研究双合作博弈提供了新的研究思路. 本文提供的方法虽然给出了简洁的 Shapley 值计算公式, 但是关于 Shapley 矩阵 Θ_n 的维数会随着 n 的增加指数增加, 因此如何改进算法, 降低 Shapley 矩阵的计算复杂度是未来研究的主要方向.

参考文献

1 Fudenberg D, Tirole J. Game Theory. London: MIT Press, 1991

2 Axelrod R M. The Evolution of Cooperation. New York: Basic Books, 1984

3 Stewart A J, Plotkin J B. Extortion and cooperation in the prisoner's dilemma. In: Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2012. 10134–10135

4 Nowak M A. Five rules for the evolution of cooperation. Science, 2006, 314: 1560–1563

5 Doebeli M, Hauert C. Models of cooperation based on the prisoner's dilemma and the Snowdrift game. Ecol Lett, 2005, 8: 748–766

6 Nash J. Non-cooperative games. Ann Math, 1951, 54: 286

7 Bilbao J M. Cooperative Games on Combinatorial Structures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000

8 Dimitrov D. Models in Cooperative Game Theory. Berlin: Springer, 2008

9 Marden J R, Wierman A. Distributed welfare games. Oper Res, 2013, 61: 155–168

10 Shapley L S. A value for n-person games. In: Contributions to the Theory of Games II. Princeton: Princeton University Press, 1950. 307–317

11 Shapley L S. Cores of convex games. Int J Game Theor, 1971, 1: 11–26

12 Tijs S H. Bounds for the core and the τ-value. In: Game Theory and Mathematical Economics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1981. 123–132

13 Tijs S H. An axiomatization of the τ-value. Math Soc Sci, 1987, 13: 177–181

14 Weber R J. Probabilistic values for games. In: The Shapley Value: Essays in Honor of L.S. Shapley. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. 101–119

15 Derks J, Haller H, Peters H. The selectope for cooperative games. Int J Game Theor, 2000, 29: 23–38

16 Dubey P. On the uniqueness of the Shapley value. Int J Game Theor, 1975, 4: 131–139

17 Wang Y H, Cheng D Z, Liu X Y. Matrix expression of Shapley values and its application to distributed resource allocation. Sci China Inf Sci, 2019, 62: 022201

18 Cheng D Z, Qi H S, Zhao Y. An Introduction to Semi-Tensor Product of Matrices and Its Applications. Singapore: World Scientific Publishing, 2012

19 Wang Y, Alsaadi F E, Liu Z, et al. Matrix expression of Shapley value in graphical cooperative games. Math Probl Eng, 2020, 2020: 1–8

20 Li H T, Wang S L, Liu A X, et al. Simplification of Shapley value for cooperative games via minimum carrier. Control Theory Appl, 2021, 19: 157–169

21 Felsenthal D S, Machover M. Ternary voting games. Int J Game Theor, 1997, 26: 335–351

22 Borkotokey S, Gogoi L. Bi-cooperative network games: a solution concept. J Game Theory, 2014, 3: 35–40

23 Bilbao J M, Fernández J R, Jiménez N, et al. Biprobabilistic values for bicooperative games. Discrete Appl Math, 2008, 156: 2698–2711

24 Bilbao J M, Fernández J R, Jiménez N, et al. The Shapley value for bicooperative games. Ann Oper Res, 2008, 158: 99–115

25 Tsurumi M, Inuiguchi M, Nishimura A. Pseudo-Banzhaf values in bicooperative games. In: Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 2005. 1138–1143

26 Chua V C H, Huang H C. The Shapley-Shubik index, the donation paradox and ternary games. Soc Choice Welfare, 2003, 20: 387–403

27 Freixas J. The Shapley-Shubik power index for games with several levels of approval in the input and output. Decis Support Syst, 2005, 39: 185–195

28 Grabisch M, Lange F. Games on lattices, multichoice games and the shapley value: a new approach. Math Meth Oper Res, 2007, 65: 153–167

29 Bilbao J M, Fernández J R, Jiménez N, et al. A survey of bicooperative games. In: Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria. Berlin: Springer, 2008

30 Wu Y H, Le S T, Zhang K Z, et al. Ex-ante agent transformation of Bayesian games. IEEE Trans Autom Control, 2021, doi: 10.1109/TAC.2021.3122372

31 Zhang X, Cheng D Z. Profile-dynamic based fictitious play. Sci China Inf Sci, 2021, 64: 169202

32 Ding X Y, Li H T. Optimal control of random evolutionary Boolean games. Int J Control, 2021, 94: 144–152

33 Wang Y, Cheng D Z. On coset weighted potential game. J Franklin Inst, 2020, 357: 5523–5540

34 Li C X, Xing Y, He F, et al. A strategic learning algorithm for state-based games. Automatica, 2020, 113: 108615

35 Li C X, He F H, Liu T, et al. Symmetry-based decomposition of finite games. Sci China Inf Sci, 2019, 62: 012207

36 Cheng D Z, Xu T T. Application of STP to cooperative games. In: Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA), Hangzhou, 2013. 1680–1685

37 Cheng D Z. On finite potential games. Automatica, 2014, 50: 1793–1801

38 Wang Y H, Liu T, Cheng D Z. From weighted potential game to weighted harmonic game. IET Control Theor Appl, 2017, 11: 2161–2169

39 Cheng D Z, He F H, Qi H S, et al. Modeling, analysis and control of networked evolutionary games. IEEE Trans Autom Control, 2015, 60: 2402–2415

40 Wang Y H, Cheng D Z. Dynamics and stability for a class of evolutionary games with time delays in strategies. Sci China Inf Sci, 2016, 59: 092209

41 Guo P L, Zhang H X, Alsaadi F E, et al. Semi-tensor product method to a class of event-triggered control for finite evolutionary networked games. IET Control Theor Appl, 2017, 11: 2140–2145

42 Cheng D Z, Wu Y H, Zhao G D, et al. A comprehensive survey on STP approach to finite games. J Syst Sci Complex, 2021, 34: 1666–1680

43 Cheng D Z, Qi H S, Li Z Q. Analysis and Control of Boolean Networks — A Semi-tensor Product Approach. Berlin: Springer, 2011

44 Li H T, Zhao G D, Meng M, et al. A survey on applications of semi-tensor product method in engineering. Sci China Inf Sci, 2018, 61: 010202

45 Grabisch M, Labreuche C. Bi-capacities-I: definition, Möbius transform and interaction. Fuzzy Sets Syst, 2005, 151: 211–236

46 Doménech M, Giménez J M, Puente M A. Bisemivalues for bicooperative games. Optimization, 2018, 67: 907–919

The Shapley value for bicooperative games based on the semi-tensor product

Zhiqiang LI[1*], Wenge LI[1], Qiujin HE[2*], Jinli SONG[1] & Junqi YANG[3]

1. *School of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou* 450046*, China*;
2. *School of Computer Engineering, Guangzhou City University of Technology, Guangzhou* 510800*, China*;
3. *School of Electrical Engineering and Automation, Henan Polytechnic University, Jiaozuo* 454000*, China*
* Corresponding author. E-mail: lizhiqiang@amss.ac.cn, heqj@gcu.edu.cn

Abstract In cooperative games, players can choose whether or not to participate in the coalition based on their own strategies. Bicooperative games are the generalization of cooperative games. In bicooperative games, players have the option of abstention in addition to "yes" and "no". Therefore, in cooperative games, distributing the total profit obtained by the participant alliance is one of the most important issues in bicooperative game theory. In this paper, the calculation of the Shapley value for bicooperative games is discussed by using the semi-tensor product of matrices. Firstly, the Shapley matrix of bicooperative games is constructed. Secondly, the Shapley value formula for a bicooperative game is transformed into the product of the characteristic function matrix and the Shapley matrix. Finally, an example is given to demonstrate the main results. The matrix form of Shapley value obtained in this paper simplifies the calculation and provides a new tool for researching bicooperative games.

Keywords cooperative game, bicooperative game, Shapley value, Shapley matrix, semi-tensor product of matrices