中国科学: 信息科学 2022 年 第 52 卷 第 11 期: 1942–1973
SCIENTIA SINICA Informationis
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
复杂场景下目标协同智能检测专题 • 论文

针对超视距短波辐射源的测角与测时差协同定位方法

王鼎[1,2], 尹洁昕[1,2*], 朱中梁[3]

1. 战略支援部队信息工程大学信息系统工程学院, 郑州 450001
2. 国家数字交换系统工程技术研究中心, 郑州 450002
3. 盲信号处理重点实验室, 成都 610041
* 通信作者. E-mail: Cindyin0807@163.com

收稿日期: 2021–09–22; 修回日期: 2021–11–25; 接受日期: 2022–02–08; 网络出版日期: 2022–11–10

国家自然科学基金 (批准号: 62171469, 62071029, 61772548)、河南省科技攻关项目 (批准号: 192102210092) 和双重建设自主科研项目 (批准号: 1065101) 资助

摘要 对短波超视距辐射源进行定位在国防安全领域具有重要意义. 短波多站定位体制包括测角交汇定位和测时差交汇定位, 它们在性能上各有优劣. 为了结合这两种定位技术的优势, 本文研究短波测角与测时差协同定位问题. 首先, 在超视距传播场景下依次构建二维波达方向 (direction-of-arrival, DOA) 和到达时差 (time-difference-of-arrival, TDOA) 非线性观测模型; 然后, 在电离层虚高先验观测误差存在下推导定位精度的克拉美罗下界 (Cramér-Rao lower bound, CRLB); 接着, 针对超视距观测方程的强非线性特征, 提出一种基于 DOA/TDOA 观测量的短波协同定位方法; 最后, 利用一阶误差分析方法证明所提方法的渐近统计最优性. 该方法包含两个阶段: 阶段 1 通过引入辅助变量并求解一元二次方程得到短波 DOA 伪线性观测方程, 基于此构建含双重二次等式约束的优化模型, 并提出一种基于矩阵 **QR** 分解的迭代优化算法, 用于获得辐射源位置中间估计值; 阶段 2 利用该估计值构建短波 TDOA 伪线性观测方程, 并提出基于矩阵分解的迭代型约束加权最小二乘估计器, 以确定最终定位结果. 仿真实验结果表明, 所提的协同定位方法具有较好的全局收敛性, 其定位性能可达到 CRLB, 并能获得较高的协同增益.

关键词 无线定位, 短波辐射源, 波达方向, 到达时差, 克拉美罗下界, **QR** 分解, 理论性能分析

1 引言

无线信号定位技术已广泛应用于智慧城市、自动驾驶、地震勘测、应急搜救等诸多工业技术领域, 其同时也是国防安全领域不可或缺的支撑技术 [1~3]. 2015 年 5 月, 国家制造建设咨询委员会将 “无

引用格式: 王鼎, 尹洁昕, 朱中梁. 针对超视距短波辐射源的测角与测时差协同定位方法. 中国科学: 信息科学, 2022, 52: 1942–1973, doi: 10.1360/SSI-2021-0331
Wang D, Yin J X, Zhu Z L. Novel cooperative localization method of over-the-horizon shortwave emitters based on direction-of-arrival and time-difference-of-arrival measurements (in Chinese). Sci Sin Inform, 2022, 52: 1942–1973, doi: 10.1360/SSI-2021-0331

线定位及其精度” 作为我国高新产业中的关键技术, 列入全面推进实施制造强国的战略文件《中国制造 2025》. 2016 年 12 月, 国务院印发《“十三五” 国家信息化规划》通知, 其中做出建设 “高精度位置服务平台” 的战略部署.

众所周知, 短波通信是远程通信的重要技术手段 [4], 相比其他通信频段 (例如超短波、卫星、微波等), 短波通信的优势包括: (1) 其是唯一不受网络枢纽和有源中继体制制约的远距离通信方式, 因而具有极强的抗毁能力和自主通信能力; (2) 可覆盖山区、戈壁、海洋等超短波频段无法涉及的区域; (3) 具有较低的运行成本. 正是由于短波通信的上述特点, 才使得短波监视成为对超视距目标态势感知和战略预警的重要方式. 短波监视技术包括目标检测发现、定位跟踪, 以及身份辨识等. 然而, 由于超视距短波信号传播的复杂性, 现有技术方法的定位精度还存在较大提升空间, 迫切需要研究更高精度的短波辐射源定位方法.

最常用的短波定位体制是多站测角交汇定位, 该体制需要每个观测站安装天线阵列, 并利用波达方向 (direction of arrival, DOA) 估计方法 (例如多重信号分类 [5]、加权子空间拟合 [6]、相关干涉仪 [7] 等) 获得入射信号方位角和仰角信息, 然后利用 DOA 定位方法确定辐射源位置坐标. 近年来, 国内外学者已提出大量基于 DOA 信息的辐射源定位方法. 具体而言, 文献 [8] 提出基于结构总体最小二乘 (structured total least squares, STLS) 的定位方法, 该方法将 DOA 定位问题转化成 STLS 估计问题, 并通过逆迭代算法进行求解, 其定位精度能逼近克拉美罗下界 (Cramér-Rao lower bound, CRLB). 文献 [9] 提出一种渐近有效估计器, 其将 DOA 定位问题转化成求解广义特征向量问题, 该方法的估计均方误差可逼近 CRLB, 并能减少估计偏置. 文献 [10] 在修正极坐标系下建立 DOA 观测模型, 进而提出基于约束特征空间理论框架的定位方法, 该类方法能获得辐射源位置的闭式解, 定位精度也能达到 CRLB. 文献 [11,12] 将 DOA 定位问题松弛为凸优化问题, 并通过内点算法进行求解, 该类方法可获得全局最优解, 从而避免局部收敛问题. 文献 [13] 提出一种鲁棒型迭代重加权估计器, 可有效解决脉冲噪声条件下的 DOA 定位问题, 大幅降低估计偏置, 其估计均方误差也接近 CRLB. 此外, 文献 [14] 针对无线传感网提出一种基于 DOA 信息的多源节点协同定位方法, 并给出优选参考节点的有效方案, 该方法通过协同处理获得协同增益, 可有效提高网络节点的整体定位精度.

虽然上述 DOA 定位方法能在一定条件下获得较高的定位精度, 但仅考虑信号视距传播场景, 相应的非线性观测方程可直接转化成伪线性观测方程, 无需引入辅助变量. 当信号以超视距方式传播时, 方位角观测模型需要利用旋转矩阵来修正 [15], 所幸这是线性变换, 并不影响方位角观测方程的伪线性化. 然而, 对于仰角观测模型而言, 其中包含电离层虚高 (ionosphere virtual height, IVH) 参数 [16], 与视距传播的仰角观测模型相比, 其发生了非线性变换, 此时若不引入辅助变量就无法完成仰角观测方程的伪线性化. 因此, 要想在短波 DOA 定位中同时利用方位角和仰角信息, 上述 DOA 定位方法均难以直接应用, 需要提出新的定位方法.

除了 DOA 交汇定位外, 多站测时差 (time difference of arrival, TDOA) 交汇定位也是一类重要的无线定位体制, 需要每个观测站仅安装单天线, 并利用最大似然、互相关等估计方法获得入射信号的 TDOA 信息 [17~19], 然后通过 TDOA 定位方法确定辐射源位置坐标. TDOA 定位方法一直是国内外学者研究的重要问题, 其主要包括迭代方法和闭式解方法两类. 前者代表性方法包括凸优化方法 [20]、泰勒 (Taylor) 级数迭代方法 [21]、约束总体最小二乘 (constrained total least squares, CTLS) 估计方法 [22], 以及约束加权最小二乘 (constrained weighted least squares, CWLS) 估计方法 [23] 等; 后者代表性方法包括球面内插 (spherical-interpolation, SI) 方法 [24]、总体最小二乘 (total least squares, TLS) 估计方法 [25]、两步加权最小二乘 (two step weighted least squares, TSWLS) 估计方法 [26], 以及加权多维标度方法 [27] 等.

上述 TDOA 定位方法是针对信号视距传播场景提出的, 大都需要将 TDOA 观测方程转化成伪线性方程. 当信号以超视距方式传播时, TDOA 观测模型中包含电离层参数, 这导致 TDOA 观测方程具有强非线性特征, 难以伪线性化, 因此上述 TDOA 定位方法无法在短波频段直接应用. 近年来, 短波 TDOA 定位方法得到国内外学者关注和研究, 取得了一些研究成果. 具体而言, 文献 [28,29] 基于准抛物线 (quasi-parabolic, QP) 电离层模型获得信号传播距离表达式, 并由此构建含等式和不等式约束的优化模型, 针对该模型提出广义投影最速下降算法、坐标下降算法等进行寻优计算. QP 模型与三维射线追踪原理 [30] 能紧密结合, 但其中涉及较多电离层参数, 在实际应用中难以准确获得. 文献 [31] 针对超视距多输入多输出 (multiple input multiple output, MIMO) 雷达体制建立信号传播距离观测模型, 其中也需要较多电离层参数. 为了克服上述问题, 文献 [32,33] 提出一种能刻画信号传播距离的 (单跳) 电离层虚高模型, 仅需要电离层虚高参数即可实现短波 TDOA 定位, 它假设信号到达不同观测站经历的电离层虚高相等, 当观测站间距较小时 (通常为 30∼100 km), 该假设可以近似满足, 但当观测站间距较大时, 该假设难以满足, 此时易导致定位误差增大. 文献 [34] 基于类似的模型和假设提出一种基于网格选择的 TDOA 定位方法, 其是针对短波 TDOA 观测方程难以伪线性化而提出的一种非参数化方法. 该方法将网格选择与凸优化技术相结合, 取得良好的定位效果, 但需要较高复杂度. 此外, 文献 [35] 基于电离层虚高模型提出短波 TDOA 直接定位方法, 该方法不需要信号到达各观测站的电离层虚高相等这一假设条件, 但直接定位要求信号汇聚到中心站, 并在中心站完成全部计算, 而短波定位中观测站间距相对较大 (动辄百公里级以上), 这对系统传输带宽和实时计算能力均提出更高的要求.

综上所述, 短波 DOA 定位和短波 TDOA 定位是短波频段最具代表性的两种定位体制, 工程技术人员研发了实际定位系统. 前者需要观测站安装天线阵列, 并对天线通道的幅相不一致性进行校正, 因此其硬件成本和系统复杂度更高; 后者仅需观测站安装单天线, 硬件复杂度相对较低, 但其对站间时间同步、信号累积时长, 以及信号采样方式等都提出更高要求. 从最终定位精度上看, 短波 DOA 定位误差随辐射源距离增加呈线性增长趋势, 短波 TDOA 定位可以有效抑制该趋势, 但其受电离层虚高先验观测误差的影响较大, 并且由于短波通信信号带宽通常较窄, 估计精度难以得到可靠保证.

为结合两种短波定位体制的优势, 本文研究短波 DOA/TDOA 协同定位问题, 利用文献 [32∼35] 中的电离层虚高模型对信号传播距离进行建模, 并假设电离层虚高存在先验观测误差. 本文首先针对短波超视距传播场景, 分别构建二维 DOA (包含方位角和仰角) 和 TDOA 观测模型. 然后在电离层虚高观测误差存在下推导定位精度 CRLB, 随后针对超视距 DOA/TDOA 观测模型的强非线性特征, 提出一种新的协同定位方法. 该方法包含两个阶段. 阶段 1 仅利用 DOA 观测信息, 首先通过引入辅助变量和求解一元二次方程的根将超视距二维 DOA 观测方程伪线性化, 然后基于该伪线性观测方程的误差特性构建含双重二次等式约束的优化模型, 并将此二次等式 (非凸) 约束松弛为线性等式 (凸) 约束, 进而提出一种基于矩阵 **QR** 分解的迭代优化算法, 以获得阶段 1 的估计值 (文中也称其为中间估计值). 阶段 2 将阶段 1 的估计结果与 TDOA 观测信息相融合, 利用中间估计值将超视距 TDOA 观测方程转化成伪线性观测方程, 然后分析该伪线性观测方程中的误差特性, 并再次提出基于矩阵 **QR** 分解的迭代型约束加权最小二乘估计器, 用于获得最终定位结果. 此外, 本文利用一阶误差分析方法推导新方法的估计均方误差, 并证明其定位性能可逼近 CRLB. 仿真实验验证协同定位新方法的优势.

本文的结构安排如下: 第 2 节对定位观测模型与问题进行描述; 第 3 节推导定位问题的 CRLB; 第 4 节提出测角与测时差协同定位方法, 并对该方法的理论性能进行定量分析; 第 5 节给出所提方法的仿真实验结果; 第 6 节对全文进行总结和展望. 补充材料中给出一些结论和公式推导过程.

2 定位观测模型与问题形成

2.1 定位场景描述

假设在地球表面存在一个待定位目标源, 其经度和纬度分别为 ω_1 和 ω_2. 该目标源辐射短波信号, 信号以超视距传播的方式经电离层反射至地面观测站. 根据文献 [36] 可知, 短波信号由电离层反射至观测站的过程可以看成是信号逐渐折射最后全反射的过程, 其折射率与电离层电子密度有关. 依据三维射线追踪原理可知 [30], 短波信号进入电离层和离开电离层的两条路径可以利用 (单跳) 平面反射模型来近似刻画 (如图 1 所示), 因而存在一个等效的电离层反射平面 [31~35], 反射面距离地面高度即为电离层虚高.

由于短波信号带宽较窄, 并且衰落现象明显, 使得估计信号 DOA 和 TDOA 参数采用的信号处理方式差异较大, 因此, 现有短波观测站大多隶属于单一定位体制. DOA 交汇定位体制要求每个观测站安装天线阵列, 利用载波相位信息即可获得信号二维 DOA 参数, 并不需要积累长时间的信号样本. TDOA 交汇定位体制要求每个观测站仅安装单根天线, 但针对窄带信号需要长时间累积信号样本才能获得可靠的 TDOA 估计. 两种截然不同的信号处理方式增加了协同处理的必要性, 同时也更有利于获得协同增益.

现有 $N+M$ 个观测站能同时接收该短波信号, 并将它们记为 $\boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2, \ldots, \boldsymbol{O}_N, \boldsymbol{O}_{N+1}, \boldsymbol{O}_{N+2}, \ldots, \boldsymbol{O}_{N+M}$, 其中第 j 个观测站的经度和纬度分别为 $\omega_{j,1}$ 和 $\omega_{j,2}$ $(1 \leqslant j \leqslant N+M)$. 不失一般性, 假设观测站 $\boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2, \ldots, \boldsymbol{O}_N$ 隶属于 DOA 交汇定位体制, 信号到达观测站 $\boldsymbol{O}_n$ 的方位角和仰角分别记为 $\theta_{n,1}$ 和 $\theta_{n,2}$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$; 观测站 $\boldsymbol{O}_{N+1}, \boldsymbol{O}_{N+2}, \ldots, \boldsymbol{O}_{N+M}$ 隶属于 TDOA 交汇定位体制, 并以 $\boldsymbol{O}_{N+1}$ 为参考, 将信号到达观测站 $\boldsymbol{O}_{N+m}$ 和到达观测站 $\boldsymbol{O}_{N+1}$ 的 TDOA 记为 τ_m $(2 \leqslant m \leqslant M)$. 相比视距传播场景 (例如超短波通信), 针对短波信号的定位观测模型更加复杂, 非线性程度更高, 下面将基于文献 [32~35] 中的电离层虚高模型, 依次建立二维 DOA 和 TDOA 观测模型.

2.2 二维 DOA 观测模型

图 1 是二维 DOA 观测模型示意图, 观测站 $\boldsymbol{O}_n$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$ 利用二维 DOA 估计方法能同时获得方位角 $\theta_{n,1}$ 和仰角 $\theta_{n,2}$ 估计值.

图 1 中的方位角定义为, 信号三维入射方向在观测站地表平面上的投影与观测站本地正北方向间的夹角. 为了建立方位角 $\theta_{n,1}$ 的表达式, 需要获得辐射源在观测站 $\boldsymbol{O}_n$ 本地直角坐标系下的坐标. 地面辐射源和观测站 $\boldsymbol{O}_n$ 在地心地固坐标系 (earth-centered, earth-fixed, ECEF) 下的位置向量分别为 [37]

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_2)\cos(\omega_1) \\ \cos(\omega_2)\sin(\omega_1) \\ (1-\mathrm{e}^2)\sin(\omega_2) \end{bmatrix} \frac{r_{\mathrm{e}}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^2(\sin(\omega_2))^2}}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_{n,2})\cos(\omega_{n,1}) \\ \cos(\omega_{n,2})\sin(\omega_{n,1}) \\ (1-\mathrm{e}^2)\sin(\omega_{n,2}) \end{bmatrix} \frac{r_{\mathrm{e}}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^2(\sin(\omega_{n,2}))^2}} \quad (1 \leqslant n \leqslant N), \tag{2}$$

其中 $r_{\mathrm{e}} = 6378.137$ km 表示地球赤道半径; $\mathrm{e} = 0.081819790992113$ 表示地球第一偏心率. 于是辐射源

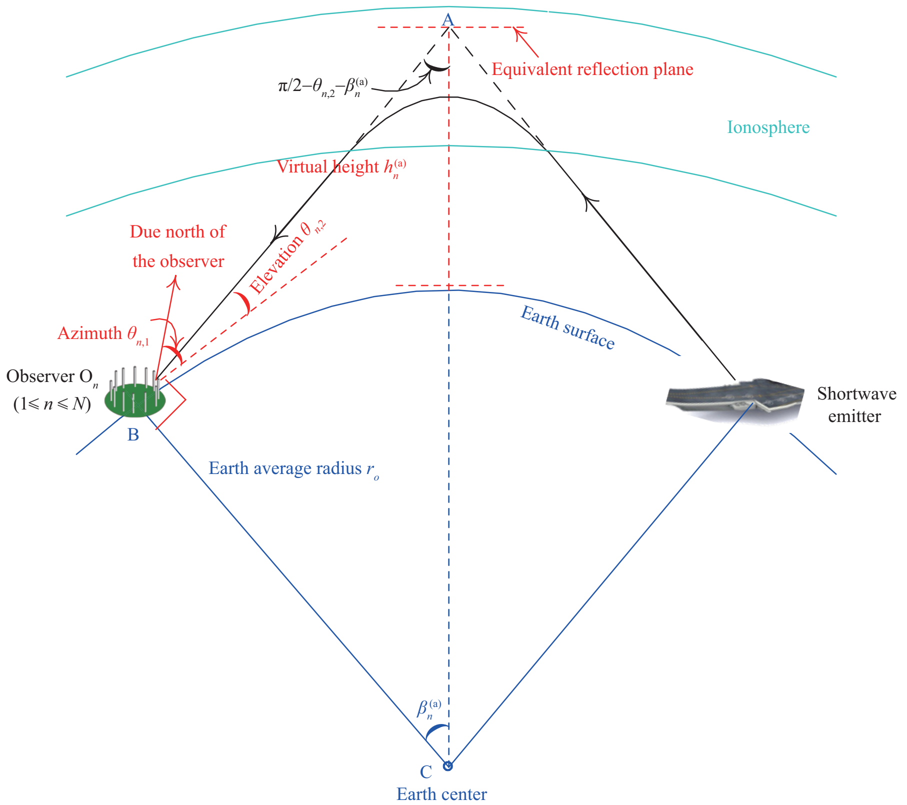

图 1 (网络版彩图) 二维 DOA 观测模型示意图

Figure 1 (Color online) Sketch map of the two-dimensional DOA measurement model

在观测站 $\boldsymbol{O}_n$ 本地直角坐标系下的位置向量为

$$\boldsymbol{u}_n'=\begin{bmatrix} x_n' \\ y_n' \\ z_n' \end{bmatrix}=\boldsymbol{S}_n(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n)=\begin{bmatrix} -\sin(\omega_{n,1}) & \cos(\omega_{n,1}) & 0 \\ -\cos(\omega_{n,1})\sin(\omega_{n,2}) & -\sin(\omega_{n,1})\sin(\omega_{n,2}) & \cos(\omega_{n,2}) \\ \cos(\omega_{n,1})\cos(\omega_{n,2}) & \sin(\omega_{n,1})\cos(\omega_{n,2}) & \sin(\omega_{n,2}) \end{bmatrix}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n)\ (1\leqslant n\leqslant N), \quad (3)$$

其中 $\boldsymbol{S}_n$ 表示旋转矩阵, 仅与观测站经纬度有关, 因此是常数矩阵. 方位角 $\theta_{n,1}$ 可以表示为

$$\theta_{n,1}=\arctan\left(\frac{x_n'}{y_n'}\right)=\arctan\left(\frac{\boldsymbol{s}_{n,1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n)}{\boldsymbol{s}_{n,2}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n)}\right)\quad(1\leqslant n\leqslant N), \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{s}_{n,1}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{s}_{n,2}^{\mathrm{T}}$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{S}_n$ 中的第 1, 2 行向量 (即有 $\boldsymbol{S}_n^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{s}_{n,1}\ \ \boldsymbol{s}_{n,2}\ \ \boldsymbol{s}_{n,3}]$).

定义方位角向量 $\boldsymbol{\theta}_1=[\theta_{1,1}\ \ \theta_{2,1}\ \ \cdots\ \ \theta_{N,1}]^{\mathrm{T}}$, 实际中仅能得到其观测值 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$, 相应的观测模型可以表示为

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1=\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta_1}=\boldsymbol{f}_{\theta_1}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta_1}, \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{f}_{\theta_1}(\boldsymbol{u})$ 表示由式 (4) 确定的向量 $\boldsymbol{u}$ 的非线性函数; 向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta_1}$ 表示方位角观测误差, 为 $N\times 1$ 维列向量, 假设其服从零均值高斯 (Gauss) 分布.

图 1 中的仰角定义为, 信号三维入射方向与观测站地表平面间的夹角. 为了建立仰角 $\theta_{n,2}$ 的表达式, 需要考虑图 1 中的三角形 △ABC. 在该三角形中, 利用正弦定理可得

$$\frac{r_{\mathrm{o}}}{\sin(\pi/2-\theta_{n,2}-\beta_n^{(\mathrm{a})})}=\frac{r_{\mathrm{o}}+h_n^{(\mathrm{a})}}{\sin(\pi/2+\theta_{n,2})}\Rightarrow\frac{r_{\mathrm{o}}}{\cos(\theta_{n,2}+\beta_n^{(\mathrm{a})})}=\frac{r_{\mathrm{o}}+h_n^{(\mathrm{a})}}{\cos(\theta_{n,2})}\ \ (1\leqslant n\leqslant N),\tag{6}$$

其中 $r_{\mathrm{o}}=6371.393$ km 表示地球平均半径; $h_n^{(\mathrm{a})}$ 表示信号到达观测站 $\boldsymbol{O}_n$ 对应的电离层虚高. 由式 (6) 可以推得

$$\theta_{n,2}=\arctan\left(\cot(\beta_n^{(\mathrm{a})})-\frac{r_{\mathrm{o}}}{r_{\mathrm{o}}+h_n^{(\mathrm{a})}}\csc(\beta_n^{(\mathrm{a})})\right)=\arctan\left(\frac{(r_{\mathrm{o}}+h_n^{(\mathrm{a})})\cos(\beta_n^{(\mathrm{a})})-r_{\mathrm{o}}}{(r_{\mathrm{o}}+h_n^{(\mathrm{a})})\sin(\beta_n^{(\mathrm{a})})}\right)\ \ (1\leqslant n\leqslant N),\tag{7}$$

其中

$$\beta_n^{(\mathrm{a})}=\arcsin\left(\frac{1}{2r_{\mathrm{o}}}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n\|_2\right)\ \ (1\leqslant n\leqslant N).\tag{8}$$

定义仰角向量 $\boldsymbol{\theta}_2=[\theta_{1,2}\ \ \theta_{2,2}\ \ \cdots\ \ \theta_{N,2}]^{\mathrm{T}}$, 实际中仅能得到其观测值 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_2$, 相应的观测模型可以表示为

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_2=\boldsymbol{\theta}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta_2}=\boldsymbol{f}_{\theta_2}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})+\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta_2},\tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}=[h_1^{(\mathrm{a})}\ \ h_2^{(\mathrm{a})}\ \ \cdots\ \ h_N^{(\mathrm{a})}]^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{\theta}_2=\boldsymbol{f}_{\theta_2}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})$ 表示由式 (7) 和 (8) 确定的向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}$ 的非线性函数; 向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta_2}$ 表示仰角观测误差, 其为 $N\times 1$ 维列向量, 假设其服从零均值高斯分布.

将式 (5) 和 (9) 合并可得如下二维 DOA 观测模型:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta}=\boldsymbol{f}_{\theta}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})+\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta},\tag{10}$$

其中

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}=[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1^{\mathrm{T}}\ \ \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\theta}=[\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{\theta}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta}=[\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta_1}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta_2}^{\mathrm{T}}],\ \boldsymbol{f}_{\theta}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})=[(\boldsymbol{f}_{\theta_1}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\ \ (\boldsymbol{f}_{\theta_2}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}))^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{f}_{\theta}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})$ 表示向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}$ 的非线性函数; 向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta}$ 表示二维 DOA 观测误差, 为 $2N\times 1$ 维列向量, 服从零均值高斯分布, 并且协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Omega}_{\theta}=\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta}\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta}^{\mathrm{T}}]$.

注释1　根据式 (1) 对辐射源位置向量 $\boldsymbol{u}$ 的定义可知, 该向量满足如下二次等式:

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}\{1,1,(1-\mathrm{e}^2)^{-1}\}\boldsymbol{u}=r_{\mathrm{e}}^2,\tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}_0=\mathrm{diag}\{1,1,(1-\mathrm{e}^2)^{-1}\}$; $\mathrm{diag}\{\cdot\}$ 表示由其中标量元素构成的对角矩阵. 式 (12) 是文中定位问题的先验等式约束, 由该式可知, 向量 $\boldsymbol{u}$ 的自由度仅为 2, 若将其前两个元素构成的向量记为 $\overline{\boldsymbol{u}}=[x\ \ y]^{\mathrm{T}}$, 则第 3 个元素可由向量 $\overline{\boldsymbol{u}}$ 来确定, 并且满足 $z=\pm\sqrt{(1-\mathrm{e}^2)(r_{\mathrm{e}}^2-\|\overline{\boldsymbol{u}}\|_2^2)}$. 因此, 向量 $\boldsymbol{u}$ 可以利用向量 $\overline{\boldsymbol{u}}$ 来表征.

2.3　TDOA 观测方程

图 2 是信号传播距离示意图, 以 $\boldsymbol{O}_{N+1}$ 为参考站, 利用 TDOA 估计方法可以获得信号到达观测站 $\boldsymbol{O}_{N+m}$ 和到达观测站 $\boldsymbol{O}_{N+1}$ 的 TDOAτ_m 的估计值.

为了建立 TDOAτ_m 的表达式, 应考虑图 2 中的三角形 △UVW. 将该三角形中的斜边长度记为 d_m, 利用勾股定理可得

$$d_m=\sqrt{r_{\mathrm{o}}^2(\sin(\beta_m^{(\mathrm{t})}))^2+(r_{\mathrm{o}}-r_{\mathrm{o}}\cos(\beta_m^{(\mathrm{t})})+h_m^{(\mathrm{t})})^2}=\sqrt{a_{m,1}-a_{m,2}\cos(\beta_m^{(\mathrm{t})})}\ \ (1\leqslant m\leqslant M),\tag{13}$$

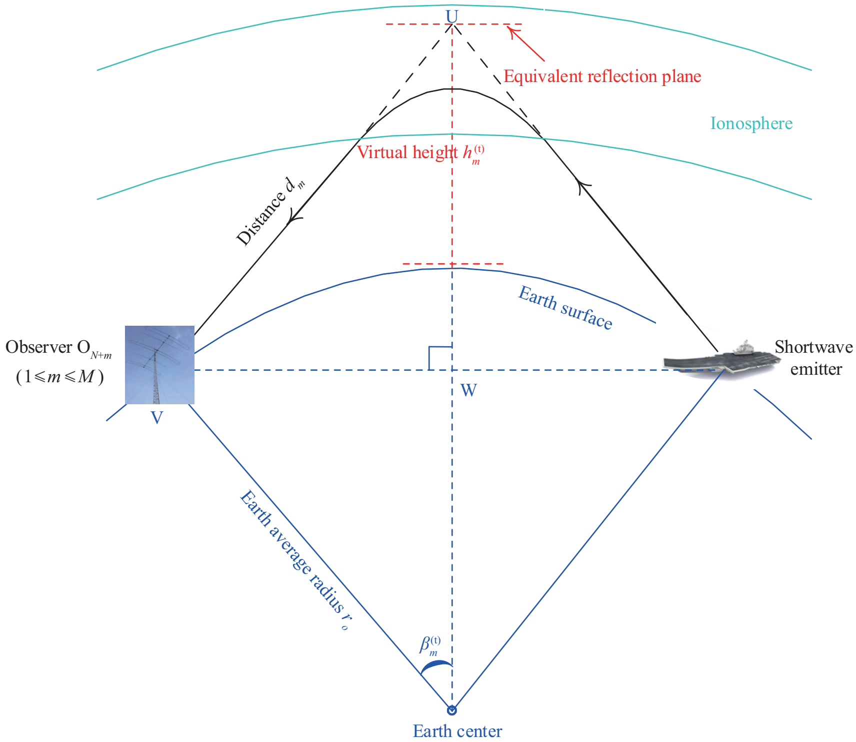

图 2 (网络版彩图) 信号传播距离示意图

Figure 2 (Color online) Sketch map of signal propagation distance

其中

$$\begin{cases} a_{m,1}=2r_{\mathrm{o}}^2+2r_{\mathrm{o}}h_m^{(\mathrm{t})}+(h_m^{(\mathrm{t})})^2, a_{m,2}=2r_{\mathrm{o}}(r_{\mathrm{o}}+h_m^{(\mathrm{t})}), \\ \beta_m^{(\mathrm{t})}=\arcsin\left(\dfrac{1}{2r_{\mathrm{o}}}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{N+m}\|_2\right), \end{cases} \quad (1\leqslant m\leqslant M), \tag{14}$$

其中 $h_m^{(\mathrm{t})}$ 表示信号到达观测站 $\boldsymbol{O}_{N+m}$ 对应的电离层虚高; $\boldsymbol{u}_{N+m}$ 表示观测站 $\boldsymbol{O}_{N+m}$ 在 ECEF 坐标系下的位置向量, 其表达式同式 (2). 于是 TDOAτ_m 可以表示为

$$\tau_m=\frac{1}{\mathrm{c}}(2d_m-2d_1)=\frac{2}{\mathrm{c}}\left(\sqrt{a_{m,1}-a_{m,2}\cos(\beta_m^{(\mathrm{t})})}-\sqrt{a_{1,1}-a_{1,2}\cos(\beta_1^{(\mathrm{t})})}\right) \quad (2\leqslant m\leqslant M), \tag{15}$$

其中 $\mathrm{c}=3\times10^5$ km/s 表示电磁波在空气中的传播速度.

定义 TDOA 向量 $\boldsymbol{\tau}=[\tau_2\ \tau_3\ \cdots\ \tau_M]^{\mathrm{T}}$, 实际中仅能得到其观测值 $\widehat{\boldsymbol{\tau}}$, 相应的观测模型可以表示为

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}}=\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\varepsilon}_\tau=\boldsymbol{f}_\tau(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})+\boldsymbol{\varepsilon}_\tau, \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}=[h_1^{(\mathrm{t})}\ h_2^{(\mathrm{t})}\ \cdots\ h_M^{(\mathrm{t})}]^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{f}_\tau(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})$ 表示由式 (14) 和 (15) 确定的向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}$ 的非线性函数; 向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_\tau$ 表示 TDOA 观测误差, 其为 $(M-1)\times1$ 维列向量, 假设其服从零均值高斯分布, 并且协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Omega}_\tau=\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_\tau\boldsymbol{\varepsilon}_\tau^{\mathrm{T}}]$.

2.4 协同定位观测模型与问题描述

将式 (10) 和 (16) 合并可得如下协同定位观测模型:

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}}=\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\varepsilon}_\rho=\boldsymbol{f}_\rho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})+\boldsymbol{\varepsilon}_\rho, \tag{17}$$

其中

$$\begin{cases}\widehat{\boldsymbol{\rho}}=[\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}\ \ \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\rho}=[\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{h}=[(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})^{\mathrm{T}}\ \ (\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\rho}=[\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_{\tau}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{f}_{\rho}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})=[(\boldsymbol{f}_{\theta}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}))^{\mathrm{T}}\ \ (\boldsymbol{f}_{\tau}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}))^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\end{cases} \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{f}_{\rho}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})$ 表示向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 的非线性函数; 向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\rho}$ 表示 DOA/TDOA 观测误差, 其为 $(2N+M-1)\times 1$ 维列向量, 服从零均值高斯分布, 并且协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Omega}_{\rho}=\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_{\rho}\boldsymbol{\varepsilon}_{\rho}^{\mathrm{T}}]=\mathrm{blkdiag}\{\boldsymbol{\Omega}_{\theta},\boldsymbol{\Omega}_{\tau}\}$, $\mathrm{blkdiag}\{\cdot\}$ 表示由其中矩阵或向量元素构成的块状对角矩阵.

式 (17) 中的观测模型与电离层虚高向量 $\boldsymbol{h}$ 有关, 其与电离层电子密度、大气折射率, 以及进入电离层入射角度等参数有关[36], 实际中可以通过后向散射反演技术 (BIT, backscatter inversion technique)、垂直探测技术 (VST, vertical sounding technique) 等获得其 (先验) 观测值[38~40]. 显然, 电离层虚高观测值与其真实值间存在偏差, 不妨将向量 $\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}$ 和 $\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}$ 的观测模型分别表示为

$$\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{a})}=\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}+\boldsymbol{\varepsilon}_{h}^{(\mathrm{a})},\ \ \widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})}=\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}+\boldsymbol{\varepsilon}_{h}^{(\mathrm{t})}, \tag{19}$$

其中向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_{h}^{(\mathrm{a})}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{h}^{(\mathrm{t})}$ 均表示电离层虚高观测误差, $\boldsymbol{\varepsilon}_{h}^{(\mathrm{a})}$ 为 $N\times 1$ 维列向量, $\boldsymbol{\varepsilon}_{h}^{(\mathrm{t})}$ 为 $M\times 1$ 维列向量, 根据大数定律可假设它们服从零均值高斯分布, 并且协方差矩阵分别为 $\boldsymbol{\Omega}_{h}^{(\mathrm{a})}=\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_{h}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{\varepsilon}_{h}^{(\mathrm{a})})^{\mathrm{T}}]$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_{h}^{(\mathrm{t})}=\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_{h}^{(\mathrm{t})}(\boldsymbol{\varepsilon}_{h}^{(\mathrm{t})})^{\mathrm{T}}]$. 因此, 向量 $\boldsymbol{h}$ 的观测模型可以表示为

$$\widehat{\boldsymbol{h}}=\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{a})}\\ \widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}\\ \boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_{h}^{(\mathrm{a})}\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{h}^{(\mathrm{t})}\end{bmatrix}=\boldsymbol{h}+\boldsymbol{\varepsilon}_{h}, \tag{20}$$

其中观测误差 $\boldsymbol{\varepsilon}_{h}=[(\boldsymbol{\varepsilon}_{h}^{(\mathrm{a})})^{\mathrm{T}}\ \ (\boldsymbol{\varepsilon}_{h}^{(\mathrm{t})})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 为 $(N+M)\times 1$ 维列向量, 服从零均值高斯分布, 并且协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Omega}_{h}=\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_{h}\boldsymbol{\varepsilon}_{h}^{\mathrm{T}}]=\mathrm{blkdiag}\{\boldsymbol{\Omega}_{h}^{(\mathrm{a})},\boldsymbol{\Omega}_{h}^{(\mathrm{t})}\}$.

注释2　虽然电离层虚高值具有时变性, 但可以假设在信号采样和参数估计过程中该值保持不变.

注释3　协方差矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_{\rho}$ 的块状对角结构是由于 DOA 和 TDOA 观测量涉及不同观测站, 协方差矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_{h}$ 的块状对角结构也是基于此原因.

下面需要解决的问题是: 如何在获得短波 DOA/TDOA 观测量 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$ 和电离层虚高先验观测量 $\widehat{\boldsymbol{h}}$ 的条件下, 利用二次等式约束式 (12) 实现对短波辐射源的高精度定位.

3　参数估计方差的克拉美罗下界

在本文考虑的测角与测时差协同定位问题中, 未知参数包括向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{h}$, 观测量包含向量 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{h}}$. 定义扩维参数向量 $\boldsymbol{\varphi}=[\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 和扩维观测向量 $\widehat{\boldsymbol{\psi}}=[\widehat{\boldsymbol{\rho}}^{\mathrm{T}}\ \ \widehat{\boldsymbol{h}}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 此时可以将对数似然函数表示为

$$\ln(L(\widehat{\boldsymbol{\psi}}|\boldsymbol{\varphi}))=C-\frac{1}{2}(\widehat{\boldsymbol{\rho}}-\boldsymbol{f}_{\rho}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_{\rho}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\rho}}-\boldsymbol{f}_{\rho}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}))-\frac{1}{2}(\widehat{\boldsymbol{h}}-\boldsymbol{h})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_{h}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{h}}-\boldsymbol{h}), \tag{21}$$

其中 C 表示与参数向量 $\boldsymbol{\varphi}$ 无关的常数. 由式 (21) 可以得到向量 $\boldsymbol{\varphi}$ 的费歇耳 (Fisher) 信息矩阵为

$$\begin{aligned}\mathbf{FISH}(\boldsymbol{\varphi})&=\boldsymbol{E}\left[\frac{\partial\ln(L(\widehat{\boldsymbol{\psi}}|\boldsymbol{\varphi}))}{\partial\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial\ln(L(\widehat{\boldsymbol{\psi}}|\boldsymbol{\varphi}))}{\partial\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}}\right]\\&=\left[\begin{array}{c:c}(\boldsymbol{F}_{\rho,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_{\rho}^{-1}\boldsymbol{F}_{\rho,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}) & (\boldsymbol{F}_{\rho,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_{\rho}^{-1}\boldsymbol{F}_{\rho,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})\\ \hdashline (\boldsymbol{F}_{\rho,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_{\rho}^{-1}\boldsymbol{F}_{\rho,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}) & (\boldsymbol{F}_{\rho,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_{\rho}^{-1}\boldsymbol{F}_{\rho,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})+\boldsymbol{\Omega}_{h}^{-1}\end{array}\right],\end{aligned} \tag{22}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{\rho,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}) = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_{\rho}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{\theta,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}) \\ \boldsymbol{F}_{\tau,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}) \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{F}_{\rho,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}) = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_{\rho}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})}{\partial \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}} = \mathrm{blkdiag}\{\boldsymbol{F}_{\theta,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}), \boldsymbol{F}_{\tau,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\}, \end{cases} \tag{23}$$

其中 $\boldsymbol{F}_{\theta,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}_{\theta}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}$, $\boldsymbol{F}_{\tau,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}_{\tau}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}$, $\boldsymbol{F}_{\theta,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}_{\theta}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})}{\partial (\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})^{\mathrm{T}}}$, $\boldsymbol{F}_{\tau,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}_{\tau}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})}{\partial (\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})^{\mathrm{T}}}$.

由于向量 $\boldsymbol{u}$ 满足等式约束式 (12), 利用文献 [21] 中的结论可以得到向量 $\boldsymbol{\varphi}$ 的 CRLB 矩阵为

$$\mathbf{CRLB}(\boldsymbol{\varphi}) = (\mathbf{FISH}(\boldsymbol{\varphi}))^{-1} - \frac{(\mathbf{FISH}(\boldsymbol{\varphi}))^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{O}_{(N+M)\times 1} \end{bmatrix}[(\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \ \ \boldsymbol{O}_{1\times(N+M)}](\mathbf{FISH}(\boldsymbol{\varphi}))^{-1}}{[(\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \ \ \boldsymbol{O}_{1\times(N+M)}](\mathbf{FISH}(\boldsymbol{\varphi}))^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{O}_{(N+M)\times 1} \end{bmatrix}}. \tag{24}$$

若定义矩阵

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}) = \left[\begin{array}{c:c} \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{I}_2} \\ \hdashline -(1-\mathrm{e}^2)(x/z) & -(1-\mathrm{e}^2)(y/z) \end{array}\right],$$

则可以得到 $\mathbf{CRLB}(\boldsymbol{\varphi})$ 的另一种表达式

$$\begin{aligned} \mathbf{CRLB}(\boldsymbol{\varphi}) = &\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}) & \boldsymbol{O}_{3\times(N+M)} \\ \boldsymbol{O}_{(N+M)\times 2} & \boldsymbol{I}_{N+M} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} (\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}_{2\times(N+M)} \\ \boldsymbol{O}_{(N+M)\times 3} & \boldsymbol{I}_{N+M} \end{bmatrix}\mathbf{FISH}(\boldsymbol{\varphi})\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}) & \boldsymbol{O}_{3\times(N+M)} \\ \boldsymbol{O}_{(N+M)\times 2} & \boldsymbol{I}_{N+M} \end{bmatrix}\right)^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}_{2\times(N+M)} \\ \boldsymbol{O}_{(N+M)\times 3} & \boldsymbol{I}_{N+M} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{25}$$

实际中更关注辐射源位置向量 $\boldsymbol{u}$ 的 CRLB 矩阵, 根据式 (24) 和 (25) 可以得到下面两个表达式:

$$\mathbf{CRLB}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}) - \frac{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})}{(\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})((\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}))^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}, \tag{26}$$

其中

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}) = ((\boldsymbol{F}_{\rho,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Omega}_{\rho} + \boldsymbol{F}_{\rho,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})\boldsymbol{\Omega}_{h}(\boldsymbol{F}_{\rho,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}))^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{F}_{\rho,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}))^{-1}. \tag{27}$$

注释4 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})$ 表示没有等式约束条件下向量 $\boldsymbol{u}$ 的 CRLB 矩阵, 由于式 (26) 第 1 个等号右边第 2 项是半正定矩阵, 于是有 $\mathbf{CRLB}(\boldsymbol{u}) \preceq \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})$. 因此, 等式约束降低了向量 $\boldsymbol{u}$ 估计方差的 CRLB, 有助于提升定位精度.

注释5 基于上述结论可以得到仅基于 DOA 定位的 CRLB 矩阵 $\mathbf{CRLB}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u})$ 和仅基于 TDOA 定位的 CRLB 矩阵 $\mathbf{CRLB}^{(\mathrm{t})}(\boldsymbol{u})$, 分别如下所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{CRLB}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{Z}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}) - \frac{\boldsymbol{Z}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})}{(\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u}} \\ &= \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})((\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}))^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{CRLB}^{(\mathrm{t})}(\boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{Z}^{(\mathrm{t})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}) - \frac{\boldsymbol{Z}^{(\mathrm{t})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{(\mathrm{t})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})}{(\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{(\mathrm{t})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{\Lambda}_0\boldsymbol{u}} \end{aligned} \tag{28}$$

$$=\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})((\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}^{(\mathrm{t})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}))^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}, \tag{29}$$

其中

$$\boldsymbol{Z}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})=((\boldsymbol{F}_{\theta,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Omega}_{\theta}+\boldsymbol{F}_{\theta,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})\boldsymbol{\Omega}_{h}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{F}_{\theta,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}))^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{F}_{\theta,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}))^{-1}, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{Z}^{(\mathrm{t})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})=((\boldsymbol{F}_{\tau,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Omega}_{\tau}+\boldsymbol{F}_{\tau,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{\Omega}_{h}^{(\mathrm{t})}(\boldsymbol{F}_{\tau,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}))^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{F}_{\tau,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}))^{-1}. \tag{31}$$

联合式 (27), (30), (31) 可得 $(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}))^{-1}=(\boldsymbol{Z}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}))^{-1}+(\boldsymbol{Z}^{(\mathrm{t})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}))^{-1}$, 于是有 $(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}))^{-1}\succeq(\boldsymbol{Z}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}))^{-1}$ 和 $(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}))^{-1}\succeq(\boldsymbol{Z}^{(\mathrm{t})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}))^{-1}$, 再结合式 (26), (28), (29) 中的第 2 个 CRLB 表达式可得 $\mathbf{CRLB}(\boldsymbol{u})\preceq\mathbf{CRLB}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u})$ 和 $\mathbf{CRLB}(\boldsymbol{u})\preceq\mathbf{CRLB}^{(\mathrm{t})}(\boldsymbol{u})$. 因此, 协同 DOA/TDOA 两种观测量有利于提高定位精度.

4　测角与测时差协同定位新方法及其理论性能分析

4.1　协同定位新方法的原理概述

由上述二维 DOA 和 TDOA 观测模型可知, 函数 $\boldsymbol{f}_{\rho}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})$ 关于向量 $\boldsymbol{u}$ 的非线性程度较强, 此时常规非线性优化方法 (例如 Taylor 级数迭代法) 易出现局部收敛和迭代发散等问题, 并且计算复杂度较高. 在信号视距传播条件下, 二维 DOA 和 TDOA 观测方程均可转化成伪线性观测方程 [41, 42], 但当信号超视距传播时, 这两种观测模型都难以伪线性化, 因此这里首要解决的科学问题是如何获得短波二维 DOA 和 TDOA 伪线性观测方程. 首先, 短波二维 DOA 包含方位角和仰角, 其中方位角观测方程的伪线性化过程与视距场景相似, 但仰角观测方程的伪线性化过程与视距场景不同, 并且尚未有文献对此展开研究, 本文提出一种求解一元二次方程根的伪线性化方法. 其次, 经数学分析发现, 难以直接获得短波 TDOA 伪线性观测方程, 因为相比视距场景其传播模型更加复杂, 这也是尚未有文献提出基于伪线性观测方程的短波 TDOA 定位方法的原因, 庆幸的是在本文的定位问题中, 还有 DOA 观测量可以协同利用, 文中首先基于二维 DOA 伪线性观测方程获得辐射源位置的一个中间估计值及其统计特性, 然后将其融入 TDOA 观测方程中构建短波 TDOA 伪线性观测方程. 因此, 正是在 DOA 观测量的协助下方可将 TDOA 观测量纳入到基于伪线性观测方程的定位框架下, 这说明了文中的定位方法蕴含协同处理的思想以及协同处理的必要性.

基于上述分析可知, 文中的方法包含两个计算阶段, 每个阶段均利用伪线性观测方程构造含双重二次等式约束的优化模型, 并将二次等式 (非凸) 约束松弛为线性等式 (凸) 约束, 从而提出基于矩阵 **QR** 分解的迭代优化算法, 用于确定每个阶段的估计值.

4.2　阶段 1 的计算原理与方法

4.2.1　短波二维 DOA 伪线性观测方程

首先推导短波方位角伪线性观测方程. 由式 (4) 可得

$$\begin{aligned}&\tan(\theta_{n,1})=\frac{\sin(\theta_{n,1})}{\cos(\theta_{n,1})}=\frac{\boldsymbol{s}_{n,1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n)}{\boldsymbol{s}_{n,2}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n)}\overset{\text{交叉相乘}}{\Longrightarrow}\cos(\theta_{n,1})\boldsymbol{s}_{n,1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n)=\sin(\theta_{n,1})\boldsymbol{s}_{n,2}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n)\\&\overset{\text{移项}}{\Longrightarrow}(\boldsymbol{s}_{n,1}\cos(\theta_{n,1})-\boldsymbol{s}_{n,2}\sin(\theta_{n,1}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{s}_{n,1}\cos(\theta_{n,1})-\boldsymbol{s}_{n,2}\sin(\theta_{n,1}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_n\ \ (1\leqslant n\leqslant N).\end{aligned} \tag{32}$$

式 (32) 可以看成是向量 $\boldsymbol{u}$ 的伪线性观测方程, 将其中 N 个方程合并可得如下矩阵形式:

$$\boldsymbol{A}_{\theta_1}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}_{\theta_1}, \tag{33}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{\theta_1}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{s}_{1,1}\cos(\theta_{1,1})-\boldsymbol{s}_{1,2}\sin(\theta_{1,1}))^{\mathrm{T}}\\(\boldsymbol{s}_{2,1}\cos(\theta_{2,1})-\boldsymbol{s}_{2,2}\sin(\theta_{2,1}))^{\mathrm{T}}\\\vdots\\(\boldsymbol{s}_{N,1}\cos(\theta_{N,1})-\boldsymbol{s}_{N,2}\sin(\theta_{N,1}))^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_{\theta_1}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{s}_{1,1}\cos(\theta_{1,1})-\boldsymbol{s}_{1,2}\sin(\theta_{1,1}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1\\(\boldsymbol{s}_{2,1}\cos(\theta_{2,1})-\boldsymbol{s}_{2,2}\sin(\theta_{2,1}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_2\\\vdots\\(\boldsymbol{s}_{N,1}\cos(\theta_{N,1})-\boldsymbol{s}_{N,2}\sin(\theta_{N,1}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_N\end{bmatrix}. \tag{34}$$

接着推导短波仰角伪线性观测方程, 这里提出通过求解一元二次方程的根, 并引入辅助变量来获得. 首先联合式 (7) 和 (8) 可知

$$\begin{aligned}&\tan(\theta_{n,2})=\frac{\sin(\theta_{n,2})}{\cos(\theta_{n,2})}=\frac{(r_{\mathrm{o}}+h_n^{(\mathrm{a})})\cos(\beta_n^{(\mathrm{a})})-r_{\mathrm{o}}}{(r_{\mathrm{o}}+h_n^{(\mathrm{a})})\sin(\beta_n^{(\mathrm{a})})}\\&\overset{\text{交叉相乘}}{\Longrightarrow}(r_{\mathrm{o}}+h_n^{(\mathrm{a})})\sin(\beta_n^{(\mathrm{a})})\sin(\theta_{n,2})=(r_{\mathrm{o}}+h_n^{(\mathrm{a})})\cos(\beta_n^{(\mathrm{a})})\cos(\theta_{n,2})-r_{\mathrm{o}}\cos(\theta_{n,2})\\&\overset{\text{代入式 (8)}}{\Longrightarrow}(r_{\mathrm{o}}+h_n^{(\mathrm{a})})\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n\|_2\sin(\theta_{n,2})+2r_{\mathrm{o}}^2\cos(\theta_{n,2})=(r_{\mathrm{o}}+h_n^{(\mathrm{a})})\sqrt{4r_{\mathrm{o}}^2-\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n\|_2^2}\cos(\theta_{n,2})\\&\overset{\text{两边平方并移项}}{\Longrightarrow}\eta_{n,3}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n\|_2^2+\eta_{n,2}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n\|_2+\eta_{n,1}=0\ \ (1\leqslant n\leqslant N),\end{aligned} \tag{35}$$

其中

$$\eta_{n,1}=-4r_{\mathrm{o}}^2((h_n^{(\mathrm{a})})^2+2r_{\mathrm{o}}h_n^{(\mathrm{a})})(\cos(\theta_{n,2}))^2,\ \eta_{n,2}=2r_{\mathrm{o}}^2(r_{\mathrm{o}}+h_n^{(\mathrm{a})})\sin(2\theta_{n,2}),\ \eta_{n,3}=(r_{\mathrm{o}}+h_n^{(\mathrm{a})})^2. \tag{36}$$

式 (35) 中最后一个等式是关于 $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n\|_2$ 的一元二次方程. 由于 $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n\|_2$ 是正数, 因此其应是方程正根, 补充材料附录 A 中证明在实际物理场景中该方程总存在唯一的正根, 并且其表达式为

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_n\|_2=\frac{\sqrt{\eta_{n,2}^2-4\eta_{n,1}\eta_{n,3}}-\eta_{n,2}}{2\eta_{n,3}}=\eta_{n,4}\ \ (1\leqslant n\leqslant N). \tag{37}$$

将式 (37) 两边平方可以推得

$$\|\boldsymbol{u}\|_2^2-2\boldsymbol{u}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+\|\boldsymbol{u}_n\|_2^2=\eta_{n,4}^2\Longrightarrow 2\boldsymbol{u}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\|\boldsymbol{u}\|_2^2=\|\boldsymbol{u}_n\|_2^2-\eta_{n,4}^2\ \ (1\leqslant n\leqslant N). \tag{38}$$

若将 $\|\boldsymbol{u}\|_2^2$ 作为辅助变量, 则式 (38) 可以看成是向量 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\\|\boldsymbol{u}\|_2^2\end{bmatrix}$ 的伪线性观测方程, 将其中 N 个方程合并可得如下矩阵形式:

$$\boldsymbol{A}_{\theta_2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\\|\boldsymbol{u}\|_2^2\end{bmatrix}=\boldsymbol{b}_{\theta_2}, \tag{39}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{\theta_2}=\left[\begin{array}{c:c}2\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}&-1\\2\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}&-1\\\vdots&\vdots\\2\boldsymbol{u}_N^{\mathrm{T}}&-1\end{array}\right],\quad \boldsymbol{b}_{\theta_2}=\begin{bmatrix}\|\boldsymbol{u}_1\|_2^2-\eta_{1,4}^2\\\|\boldsymbol{u}_2\|_2^2-\eta_{2,4}^2\\\vdots\\\|\boldsymbol{u}_N\|_2^2-\eta_{N,4}^2\end{bmatrix}. \tag{40}$$

最后联合式 (33) 和 (39) 可得如下短波二维 DOA 伪线性观测方程:

$$\boldsymbol{A}_{\theta}(\boldsymbol{\theta})\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\\|\boldsymbol{u}\|_2^2\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_{\theta}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u=\boldsymbol{b}_{\theta}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}), \tag{41}$$

式中 $\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{\theta})=\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A}_{\theta_1} & \boldsymbol{O}_{N\times 1}\\ \hline \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{A}_{\theta_2}}\end{array}\right]$ 表示伪线性观测矩阵; $\boldsymbol{b}_\theta(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_{\theta_1}\\ \boldsymbol{b}_{\theta_2}\end{bmatrix}$ 表示伪线性观测向量; $\boldsymbol{t}_u=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \|\boldsymbol{u}\|_2^2\end{bmatrix}$ 表示扩维的位置向量, 结合式 (12) 可得向量 $\boldsymbol{t}_u$ 的双重二次等式约束, 如下所示:

$$\begin{cases}\boldsymbol{t}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{t}_u=\boldsymbol{t}_u^{\mathrm{T}}\mathrm{blkdiag}\{\boldsymbol{\Lambda}_0,0\}\boldsymbol{t}_u=r_{\mathrm{e}}^2 & \text{(I)},\\ \boldsymbol{t}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{t}_u+\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_u=\boldsymbol{t}_u^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}\{1,1,1,0\}\boldsymbol{t}_u+[0\ \ 0\ \ 0\ \ -1]\boldsymbol{t}_u=0 & \text{(II)},\end{cases}\tag{42}$$

式中 $\boldsymbol{\Lambda}_1=\mathrm{blkdiag}\{\boldsymbol{\Lambda}_0,0\}$, $\boldsymbol{\Lambda}_2=\mathrm{diag}\{1,1,1,0\}$, $\boldsymbol{\gamma}_2=[0\ \ 0\ \ 0\ \ -1]^{\mathrm{T}}$.

注释6　式 (42) 中的两个等式约束具有不同属性. 第 (I) 式源自 "辐射源位于地球表面" 这一先验约束. 第 (II) 式源自辅助变量 $\|\boldsymbol{u}\|_2^2$ 与向量 $\boldsymbol{u}$ 间的代数关系, 其是向量 $\boldsymbol{u}$ 的恒等式, 因此将该式两边对向量 $\boldsymbol{u}$ 求导可得

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{t}_u}{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{t}_u+\boldsymbol{\gamma}_2)=\boldsymbol{O}_{3\times 1},\tag{43}$$

式中 $\frac{\partial\boldsymbol{t}_u}{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_3\\ 2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$. 另一方面, 由于 $\boldsymbol{\Lambda}_1$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}_2$ 均为半正定矩阵, 因此在几何上式 (42) 刻画的二次等式约束表示椭球面, 虽然椭球体是凸集, 但椭球面仅仅是其表面, 并不包含椭球体的内部空间, 因此椭球面不具有凸集的性质, 其是个非凸集合.

注释7　注意到伪线性方程式 (41) 是由非线性方程 $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{f}_\theta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})$ 演变而来, 因此将该式代回式 (41) 中可以得到如下关于向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}$ 的恒等式:

$$\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{f}_\theta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}))\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \|\boldsymbol{u}\|_2^2\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{f}_\theta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}))\boldsymbol{t}_u=\boldsymbol{b}_\theta(\boldsymbol{f}_\theta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}),\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}).\tag{44}$$

将式 (44) 两边分别对向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}$ 求导可得

$$\begin{aligned}&[\dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,1}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u\ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,2}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u\ \ \cdots\ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,2N}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u]\boldsymbol{F}_{\theta,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})+\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{\theta})\frac{\partial\boldsymbol{t}_u}{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}=\boldsymbol{B}_{\theta,\theta}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})\boldsymbol{F}_{\theta,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})\\ &\Longrightarrow\boldsymbol{C}_{\theta,\theta}\boldsymbol{F}_{\theta,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})=\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{\theta})\frac{\partial\boldsymbol{t}_u}{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\Longrightarrow\boldsymbol{F}_{\theta,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})=\boldsymbol{C}_{\theta,\theta}^{-1}\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{\theta})\frac{\partial\boldsymbol{t}_u}{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}},\end{aligned}\tag{45}$$

$$\begin{aligned}&[\dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,1}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u\ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,2}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u\ \ \cdots\ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,2N}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u]\boldsymbol{F}_{\theta,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})=\boldsymbol{B}_{\theta,\theta}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})\boldsymbol{F}_{\theta,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})+\boldsymbol{B}_{\theta,h}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})\\ &\Longrightarrow\boldsymbol{C}_{\theta,\theta}\boldsymbol{F}_{\theta,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})+\boldsymbol{C}_{\theta,h}=\boldsymbol{O}_{2N\times N}\Longrightarrow\boldsymbol{F}_{\theta,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})=-\boldsymbol{C}_{\theta,\theta}^{-1}\boldsymbol{C}_{\theta,h},\end{aligned}\tag{46}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}_{\theta,\theta}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})=\dfrac{\partial\boldsymbol{b}_\theta(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})}{\partial\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}},\ \boldsymbol{B}_{\theta,h}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})=\dfrac{\partial\boldsymbol{b}_\theta(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})}{\partial(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})^{\mathrm{T}}},\ \dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,n}(\boldsymbol{\theta})=\dfrac{\partial\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{\theta})}{\partial\langle\boldsymbol{\theta}\rangle_n}\ \ (1\leqslant n\leqslant 2N),\\ \boldsymbol{C}_{\theta,\theta}=\boldsymbol{B}_{\theta,\theta}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})-[\dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,1}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u\ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,2}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u\ \ \cdots\ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,2N}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u],\ \boldsymbol{C}_{\theta,h}=\boldsymbol{B}_{\theta,h}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}).\end{cases}\tag{47}$$

式 (45) 和 (46) 刻画了短波二维 DOA 非线性观测模型与其伪线性观测模型之间隐含的代数关系, 其对于阶段 1 定位方法的推导和理论性能分析至关重要.

4.2.2　估计准则及其求解方法

在实际定位中, 向量 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})}$ 的真实值是未知的, 仅能由观测值 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{a})}$ 来代替. 基于式 (41) 可以定义如下误差向量:

$$\boldsymbol{\xi}_\theta=\boldsymbol{b}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{a})})-\boldsymbol{A}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{t}_u=\triangle\boldsymbol{b}_\theta-\triangle\boldsymbol{A}_\theta\boldsymbol{t}_u,\tag{48}$$

其中 $\triangle \boldsymbol{b}_\theta=\boldsymbol{b}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{a})})-\boldsymbol{b}_\theta(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})$, $\triangle \boldsymbol{A}_\theta=\boldsymbol{A}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}})-\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{\theta})$. 利用一阶误差分析方法可得

$$\triangle \boldsymbol{b}_\theta \approx \boldsymbol{B}_{\theta,\theta}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})\boldsymbol{\varepsilon}_\theta+\boldsymbol{B}_{\theta,h}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{a})}, \tag{49}$$

$$\triangle \boldsymbol{A}_\theta \boldsymbol{t}_u \approx [\dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,1}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u \ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,2}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u \ \ \cdots \ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,2N}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u]\boldsymbol{\varepsilon}_\theta. \tag{50}$$

将式 (49) 和 (50) 代入式 (48) 中可得

$$\boldsymbol{\xi}_\theta \approx (\boldsymbol{B}_{\theta,\theta}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})-[\dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,1}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,2}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u \ \cdots \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\theta,2N}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{t}_u])\boldsymbol{\varepsilon}_\theta+\boldsymbol{B}_{\theta,h}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{a})}=\boldsymbol{C}_{\theta,\theta}\boldsymbol{\varepsilon}_\theta+\boldsymbol{C}_{\theta,h}\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{a})}. \tag{51}$$

由式 (51) 可知, 误差向量 $\boldsymbol{\xi}_\theta$ 渐近服从零均值高斯分布, 并且其协方差矩阵为

$$\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta)=\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\xi}_\theta\boldsymbol{\xi}_\theta^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{C}_{\theta,\theta}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_\theta\boldsymbol{\varepsilon}_\theta^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{C}_{\theta,\theta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_{\theta,h}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{a})})^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{C}_{\theta,h}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_{\theta,\theta}\boldsymbol{\Omega}_\theta\boldsymbol{C}_{\theta,\theta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_{\theta,h}\boldsymbol{\Omega}_h^{(\mathrm{a})}\boldsymbol{C}_{\theta,h}^{\mathrm{T}}. \tag{52}$$

联合式 (42), (48), (52) 可以建立如下含双重二次等式约束的估计准则:

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{t}_u\in\mathbb{R}^{4\times1}}\{J_\theta(\boldsymbol{t}_u)\}=\min\limits_{\boldsymbol{t}_u\in\mathbb{R}^{4\times1}}\{(\boldsymbol{b}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{a})})-\boldsymbol{A}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{t}_u)^{\mathrm{T}}(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1}(\boldsymbol{b}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{a})})-\boldsymbol{A}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{t}_u)\}\\ \text{s.t.}\ \ \boldsymbol{t}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{t}_u=r_{\mathrm{e}}^2,\\ \qquad \boldsymbol{t}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{t}_u+\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_u=0,\end{cases} \tag{53}$$

其中 $(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1}$ 是加权矩阵, 其用于抑制观测误差 $\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{a})}$ 的影响. 式 (53) 中的目标函数 $J_\theta(\boldsymbol{t}_u)$ 是向量 $\boldsymbol{t}_u$ 的二次凸函数, 但是等式约束是非凸的, 容易陷入局部最优解. 为了得到更好地收敛性能, 这里借鉴文献 [23] 提出的时频差定位方法, 对二次等式约束进行凸松弛, 使其变为线性等式约束, 从而形成凸约束. 假设已经得到第 k 次迭代结果 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k)$, 为了得到第 $k+1$ 次迭代结果 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k+1)$, 可以求解如下优化问题:

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{t}_u\in\mathbb{R}^{4\times1}}\{J_\theta(\boldsymbol{t}_u)\}=\min\limits_{\boldsymbol{t}_u\in\mathbb{R}^{4\times1}}\{(\boldsymbol{b}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{a})})-\boldsymbol{A}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{t}_u)^{\mathrm{T}}(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1}(\boldsymbol{b}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{a})})-\boldsymbol{A}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{t}_u)\}\\ \text{s.t.}\ \ \widehat{\boldsymbol{U}}^{(\mathrm{a})}(k+1)\boldsymbol{t}_u=\begin{bmatrix} r_{\mathrm{e}}^2\\ 0\end{bmatrix},\end{cases} \tag{54}$$

其中 $\widehat{\boldsymbol{U}}^{(\mathrm{a})}(k+1)=\begin{bmatrix}(\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_1\\ (\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_2+\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times4}$. 式 (54) 中的等式约束为线性约束, 其存在最优闭式解, 这里提出一种基于两次矩阵 **QR** 分解的闭式解, 能获得更高的数值稳健性和计算效率, 具体可见命题 1.

命题1 假设矩阵 $(\widehat{\boldsymbol{U}}^{(\mathrm{a})}(k+1))^{\mathrm{T}}$ 的 **QR** 分解可以表示为

$$\begin{aligned}\underbrace{(\widehat{\boldsymbol{U}}^{(\mathrm{a})}(k+1))^{\mathrm{T}}}_{4\times2}&=\underbrace{\boldsymbol{Q}_1^{(\mathrm{a})}(k+1)}_{4\times4}\begin{bmatrix}\underbrace{\boldsymbol{R}_1^{(\mathrm{a})}(k+1)}_{2\times2}\\ \boldsymbol{O}_{2\times2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underbrace{\boldsymbol{Q}_{1,1}^{(\mathrm{a})}(k+1)}_{4\times2} & \underbrace{\boldsymbol{Q}_{1,2}^{(\mathrm{a})}(k+1)}_{4\times2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underbrace{\boldsymbol{R}_1^{(\mathrm{a})}(k+1)}_{2\times2}\\ \boldsymbol{O}_{2\times2}\end{bmatrix}\\ &=\boldsymbol{Q}_{1,1}^{(\mathrm{a})}(k+1)\boldsymbol{R}_1^{(\mathrm{a})}(k+1),\end{aligned} \tag{55}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_1^{(\mathrm{a})}(k+1)$ 表示正交矩阵; $\boldsymbol{R}_1^{(\mathrm{a})}(k+1)$ 表示上三角矩阵. 再假设矩阵 $(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1/2}\boldsymbol{A}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{Q}_{1,2}^{(\mathrm{a})}(k+$

1) 的 **QR** 分解可以表示为

$$\begin{aligned}\underbrace{(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1/2}\boldsymbol{A}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{Q}_{1,2}^{(\mathrm{a})}(k+1)}_{2N\times 2} &= \underbrace{\boldsymbol{Q}_{2}^{(\mathrm{a})}(k+1)}_{2N\times 2N}\begin{bmatrix}\underbrace{\boldsymbol{R}_{2}^{(\mathrm{a})}(k+1)}_{2\times 2}\\ \boldsymbol{O}_{(2N-2)\times 2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\underbrace{\boldsymbol{Q}_{2,1}^{(\mathrm{a})}(k+1)}_{2N\times 2} & \underbrace{\boldsymbol{Q}_{2,2}^{(\mathrm{a})}(k+1)}_{2N\times(2N-2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underbrace{\boldsymbol{R}_{2}^{(\mathrm{a})}(k+1)}_{2\times 2}\\ \boldsymbol{O}_{(2N-2)\times 2}\end{bmatrix}\\ &= \boldsymbol{Q}_{2,1}^{(\mathrm{a})}(k+1)\boldsymbol{R}_{2}^{(\mathrm{a})}(k+1),\end{aligned} \tag{56}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_2^{(\mathrm{a})}(k+1)$ 表示正交矩阵; $\boldsymbol{R}_2^{(\mathrm{a})}(k+1)$ 表示上三角矩阵. 接着令向量 $\widehat{\boldsymbol{t}}_1^{(\mathrm{a})}(k+1)$ 和 $\widehat{\boldsymbol{t}}_2^{(\mathrm{a})}(k+1)$ 分别满足

$$\begin{cases}(\boldsymbol{R}_1^{(\mathrm{a})}(k+1))^{\mathrm{T}}\widehat{\boldsymbol{t}}_1^{(\mathrm{a})}(k+1) = \begin{bmatrix} r_{\mathrm{e}}^2\\ 0\end{bmatrix},\\ \boldsymbol{R}_2^{(\mathrm{a})}(k+1)\widehat{\boldsymbol{t}}_2^{(\mathrm{a})}(k+1) = (\boldsymbol{Q}_{2,1}^{(\mathrm{a})}(k+1))^{\mathrm{T}}(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1/2}(\boldsymbol{b}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{a})}) - \boldsymbol{A}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{Q}_{1,1}^{(\mathrm{a})}(k+1)\widehat{\boldsymbol{t}}_1^{(\mathrm{a})}(k+1)),\end{cases} \tag{57}$$

则式 (54) 的最优闭式解可以表示为

$$\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k+1) = \boldsymbol{Q}_{1,1}^{(\mathrm{a})}(k+1)\widehat{\boldsymbol{t}}_1^{(\mathrm{a})}(k+1) + \boldsymbol{Q}_{1,2}^{(\mathrm{a})}(k+1)\widehat{\boldsymbol{t}}_2^{(\mathrm{a})}(k+1). \tag{58}$$

命题 1 的证明见补充材料附录 B. 由该命题可知, 通过对 4×2 阶和 $2N\times 2$ 阶矩阵进行 **QR** 分解, 并求解两个 2×2 阶三角线性方程组即可获得式 (54) 的最优解 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k+1)$. 将序列 $\{\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k)\}_{1\leqslant k\leqslant+\infty}$ 的收敛值记为 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}$ (即 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})} = \lim_{k\to+\infty}\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k)$), 于是阶段 1 的定位结果为 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})} = [\boldsymbol{I}_3\ \ \boldsymbol{O}_{3\times 1}]\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}$, 其也是本文方法的中间定位结果. 算法 1 列出了阶段 1 的计算步骤.

Algorithm 1 Calculation procedure for phase 1

Step 1: Define a convergence threshold $\delta > 0$ and choose the initial value $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(0)$;
Step 2: Calculate $\boldsymbol{A}_{\theta_1}$ and $\boldsymbol{b}_{\theta_1}$ from (34);
Step 3: Solve the roots $\{\eta_{n,4}\}_{1\leqslant n\leqslant N}$ of (35) and compute $\boldsymbol{A}_{\theta_2}$ and $\boldsymbol{b}_{\theta_2}$ via (40);
Step 4: Calculate $\boldsymbol{A}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ and $\boldsymbol{b}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{a})})$ using (41);
Step 5: Set the iteration counter $k := 0$ and compute $(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1}$ according to (47) and (52);
Step 6: Calculate $\widehat{\boldsymbol{U}}^{(\mathrm{a})}(k+1)$ and perform **QR** decomposition on $(\widehat{\boldsymbol{U}}^{(\mathrm{a})}(k+1))^{\mathrm{T}}$ to obtain $\boldsymbol{Q}_{1,1}^{(\mathrm{a})}(k+1)$, $\boldsymbol{Q}_{1,2}^{(\mathrm{a})}(k+1)$ and $\boldsymbol{R}_1^{(\mathrm{a})}(k+1)$;
Step 7: Solve the first system of linear equations in (57) to get $\widehat{\boldsymbol{t}}_1^{(\mathrm{a})}(k+1)$;
Step 8: Calculate matrix $(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1/2}\boldsymbol{A}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{Q}_{1,2}^{(\mathrm{a})}(k+1)$ and perform **QR** decomposition on it to obtain $\boldsymbol{Q}_{2,1}^{(\mathrm{a})}(k+1)$ and $\boldsymbol{R}_2^{(\mathrm{a})}(k+1)$;
Step 9: Solve the second system of linear equations in (57) to get $\widehat{\boldsymbol{t}}_2^{(\mathrm{a})}(k+1)$;
Step 10: Compute $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k+1) = \boldsymbol{Q}_{1,1}^{(\mathrm{a})}(k+1)\widehat{\boldsymbol{t}}_1^{(\mathrm{a})}(k+1) + \boldsymbol{Q}_{1,2}^{(\mathrm{a})}(k+1)\widehat{\boldsymbol{t}}_2^{(\mathrm{a})}(k+1)$. If $\|\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k+1) - \widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k)\|_2 \leqslant \delta$, let $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})} = \widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k+1)$ and go to step 12; otherwise go to step 11;
Step 11: Increment the iteration counter $k := k+1$ and calculate $(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1}$ based on (47) and (52), and go to step 6;
Step 12: Let $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})} = [\boldsymbol{I}_3\ \ \boldsymbol{O}_{3\times 1}]\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}$ be the final estimation result in phase 1 and terminate the calculation.

注释8 上述优化算法需要设置迭代初始值, 这里给出两种有效方法. 第 1 种方法是针对式 (53) 中的目标函数, 将非加权形式的最小二乘估计值作为初始值, 如下所示:

$$\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(0) = (\boldsymbol{A}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))^{\dagger}\boldsymbol{b}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{a})}) = ((\boldsymbol{A}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))^{-1}(\boldsymbol{A}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_\theta(\widehat{\boldsymbol{\theta}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{a})}). \tag{59}$$

该初始值虽然同时利用方位角和仰角信息, 但舍弃了式 (53) 中的两个等式约束, 牺牲了两个自由度, 并且还受电离层虚高观测误差影响. 对此, 第 2 种方法直接从方位角伪线性观测方程式 (33) 出发, 将非加权形式的最小二乘估计值作为初始值, 如下所示:

$$\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\theta_1}^{\dagger}\boldsymbol{b}_{\theta_1}\\ \|\boldsymbol{A}_{\theta_1}^{\dagger}\boldsymbol{b}_{\theta_1}\|_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{A}_{\theta_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\theta_1})^{-1}\boldsymbol{A}_{\theta_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_{\theta_1}\\ \|(\boldsymbol{A}_{\theta_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\theta_1})^{-1}\boldsymbol{A}_{\theta_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_{\theta_1}\|_2^2\end{bmatrix}. \tag{60}$$

该初始值虽然未利用仰角信息, 但仅舍弃了 1 个等式约束 (即地球表面约束), 并且不受电离层虚高观测误差影响. 仿真实验结果表明, 两种初始值能给出一致的全局收敛性.

注释9 上述优化算法在每次迭代中都对加权矩阵 $(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1}$ 进行更新, 这有利于提高其估计精度, 从而增强算法在大观测误差条件下的抗噪性能. 另一方面, 虽然加权矩阵 $(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1}$ 的真实值难以获得, 但理论分析表明 [43], 在一阶误差分析框架下, 该矩阵的扰动误差并不会实质影响估计值 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}$ 的统计特性.

注释10 注意到式 (53) 也可以利用拉格朗日 (Lagrange) 乘子法进行求解, 但在双重二次等式约束下拉格朗日乘子法也需要迭代运算, 只是参与迭代的变量是拉格朗日乘子向量 [44, 45]. 本文的方法相比拉格朗日乘子法的优势体现在以下 3 个方面: (1) 拉格朗日乘子向量没有物理意义, 因此其迭代初始值不易获取, 而文中的方法是对向量 $\boldsymbol{t}_u$ 进行迭代, 更易于获得迭代初始值 (见注释 8); (2) 拉格朗日乘子法是对拉格朗日乘子向量进行迭代, 其在迭代过程中难以对矩阵 $(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1}$ 进行实时更新, 这不利于在大观测误差条件下获得良好的抗噪性能, 而文中的方法能够实时对矩阵 $(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1}$ 进行更新 (见注释 9); (3) 文中的方法在每次迭代中都以闭式解的形式给出迭代结果 (见命题 1), 其中并不需要设置迭代步长, 可避免优化步长因子, 从而降低迭代发散的风险. 仿真实验结果表明, 文中的方法在发生门限效应时具有更高的误差阈值.

4.2.3 理论性能分析

本小节推导估计值 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$ 的统计特性, 为此需要首先讨论序列 $\{\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k)\}_{1\leqslant k\leqslant+\infty}$ 的收敛性. 注意到向量 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k+1)$ 是式 (54) 的最优解, 而式 (54) 是由式 (53) 中的二次等式约束凸松弛为线性约束而形成的优化模型. 虽然本文提出利用矩阵 $\mathbf{QR}$ 分解对式 (54) 进行优化求解, 但决定序列 $\{\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k)\}_{1\leqslant k\leqslant+\infty}$ 的收敛性仍然是凸松弛过程, 因此文献 [23] 中的收敛性分析结论可直接应用于此. 根据该文献第 4 节中的结论可知, 当序列 $\{\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k)\}_{1\leqslant k\leqslant+\infty}$ 收敛, 并且收敛至向量 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}$ 时, 该向量就是式 (53) 的全局最优解. 这在一定程度上保证了序列 $\{\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k)\}_{1\leqslant k\leqslant+\infty}$ 的全局收敛性, 但还不能确保序列 $\{\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k)\}_{1\leqslant k\leqslant+\infty}$ 一定收敛. 事实上, 现有的优化理论尚无法保证非凸优化问题的迭代过程一定收敛, 因为这相当于解决了 "利用多项式时间求解 NP 难问题 [23]". 然而, 这并不影响文中的方法具有可靠的收敛性, 正如注释 10 中指出的, 该方法可以选择较好地迭代初始值, 能够实时更新加权矩阵 $(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1}$, 并且无需设置步长因子, 这些特点均有利于获得稳健、快速的收敛性能, 仿真实验结果也对此进行了验证.

下面在序列 $\{\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k)\}_{1\leqslant k\leqslant+\infty}$ 收敛的情况下推导估计值 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$ 的统计特性, 此时向量 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}$ 是式 (53) 的全局最优解. 将向量 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}$ 的估计误差记为 $\triangle\boldsymbol{t}_u^{(\mathrm{a})}=\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}-\boldsymbol{t}_u$, 利用一阶误差分析理论可知,

误差 $\triangle \boldsymbol{t}_u^{(\mathrm{a})}$ 是如下问题的最优解:

$$\begin{cases}\min\limits_{\triangle \boldsymbol{t}_u\in\mathbb{R}^{4\times 1}}\{(\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{\theta})\triangle \boldsymbol{t}_u-(\boldsymbol{C}_{\theta,\theta}\boldsymbol{\varepsilon}_\theta+\boldsymbol{C}_{\theta,h}\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{a})}))^{\mathrm{T}}(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1}(\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{\theta})\triangle \boldsymbol{t}_u-(\boldsymbol{C}_{\theta,\theta}\boldsymbol{\varepsilon}_\theta+\boldsymbol{C}_{\theta,h}\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{a})}))\}\\ \text{s.t. }\ (\triangle \boldsymbol{t}_u)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{t}_u=0,\\ \qquad (\triangle \boldsymbol{t}_u)^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{t}_u+\boldsymbol{\gamma}_2)=0.\end{cases}\tag{61}$$

令 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})=\left[\ \boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{t}_u \mid 2\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{t}_u+\boldsymbol{\gamma}_2\ \right]$, 于是式 (61) 的最优解为

$$\triangle \boldsymbol{t}_u^{(\mathrm{a})}=(\boldsymbol{I}_4-\boldsymbol{\Phi}_\theta\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})((\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_\theta\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}))^{-1}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\Phi}_\theta(\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{\theta}))^{\mathrm{T}}(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1}(\boldsymbol{C}_{\theta,\theta}\boldsymbol{\varepsilon}_\theta+\boldsymbol{C}_{\theta,h}\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{a})}),\tag{62}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}_\theta=((\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{\theta}))^{\mathrm{T}}(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1}\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{\theta}))^{-1}.\tag{63}$$

由式 (62) 可知, 误差向量 $\triangle \boldsymbol{t}_u^{(\mathrm{a})}$ 渐近服从零均值高斯分布, 因此向量 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}$ 是渐近无偏估计, 其均方误差矩阵为

$$\begin{aligned}\mathbf{MSE}(\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})})&=\boldsymbol{E}[\triangle \boldsymbol{t}_u^{(\mathrm{a})}(\triangle \boldsymbol{t}_u^{(\mathrm{a})})^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{\Phi}_\theta-\boldsymbol{\Phi}_\theta\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})((\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_\theta\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}))^{-1}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_\theta\\&=\boldsymbol{\Phi}_\theta^{1/2}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}[\boldsymbol{\Phi}_\theta^{1/2}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})]\boldsymbol{\Phi}_\theta^{1/2},\end{aligned}\tag{64}$$

其中 $\boldsymbol{\Pi}^{\perp}[\cdot]$ 表示矩阵列补空间上的正交投影矩阵. 根据向量 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$ 与 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}$ 之间的关系可知, 向量 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$ 也是渐近无偏估计, 其均方误差矩阵为

$$\begin{aligned}\mathbf{MSE}(\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})&=\boldsymbol{E}[(\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}-\boldsymbol{u})(\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}-\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{E}[\triangle\boldsymbol{u}^{(\mathrm{a})}(\triangle\boldsymbol{u}^{(\mathrm{a})})^{\mathrm{T}}]=[\boldsymbol{I}_3\ \ \boldsymbol{O}_{3\times1}]\mathbf{MSE}(\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})})\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_3\\ \boldsymbol{O}_{1\times3}\end{bmatrix}\\&=[\boldsymbol{I}_3\ \ \boldsymbol{O}_{3\times1}]\boldsymbol{\Phi}_\theta^{1/2}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}[\boldsymbol{\Phi}_\theta^{1/2}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})]\boldsymbol{\Phi}_\theta^{1/2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_3\\ \boldsymbol{O}_{1\times3}\end{bmatrix},\end{aligned}\tag{65}$$

其中 $\triangle\boldsymbol{u}^{(\mathrm{a})}=\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}-\boldsymbol{u}$ 表示向量 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$ 的估计误差. 进一步理论性能分析还表明, 在仅有短波二维 DOA 观测量的条件下, 向量 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$ 是渐近统计最优估计值, 具体可见如下命题.

命题2　假设仅有二维 DOA 观测量, 则向量 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$ 的估计精度可以逼近相应的 CRLB (即有 $\mathbf{CRLB}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u})$).

证明: 这里仅需要证明 $\mathbf{MSE}(\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})=\mathbf{CRLB}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u})$. 首先将式 (45) 和 (46) 代入式 (30) 中可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{a})})&=\left(\left(\frac{\partial\boldsymbol{t}_u}{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{\theta}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}_{\theta,\theta}\boldsymbol{\Omega}_\theta\boldsymbol{C}_{\theta,\theta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_{\theta,h}\boldsymbol{\Omega}_h^{(\mathrm{a})}\boldsymbol{C}_{\theta,h}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{\theta})\frac{\partial\boldsymbol{t}_u}{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right)^{-1}\\&=\left(\left(\frac{\partial\boldsymbol{t}_u}{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{\theta}))^{\mathrm{T}}(\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\theta))^{-1}\boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{\theta})\frac{\partial\boldsymbol{t}_u}{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right)^{-1}=\left(\left(\frac{\partial\boldsymbol{t}_u}{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_\theta^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{t}_u}{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right)^{-1},\end{aligned}\tag{66}$$

其中第 2, 3 个等号分别利用式 (52) 和 (63). 将式 (66) 代入式 (28) 中可得

$$\mathbf{CRLB}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})\left((\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{t}_u}{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_\theta^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{t}_u}{\partial\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})\right)^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}.\tag{67}$$

另一方面, 可以验证

$$\mathrm{range}\left[\underbrace{\boldsymbol{\Phi}_{\theta}^{1/2}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})}_{4\times 2}\right]\perp\mathrm{range}\left[\underbrace{\boldsymbol{\Phi}_{\theta}^{-1/2}\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})}_{4\times 2}\right]. \tag{68}$$

此时利用正交投影矩阵的性质 [46] 可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}[\boldsymbol{\Phi}_{\theta}^{1/2}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})] &= \boldsymbol{\Pi}\left[\boldsymbol{\Phi}_{\theta}^{-1/2}\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})\right]\\ &= \boldsymbol{\Phi}_{\theta}^{-1/2}\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})\left((\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{\theta}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})\right)^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{\theta}^{-1/2},\end{aligned} \tag{69}$$

其中 $\boldsymbol{\Pi}[\cdot]$ 表示矩阵列空间上的正交投影矩阵. 最后将式 (69) 代入式 (65) 中可得

$$\begin{aligned}\mathbf{MSE}(\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}) &= [\boldsymbol{I}_3\ \ \boldsymbol{O}_{3\times 1}]\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})\left((\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{\theta}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})\right)^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_3\\ \boldsymbol{O}_{1\times 3}\end{bmatrix}\\ &= \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})\left((\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{\theta}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})\right)^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{70}$$

其中第 2 个等号利用等式 $[\boldsymbol{I}_3\ \ \boldsymbol{O}_{3\times 1}]\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}} = \boldsymbol{I}_3$. 对比式 (67) 和 (70) 可知 $\mathbf{MSE}(\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}) = \mathbf{CRLB}^{(\mathrm{a})}(\boldsymbol{u})$. 证毕.

命题 2 表明向量 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$ 可以作为基于短波二维 DOA 观测量的渐近统计最优定位结果, 而在本文的定位问题中其可以看成是一个不可或缺的中间估计值.

注释11 由式 (70) 可知, $\mathbf{MSE}(\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})$ 并不是满秩矩阵, 这是因为向量 $\boldsymbol{u}$ 的自由度仅为 2, 其可由注释 1 中定义的向量 $\overline{\boldsymbol{u}}$ 来表征. 若将向量 $\overline{\boldsymbol{u}}$ 在阶段 1 的估计值记为 $\widehat{\overline{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})}$, 其估计误差为 $\triangle\overline{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})} = \widehat{\overline{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})} - \overline{\boldsymbol{u}}$, 则有 $\triangle\boldsymbol{u}^{(\mathrm{a})} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})\triangle\overline{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$, 并且向量 $\widehat{\overline{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})}$ 的均方误差矩阵为

$$\begin{aligned}\mathbf{MSE}(\widehat{\overline{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})}) &= \boldsymbol{E}[\triangle\overline{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}(\triangle\overline{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})^{\mathrm{T}}] = [\boldsymbol{I}_2\ \ \boldsymbol{O}_{2\times 1}]\mathbf{MSE}(\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_2\\ \boldsymbol{O}_{1\times 2}\end{bmatrix}\\ &= \left((\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{\theta}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{71}$$

由该式可知, $\mathbf{MSE}(\widehat{\overline{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})})$ 是满秩矩阵, 其将作为先验知识应用于阶段 2. 此外, 结合式 (70) 和 (71) 还可得 $\mathbf{MSE}(\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}) = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u})\mathbf{MSE}(\widehat{\overline{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})})(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}$.

4.3　阶段 2 的计算原理与方法

4.3.1　短波 TDOA 伪线性观测方程

本小节推导短波 TDOA 伪线性观测方程. 首先联合式 (14) 和 (15) 可得

$$\begin{aligned}&c\tau_m/2+\sqrt{a_{1,1}-a_{1,2}\cos(\beta_1^{(\mathrm{t})})}=\sqrt{a_{m,1}-a_{m,2}\cos(\beta_m^{(\mathrm{t})})}\\&\xRightarrow{\text{两边平方并移项}}\ a_{m,2}\cos(\beta_m^{(\mathrm{t})})=a_{1,2}\cos(\beta_1^{(\mathrm{t})})-c\tau_m\sqrt{a_{1,1}-a_{1,2}\cos(\beta_1^{(\mathrm{t})})}+a_{m,1}-a_{1,1}-c^2\tau_m^2/4\\&\xRightarrow{\text{代入式 (14)}}\ a_{m,2}\sqrt{4r_{\mathrm{o}}^2-\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{N+m}\|_2^2}=2r_{\mathrm{o}}\mu_m\\&\xRightarrow{\text{两边平方并移项}}\ 2a_{m,2}^2\boldsymbol{u}_{N+m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-a_{m,2}^2\|\boldsymbol{u}\|_2^2=4r_{\mathrm{o}}^2\mu_m^2+a_{m,2}^2(\|\boldsymbol{u}_{N+m}\|_2^2-4r_{\mathrm{o}}^2)\ \ (2\leqslant m\leqslant M),\end{aligned}\tag{72}$$

其中

$$\mu_m=a_{1,2}\cos(\beta_1^{(\mathrm{t})})-c\tau_m\sqrt{a_{1,1}-a_{1,2}\cos(\beta_1^{(\mathrm{t})})}+a_{m,1}-a_{1,1}-c^2\tau_m^2/4.\tag{73}$$

与式 (38) 类似, 式 (72) 最后一个等式中的 $\|\boldsymbol{u}\|_2^2$ 也是辅助变量. 然而, 严格来说式 (72) 并不是向量 $\left[\begin{smallmatrix}\boldsymbol{u}\\ \|\boldsymbol{u}\|_2^2\end{smallmatrix}\right]$ 的伪线性观测方程, 原因在于其右侧 μ_m 是向量 $\boldsymbol{u}$ 的非线性函数, 这意味着在仅有短波 TDOA 观测量的条件下, 难以通过基于伪线性观测方程的计算框架对辐射源进行定位, 这正是文献 [34] 中的短波 TDOA 定位方法采用网格选择求解的主要原因. 所幸的是, 文中的方法在阶段 1 已经给出向量 $\boldsymbol{u}$ 的一个中间估计值 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$ 及其统计特性, 因此可以利用估计值 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$ 代替 μ_m 中的向量 $\boldsymbol{u}$, 此时可将式 (72) 最后一个等式右侧看成是含有误差的已知量, 从而将式 (72) 作为向量 $\left[\begin{smallmatrix}\boldsymbol{u}\\ \|\boldsymbol{u}\|_2^2\end{smallmatrix}\right]$ 的伪线性观测方程进行处理.

将式 (72) 中的 $M-1$ 个方程合并可得如下矩阵形式:

$$\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \|\boldsymbol{u}\|_2^2\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u=\boldsymbol{b}_\tau(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u}),\tag{74}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})=\left[\begin{array}{c:c}2a_{2,2}^2\boldsymbol{u}_{N+2}^{\mathrm{T}}&-a_{2,2}^2\\2a_{3,2}^2\boldsymbol{u}_{N+3}^{\mathrm{T}}&-a_{3,2}^2\\\vdots&\vdots\\2a_{M,2}^2\boldsymbol{u}_{N+M}^{\mathrm{T}}&-a_{M,2}^2\end{array}\right],\quad \boldsymbol{b}_\tau(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})=\begin{bmatrix}4r_{\mathrm{o}}^2\mu_2^2+a_{2,2}^2(\|\boldsymbol{u}_{N+2}\|_2^2-4r_{\mathrm{o}}^2)\\4r_{\mathrm{o}}^2\mu_3^2+a_{3,2}^2(\|\boldsymbol{u}_{N+3}\|_2^2-4r_{\mathrm{o}}^2)\\\vdots\\4r_{\mathrm{o}}^2\mu_M^2+a_{M,2}^2(\|\boldsymbol{u}_{N+M}\|_2^2-4r_{\mathrm{o}}^2)\end{bmatrix},\tag{75}$$

其中 $\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})$ 表示伪线性观测矩阵; $\boldsymbol{b}_\tau(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})$ 表示伪线性观测向量; $\boldsymbol{t}_u=\left[\begin{smallmatrix}\boldsymbol{u}\\ \|\boldsymbol{u}\|_2^2\end{smallmatrix}\right]$ 表示扩维的位置向量, 其仍然服从式 (42) 中的双重二次等式约束.

注释12　注意到伪线性方程式 (74) 是由非线性方程 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{f}_\tau(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})$ 演变而来, 因此将该式代回式 (74) 中可以得到如下关于向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}$ 的恒等式:

$$\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \|\boldsymbol{u}\|_2^2\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u=\boldsymbol{b}_\tau(\boldsymbol{f}_\tau(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}),\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u}).\tag{76}$$

将式 (76) 两边分别对向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}$ 求导可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}=\boldsymbol{B}_{\tau,\tau}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})\boldsymbol{F}_{\tau,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})+\boldsymbol{B}_{\tau,u}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})\\&\Longrightarrow \boldsymbol{C}_{\tau,\tau}\boldsymbol{F}_{\tau,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})=\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}-\boldsymbol{C}_{\tau,u}\Longrightarrow \boldsymbol{F}_{\tau,u}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})=\boldsymbol{C}_{\tau,\tau}^{-1}\left(\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}-\boldsymbol{C}_{\tau,u}\right),\end{aligned}\tag{77}$$

$$\begin{aligned}&[\dot{\boldsymbol{A}}_{\tau,1}(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u\ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\tau,2}(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u\ \ \cdots\ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\tau,M}(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u]=\boldsymbol{B}_{\tau,\tau}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})\boldsymbol{F}_{\tau,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})+\boldsymbol{B}_{\tau,h}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})\\&\Longrightarrow \boldsymbol{C}_{\tau,\tau}\boldsymbol{F}_{\tau,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})+\boldsymbol{C}_{\tau,h}=\boldsymbol{O}_{(M-1)\times M}\Longrightarrow \boldsymbol{F}_{\tau,h}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})=-\boldsymbol{C}_{\tau,\tau}^{-1}\boldsymbol{C}_{\tau,h},\end{aligned}\tag{78}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}_{\tau,\tau}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})=\dfrac{\partial \boldsymbol{b}_\tau(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}},\ \boldsymbol{B}_{\tau,h}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})=\dfrac{\partial \boldsymbol{b}_\tau(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})}{\partial (\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})^{\mathrm{T}}},\\ \boldsymbol{B}_{\tau,u}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})=\dfrac{\partial \boldsymbol{b}_\tau(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}},\ \boldsymbol{C}_{\tau,\tau}=\boldsymbol{B}_{\tau,\tau}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u}),\\ \boldsymbol{C}_{\tau,h}=\boldsymbol{B}_{\tau,h}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})-[\dot{\boldsymbol{A}}_{\tau,1}(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u\ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\tau,2}(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u\ \ \cdots\ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\tau,M}(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u],\\ \boldsymbol{C}_{\tau,u}=\boldsymbol{B}_{\tau,u}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u}),\dot{\boldsymbol{A}}_{\tau,m}(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})=\dfrac{\partial \boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})}{\partial\langle \boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}\rangle_m}\ \ (1\leqslant m\leqslant M).\end{cases}\tag{79}$$

式 (77) 和 (78) 刻画了 TDOA 非线性观测模型与其伪线性观测模型之间隐含的代数关系, 对于阶段 2 定位方法的推导和理论性能分析至关重要.

4.3.2 估计准则及其求解方法

在实际定位中, 向量 $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}$, 以及 $\boldsymbol{u}$ 的真实值都是未知的, 仅能由观测值 $\widehat{\boldsymbol{\tau}}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})}$ 以及中间估计值 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$ 来代替. 基于式 (74) 可以定义如下误差向量:

$$\boldsymbol{\xi}_\tau=\boldsymbol{b}_\tau(\widehat{\boldsymbol{\tau}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})},\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})-\boldsymbol{A}_\tau(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u=\triangle\boldsymbol{b}_\tau-\triangle\boldsymbol{A}_\tau\boldsymbol{t}_u,\tag{80}$$

其中 $\triangle\boldsymbol{b}_\tau=\boldsymbol{b}_\tau(\widehat{\boldsymbol{\tau}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})},\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})-\boldsymbol{b}_\tau(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})$, $\triangle\boldsymbol{A}_\tau=\boldsymbol{A}_\tau(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})-\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})$. 利用一阶误差分析方法可得

$$\triangle\boldsymbol{b}_\tau\approx\boldsymbol{B}_{\tau,\tau}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})\boldsymbol{\varepsilon}_\tau+\boldsymbol{B}_{\tau,h}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{t})}+\boldsymbol{B}_{\tau,u}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})\triangle\boldsymbol{u}^{(\mathrm{a})},\tag{81}$$

$$\triangle\boldsymbol{A}_\tau\boldsymbol{t}_u\approx[\dot{\boldsymbol{A}}_{\tau,1}(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u\ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\tau,2}(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u\ \ \cdots\ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\tau,M}(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u]\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{t})}.\tag{82}$$

将式 (81) 和 (82) 代入式 (80) 中可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_\tau&\approx\boldsymbol{B}_{\tau,\tau}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})\boldsymbol{\varepsilon}_\tau+(\boldsymbol{B}_{\tau,h}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})-[\dot{\boldsymbol{A}}_{\tau,1}(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u\ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\tau,2}(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u\ \ \cdots\ \ \dot{\boldsymbol{A}}_{\tau,M}(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u])\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{t})}\\&\quad+\boldsymbol{B}_{\tau,u}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})},\boldsymbol{u})\triangle\boldsymbol{u}^{(\mathrm{a})}=\boldsymbol{C}_{\tau,\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_\tau+\boldsymbol{C}_{\tau,h}\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{t})}+\boldsymbol{C}_{\tau,u}\triangle\boldsymbol{u}^{(\mathrm{a})}.\end{aligned}\tag{83}$$

由式 (83) 可知, 误差向量 $\boldsymbol{\xi}_\tau$ 渐近服从零均值高斯分布, 并且其协方差矩阵为

$$\begin{aligned}\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\tau)&=\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\xi}_\tau\boldsymbol{\xi}_\tau^{\mathrm{T}}]\approx\boldsymbol{C}_{\tau,\tau}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_\tau\boldsymbol{\varepsilon}_\tau^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{C}_{\tau,\tau}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_{\tau,h}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{t})}(\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{t})})^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{C}_{\tau,h}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_{\tau,u}\boldsymbol{E}[\triangle\boldsymbol{u}^{(\mathrm{a})}(\triangle\boldsymbol{u}^{(\mathrm{a})})^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{C}_{\tau,u}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{C}_{\tau,\tau}\boldsymbol{\Omega}_\tau\boldsymbol{C}_{\tau,\tau}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_{\tau,h}\boldsymbol{\Omega}_h^{(\mathrm{t})}\boldsymbol{C}_{\tau,h}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_{\tau,u}\mathbf{MSE}(\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})\boldsymbol{C}_{\tau,u}^{\mathrm{T}}.\end{aligned}\tag{84}$$

此外, 阶段 1 的估计值 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$ 可以看成是向量 $\boldsymbol{t}_u$ 的观测量, 根据注释 1 的讨论可知, 该估计值可由向量 $\widehat{\overline{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})}$ 来表征, 为了在阶段 2 得到渐近统计最优估计值, 需要将向量 $\widehat{\overline{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})}$ 看成观测量, 于是引入

如下扩维误差向量:

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_{\tau}&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{\tau}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})},\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})\\ \widehat{\overline{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})\\ \overline{\boldsymbol{I}}_{2\times4}\end{bmatrix}\boldsymbol{t}_u=\widetilde{\boldsymbol{b}}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{\tau}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})},\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})-\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_{\tau}\\ \triangle\overline{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}\end{bmatrix}\\ &\approx\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{\tau,\tau}\boldsymbol{\varepsilon}_{\tau}+\boldsymbol{C}_{\tau,h}\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{t})}+\boldsymbol{C}_{\tau,u}\triangle\boldsymbol{u}^{(\mathrm{a})}\\ \triangle\overline{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}\end{bmatrix},\end{aligned}\tag{85}$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})\\ \overline{\boldsymbol{I}}_{2\times4}\end{bmatrix}$ 表示扩维伪线性观测矩阵; $\widetilde{\boldsymbol{b}}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{\tau}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})},\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{\tau}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})},\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})\\ \widehat{\overline{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})}\end{bmatrix}$ 表示扩维伪线性观测向量; $\overline{\boldsymbol{I}}_{2\times4}=[\boldsymbol{I}_2\ \ \boldsymbol{O}_{2\times2}]$. 由式 (85) 可知, 误差向量 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_{\tau}$ 渐近服从零均值高斯分布, 并且其协方差矩阵为

$$\mathbf{COV}(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_{\tau})=\boldsymbol{E}[\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_{\tau}\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_{\tau}^{\mathrm{T}}]=\begin{bmatrix}\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_{\tau}) & \boldsymbol{C}_{\tau,u}\boldsymbol{\varSigma}(\boldsymbol{u})\mathbf{MSE}(\widehat{\overline{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})})\\ \mathbf{MSE}(\widehat{\overline{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})})(\boldsymbol{\varSigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{\tau,u}^{\mathrm{T}} & \mathbf{MSE}(\widehat{\overline{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})})\end{bmatrix},\tag{86}$$

其中利用误差关系式 $\triangle\boldsymbol{u}^{(\mathrm{a})}=\boldsymbol{\varSigma}(\boldsymbol{u})\triangle\overline{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$.

联合式 (42), (85), (86) 可以建立如下含双重二次等式约束的估计准则:

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{t}_u\in\mathbb{R}^{4\times1}}\{J_{\tau}(\boldsymbol{t}_u)\}=\min\limits_{\boldsymbol{t}_u\in\mathbb{R}^{4\times1}}\{(\widetilde{\boldsymbol{b}}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{\tau}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})},\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})-\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u)^{\mathrm{T}}(\mathbf{COV}(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_{\tau}))^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{b}}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{\tau}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})},\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})\\ \qquad\qquad-\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u)\}\\ \text{s.t.}\ \ \boldsymbol{t}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varLambda}_1\boldsymbol{t}_u=r_{\mathrm{e}}^2,\\ \qquad\boldsymbol{t}_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varLambda}_2\boldsymbol{t}_u+\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_u=0,\end{cases}\tag{87}$$

其中 $(\mathbf{COV}(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_{\tau}))^{-1}$ 是加权矩阵, 其用于抑制观测误差 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\tau}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_h^{(\mathrm{t})}$, 以及估计误差 $\triangle\boldsymbol{u}^{(\mathrm{a})}$ 的影响. 与式 (53) 类似, 式 (87) 也可借鉴文献 [23] 中的时频差定位方法进行求解, 也就是对二次等式约束凸松弛, 使其变为线性等式约束. 假设已经得到第 k 次迭代结果 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k)$, 为了得到第 $k+1$ 次迭代结果 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k+1)$, 可以求解如下优化问题:

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{t}_u\in\mathbb{R}^{4\times1}}\{J_{\tau}(\boldsymbol{t}_u)\}=\min\limits_{\boldsymbol{t}_u\in\mathbb{R}^{4\times1}}\{(\widetilde{\boldsymbol{b}}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{\tau}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})},\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})-\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u)^{\mathrm{T}}(\mathbf{COV}(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_{\tau}))^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{b}}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{\tau}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})},\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})\\ \qquad\qquad-\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\tau}(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{t}_u)\}\\ \text{s.t.}\ \ \widehat{\boldsymbol{U}}^{(\mathrm{t})}(k+1)\boldsymbol{t}_u=\begin{bmatrix}r_{\mathrm{e}}^2\\ 0\end{bmatrix},\end{cases}\tag{88}$$

其中 $\widehat{\boldsymbol{U}}^{(\mathrm{t})}(k+1)=\begin{bmatrix}(\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varLambda}_1\\ (\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varLambda}_2+\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times4}$. 与式 (54) 类似, 式 (88) 可以通过两次矩阵 $\mathbf{QR}$ 分解得到最优闭式解, 具体可见如下命题.

命题3　假设矩阵 $(\widehat{\boldsymbol{U}}^{(\mathrm{t})}(k+1))^{\mathrm{T}}$ 的 $\mathbf{QR}$ 分解可以表示为

$$\begin{aligned}\underbrace{(\widehat{\boldsymbol{U}}^{(\mathrm{t})}(k+1))^{\mathrm{T}}}_{4\times2}&=\underbrace{\boldsymbol{Q}_1^{(\mathrm{t})}(k+1)}_{4\times4}\begin{bmatrix}\underbrace{\boldsymbol{R}_1^{(\mathrm{t})}(k+1)}_{2\times2}\\ \boldsymbol{O}_{2\times2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underbrace{\boldsymbol{Q}_{1,1}^{(\mathrm{t})}(k+1)}_{4\times2} & \underbrace{\boldsymbol{Q}_{1,2}^{(\mathrm{t})}(k+1)}_{4\times2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underbrace{\boldsymbol{R}_1^{(\mathrm{t})}(k+1)}_{2\times2}\\ \boldsymbol{O}_{2\times2}\end{bmatrix}\\ &=\boldsymbol{Q}_{1,1}^{(\mathrm{t})}(k+1)\boldsymbol{R}_1^{(\mathrm{t})}(k+1),\end{aligned}\tag{89}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_1^{(\mathrm{t})}(k+1)$ 表示正交矩阵; $\boldsymbol{R}_1^{(\mathrm{t})}(k+1)$ 表示上三角矩阵. 再假设矩阵 $(\mathbf{COV}(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_\tau))^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{A}}_\tau(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})$ $\boldsymbol{Q}_{1,2}^{(\mathrm{t})}(k+1)$ 的 $\mathbf{QR}$ 分解可以表示为

$$\begin{aligned}\underbrace{(\mathbf{COV}(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_\tau))^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{A}}_\tau(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{Q}_{1,2}^{(\mathrm{t})}(k+1)}_{(M+1)\times 2} &= \underbrace{\boldsymbol{Q}_2^{(\mathrm{t})}(k+1)}_{(M+1)\times(M+1)}\begin{bmatrix}\underbrace{\boldsymbol{R}_2^{(\mathrm{t})}(k+1)}_{2\times 2}\\ \boldsymbol{O}_{(M-1)\times 2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\underbrace{\boldsymbol{Q}_{2,1}^{(\mathrm{t})}(k+1)}_{(M+1)\times 2} & \underbrace{\boldsymbol{Q}_{2,2}^{(\mathrm{t})}(k+1)}_{(M+1)\times(M-1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underbrace{\boldsymbol{R}_2^{(\mathrm{t})}(k+1)}_{2\times 2}\\ \boldsymbol{O}_{(M-1)\times 2}\end{bmatrix}\\ &= \boldsymbol{Q}_{2,1}^{(\mathrm{t})}(k+1)\boldsymbol{R}_2^{(\mathrm{t})}(k+1),\end{aligned}\tag{90}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_2^{(\mathrm{t})}(k+1)$ 表示正交矩阵; $\boldsymbol{R}_2^{(\mathrm{t})}(k+1)$ 表示上三角矩阵. 接着令向量 $\widehat{\boldsymbol{t}}_1^{(\mathrm{t})}(k+1)$ 和 $\widehat{\boldsymbol{t}}_2^{(\mathrm{t})}(k+1)$ 分别满足

$$\begin{cases}(\boldsymbol{R}_1^{(\mathrm{t})}(k+1))^{\mathrm{T}}\widehat{\boldsymbol{t}}_1^{(\mathrm{t})}(k+1) = \begin{bmatrix}r_{\mathrm{e}}^2\\ 0\end{bmatrix},\\ \boldsymbol{R}_2^{(\mathrm{t})}(k+1)\widehat{\boldsymbol{t}}_2^{(\mathrm{t})}(k+1) = (\boldsymbol{Q}_{2,1}^{(\mathrm{t})}(k+1))^{\mathrm{T}}(\mathbf{COV}(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_\tau))^{-1/2}(\widehat{\boldsymbol{b}}_\tau(\widehat{\boldsymbol{\tau}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})},\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})\\ \qquad - \widetilde{\boldsymbol{A}}_\tau(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{Q}_{1,1}^{(\mathrm{t})}(k+1)\widehat{\boldsymbol{t}}_1^{(\mathrm{t})}(k+1)),\end{cases}\tag{91}$$

则式 (88) 的最优闭式解可以表示为

$$\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k+1) = \boldsymbol{Q}_{1,1}^{(\mathrm{t})}(k+1)\widehat{\boldsymbol{t}}_1^{(\mathrm{t})}(k+1) + \boldsymbol{Q}_{1,2}^{(\mathrm{t})}(k+1)\widehat{\boldsymbol{t}}_2^{(\mathrm{t})}(k+1).\tag{92}$$

命题 3 的证明同命题 1. 通过对 4×2 阶和 $(M+1)\times 2$ 阶矩阵进行 $\mathbf{QR}$ 分解, 并求解两个 2×2 阶三角线性方程组即可获得式 (88) 的最优解 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k+1)$. 若将序列 $\{\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k)\}_{1\leqslant k\leqslant +\infty}$ 的收敛值记为 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}$ (即 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})} = \lim_{k\to+\infty}\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k)$), 于是阶段 2 的定位结果为 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{t})} = [\boldsymbol{I}_3\ \ \boldsymbol{O}_{3\times 1}]\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}$, 其为文中新方法最终给出的定位结果. 算法 2 列出了阶段 2 的计算步骤.

注释13 阶段 2 的优化算法也需要设置迭代初始值, 可以针对式 (87) 中的目标函数, 将非加权形式的最小二乘估计值作为初始值, 如下所示:

$$\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(0) = (\widetilde{\boldsymbol{A}}_\tau(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})}))^{\dagger}\widetilde{\boldsymbol{b}}_\tau(\widehat{\boldsymbol{\tau}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})},\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}) = ((\widetilde{\boldsymbol{A}}_\tau(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})}))^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_\tau(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})}))^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{A}}_\tau(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})}))^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{b}}_\tau(\widehat{\boldsymbol{\tau}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})},\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}).\tag{93}$$

仿真实验结果表明, 利用该初始值能获得较好的全局收敛性. 此外, 与阶段 1 的优化算法类似, 阶段 2 的优化算法在每次迭代中也能对加权矩阵 $(\mathbf{COV}(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_\tau))^{-1}$ 实时更新, 从而增强算法在大观测误差条件下的抗噪性能.

注释14 虽然阶段 2 与阶段 1 中的优化算法具有类似的计算框架, 但阶段 1 仅需要二维 DOA 观测量即可实现, 其中没有体现协同, 而阶段 2 在仅有 TDOA 观测量的条件下无法实现, 其需要阶段 1 的估计值及其统计特性, 换言之其需要协同 TDOA 和二维 DOA 两种观测量方可实现. 因此, 两个阶段缺一不可, 而且它们是串行实现, 不能并行展开. 阶段 2 蕴含协同处理思想, 这种协同处理包含两个层面. 第 1 个层面体现在式 (85) 中, 其直接利用阶段 1 的估计值 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$ 构造扩维的伪线性观测方程, 目的在于获得协同增益, 也就是提高定位精度, 可称这种协同的作用是 "锦上添花"; 第 2 个层面体现在式 (80) 中, 其利用阶段 1 的估计值 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$ 将 $\boldsymbol{b}_\tau(\widehat{\boldsymbol{\tau}},\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})},\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})$ 看成是含有误差的已知观测向量, 从而利

Algorithm 2 Calculation procedure for phase 2

Step 1: Define a convergence threshold $\delta > 0$ and choose the initial value $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(0)$;
Step 2: Compute $\boldsymbol{A}_\tau(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})$ and $\boldsymbol{b}_\tau(\widehat{\boldsymbol{\tau}}, \widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})}, \widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})$ using the intermediate estimate $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})}$ and (75);
Step 3: Compute $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\tau(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})$ and $\widetilde{\boldsymbol{b}}_\tau(\widehat{\boldsymbol{\tau}}, \widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})}, \widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{a})})$ using the intermediate estimate $\widehat{\widehat{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})}$ and (85);
Step 4: Set the iteration counter $k := 0$ and calculate $\mathbf{MSE}(\widehat{\widehat{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})})$ and $\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\tau)$ from (71) and (84), respectively;
Step 5: Compute $(\mathbf{COV}(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_\tau))^{-1}$ via (86);
Step 6: Calculate $\widehat{\boldsymbol{U}}^{(\mathrm{t})}(k+1)$ and perform **QR** decomposition on $(\widehat{\boldsymbol{U}}^{(\mathrm{t})}(k+1))^{\mathrm{T}}$ to get $\boldsymbol{Q}_{1,1}^{(\mathrm{t})}(k+1)$, $\boldsymbol{Q}_{1,2}^{(\mathrm{t})}(k+1)$ and $\boldsymbol{R}_1^{(\mathrm{t})}(k+1)$;
Step 7: Solve the first system of linear equations in (91) to get $\widehat{\boldsymbol{t}}_1^{(\mathrm{t})}(k+1)$;
Step 8: Calculate matrix $(\mathbf{COV}(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_\tau))^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{A}}_\tau(\widehat{\boldsymbol{h}}^{(\mathrm{t})})\boldsymbol{Q}_{1,2}^{(\mathrm{t})}(k+1)$ and perform **QR** decomposition on it to obtain $\boldsymbol{Q}_{2,1}^{(\mathrm{t})}(k+1)$ and $\boldsymbol{R}_2^{(\mathrm{t})}(k+1)$;
Step 9: Solve the second system of linear equations in (91) to get $\widehat{\boldsymbol{t}}_2^{(\mathrm{t})}(k+1)$;
Step 10: Compute $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k+1) = \boldsymbol{Q}_{1,1}^{(\mathrm{t})}(k+1)\widehat{\boldsymbol{t}}_1^{(\mathrm{t})}(k+1) + \boldsymbol{Q}_{1,2}^{(\mathrm{t})}(k+1)\widehat{\boldsymbol{t}}_2^{(\mathrm{t})}(k+1)$. If $\|\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k+1) - \widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k)\|_2 \leqslant \delta$, let $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})} = \widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k+1)$ and go to step 13; otherwise go to step 11;
Step 11: Increment the iteration counter $k := k+1$ and calculate $\mathbf{MSE}(\widehat{\widehat{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})})$ and $\mathbf{COV}(\boldsymbol{\xi}_\tau)$ from (71) and (84), respectively;
Step 12: Compute $(\mathbf{COV}(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_\tau))^{-1}$ via (86) and go to step 6;
Step 13: Let $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{t})} = [\boldsymbol{I}_3 \ \ \boldsymbol{O}_{3\times1}]\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}$ be the final estimation result in phase 2 and terminate the calculation.

用伪线性观测模型对向量 $\boldsymbol{t}_u$ 进行求解, 若没有此中间估计值, 就不能将式 (74) 作为向量 $\boldsymbol{t}_u$ 的伪线性观测模型, 后续的计算过程也都无法实现, 因此可称这种协同的作用是 “雪中送炭”.

注释15　合并算法 1 和 2 即为文中的短波 DOA/TDOA 协同定位新方法, 注意到该方法最终给出的估计值 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{t})}$ 是辐射源在 ECEF 坐标系下的定位结果, 若要得到地理坐标系下的定位结果 (即经纬度), 可以直接利用文献 [31] 中的方法进行转化, 限于篇幅这里不再阐述其具体计算过程.

4.3.3　理论性能分析

本小节推导估计值 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{t})}$ 的统计特性, 为此需要首先讨论序列 $\{\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k)\}_{1\leqslant k\leqslant+\infty}$ 的收敛性. 由于式 (88) 的凸松弛过程与式 (54) 相近, 这意味着序列 $\{\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k)\}_{1\leqslant k\leqslant+\infty}$ 与序列 $\{\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{a})}(k)\}_{1\leqslant k\leqslant+\infty}$ 具有相同的收敛性, 都遵循文献 [23] 中的结论. 由此可知, 当序列 $\{\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k)\}_{1\leqslant k\leqslant+\infty}$ 收敛, 并且收敛至向量 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}$ 时, 向量 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}$ 就是式 (87) 的全局最优解.

下面在序列 $\{\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}(k)\}_{1\leqslant k\leqslant+\infty}$ 收敛的情况下推导估计值 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}$ 和 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{t})}$ 的统计特性, 此时向量 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}$ 是式 (87) 的全局最优解. 将向量 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}$ 的估计误差记为 $\triangle\boldsymbol{t}_u^{(\mathrm{t})} = \widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})} - \boldsymbol{t}_u$, 利用第 4.2.3 小节中的理论性能分析方法可知, 向量 $\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}$ 是渐近无偏估计, 其均方误差矩阵为

$$\begin{aligned}\mathbf{MSE}(\widehat{\boldsymbol{t}}_u^{(\mathrm{t})}) &= \boldsymbol{E}[\triangle\boldsymbol{t}_u^{(\mathrm{t})}(\triangle\boldsymbol{t}_u^{(\mathrm{t})})^{\mathrm{T}}] = \widetilde{\boldsymbol{\varPhi}}_\tau - \widetilde{\boldsymbol{\varPhi}}_\tau\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})((\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{\varPhi}}_\tau\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}))^{-1}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{\varPhi}}_\tau \\ &= \widetilde{\boldsymbol{\varPhi}}_\tau^{1/2}\boldsymbol{\varPi}^{\perp}[\widetilde{\boldsymbol{\varPhi}}_\tau^{1/2}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})]\widetilde{\boldsymbol{\varPhi}}_\tau^{1/2},\end{aligned} \tag{94}$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{\varPhi}}_\tau = ((\widetilde{\boldsymbol{A}}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}))^{\mathrm{T}}(\mathbf{COV}(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_\tau))^{-1}\widetilde{\boldsymbol{A}}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}))^{-1}. \tag{95}$$

补充材料附录 C 证明矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{\varPhi}}_\tau$ 可以表示为

$$\widetilde{\boldsymbol{\varPhi}}_\tau = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{(\mathrm{t})})^{-1}\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}) - (\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{(\mathrm{t})})^{-1}\boldsymbol{C}_{\tau,u}\boldsymbol{\varSigma}(\boldsymbol{u})\overline{\boldsymbol{I}}_{2\times4} \\ -\overline{\boldsymbol{I}}_{2\times4}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\varSigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{\tau,u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{(\mathrm{t})})^{-1}\boldsymbol{A}_\tau(\boldsymbol{h}^{(\mathrm{t})}) + \overline{\boldsymbol{I}}_{2\times4}^{\mathrm{T}}(\mathbf{MSE}(\widehat{\widehat{\boldsymbol{u}}}^{(\mathrm{a})}))^{-1}\overline{\boldsymbol{I}}_{2\times4} \\ +\overline{\boldsymbol{I}}_{2\times4}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\varSigma}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{\tau,u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{(\mathrm{t})})^{-1}\boldsymbol{C}_{\tau,u}\boldsymbol{\varSigma}(\boldsymbol{u})\overline{\boldsymbol{I}}_{2\times4} \end{pmatrix}^{-1}, \tag{96}$$

其中

$$\boldsymbol{C}^{(\mathrm{t})}=\boldsymbol{C}_{\tau,\tau}\boldsymbol{\Omega}_{\tau}\boldsymbol{C}_{\tau,\tau}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_{\tau,h}\boldsymbol{\Omega}_{h}^{(\mathrm{t})}\boldsymbol{C}_{\tau,h}^{\mathrm{T}}. \tag{97}$$

根据向量 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{t})}$ 与 $\widehat{\boldsymbol{t}}_{u}^{(\mathrm{t})}$ 之间的关系可知, 向量 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{t})}$ 也是渐近无偏估计, 其均方误差矩阵为

$$\begin{aligned}\mathbf{MSE}(\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{t})})&=\boldsymbol{E}[(\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{t})}-\boldsymbol{u})(\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{t})}-\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{E}[\triangle\boldsymbol{u}^{(\mathrm{t})}(\triangle\boldsymbol{u}^{(\mathrm{t})})^{\mathrm{T}}]=[\boldsymbol{I}_3\ \ \boldsymbol{O}_{3\times1}]\mathbf{MSE}(\widehat{\boldsymbol{t}}_{u}^{(\mathrm{t})})\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_3\\ \boldsymbol{O}_{1\times3}\end{bmatrix}\\&=[\boldsymbol{I}_3\ \ \boldsymbol{O}_{3\times1}]\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\tau}^{1/2}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}[\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\tau}^{1/2}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})]\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\tau}^{1/2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_3\\ \boldsymbol{O}_{1\times3}\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{98}$$

式中 $\triangle\boldsymbol{u}^{(\mathrm{t})}=\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{t})}-\boldsymbol{u}$ 表示向量 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{t})}$ 的估计误差. 进一步理论性能分析还表明, 在协同短波 DOA/TDOA 观测量的条件下, 向量 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{t})}$ 是渐近统计最优估计值, 具体可见如下命题.

命题4 假设存在二维 DOA 和 TDOA 两种观测量, 则向量 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{t})}$ 的估计精度可以逼近相应的 CRLB (即有 $\mathbf{CRLB}(\boldsymbol{u})$).

命题 4 的证明见补充材料附录 D, 该命题表明向量 $\widehat{\boldsymbol{u}}^{(\mathrm{t})}$ 可以作为协同短波 DOA/TDOA 观测量的渐近统计最优定位结果.

注释16 最后需要指出的是, 影响定位精度的因素除了定位方法外, 还有观测站位置的布设方式, 这本质上是个优化问题 [47,48]. 由于文中的定位方法具有渐近统计最优性, 因此可以利用 CRLB 矩阵构造优化准则. 将短波辐射源可能出现的区域记 $\boldsymbol{V}$, 短波辐射源在该区域内出现的先验概率密度函数记为 $p_u(\boldsymbol{u})$, 此时观测站位置的最优布设问题可以表示为 [47,48]

$$\begin{aligned}&\{\boldsymbol{O}_{1,\mathrm{opt}},\boldsymbol{O}_{2,\mathrm{opt}},\ldots,\boldsymbol{O}_{N,\mathrm{opt}},\boldsymbol{O}_{N+1,\mathrm{opt}},\boldsymbol{O}_{N+2,\mathrm{opt}},\ldots,\boldsymbol{O}_{N+M,\mathrm{opt}}\}\\&=\operatorname{argmax}\left\{\int_{\boldsymbol{V}}\det[(\mathbf{CRLB}(\boldsymbol{u}))^{-1}]p_u(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}\right\}.\end{aligned} \tag{99}$$

相比视距定位场景, 短波超视距观测站的建设成本更高, 尤其是安装天线阵列时, 所以在实际应用时更常考虑优选短波观测站, 这意味着式 (99) 中的参数空间是一个有限离散集合, 此时可以利用遗传算法、蚁群算法等智能算法进行寻优计算. 如果该离散集合空间较大, 可以设置一些约束条件来压缩参数空间, 例如, 在选择 DOA 交汇定位体制的观测站时, 应尽可能使定位区域在两个观测站连线的法线方向上, 在选择 TDOA 交汇定位体制的观测站时, 应尽可能拉大观测站基线, 以形成规则的正三角形或者正四边形. 具体的算法设计将在后续的研究中展开讨论.

5 仿真分析

本节通过仿真实验验证新方法的定位性能, 在不做其他说明的情况下, 基础仿真实验参数如下: 短波辐射源经度为 134.56°, 纬度为 36.67°, 其在 ECEF 坐标系下的位置向量为 $\boldsymbol{u}=[-3593.8\ \ 3649.5\ \ 3788.1]^{\mathrm{T}}$ km, 现有 7 个短波观测站接收到该短波信号, 其中 3 个观测站隶属 DOA 交汇定位体制, 4 个观测站隶属 TDOA 交汇定位体制, 它们的经纬度以及信号到达观测站对应的电离层虚高数值见表 1. DOA, TDOA 以及电离层虚高观测误差均服从零均值高斯分布, 并且协方差矩阵分别为 $\boldsymbol{\Omega}_{\theta}=\sigma_{\theta}^2\boldsymbol{I}_6$, $\boldsymbol{\Omega}_{\tau}=\sigma_{\tau}^2(\boldsymbol{I}_3+\boldsymbol{1}_{3\times3})/2$, 以及 $\boldsymbol{\Omega}_{h}=\sigma_{h}^2\boldsymbol{I}_7$, 其中 σ_{θ}, σ_{τ}, 以及 σ_{h} 表示相应的标准差.

表 1 短波观测站的经纬度与电离层虚高数值

Table 1 Longitude, latitude and ionospheric virtual height of shortwave observer

Shortwave observer	DOA-1	DOA-2	DOA-3	TDOA-1	TDOA-2	TDOA-3	TDOA-4
Longitude (°)	116.23	112.54	116.00	123.47	114.54	114.03	119.27
Latitude (°)	40.22	33.00	29.71	41.80	38.04	30.58	26.05
Ionospheric virtual height (km)	340	390	370	310	350	385	365

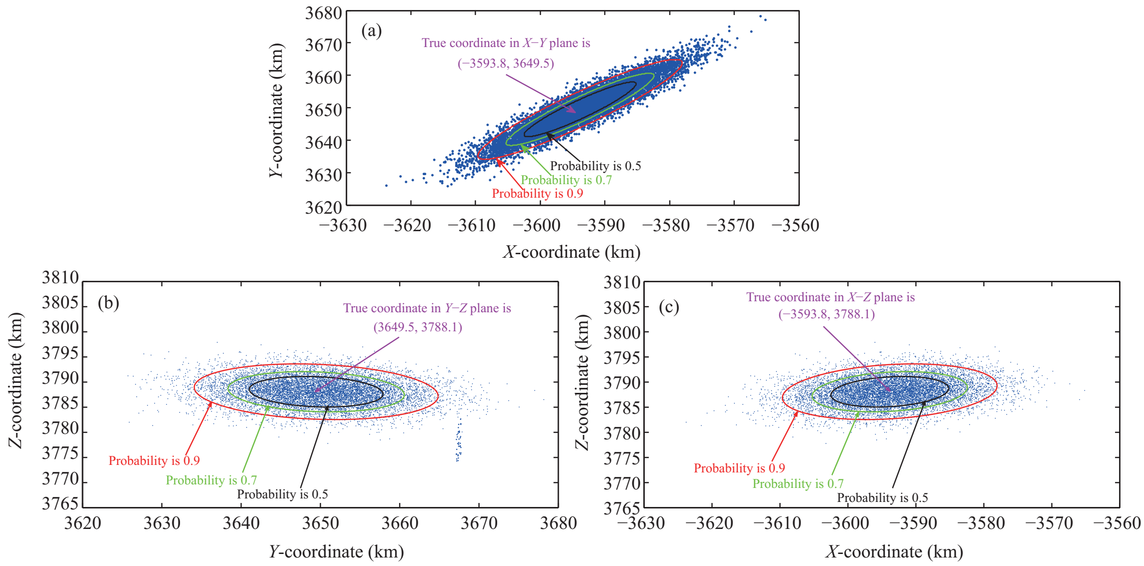

图 3 (网络版彩图) 新方法的定位结果与定位椭圆曲线

Figure 3 (Color online) Positioning results and elliptic curves of the new method. Positioning results in (a) X-Y plane, (b) Y-Z plane, and (c) X-Z plane

5.1 验证新方法的有效性

将 3 种标准差分别设为 $\sigma_\theta = 0.3°$, $\sigma_\tau = (2/c)$ s, 以及 $\sigma_h = 3$ km, 并进行 5000 次蒙特卡罗 (Monte Carlo) 实验. 图 3 给出了在 ECEF 坐标系下新方法的定位结果与定位椭圆曲线, 其中图 3(a)~(c) 分别是 X-Y 平面、Y-Z 平面, 以及 X-Z 平面上的定位结果.

从图 3 中可以看出, 新方法的定位结果散点图的形状与定位椭圆的形状一致, 并且大概率对应大面积椭圆, 小概率对应小面积椭圆, 从而验证了新方法的有效性.

5.2 验证新方法的全局收敛性和渐近统计最优性

首先验证新方法的全局收敛性. 将 3 种标准差分别设为 $\sigma_\theta = 0.2°$, $\sigma_\tau = (0.3/c)$ s, 以及 $\sigma_h = 2$ km. 改变辐射源位置坐标, 在经纬度 $[134° \ \ 136°] \times [34° \ \ 36°]$ 区域内随机选取 10 个位置点. 图 4 给出了新方法在单次蒙特卡罗实验中辐射源 X 轴坐标估计值的迭代收敛曲线, 其中图 4(a) 和 (b) 分别是阶段 1 和 2 的单次迭代收敛曲线. 需要指出的是, 图 4 中的全局最优值是针对式 (53) 和 (87) 中的目标函数, 在全域采用精细化网格搜索得到的最优结果. 限于篇幅, 这里仅给出 X 轴坐标的收敛曲线, 其他两个坐标的收敛性能与其接近. 从图 4 中可以看出, 新方法具有较好的全局收敛性和较快的收敛速度, 一般迭代 10 次以内即可收敛.

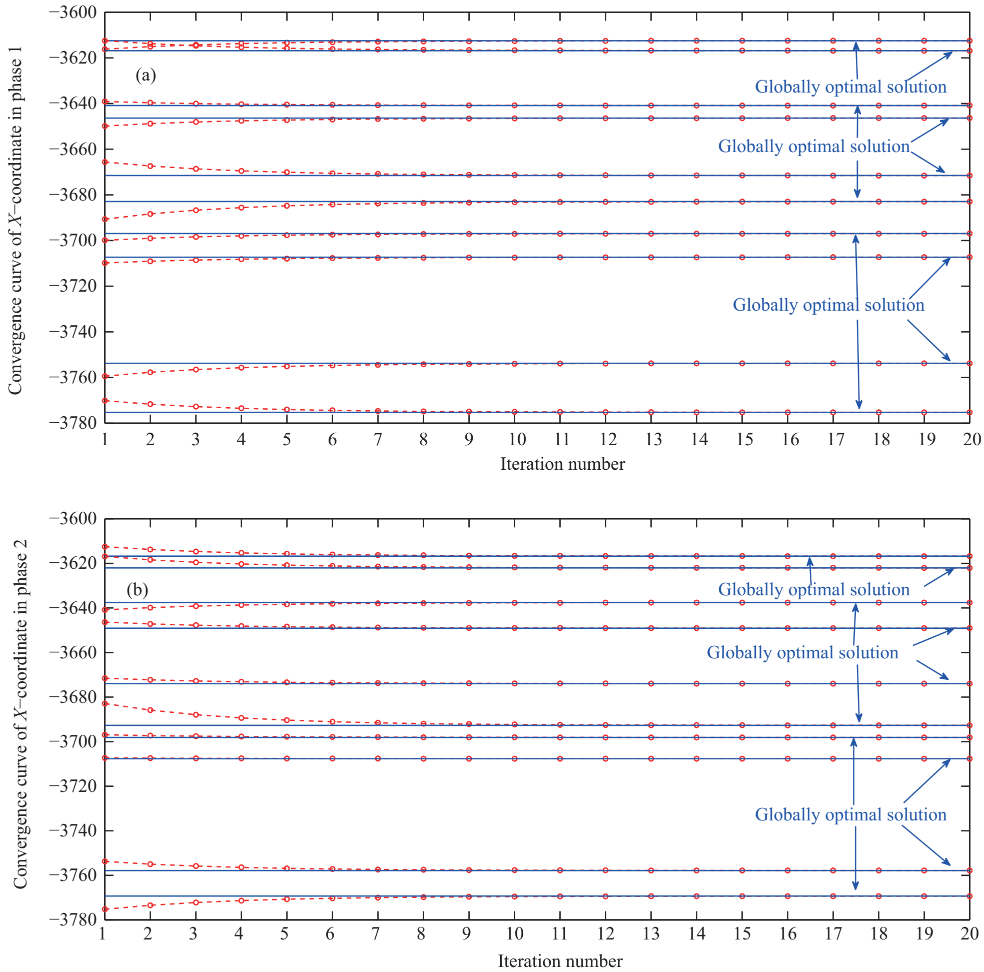

图 4 (网络版彩图) 新方法的 X 轴坐标的迭代收敛曲线

Figure 4 (Color online) Iterative convergence curve of X-coordinate of the new method. Convergence curve for (a) phase 1 and (b) phase 2

接着验证新方法的渐近统计最优性. 改变辐射源位置坐标, 并在经纬度 [134° 136°] × [34° 36°] 区域内随机选取 30 个位置点. 首先将 TDOA 和电离层虚高观测误差标准差分别设为 $\sigma_\tau = (0.3/c)$ s 和 $\sigma_h = 2$ km, 图 5 给出了新方法的定位均方根误差及其 CRLB 随着标准差 σ_θ 的变化箱线图; 然后将 DOA 和电离层虚高观测误差标准差分别设为 $\sigma_\theta = 0.2°$ 和 $\sigma_h = 2$ km, 图 6 给出了新方法的定位均方根误差及其 CRLB 随着标准差 σ_τ 的变化箱线图; 最后将 DOA 和 TDOA 观测误差标准差分别设为 $\sigma_\theta = 0.2°$ 和 $\sigma_\tau = (0.3/c)$ s, 图 7 给出了新方法的定位均方根误差及其 CRLB 随着标准差 σ_h 的变化箱线图. 需要指出的是, 图中的均方根误差是进行 5000 次蒙特卡罗实验的统计结果, 相应的计算公式为 $\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{5000}\sum_{n=1}^{5000}\|\hat{\boldsymbol{u}}^{(n)} - \boldsymbol{u}\|_2^2}$, 其中 $\hat{\boldsymbol{u}}^{(n)}$ 表示在第 n 次蒙特卡罗实验中得到的最终定位结果.

从图 5~7 中可以看出: (1) 新方法的定位均方根误差能渐近逼近相应的 CRLB, 从而验证了新方法的渐近统计最优性, 同时也验证了文中理论性能分析的有效性; (2) 新方法的渐近统计最优性对辐射源位置坐标具有一定的泛化性.

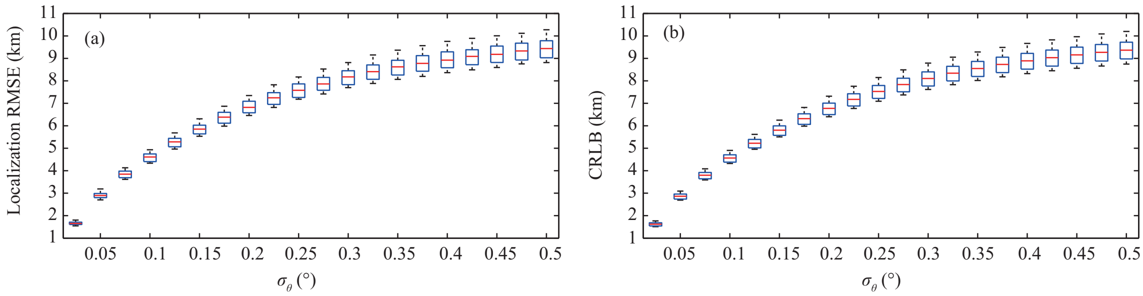

图 5　(网络版彩图) 新方法的定位均方根误差及其 CRLB 随着标准差 σ_θ 的变化箱线图

Figure 5　(Color online) Boxplot of RMSE of the new method and the CRLB as a function of standard deviation σ_θ. (a) RMSE of the new method; (b) CRLB

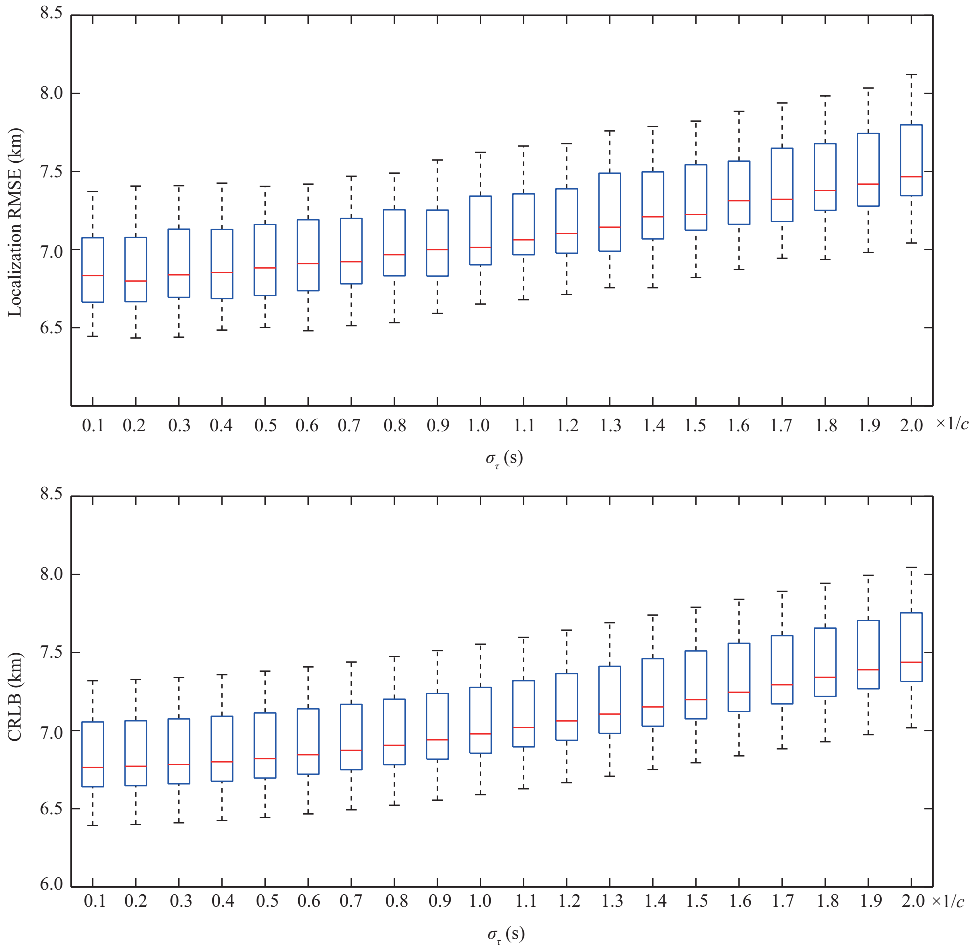

图 6　(网络版彩图) 新方法的定位均方根误差及其 CRLB 随着标准差 σ_τ 的变化箱线图

Figure 6　(Color online) Boxplot of RMSE of the new method and the CRLB as a function of standard deviationσ_τ. (a) RMSE of the new method; (b) CRLB

本小节最后验证新方法的渐近统计最优性对观测站位置坐标也具有一定的泛化性, 为此需要改变观测站位置坐标, 并统计定位均方根误差. 下面以表 1 给出的位置坐标为中心, 在经纬度 $\pm1^\circ$ 范围内

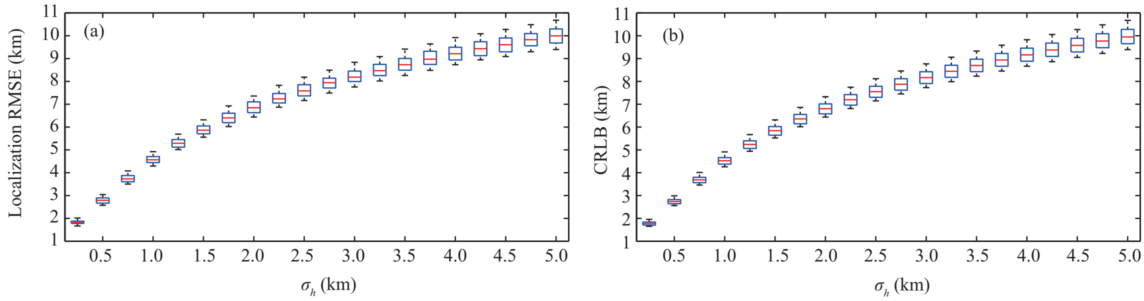

图 7 (网络版彩图) 新方法的定位均方根误差及其 CRLB 随着标准差 σ_h 的变化箱线图

Figure 7 (Color online) Boxplot of RMSE of the new method and the CRLB as a function of standard deviation σ_h. (a) RMSE of the new method; (b) CRLB

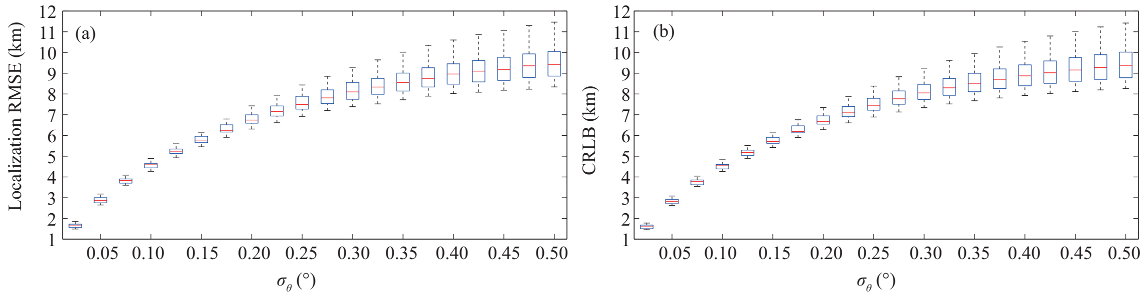

图 8 (网络版彩图) 新方法的定位均方根误差及其 CRLB 随着标准差 σ_θ 的变化箱线图 (改变观测站位置坐标)

Figure 8 (Color online) Boxplot of RMSE of the new method and the CRLB as a function of standard deviation σ_θ (changing observer locations). (a) RMSE of the new method; (b) CRLB

随机选择 30 组观测站位置坐标, 此时辐射源位置坐标固定不变. 将 TDOA 和电离层虚高观测误差标准差分别设为 $\sigma_\tau = (0.3/c)$ s 和 $\sigma_h = 2$ km, 图 8 给出了新方法的定位均方根误差及其 CRLB 随着标准差 σ_θ 的变化箱线图. 从图 8 中可以得到所期望的结论.

5.3 验证新方法的性能优势

下面将协同定位新方法与其他定位方法以及短波 DOA 定位方法和短波 TDOA 定位方法进行比较, 用于验证新方法能获得较高的协同增益. 所比较的方法包括文献 [21] 中的约束 Taylor (记为 C-Taylor) 级数迭代定位方法和文献 [34] 中的网格选择定位方法. C-Taylor 级数迭代定位方法是针对非线性观测模型提出的最大似然求解方法, 可推广应用于短波定位, 由于其中没有伪线性化过程, 因此仅能根据先验知识确定迭代初始值, 这里给出 "初始值为真实值" 和 "初始值为随机值" 两种情形下的定位结果. 此外, 网格选择定位方法仅适用于短波 TDOA 定位问题.

首先将 TDOA 和电离层虚高观测误差标准差分别设为 $\sigma_\tau = (0.3/c)$ s 和 $\sigma_h = 2$ km, 图 9(a) 给出了定位均方根误差随着标准差 σ_θ 的变化曲线; 然后将 DOA 和电离层虚高观测误差标准差分别设为 $\sigma_\theta = 0.2°$ 和 $\sigma_h = 2$ km, 图 9(b) 给出了定位均方根误差随着标准差 σ_τ 的变化曲线; 接着将 DOA 和 TDOA 观测误差标准差分别设为 $\sigma_\theta = 0.2°$ 和 $\sigma_\tau = (0.3/c)$ s, 图 9(c) 给出了定位均方根误差随着标准差 σ_h 的变化曲线; 最后改变辐射源经度, 经度越大, 辐射源与观测站间距就越大, 将 3 种标准差分别设为 $\sigma_\theta = 0.2°$, $\sigma_\tau = (0.3/c)$ s, 以及 $\sigma_h = 2$ km, 图 9(d) 给出了定位均方根误差随着辐射源经度 ω_1 的变化曲线.

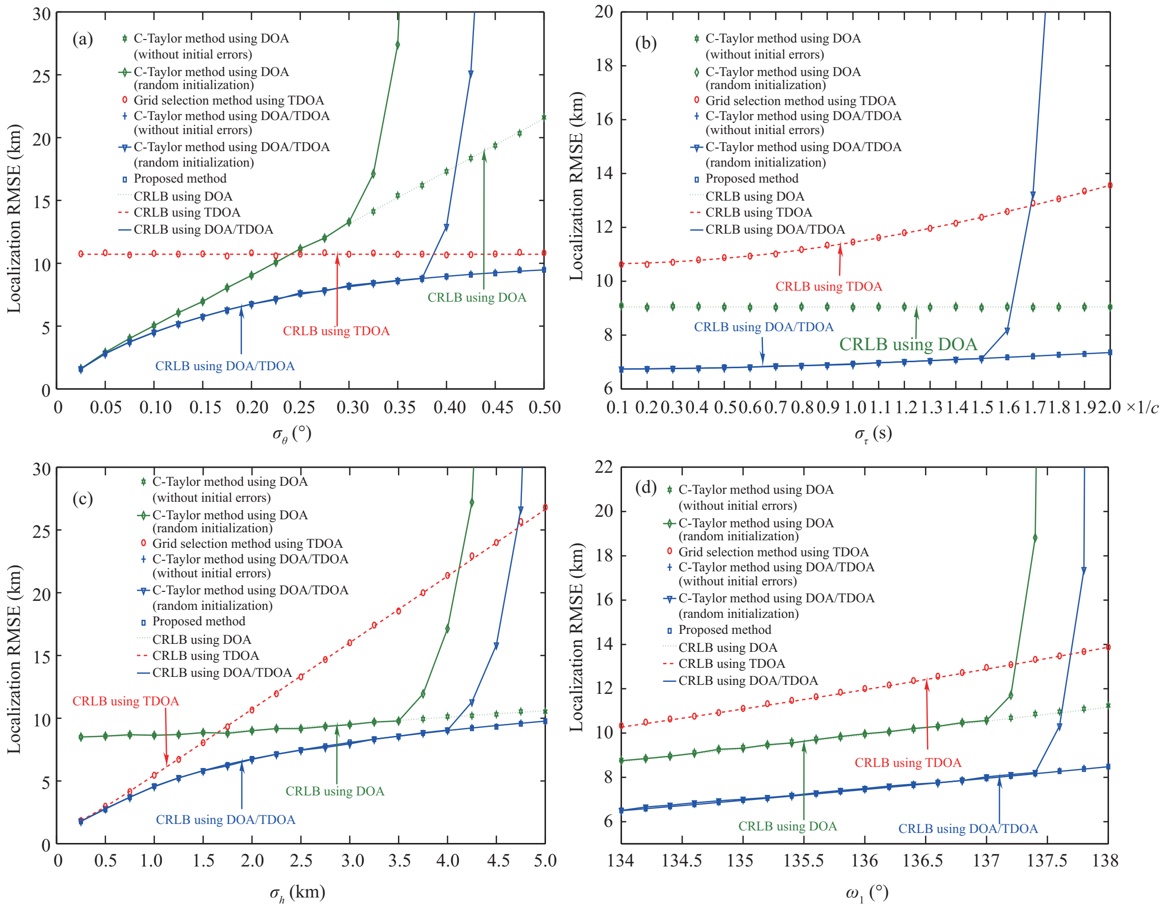

图 9　(网络版彩图) (a) 定位均方根误差随着标准差 σ_θ 的变化曲线; (b) 定位均方根误差随着标准差 σ_τ 的变化曲线; (c) 定位均方根误差随着标准差 σ_h 的变化曲线; (d) 定位均方根误差随着辐射源经度 ω_1 的变化曲线

Figure 9　(Color online) Localization RMSE as a function of (a) standard deviation σ_θ, (b) standard deviation σ_τ, (c) standard deviation σ_h, and (d) emitter longitude ω_1

从图 9 中可以看出: (1) 新方法的定位均方根误差能够渐近逼近相应的 CRLB, 从而再次验证了其渐近统计最优性; (2) 当 C-Taylor 级数迭代定位方法的初始值取随机值时, 其产生 “门限效应” 的误差阈值明显低于新方法, 当该方法的初始值取真实值时, 其定位精度与新方法接近, 然而将真实值作为初始值在实际中难以实现, 并且其计算复杂度也高于新方法; (3) 网格选择定位方法的估计均方误差能渐近逼近仅基于 TDOA 观测量的 CRLB; (4) 相比短波 DOA 定位方法和短波 TDOA 定位方法, 新方法能获得较高的协同增益, 并且对辐射源位置坐标具有一定的泛化性, 其性能增益会随着 3 种标准差以及辐射源与观测站间距的增加而增大.

本小节最后观察新方法在大观测误差条件下的抗噪性能, 并将其与文献 [45] 给出的拉格朗日乘子优化方法进行比较. 将 3 种标准差分别设为 $\sigma_\theta = 0.1\alpha^\circ$, $\sigma_\tau = (0.5\alpha/c)$ s, 以及 $\sigma_h = 10$ km, 并将参数 α 从 1 增加至 20, 因此 σ_θ 的最大值为 2°, σ_τ 的最大值为 $(10/c)$ s, 图 10 给出了定位均方根误差随着参数 α 的变化曲线.

从图 10 中可以看出, 当参数 α 较小时, 两种方法的性能都能逼近 CRLB, 但是随着参数 α 的逐渐增大, 两种方法都产生了门限效应, 这是由定位问题的非线性本质所引起的. 然而, 通过比较不难发现,

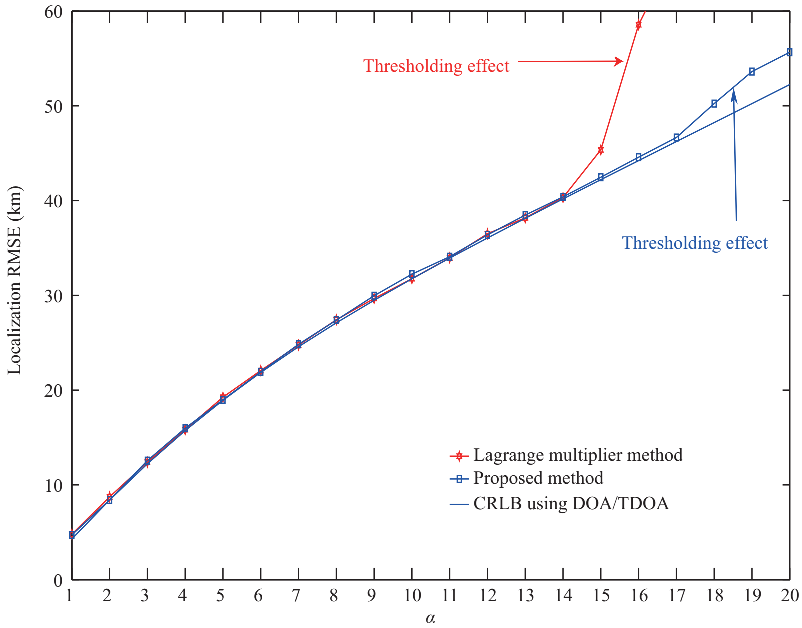

图 10 (网络版彩图) 定位均方根误差随着参数 α 的变化曲线

Figure 10 (Color online) Localization RMSE as a function of parameter α

新方法在发生门限效应时具有更高的误差阈值, 同时在大观测误差条件下具有更强的抗噪性能, 这验证了注释 10 中所分析的结论.

6 结论

本文重点研究针对超视距短波辐射源的测角与测时差协同定位问题. 文中首先基于文献 [32~35] 中的电离层虚高模型依次构建短波二维 DOA 和 TDOA 观测方程. 然后在电离层虚高先验观测误差存在下推导定位精度的 CRLB, 随后针对观测方程的强非线性特征, 提出一种新的 DOA/TDOA 协同定位方法. 最后通过一阶误差分析方法证明新方法的渐近统计最优性. 仿真实验结果表明, 新方法具有良好的全局收敛性和渐近统计最优性, 其定位精度明显高于短波 DOA 定位精度和短波 TDOA 定位精度, 能够获得较高的协同增益. 此外, 相比拉格朗日乘子优化方法, 文中提出的优化方法具有更高的误差阈值和更强的抗噪性能.

最后需要指出的是, 本文主要研究针对静止短波辐射源的定位问题, 后续将研究如何协同 DOA/TDOA 观测量对运动短波辐射源进行航迹跟踪, 此外, 还将研究如何优选短波观测站以获得更高的定位精度.

补充材料 补充材料. 本文的补充材料见网络版 infocn.scichina.com. 补充材料为作者提供的原始数据, 作者对其学术质量和内容负责.

参考文献

1 Darvishi H, Sebt M A. Adaptive hybrid method for low-angle target tracking in multipath. IET Radar Sonar Nav, 2018, 12: 931–937

2 Leonard M R, Zoubir A M. Multi-target tracking in distributed sensor networks using particle PHD filters. Signal Process, 2019, 159: 130–146

3 Da K, Li T C, Zhu Y F, et al. A computationally efficient approach for distributed sensor localization and multitarget tracking. IEEE Commun Lett, 2020, 24: 335–338

4 Ren G C. Modern Shortwave Communication. Beijing: China Machine Press, 2020 [任国春. 现代短波通信. 北京: 机械工业出版社, 2020]

5 Halay N, Todros K. MSE based optimization of the measure-transformed MUSIC algorithm. Signal Process, 2019, 160: 150–163

6 Meng D D, Wang X P, Huang M X, et al. Robust weighted subspace fitting for DOA estimation via block sparse recovery. IEEE Commun Lett, 2020, 24: 563–567

7 Cui K B, Wu W W, Huang J J, et al. 2D DOA estimation of UCA correlative interferometer based on one dimensional sorting lookup table-two dimensional linear interpolation algorithm. Radioengineering, 2017, 26: 562–572

8 Wang D, Zhang L, Wu Y. The structured total least squares algorithm research for passive location based on angle information. Sci China Ser F-Inf Sci, 2009, 52: 1043–1054

9 Wang Y, Ho K C. An asymptotically efficient estimator in closed-form for 3-D AOA localization using a sensor network. IEEE Trans Wirel Commun, 2015, 14: 6524–6535

10 Sun Y M, Ho K C, Wan Q. Eigenspace solution for AOA localization in modified polar representation. IEEE Trans Signal Process, 2020, 68: 2256–2271

11 Wang C, Qi F, Shi G M, et al. Convex combination based target localization with noisy angle of arrival measurements. IEEE Wirel Commun Lett, 2014, 3: 14–17

12 Chen X J, Wang G, Ho K C. Semidefinite relaxation method for unified near-field and far-field localization by AOA. Signal Process, 2021, 181: 107916

13 Nguyen N H, Doğançay K, Kuruoğlu E E. An iteratively reweighted instrumental-variable estimator for robust 3-D AOA localization in impulsive noise. IEEE Trans Signal Process, 2019, 67: 4795–4808

14 Xu J, Ma M D, Law C L. Cooperative angle-of-arrival position localization. Measurement, 2015, 59: 302–313

15 Tian X H, Zhou Y J. Theory and Technology on Radio Location. Beijing: National Defense Industry Press, 2011 [田孝华, 周义建. 无线电定位理论与技术. 北京: 国防工业出版社, 2011]

16 He C J. Surface target location method of sky-wave over-the-horizon radar. Radar Sci Technol, 2020, 18: 568–572 [贺承杰. 天波超视距雷达海面目标定位方法研究. 雷达科学与技术, 2020, 18: 568–572]

17 Cao H, Chan Y T, So H C. Maximum likelihood TDOA estimation from compressed sensing samples without reconstruction. IEEE Signal Process Lett, 2017, 24: 564–568

18 So H C, Chan Y T, Chan F K W. Closed-form formulae for time-difference-of-arrival estimation. IEEE Trans Signal Process, 2008, 56: 2614–2620

19 Shi H L, Zhang H, Wang X Q. A TDOA technique with super-resolution based on the volume cross-correlation function. IEEE Trans Signal Process, 2016, 64: 5682–5695

20 Qi H N, Wu X P, Jia L Q. Semidefinite programming for unified TDOA-based localization under unknown propagation speed. IEEE Commun Lett, 2020, 24: 1971–1975

21 Wang D. The geolocation performance analysis for the constrained Taylor-series iteration in the presence of satellite orbit perturbations. Sci Sin Inform, 2014, 44: 231–253 [王鼎. 卫星位置误差条件下基于约束 Taylor 级数迭代的地面目标定位理论性能分析. 中国科学: 信息科学, 2014, 44: 231–253]

22 Yang K, An J P, Bu X Y, et al. Constrained total least-squares location algorithm using time-difference-of-arrival measurements. IEEE Trans Veh Technol, 2010, 59: 1558–1562

23 Qu X M, Xie L H, Tan W R. Iterative constrained weighted least squares source localization using TDOA and FDOA measurements. IEEE Trans Signal Process, 2017, 65: 3990–4003

24 Smith J O, Abel J S. Closed-form least-squares source location estimation from range-difference measurements. IEEE Trans Acoust Speech Signal Process, 1987, 35: 1661–1669

25 Huang Z, Liu J. Total least squares and equilibration algorithm for range difference location. Electron Lett, 2004, 40: 121–122

26 Wang D, Yin J X, Tang T, et al. A two-step weighted least-squares method for joint estimation of source and sensor locations: a general framework. Chin J Aeronaut, 2019, 32: 417–443

27 Cao J M, Wan Q, Ouyang X X, et al. Multidimensional scaling-based passive emitter localisation from time difference of arrival measurements with sensor position uncertainties. IET signal process, 2017, 11: 43–50

28 Wang T, Hong X L, Liu W, et al. Geolocation of unknown emitters using TDOA of path rays through the ionosphere by multiple coordinated distant receivers. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2018. 3509–3513

29 Huang S, Pun Y M, So A M C, et al. A provably convergent projected gradient-type algorithm for TDOA-based geolocation under the quasi-parabolic ionosphere model. IEEE Signal Process Lett, 2020, 27: 1335–1339

30 Liu W, Jiao P N, Wang S K, et al. Short wave ray tracking in the ionosphere and its application. Chinese J Radio Sci, 2008, 23: 41–48 [柳文, 焦培南, 王世凯, 等. 电离层短波三维射线追踪及其应用研究. 电波科学学报, 2008, 23: 41–48]

31 Yang L J, Gao H T, Ling Y, et al. Localization method of wide-area distribution multistatic sky-wave over-the-horizon radar. IEEE Geosci Remote Sens Lett, 2022, 19: 1–5

32 Jain A, Pagani P, Fleury R, et al. Efficient time domain HF geolocation using multiple distributed receivers. In: Proceedings of the European Conference on Antennas and Propagation, 2017. 1852–1856

33 Jain A, Pagani P, Fleury R, et al. HF source geolocation using an operational TDoA receiver network: experimental results. Antenn Wirel Propag Lett, 2018, 17: 1643–1647

34 Zhang T N, Mao X P, Zhao C L, et al. A novel grid selection method for sky-wave time difference of arrival localisation. IET Radar Sonar Nav, 2019, 13: 538–549

35 Xia N, Xing B H. A direct localization method for HF source geolocation and experimental results. Antenn Wirel Propag Lett, 2021, 20: 728–732

36 Yu C, Shen G Z, Gu B, et al. Characteristics of electromagnetic wave propagating through ionosphere. J Nanjing Univ Inform Sci Technol (Nat Sci Edit), 2013, 5: 379–384 [虞超, 沈国柱, 顾斌, 等. 电磁波在电离层的传播特性研究. 南京信息工程大学学报 (自然科学版), 2013, 5: 379–384]

37 Ho K C, Chan Y T. Geolocation of a known altitude object from TDOA and FDOA measurements. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 1997, 33: 770–783

38 Norman R J, Dyson P L. HF radar backscatter inversion technique. Radio Sci, 2006, 41: 4010

39 Zhao M X, Yang Q. A new way of estimating ionospheric virtual height based on island multipath echoes in HFSWR. In: Proceedings of the IEEE Radar Conference, 2017. 576–580

40 Zhu P, Zhang Y N, Yang G B, et al. Development of backscatter sounding single-site location system. IET Radar Sonar Nav, 2016, 10: 632–636

41 Yin J H, Wan Q, Yang S W, et al. A simple and accurate TDOA-AOA localization method using two stations. IEEE Signal Process Lett, 2016, 23: 144–148

42 Jia T Y, Wang H Y, Shen X H, et al. Target localization based on structured total least squares with hybrid TDOA-AOA measurements. Signal Process, 2018, 143: 211–221

43 Viberg M, Ottersten B. Sensor array processing based on subspace fitting. IEEE Trans Signal Process, 1991, 39: 1110–1121

44 Guo F C, Ho K C. A quadratic constraint solution method for TDOA and FDOA localization. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing, 2011. 2588–2591

45 Wu X P, Gu Z H. A joint time synchronization and localization method without known clock parameters. Pervas Mobile Comput, 2017, 37: 154–170

46 Zhang X D. Matrix Analysis and Application. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013 [张贤达. 矩阵分析与应用 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2013]

47 Doğançay K, Hmam H. Optimal angular sensor separation for AOA localization. Signal Process, 2008, 88: 1248–1260

48 Isaacs J T, Klein D J, Hespanha J P. Optimal sensor placement for time difference of arrival localization. In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, 2009. 7878–7884

Novel cooperative localization method of over-the-horizon shortwave emitters based on direction-of-arrival and time-difference-of-arrival measurements

Ding WANG[1,2], Jiexin YIN[1,2*] & Zhongliang ZHU[3]

1. *Institute of Information System Engineering, PLA Strategic Support Force Information Engineering University, Zhengzhou* 450001*, China*;
2. *National Digital Switching System Engineering and Technology Research Center, Zhengzhou* 450002*, China*;
3. *Key Laboratory of Science and Technology on Blind Signal Processing, Chengdu* 610041*, China*

* Corresponding author. E-mail: Cindyin0807@163.com

Abstract The location of long-distance shortwave radiation sources is practically significant in national defense security. Shortwave multistation-positioning systems mainly include direction-of-arrival (DOA) and time-difference-of-arrival (TDOA) intersection locations. These two systems have their advantages and disadvantages in terms of performance. To combine the advantages of these two positioning technologies, this study focuses on the cooperative positioning problem based on DOA and TDOA measurements. First, the two-dimensional DOA and TDOA observation models are established for the over-the-horizon propagation scenario. Subsequently, the Cramér-Rao lower bound (CRLB) of positioning accuracy is derived in the presence of measurement errors in virtual ionosphere height. Aiming at the strong nonlinear characteristics of the observation equations, a new DOA/TDOA cooperative localization method is proposed. Finally, the asymptotic efficiency of the new estimator is proved using the first-order error analysis theory. The new method comprises two stages. In the first stage, the shortwave DOA observation equation is transformed into a pseudo-linear observation equation by introducing an auxiliary variable, as well as solving a quadratic equation with one unknown. Next, an optimization model with two quadratic equality constraints is constructed, and an iterative optimization algorithm based on matrix **QR** decomposition is proposed to obtain an intermediate estimate of the emitter position. The second stage transforms the shortwave TDOA observation equation into a pseudo-linear observation equation by combining the intermediate estimates given in the first phase. Also, an iterative-constrained weighted-least-squares estimator based on the matrix decomposition is proposed again to localize the emitter. Simulation results show that the new cooperative localization method has good global convergence, the localization performance can reach the CRLB, and the obtained cooperative gain is quite high.

Keywords wireless positioning, shortwave emitter, direction-of-arrival (DOA), time-difference-of-arrival (TDOA), Cramér-Rao lower bound (CRLB), **QR** decomposition, theoretical performance analysis