



# 网络化不确定非线性时滞系统的状态估计

徐雍<sup>1</sup>, 饶红霞<sup>1</sup>, 王卓<sup>2,3\*</sup>, 鲁仁全<sup>1</sup>, 李宗<sup>1</sup>

1. 广东工业大学自动化学院广东省智能决策与协同控制重点实验室, 广州 510006

2. 北京航空航天大学杭州创新研究院 (余杭), 杭州 310023

3. 北京航空航天大学前沿科学技术创新研究院, 北京 100191

\* 通信作者. E-mail: zhuowang@buaa.edu.cn

收稿日期: 2021-07-14; 修回日期: 2021-09-07; 接受日期: 2021-10-12; 网络出版日期: 2022-08-04

广东省重点领域研发计划项目 (2021B0101410005)、国家自然科学基金 (批准号: 62121004, 61876041, 62006043)、广东省特支计划本土创新团队 (批准号: 2019BT02X353) 和广东省自然科学基金 (批准号: 2021A1515011634, 2021B1515420008) 资助项目

**摘要** 本文研究了离散不确定非线性时滞系统在网络传输不可靠情况下的状态估计问题. 针对网络传输丢包问题, 采用伯努利 (Bernoulli) 随机模型, 建立了控制信号和输入信号的不可靠传输模型. 本文通过状态扩展的方法处理不确定非线性项, 得到了扩展状态系统. 基于不可靠的控制和测量信息, 设计了状态预测器和估计器, 并给出相应的误差系统. 通过设计最优估计器增益, 本文给出了状态预测误差协方差的迭代公式. 为了进一步提高状态估计器的精度, 设计了一种新型的参数迭代优化方法. 针对状态预测误差协方差, 本文得到了其稳定性的判别准则. 最后, 通过一例数值仿真, 验证了所得结论的有效性.

**关键词** 网络化控制系统, 扩展状态估计, 时滞, 不确定非线性, 丢包

## 1 引言

随着现代工业自动化程度的日益提高, 实现系统尤其是复杂系统的状态精确估计是近些年来研究热点之一<sup>[1]</sup>. 状态估计是利用有限的测量信息实现系统所有状态的复现. 对系统的状态估计越精确, 越能够对原系统实现精确控制以使其满足某种性能指标. 研究者们对于状态估计的研究已经延续了几十年, 取得了众多研究成果<sup>[2~4]</sup>. 针对状态估计问题, 目前大多数已有的研究成果一般基于系统模型设计估计器, 并通过黎卡提 (Riccati) 方程分析误差系统的稳定性<sup>[5]</sup>. 但实际系统通常是非线性的, 因此研究该类系统的状态估计问题更具意义, 其研究方法主要有两种: (1) 扩展卡尔曼 (Kalman) 方法, 基于线性化的思想, 只保留状态方程在估计值处泰勒 (Taylor) 展开的线性项, 再使用传统卡尔曼方法

**引用格式:** 徐雍, 饶红霞, 王卓, 等. 网络化不确定非线性时滞系统的状态估计. 中国科学: 信息科学, 2022, 52: 1513–1526, doi: 10.1360/SSI-2021-0228

Xu Y, Rao H X, Wang Z, et al. State estimation for networked uncertain nonlinear systems with time-delays (in Chinese). Sci Sin Inform, 2022, 52: 1513–1526, doi: 10.1360/SSI-2021-0228

进行滤波<sup>[6]</sup>. 由于上述方法对高阶项的忽略会带来滤波发散等问题, 因此, 扩展卡尔曼滤波方法适用于非线性函数精确已知, 且估计值和真实值差距不大的情况. (2) 粒子滤波算法, 在状态空间里获取一组随机的样本, 实现对后验概率密度的近似, 从而描述对应的非线性系统<sup>[7]</sup>. 粒子滤波算法由于其非参数化的特点, 适用于非线性和非高斯的复杂系统, 但其精度受限于取样数量. 此外在实际环境中, 系统不可避免地受到外界干扰或某些不确定因素的影响, 这些外界干扰或者不确定因素通常被建模为系统的不确定非线性项. 为了估计不确定非线性系统的状态, 学者提出了基于扩展状态的估计器<sup>[8,9]</sup>, 即通过把不确定非线性项作为一个状态构成新的扩展状态系统, 然后采用卡尔曼方法对扩展状态系统进行状态估计.

复杂系统结构呈现分布式, 信号传输并非瞬时, 不可避免地存在状态时滞问题<sup>[10,11]</sup>. 状态存在时滞不仅给系统的分析带来困难, 同时对系统状态的估计也造成了较大的挑战. 因此, 时滞系统的状态估计得到了很多学者的关注. 文献 [12] 将滚动时域方法应用到时滞系统的状态估计中, 并给出了其估计值误差有界的一个充分条件. 文献 [13] 则进一步研究了具有时变时滞的离散时间半马尔可夫 (Markov) 跳变神经网络的状态估计问题, 设计了在有限时间内可以满足  $H_\infty$  性能指标的高性能估计器. 文献 [14] 采用扩展卡尔曼方法对非线性时滞系统的状态估计问题进行了研究. 由于现有方法对不确定非线性时滞系统的状态估计问题考虑较少, 本文采用扩展状态方法处理不确定非线性时滞问题. 区别于传统非线性项的约束条件——利普希茨 (Lipschitz) 条件<sup>[15]</sup>, 本文考虑变化率期望有界的慢变非线性约束.

伴随着通信、控制等技术的迅猛发展, 网络化控制系统应运而生. 如何基于网络传输的测量值研究复杂系统的远程状态估计成了一个热点研究课题. 相较于传统的点对点控制, 网络化控制系统通过共享通信网络进行信息资源的共享, 具有可靠性强、灵活度高等优点<sup>[16~19]</sup>. 需要指出的是由于共享通信网络的引入, 网络化控制系统也有其难以避免的缺点, 其中一个突出的问题就是数据包丢失. 该问题受到了学者的广泛关注, 文献 [20] 采用伯努利随机模型描述了系统的丢包问题, 基于黎卡提不等式给出了丢包率与估计误差协方差有界之间的关联关系, 并得到了估计误差协方差有界的充分条件. 文献 [21] 采用马尔可夫链描述了测量信息不可靠的情况, 并基于跳变系统设计了状态估计器, 该算法在保证精度的前提下降低了计算量. 需要指出的是在输入信号和测量信号同时存在丢包情况下, 不确定非线性系统的状态估计问题还需要深入研究.

本文研究了网络化不确定非线性时滞系统的状态估计问题, 通过仿真验证了所设计估计器的有效性. 本文的创新点总结如下.

(1) 针对非线性不确定时滞系统的状态估计问题, 采用扩展状态的方法处理不确定非线性项. 进一步通过不等式放缩给出了不确定非线性时滞函数变化率的界.

(2) 同时考虑了控制器到执行器与传感器到估计器之间的传输丢包问题, 采用双通道传输策略降低了控制器到执行器之间的丢包率. 基于不可靠控制信息和测量信息, 设计了扩展状态预测器和估计器, 并分别给出了状态预测和估计误差的协方差公式.

(3) 通过设计最优估计增益和杨氏不等式优化参数等方法, 降低预测误差协方差的上界, 且给出了状态预测误差协方差有界的充分条件.

注: 本文中,  $\mathbb{R}^{n \times m}$  表示  $n$  行  $m$  列的实数矩阵集合,  $\mathbb{P}(\mathbf{x}(k))$  和  $\mathbb{E}(\mathbf{x}(k))$  分别表示随机变量  $\mathbf{x}(k)$  的概率和数学期望. 矩阵上标 “T”, “-1” 和  $\text{tr}(\cdot)$  分别表示矩阵的转置, 逆和迹.  $\text{diag}\{\dots\}$  表示对角矩阵.

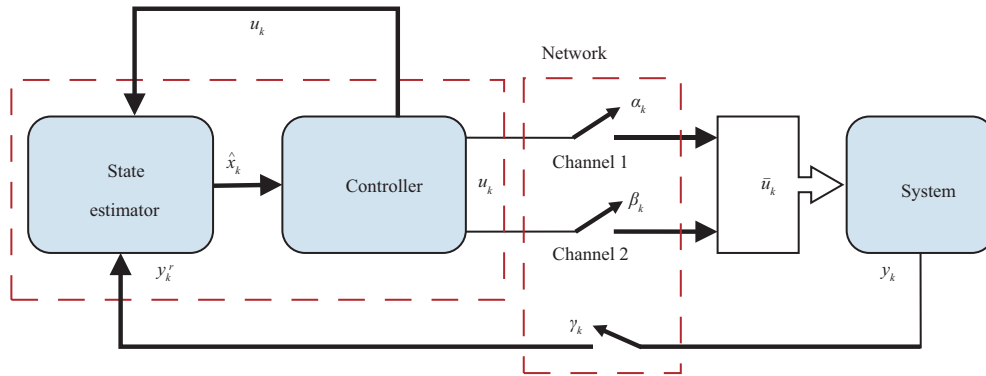


图 1 (网络版彩图) 基于不可靠网络传输的远程状态估计框图

Figure 1 (Color online) Diagram for remote state estimation over unreliable communication networks

## 2 问题描述

### 2.1 系统方程描述

本文考虑如下离散不确定非线性时滞系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \bar{A}\mathbf{x}_k + \bar{B}\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_{k-\tau_{1,k}}) + \bar{\mathbf{u}}_k + \omega_k, \\ \mathbf{y}_k = \bar{C}\mathbf{x}_k + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_{k-\tau_{2,k}}) + \nu_k, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  表示系统的状态,  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$  表示测量值;  $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_{k-\tau_{1,k}}) \in \mathbb{R}^l$  和  $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_{k-\tau_{2,k}}) \in \mathbb{R}^m$  分别为系统状态和测量值的不确定非线性时滞项,  $0 \leq \tau_{1,k} \leq \tau_1$  和  $0 \leq \tau_{2,k} \leq \tau_2$  表示时滞量, 非线性函数  $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_{k-\tau_{1,k}})$  由已知非线性项  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_{k-\tau_{1,k}})$  和未知非线性项  $\check{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_{k-\tau_{1,k}})$  两部分组成;  $\omega_k \in \mathbb{R}^n$  和  $\nu_k \in \mathbb{R}^m$  分别表示高斯 (Gauss) 过程噪声和高斯测量噪声;  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $\bar{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  为已知的系统参数矩阵.  $\bar{\mathbf{u}}_k \in \mathbb{R}^n$  表示系统实际收到的外部输入控制信号.

### 2.2 不可靠传输网络描述

由于传输网络带宽受限, 网络传输往往存在丢包现象. 为了降低数据传输的丢包率, 控制器到系统的传输网络采用了如图 1 所示的双通道模型. 其中通道 1 和 2 的丢包情况分别采用相互独立的随机伯努利变量  $\alpha_k$  和  $\beta_k$  描述, 它们具有如下随机特性:

$$\begin{cases} \mathbb{P}\{\alpha_k = 1\} = \bar{\alpha}, \\ \mathbb{P}\{\beta_k = 1\} = \bar{\beta}. \end{cases} \quad (2)$$

随机变量  $\alpha_k$  和  $\beta_k$  的方差分别表示为

$$\mathbb{E}\{(\alpha_k - \bar{\alpha})^2\} = \bar{\alpha}(1 - \bar{\alpha}), \quad \mathbb{E}\{(\beta_k - \bar{\beta})^2\} = \bar{\beta}(1 - \bar{\beta}). \quad (3)$$

对于平行传输的通道 1 和 2, 如果其中一条通道成功传输, 则系统就可以成功接收到输入信号  $\mathbf{u}_k$ . 因此, 系统收到控制信号的模型可以描述为

$$\bar{\mathbf{u}}_k = (\alpha_k + (1 - \alpha_k)\beta_k)\mathbf{u}_k. \quad (4)$$

测量值的传输也存在丢包情况, 本文采用独立于  $\alpha_k$  和  $\beta_k$  的伯努利随机变量  $\gamma_k$  表示, 其满足如下随机特性:

$$\mathbb{P}\{\gamma_k = 1\} = \bar{\gamma}. \quad (5)$$

状态估计器收到的测量值可以表示为

$$\mathbf{y}_k^r = \gamma_k \mathbf{y}_k. \quad (6)$$

### 2.3 扩展状态系统

为了处理不确定非线性函数, 本文引入了扩展状态  $\zeta_k \triangleq [\mathbf{x}_k^T \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_{k-\tau_1,k})^T]^T$ . 系统 (1) 可以表示成如下所示的扩展状态系统:

$$\begin{cases} \zeta_{k+1} = A\zeta_k + H\hat{\mathbf{f}}(N\zeta_{k-\tau_1,k}) + (\alpha_k + (1 - \alpha_k)\beta_k) \\ \quad \times \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\omega}_k, \\ \mathbf{y}_k = C\zeta_k + \bar{\mathbf{g}}(N\zeta_{k-\tau_2,k}) + \nu_k, \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}(N\zeta_{k-\tau_1,k}) &= \bar{\mathbf{f}}(N\zeta_{k+1-\tau_1,k+1}) - \bar{\mathbf{f}}(N\zeta_{k-\tau_1,k}), \\ A &= \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\omega}_k &= \begin{bmatrix} \omega_k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [\bar{C} \ 0], \quad N = [I \ 0]. \end{aligned}$$

针对不确定非线性时滞系统 (1), 本文给出如下假设.

**假设1** 过程、测量噪声  $\{\omega_k\}$  和  $\{\nu_k\}$  是不相关的高斯白噪声, 均值为 0, 两者的协方差分别满足  $Q \geq 0$  和  $R > 0$ . 系统初态  $\mathbf{x}_0$  独立于上述两种噪声, 并满足如下随机特性:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathbf{x}_0\} &= \hat{\mathbf{x}}_{0|-1}, \\ \mathbb{E}\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|-1} \\ \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}_{0|-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|-1} \\ \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}_{0|-1}) \end{bmatrix}^T \right\} &= P_{0|-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

**假设2** 系统参数组  $(\bar{A}, \bar{C})$  能观测.

**假设3** 不确定非线性函数  $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_k)$  每个分量变化率的期望是有界的, 即

$$\mathbb{E}\{(\bar{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}_{k+1}) - \bar{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}_k))^2\} \leq \bar{\Xi}_i^2, \quad i \in \phi_l \triangleq \{1, 2, \dots, l\}.$$

同时, 已知非线性函数  $\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_k)$  每个分量变化率的期望也是有界的, 即

$$\mathbb{E}\{(\dot{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}_{k+1}) - \dot{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}_k))^2\} \leq \dot{\Xi}_i^2, \quad i \in \phi_l.$$

**假设4** 测量值的不确定非线性函数  $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}_k)$  是有界的, 即

$$\bar{\mathbf{g}}_i(\mathbf{x}_k)^2 \leq \Lambda_i^2, \quad i \in \phi_m \triangleq \{1, 2, \dots, m\}. \quad (9)$$

## 2.4 状态估计器及估计误差系统

本小节将分两步来设计状态估计器. 首先, 基于扩展状态系统 (7) 进行状态预测,

$$\hat{\zeta}_{k+1|k} = A\hat{\zeta}_{k|k} + H\check{f}(N\hat{\zeta}_{k-\tau_1,k|k-\tau_1,k}) + (\bar{\alpha} + (1 - \bar{\alpha})\bar{\beta})\check{u}_k, \quad (10)$$

其中

$$\check{f}(N\hat{\zeta}_{k-\tau_1,k|k-\tau_1,k}) = \hat{f}(N\hat{\zeta}_{k+1-\tau_1,k+1}) - \hat{f}(N\hat{\zeta}_{k-\tau_1,k|k-\tau_1,k}),$$

$$\hat{\zeta}_{k+1-\tau_1,k+1} = \begin{cases} \hat{\zeta}_{k+1|k}, & \tau_{1,k+1} = 0, \\ \hat{\zeta}_{k+1-\tau_1,k+1|k+1-\tau_1,k+1}, & 0 < \tau_{1,k+1} \leq \tau_1. \end{cases}$$

基于状态估计器收到的测量值  $\mathbf{y}_k^r$  和状态预测方程 (10), 状态估计器设计为

$$\hat{\zeta}_{k+1|k+1} = \hat{\zeta}_{k+1|k} + \gamma_{k+1}K_{k+1}(\mathbf{y}_{k+1} - C\hat{\zeta}_{k+1|k}), \quad (11)$$

其中  $K_{k+1}$  为估计器增益.

分别定义状态预测误差和估计误差为

$$\mathbf{e}_{k+1|k} \triangleq \zeta_{k+1} - \hat{\zeta}_{k+1|k}, \quad \mathbf{e}_{k+1|k+1} \triangleq \zeta_{k+1} - \hat{\zeta}_{k+1|k+1}. \quad (12)$$

同时定义它们的协方差分别为

$$P_{k+1|k} \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{e}_{k+1|k}\mathbf{e}_{k+1|k}^T\}, \quad P_{k+1|k+1} \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{e}_{k+1|k+1}\mathbf{e}_{k+1|k+1}^T\}. \quad (13)$$

根据扩展状态系统 (7) 和状态预测方程 (10), 可得状态预测误差为

$$\mathbf{e}_{k+1|k} = A\mathbf{e}_{k|k} + H\mathbf{f}(N\mathbf{e}_{k-\tau_1,k|k-\tau_1,k}) + (\alpha_k + (1 - \alpha_k)\beta_k - \bar{\alpha} - (1 - \bar{\alpha})\bar{\beta})\check{u}_k + \check{\omega}_k, \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{f}(N\mathbf{e}_{k-\tau_1,k|k-\tau_1,k}) = \hat{f}(N\zeta_{k-\tau_1,k}) - \check{f}(N\hat{\zeta}_{k-\tau_1,k|k-\tau_1,k}). \quad (15)$$

基于状态估计方程 (11), 可得状态估计误差为

$$\mathbf{e}_{k+1|k+1} = (I - \gamma_{k+1}K_{k+1}C)\mathbf{e}_{k+1|k} - \gamma_{k+1}K_{k+1} \times (\bar{g}(N\zeta_{k+1-\tau_2,k+1}) + \nu_{k+1}). \quad (16)$$

## 3 主要结果

本节研究状态预测误差协方差的最优估计器增益及对应的黎卡提不等式, 并给出标量  $\theta_k$  和  $\mu_k$  的迭代求解方法, 进一步优化状态预测误差协方差的黎卡提不等式.

### 3.1 状态预测误差协方差

**定理1** 给定标量  $\theta_k > 0$  和  $\mu_k > 0$ , 估计器 (11) 的增益设计为

$$K_k^* = P_{k|k-1} C^T \left( C P_{k|k-1} C^T + \frac{m\Lambda^2}{\mu_k} + \frac{R}{1 + \mu_k} \right)^{-1}. \quad (17)$$

则状态预测误差协方差满足如下迭代关系:

$$P_{k+1|k} \leq (1 + \theta_k)(1 + \mu_k) \left( A P_{k|k-1} A^T - \bar{\gamma} A P_{k|k-1} C^T \left( C P_{k|k-1} C^T + \frac{m\Lambda^2}{\mu_k} + \frac{R}{1 + \mu_k} \right)^{-1} C P_{k|k-1} A^T \right) + \hat{Q}, \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= N^T Q N + 2l(\tau_1 + 1)^2 \left( 1 + \frac{1}{\theta_k} \right) H (\bar{\Xi}^2 + \dot{\Xi}^2) H^T \\ &\quad + (1 - \bar{\alpha})(1 - \bar{\beta})(\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{\beta}) \check{\mathbf{u}}_k \check{\mathbf{u}}_k^T, \\ \Lambda &= \text{diag}\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m\}, \\ \bar{\Xi} &= \text{diag}\{\bar{\Xi}_1, \bar{\Xi}_2, \dots, \bar{\Xi}_l\}, \\ \dot{\Xi} &= \text{diag}\{\dot{\Xi}_1, \dot{\Xi}_2, \dots, \dot{\Xi}_l\}. \end{aligned}$$

**证明** 把状态预测误差 (14) 代入状态预测误差协方差 (13), 可得

$$\begin{aligned} P_{k+1|k} &= A P_{k|k} A^T + \mathbb{E}\{H \mathbf{f}(N e_{k-\tau_{1,k}|k-\tau_{1,k}}) e_{k|k}^T A^T \\ &\quad + A e_{k|k} \mathbf{f}(N e_{k-\tau_{1,k}|k-\tau_{1,k}})^T H^T\} + N^T Q N \\ &\quad + H \mathbb{E}\{\mathbf{f}(N e_{k-\tau_{1,k}|k-\tau_{1,k}}) \mathbf{f}(N e_{k-\tau_{1,k}|k-\tau_{1,k}})^T\} H^T \\ &\quad \times \mathbb{E}\{((\alpha_k + (1 - \alpha_k)\beta_k) - (\bar{\alpha} + (1 - \bar{\alpha})\bar{\beta}))^2\} \check{\mathbf{u}}_k \check{\mathbf{u}}_k^T, \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\{((\alpha_k + (1 - \alpha_k)\beta_k) - (\bar{\alpha} + (1 - \bar{\alpha})\bar{\beta}))^2\} \\ &= \mathbb{E}\{((1 - \bar{\beta})(\alpha_k - \bar{\alpha}) + (1 - \bar{\alpha})(\beta_k - \bar{\beta}) - (\alpha_k - \bar{\alpha})(\beta_k - \bar{\beta}))^2\} \\ &= (1 - \bar{\alpha})(1 - \bar{\beta})(\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{\beta}). \end{aligned} \quad (20)$$

式 (20) 中非线性函数  $\mathbf{f}(N e_{k-\tau_{1,k}|k-\tau_{1,k}})$  和估计误差  $e_{k|k}$  的交叉项可用以下不等式进行放缩:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\{H \mathbf{f}(N e_{k-\tau_{1,k}|k-\tau_{1,k}}) e_{k|k}^T A^T + A e_{k|k} \mathbf{f}(N e_{k-\tau_{1,k}|k-\tau_{1,k}})^T H^T\} \\ &\leq \frac{1}{\theta_k} \mathbb{E}\{H \mathbf{f}(N e_{k-\tau_{1,k}|k-\tau_{1,k}}) \mathbf{f}(N e_{k-\tau_{1,k}|k-\tau_{1,k}})^T H^T\} + \theta_k A P_{k|k} A^T. \end{aligned} \quad (21)$$

由假设 3 可知, 非线性函数  $\mathbf{f}(N e_k)$  满足变化率期望有界的条件. 由于时滞的存在, 该非线性函数满足

如下不等式约束:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}\{H\mathbf{f}(N\mathbf{e}_{k-\tau_1,k|k-\tau_1,k})\mathbf{f}(N\mathbf{e}_{k-\tau_1,k|k-\tau_1,k})^T H^T\} \\
 & \leq 2\mathbb{E}\{H(\hat{\mathbf{f}}(N\zeta_{k-\tau_1,k})\hat{\mathbf{f}}(N\zeta_{k-\tau_1,k})^T + \check{\mathbf{f}}(N\hat{\zeta}_{k-\tau_1,k|k-\tau_1,k}) \\
 & \quad \times \check{\mathbf{f}}(N\hat{\zeta}_{k-\tau_1,k|k-\tau_1,k})^T)H^T\} \\
 & \leq 2\mathbb{E}\left\{H\left(\sum_{i=0}^{\tau_1} (\bar{\mathbf{f}}(N\zeta_{k+1-i}) - \bar{\mathbf{f}}(N\zeta_{k-i}))\right)\right. \\
 & \quad \times \left(\sum_{i=0}^{\tau_1} (\bar{\mathbf{f}}(N\zeta_{k+1-i}) - \bar{\mathbf{f}}(N\zeta_{k-i}))\right)^T \\
 & \quad + \left(\left(\mathbf{f}(N\hat{\zeta}_{k+1|k}) - \mathbf{f}(N\hat{\zeta}_{k|k})\right) + \sum_{i=0}^{\tau_1-1} \left(\mathbf{f}(\hat{\zeta}_{k-i|k-i})\right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \mathbf{f}(\hat{\zeta}_{k-1-i|k-1-i})\right)\right)\left(\left(\mathbf{f}(N\hat{\zeta}_{k+1|k}) - \mathbf{f}(N\hat{\zeta}_{k|k})\right)\right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i=0}^{\tau_1-1} \left(\mathbf{f}(\hat{\zeta}_{k-i|k-i}) - \mathbf{f}(\hat{\zeta}_{k-1-i|k-1-i})\right)\right)^T H^T\} \\
 & \leq 2l(\tau_1 + 1)^2 H(\bar{\Xi}^2 + \hat{\Xi}^2)H^T.
 \end{aligned} \tag{22}$$

把由随机变量  $\alpha_k$  和  $\beta_k$  组成的随机项的期望值 (20), 处理交叉项得到的不等式 (21) 和时滞非线性项的约束不等式 (22) 代入状态预测误差协方差 (19), 可得

$$P_{k+1|k} \leq (1 + \theta_k)AP_{k|k}A^T + \hat{Q}. \tag{23}$$

基于估计误差协方差 (16), 可得

$$\begin{aligned}
 P_{k+1|k+1} = & \mathbb{E}\{(I - \gamma_{k+1}K_{k+1}C)P_{k+1|k}(I - \gamma_{k+1}K_{k+1}C)^T \\
 & - (I - \gamma_{k+1}K_{k+1}C)\mathbf{e}_{k+1|k}\bar{\mathbf{g}}(N\zeta_{k+1-\tau_2,k+1})^T K_{k+1}^T \gamma_{k+1} \\
 & - \gamma_{k+1}K_{k+1}\bar{\mathbf{g}}(N\zeta_{k+1-\tau_2,k+1})\mathbf{e}_{k+1|k}^T (I - \gamma_{k+1}K_{k+1}C)^T \\
 & + \gamma_{k+1}^2 K_{k+1}\bar{\mathbf{g}}(N\zeta_{k+1-\tau_2,k+1})\bar{\mathbf{g}}(N\zeta_{k+1-\tau_2,k+1})^T K_{k+1}^T \\
 & + \gamma_{k+1}^2 K_{k+1}R K_{k+1}^T\}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

存在正数  $\mu_{k+1} > 0$  使得如下不等式成立:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}\{(I - \gamma_{k+1}K_{k+1}C)\mathbf{e}_{k+1|k}\bar{\mathbf{g}}(N\zeta_{k+1-\tau_2,k+1})^T K_{k+1}^T \gamma_{k+1} \\
 & \quad + \gamma_{k+1}K_{k+1}\bar{\mathbf{g}}(N\zeta_{k+1-\tau_2,k+1})\mathbf{e}_{k+1|k}^T (I - \gamma_{k+1}K_{k+1}C)^T\} \\
 & \leq \mathbb{E}\left\{\mu_{k+1}(I - \gamma_{k+1}K_{k+1}C)P_{k+1|k}(I - \gamma_{k+1}K_{k+1}C)^T \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\mu_{k+1}}\gamma_{k+1}^2 K_{k+1}\bar{\mathbf{g}}(N\zeta_{k+1-\tau_2,k+1})\bar{\mathbf{g}}(N\zeta_{k+1-\tau_2,k+1})^T K_{k+1}^T\right\},
 \end{aligned} \tag{25}$$

其中

$$\mathbb{E}\{\bar{\mathbf{g}}(N\zeta_{k+1-\tau_2,k+1})\bar{\mathbf{g}}(N\zeta_{k+1-\tau_2,k+1})^T\} \leq m\Lambda^2. \tag{26}$$

由式 (23)~(26) 可得

$$\begin{aligned}
P_{k+1|k+1} &\leq (1 + \mu_{k+1})(P_{k+1|k} - \bar{\gamma}K_{k+1}CP_{k+1|k} - \bar{\gamma}P_{k+1|k}C^TK_{k+1}^T) \\
&\quad + (1 + \mu_{k+1})\bar{\gamma}K_{k+1}\left(CP_{k+1|k}C^T + \frac{m\Lambda^2}{\mu_{k+1}} + \frac{R}{1 + \mu_{k+1}}\right)K_{k+1}^T \\
&= (1 + \mu_{k+1})\left(P_{k+1|k} - \bar{\gamma}\left(K_{k+1} - P_{k+1|k}C^T\left(CP_{k+1|k}C^T\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left. + \frac{m\Lambda^2}{\mu_{k+1}} + \frac{R}{1 + \mu_{k+1}}\right)^{-1}\right)\left(CP_{k+1|k}C^T + \frac{m\Lambda^2}{\mu_{k+1}} + \frac{R}{1 + \mu_{k+1}}\right)\right) \\
&\quad \times \left(K_{k+1} - P_{k+1|k}C^T\left(CP_{k+1|k}C^T + \frac{m\Lambda^2}{\mu_{k+1}} + \frac{R}{1 + \mu_{k+1}}\right)^{-1}\right)^T \\
&\quad - \bar{\gamma}P_{k+1|k}C^T\left(CP_{k+1|k}C^T + \frac{m\Lambda^2}{\mu_{k+1}} + \frac{R}{1 + \mu_{k+1}}\right)^{-1}CP_{k+1|k}.
\end{aligned} \tag{27}$$

把最优估计器增益  $K_{k+1}^*$  (17) 代入式 (27) 得

$$\begin{aligned}
P_{k+1|k+1} &\leq \varrho(P_{k+1|k}, \mu_{k+1}) \triangleq (1 + \mu_{k+1})\left(P_{k+1|k} - \bar{\gamma}P_{k+1|k}C^T\right. \\
&\quad \left.\times \left(CP_{k+1|k}C^T + \frac{m\Lambda^2}{\mu_{k+1}} + \frac{R}{1 + \mu_{k+1}}\right)^{-1}CP_{k+1|k}\right).
\end{aligned} \tag{28}$$

把不等式 (28) 代入式 (23), 可得不等式 (18).

### 3.2 参数优化算法

由于状态预测误差协方差 (18) 与标量  $\theta_k$  和  $\mu_k$  相关, 本小节将采用迭代方法来求解最优参数  $\mu^*$  和  $\theta^*$ , 具体算法如下:

- (1) 设  $k = 0$ , 给定停止迭代条件  $\vartheta > 0$ ;
- (2) 设  $\mu_k = \vartheta, i = 0, \sigma_i = \text{tr}(\varrho(P_{k|k-1}, \mu_k))$ , 给定迭代步长为  $\epsilon$  和停止条件为  $\delta$ ;
- (3) 设  $\mu_k = \mu_k + \epsilon, i = i + 1$ , 计算迹  $\sigma_i = \text{tr}(\varrho(P_{k|k-1}, \mu_k))$ ;
- (4) 如果  $|\sigma_i - \sigma_{i-1}| < \delta$ , 则进入第 5 步, 并记  $\mu_k^* = \mu_k$ , 否则返回第 3 步;
- (5) 设  $\theta_k^* = \sqrt{\frac{\text{tr}(2l(\tau_1+1)^2 H(\Xi^2 + \Xi^2) H^T)}{\text{tr}(\eta(P_{k|k-1}, \mu_k^*))}}$ , 其中

$$\begin{aligned}
\eta(P_{k|k-1}, \mu_k^*) &= (1 + \mu_k^*)\left(AP_{k|k-1}A^T - \bar{\gamma}AP_{k|k-1}C^T\left(CP_{k|k-1}C^T\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ \frac{m\Lambda^2}{\mu_k^*} + \frac{R}{1 + \mu_k^*}\right)^{-1}CP_{k|k-1}A^T\right);
\end{aligned} \tag{29}$$

(6) 如果  $|\mu_k^* - \mu_{k-1}^*| < \vartheta$  和  $|\theta_k^* - \theta_{k-1}^*| < \vartheta$  同时满足, 则令  $\mu^* = \mu_k^*$  和  $\theta^* = \theta_k^*$ , 算法结束; 否则令  $k = k + 1$  并返回第 2 步.

## 4 稳定性分析

本节在最优估计器增益  $K_k^*$  和迭代求解所得参数  $\mu^*$  和  $\theta^*$  的情况下, 分析状态预测误差协方差的稳定性. 主要结论总结如下.



**定理2** 给定标量  $\theta^* > 0$  和  $\mu^* > 0$ , 系统参数  $(A, C)$  能观测,  $(A, \sqrt{Q})$  能控制, 则状态预测误差协方差  $P_{k+1|k}$  有界的条件是当且仅当存在矩阵  $Y$  和正定矩阵  $P > 0$  满足如下不等式:

$$\begin{bmatrix} -P & \Theta_{12} & \sqrt{(1+\mu^*)(1+\theta^*)\bar{\gamma}(1-\bar{\gamma})}C^T Y^T \\ * & -P & 0 \\ * & * & -P \end{bmatrix} < 0, \quad (30)$$

其中  $\Theta_{12} = \sqrt{(1+\mu^*)(1+\theta^*)}(A^T P - \bar{\gamma}C^T Y^T)$ .

**证明** 定义  $Y \triangleq PAK$ , 并代入不等式 (30), 同时左乘和右乘  $\text{diag}\{I, P^{-1}, P^{-1}\}$ , 可得

$$\begin{bmatrix} -P & \bar{\Theta}_{12} & \sqrt{(1+\mu^*)(1+\theta^*)\bar{\gamma}(1-\bar{\gamma})}C^T K^T A^T \\ * & -P^{-1} & 0 \\ * & * & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (31)$$

其中  $\bar{\Theta}_{12} = \sqrt{(1+\mu^*)(1+\theta^*)}(A^T - \bar{\gamma}C^T K^T A^T)$ . 由舒尔 (Shur) 补定理, 不等式 (31) 等价于存在一个矩阵  $P > 0$ , 使得如下不等式成立:

$$(1+\mu^*)(1+\theta^*)A((I-\bar{\gamma}KC)P(I-\bar{\gamma}KC)^T + \bar{\gamma}(1-\bar{\gamma})KCPK^T)A^T < P. \quad (32)$$

由文献 [20] 可得函数

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(K, P_{k|k-1}) = & (1+\mu^*)(1+\theta^*)A((I-\bar{\gamma}KC)P_{k|k-1}(I-\bar{\gamma}KC)^T \\ & + \bar{\gamma}(1-\bar{\gamma})KCP_{k|k-1}C^T K^T)A^T, \end{aligned} \quad (33)$$

渐近稳定的充分条件是不等式 (32) 成立, 可得

$$\begin{aligned} \rho(K, P_{k|k-1}) = & (1+\mu^*)(1+\theta^*)A \left( (I-\bar{\gamma}KC)P_{k|k-1}(I-\bar{\gamma}KC)^T \right. \\ & \left. + \bar{\gamma}(1-\bar{\gamma})KCP_{k|k-1}C^T K^T + K \left( \frac{m\Lambda^2}{\mu^*} + \frac{R}{1+\mu^*} \right) K^T \right) A^T \end{aligned} \quad (34)$$

有界的充分条件是式 (32) 成立.

根据不等式

$$P_{k+1|k} \leq \rho(K_k, P_{k|k-1}, \mu^*, \theta^*), \quad (35)$$

可得如果存在矩阵  $Y$  和正定矩阵  $P > 0$  满足式 (30), 则  $P_{k+1|k}$  是有界的.

## 5 仿真验证

本节通过数值例子说明所设计状态估计器的有效性, 假设系统 (1) 的参数如下:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [1 \ 0],$$

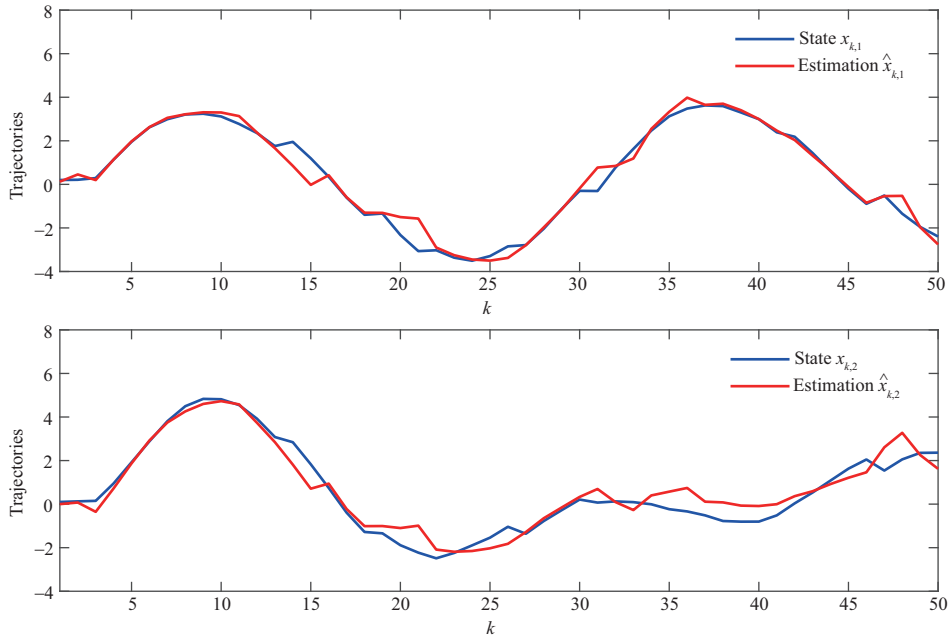


图 2 (网络版彩图) 系统状态及估计器状态的轨迹

Figure 2 (Color online) The trajectories of the system states and their estimation

其中非线性函数  $\bar{f}(\mathbf{x}_k)$  和  $\bar{g}(\mathbf{x}_k)$  取为

$$\begin{cases} \bar{f}(\mathbf{x}_k) = 0.5 \sin(\mathbf{x}_{2,k}) + 0.05 \cos(\mathbf{x}_{1,k} \mathbf{x}_{2,k}), \\ \bar{g}(\mathbf{x}_k) = 0.1 \sin(\mathbf{x}_{1,k} \mathbf{x}_{2,k}), \end{cases}$$

其中  $[\mathbf{x}_{1,k} \ \mathbf{x}_{2,k}]^T$  为系统  $k$  时刻的状态, 不确定非线性函数  $\bar{f}(\mathbf{x}_k)$  的变化率满足  $\mathbb{E}\{(\bar{f}(\mathbf{x}_{k+1}) - \bar{f}(\mathbf{x}_k))^2\} \leq 0.2525$ , 不确定非线性函数已知部分  $\hat{f}(\mathbf{x}_k)$  为  $0.5 \sin(\mathbf{x}_{2,k})$ , 其变化率满足  $\mathbb{E}\{(\hat{f}(\mathbf{x}_{k+1}) - \hat{f}(\mathbf{x}_k))^2\} \leq 0.25$ , 测量值的非线性函数  $\bar{g}(\mathbf{x}_k)$  的界为 0.1. 系统的输入信号如下:

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} \cos(0.2k) \\ \sin(0.3k) \end{bmatrix}.$$

相互独立的 0 均值高斯噪声  $\omega_k$  和  $\nu_k$  的协方差分别为

$$Q = 0.05I, \quad R = 0.1.$$

本文考虑的时变时延满足  $0 \leq \tau_{2,k} \leq 2$  和  $0 \leq \tau_{1,k} \leq 2$ . 描述网络传输丢包的伯努利随机变量  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  和  $\gamma_k$  满足如下随机特性:

$$\begin{cases} \mathbb{P}\{\alpha_k = 1\} = 0.5, \\ \mathbb{P}\{\beta_k = 1\} = 0.6, \\ \mathbb{P}\{\gamma_k = 1\} = 0.8. \end{cases}$$

基于以上情况, 我们通过仿真验证算法的有效性, 系统和估计器的初始条件为  $\mathbf{x}_0 = [0.2 \ 0.1]^T$

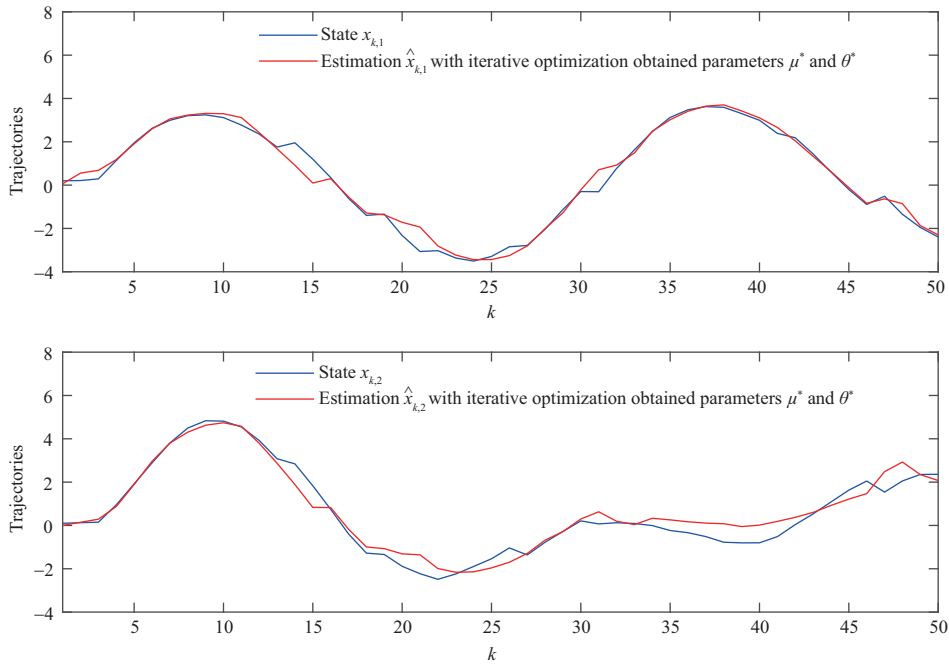


图 3 (网络版彩图) 系统状态及基于迭代优化参数  $\mu^*$  和  $\theta^*$  的估计器状态的轨迹

Figure 3 (Color online) The trajectories of the system states and their estimation with iterative optimization parameters  $\mu^*$  and  $\theta^*$

和  $\hat{x}_{0| -1} = [0 \ 0]^T$ , 协方差为  $P_{0| -1} = I$ . 定义  $\alpha$  次仿真的平均估计和平均均方估计误差为

$$\hat{\zeta}_{k|k} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{\alpha} \hat{\zeta}_{k|k}^{(i)},$$

$$\text{MSE}_{k|k} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{\alpha} \|\zeta_k^{(i)} - \hat{\zeta}_{k|k}^{(i)}\|^2,$$

其中  $\zeta_k^{(i)}, \hat{\zeta}_{k|k}^{(i)}$  分别代表第  $i$  次仿真的系统状态与系统状态估计. 考虑  $\mu_k = 0.15$  和  $\theta_k = 0.001$ , 可以得到系统状态及估计器状态的轨迹如图 2 所示. 为了进一步减小估计误差, 迭代方法可求解得到最优参数  $\mu^* = 0.0632$  和  $\theta^* = 0.2414$ , 可得系统状态及基于迭代优化参数  $\mu^*$  和  $\theta^*$  的估计器状态的轨迹如图 3 所示. 从图 4 可以看出, 通过 3.2 小节的参数优化算法优化参数  $\mu_k$  和  $\theta_k$ , 估计误差协方差和实际的均方估计误差都得到了改进. 迭代值  $\mu_k$  和  $\theta_k$  分别如图 5 和 6 所示.

## 6 结论

本文解决了离散不确定非线性时滞系统的状态估计问题, 给出了在网络传输不可靠情况下的状态估计算法. 首先采用状态扩展的方法处理系统不确定非线性项. 考虑了控制器到执行器与系统到估计器之间的传输丢包问题, 并基于不可靠控制和测量信息, 设计了扩展状态预测器和估计器. 文中还给出了状态预测误差协方差的迭代公式, 设计了最优估计器的增益, 提出了一种新型的参数迭代优化方法, 进一步提高了状态估计器的精度. 针对得到的状态预测协方差迭代公式, 得到了其稳定性判别的准则. 最后通过仿真例子验证了所设计算法的有效性.

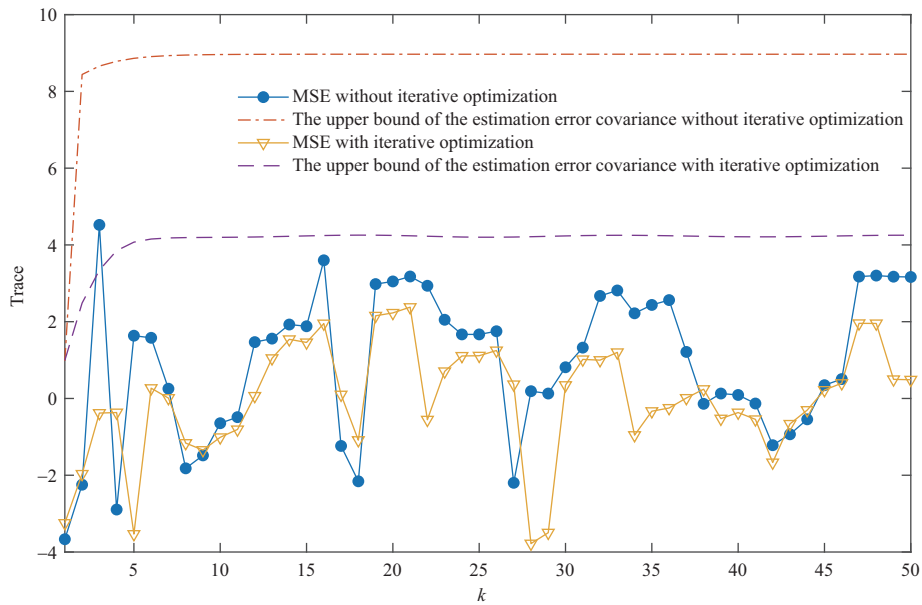


图 4 (网络版彩图) 未优化及优化后的状态估计误差协方差与均方估计误差上界

Figure 4 (Color online) The upper bounds of the state estimation error covariance and MSE with and without iterative optimization

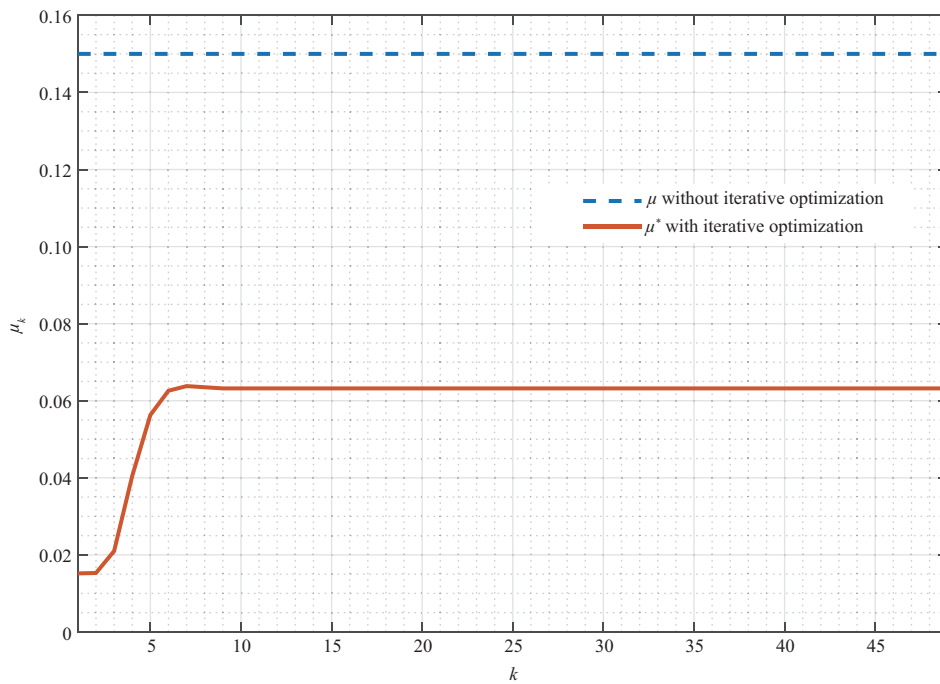
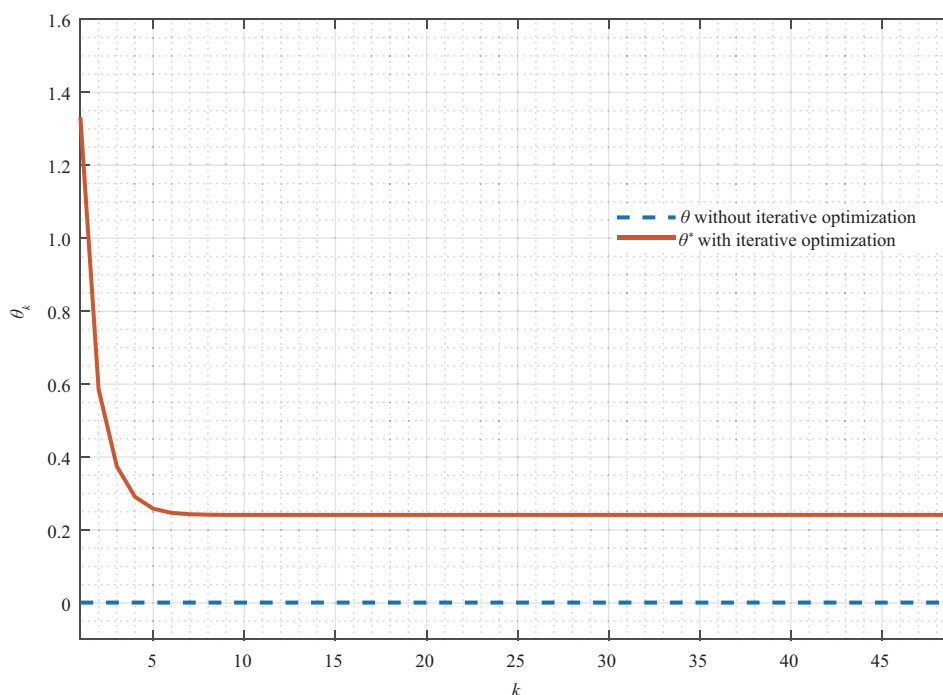


图 5 (网络版彩图) 未优化的  $\mu$  及优化后的  $\mu^*$

Figure 5 (Color online)  $\mu$  without iterative optimization and  $\mu^*$  with iterative optimization

本文主要考虑了单个不确定非线性系统的状态估计问题. 当系统处在分布式无线网络系统中时, 如何基于不可靠的测量值设计不确定非线性系统的分布式状态估计器是一个需要解决的问题. 另外,

图 6 (网络版彩图) 未优化的  $\theta$  及优化后的  $\theta^*$ Figure 6 (Color online)  $\theta$  without iterative optimization and  $\theta^*$  with iterative optimization

随着系统不断向大规模方向发展, 如何设计耦合复杂系统的状态估计器也是亟待解决的问题.

## 参考文献

- Guo L. Estimation, control, and games of dynamical systems with uncertainty. *Sci Sin Inform*, 2020, 50: 1327–1344 [郭雷. 不确定性动态系统的估计、控制与博弈. *中国科学: 信息科学*, 2020, 50: 1327–1344]
- Anderson B D, Moore J B. *Optimal Filtering*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, Inc., 2012
- Dai B, He Y Q, Gu F, et al. Multi-sensor fusion for unmanned aerial vehicles based on the combination of filtering and optimization. *Sci Sin Inform*, 2020, 50: 1919–1931 [代波, 何玉庆, 谷丰, 等. 结合滤波与优化的无人机多传感器融合方法. *中国科学: 信息科学*, 2020, 50: 1919–1931]
- Tan Y S, Fei S M, Liu J L. Distributed hybrid-triggered state estimation for complex networked system with network attacks. *Sci Sin Inform*, 2018, 48: 1198–1213 [谭玉顺, 费树岷, 刘金良. 网络攻击环境下复杂网络系统的分布式混合触发状态估计. *中国科学: 信息科学*, 2018, 48: 1198–1213]
- Duan P, Duan Z, Lv Y, et al. Distributed finite-horizon extended kalman filtering for uncertain nonlinear systems. *IEEE Trans Cybern*, 2021, 51: 512–520
- Wang X, Yaz E E. Second-order fault tolerant extended kalman filter for discrete time nonlinear systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2019, 64: 5086–5093
- Zhang C, Taghvaei A, Mehta P G. Feedback particle filter on riemannian manifolds and matrix lie groups. *IEEE Trans Automat Contr*, 2018, 63: 2465–2480
- Han J Q. The “extended state observer” of a class of uncertain systems. *Control and Decision*, 1995, 10: 85–88 [韩京清. 一类不确定对象的扩张状态观测器. *控制与决策*, 1995, 10: 85–88]
- Bai W Y, Xue W C, Huang Y, et al. On extended state based Kalman filter design for a class of nonlinear time-varying uncertain systems. *Sci China Inf Sci*, 2018, 61: 042201
- Shi Y, Yu B. Output feedback stabilization of networked control systems with random delays modeled by Markov chains. *IEEE Trans Automat Contr*, 2009, 54: 1668–1674

- 11 Santos T L M, Franklin T S. Distributed predictor-based stabilization of interconnected systems with network induced delays. *Inf Sci*, 2021, 564: 368–383
- 12 Zou L, Wang Z, Han Q L, et al. Moving horizon estimation for networked time-delay systems under round-robin protocol. *IEEE Trans Automat Contr*, 2019, 64: 5191–5198
- 13 Lin W J, He Y, Zhang C K, et al. Stochastic finite-time  $H_\infty$  state estimation for discrete-time semi-markovian jump neural networks with time-varying delays. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2020, 31: 5456–5467
- 14 Hugues-Salas O, Shore K A. An extended Kalman filtering approach to nonlinear time-delay systems: application to chaotic secure communications. *IEEE Trans Circ Syst I*, 2010, 57: 2520–2530
- 15 Xu Y, Lu R, Peng H, et al. Asynchronous dissipative state estimation for stochastic complex networks with quantized jumping coupling and uncertain measurements. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2017, 28: 268–277
- 16 Xu Y, Zhou J Y, Rao H X, et al. Reset moving horizon estimation for quantized discrete time systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2021, 66: 4199–4205
- 17 Liu J L, Gu Y Y, Fei S M. Event-based  $H_\infty$  filter design for load-frequency control systems under cyber-attacks. *Sci Sin Inform*, 2018, 48: 1348–1363 [刘金良, 顾媛媛, 费树岷. 基于事件触发和网络攻击的负荷频率控制电力系统  $H_\infty$  滤波器设计. *中国科学: 信息科学*, 2018, 48: 1348–1363]
- 18 Hespanha J P, Naghshtabrizi P Y, Xu Y G. A survey of recent results in networked control systems. *Proc IEEE*, 2007, 95: 138–162
- 19 Xu Y, Yang L X, Wang Z, et al. State estimation for networked systems with Markov driven transmission and buffer constraint. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2021, 51: 7727–7734
- 20 Sinopoli B, Schenato L, Franceschetti M, et al. Kalman filtering with intermittent observations. *IEEE Trans Automat Contr*, 2004, 49: 1453–1464
- 21 Smith S C, Seiler P. Estimation with lossy measurements: jump estimators for jump systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2003, 48: 2163–2171

## State estimation for networked uncertain nonlinear systems with time-delays

Yong XU<sup>1</sup>, Hongxia RAO<sup>1</sup>, Zhuo WANG<sup>2,3\*</sup>, Renquan LU<sup>1</sup> & Zong LI<sup>1</sup>

1. *Guangdong Provincial Key Laboratory of Intelligent Decision and Cooperative Control, School of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China;*

2. *Beihang Hangzhou Innovation Institute Yuhang, Beihang University, Hangzhou 310023, China;*

3. *The Research Institute for Frontier Science, Beihang University, Beijing 100191, China*

\* Corresponding author. E-mail: zhuowang@buaa.edu.cn

**Abstract** This paper investigates state estimation for uncertain nonlinear discrete systems with time-delays over unreliable communication channels. The Bernoulli model is used to describe the packet dropout conditions of the control information and the measurement. The extended state approach is introduced to deal with the nonlinear uncertainty, and an extended state system is obtained. The state predictor and the state estimator are designed based on unreliable control inputs and measurements, and their error systems are derived. The iterative equation of the state predictive error covariance is achieved, and its optimal estimator gain is derived. An iterative algorithm is proposed to further optimize the state predictive error covariance. A necessary and sufficient condition to ensure the stability of the state predictive error covariance is achieved. Finally, a numerical example is presented to illustrate the effectiveness of the developed results.

**Keywords** networked control system, extended state estimation, time delay, nonlinear uncertainty, packet dropout