



# 高维量子低密度奇偶校验码纠缠度

范兴奎, 颜丹丹, 刘芬, 马鸿洋\*

青岛理工大学理学院量子光学与量子通信研究中心, 青岛 266525

\* 通信作者. E-mail: mahongyang@qut.edu.cn

收稿日期: 2021-05-27; 修回日期: 2021-07-27; 接受日期: 2021-08-25; 网络出版日期: 2022-03-07

国家自然科学基金 (批准号: 11975132, 61772295) 项目资助

**摘要** 量子纠错与量子计算是量子信息科学坚实的基础和重要的组成部分. 在实际应用中, 如大气传输中的量子通信, 将需要多种数学运算, 其中包括量子纠错码. 量子纠错码可以抵抗噪声, 但由于构造量子纠错码依赖于量子纠缠, 因此被认为是困难的. 利用图态解决码字纠缠度是一个很有前途的解决方案, 但高维图态构造起来仍有诸多困难, 上述困难可以巧妙地通过码字纠缠的上界和下界来解决. 本文根据稳定子码循环差集的特性和经典低密度奇偶校验 (low-density parity check, LDPC) 码的 U 和 B 组合, 构造了高维量子低密度奇偶校验 (quantum low-density parity check, QLDPC) 码. 通过计算新码元的非 Z 型生成元并求出其最小数目得到新码元的纠缠上界; 再计算新码校验矩阵的秩作为纠缠下界. 当码字纠缠上界和下界不同时, 利用机器学习中的学习向量量化 (learning vector quantization, LVQ) 算法可同时求得码字纠缠度和编码复杂度, 以此推得它们之间的关系. 在计算运行速度方面, 对比拉格朗日乘法中的迭代算法, LVQ 算法运行速度提高了 37.68%, 而且在稳定性和精度方面, LVQ 算法的性能优于拉格朗日乘法中的迭代算法. 本文在量子码字纠缠度的测量中迈出了重要的一步, 为设计具有更高译码效率的量子纠错码提供了帮助.

**关键词** 量子低密度奇偶校验码, 稳定子码循环差集, U 和 B 组合, 码字纠缠度, 学习向量量化

## 1 引言

量子计算和量子通信是量子信息科学的两个重要组成部分<sup>[1~4]</sup>. 一般认为量子纠错编码是经典的希尔伯特 (Hilbert) 空间纠错编码结合量子力学原理的扩展<sup>[5,6]</sup>. 50 多年来, 在数字计算机的历史发展过程中, 离散数学、数论、代数和几何在通信和计算机科学方面有着重要的应用, 成为不可或缺的基本数学工具. 在量子信息领域, 量子纠错编码技术在编码理论研究方面起着重要的作用. 由于应用的实际需要, 自 1950 年以来, Calderbank 和 Shor 利用诸多数学方法构造了性能良好的纠错译码算法<sup>[5,7]</sup>.

由于量子态的演化过程与环境间存在着不可避免的相互作用, 这种相互作用将引起量子态与环境态纠缠, 破坏量子态的相干性. 虽然量子纠错编码和信息论中纠错编码思想基本相同, 但是由于量

**引用格式:** 范兴奎, 颜丹丹, 刘芬, 等. 高维量子低密度奇偶校验码纠缠度. 中国科学: 信息科学, 2022, 52: 539–552, doi: 10.1360/SSI-2021-0183

Fan X K, Yan D D, Liu F, et al. Entanglement degree of high-dimensional quantum low-density parity check codes (in Chinese). Sci Sin Inform, 2022, 52: 539–552, doi: 10.1360/SSI-2021-0183

子态的物理特性, 也由于在量子纠错编码理论中的不可克隆性, 量子信息的获取是通过量子测量进行的, 然而, 测量将引起量子态中信息的丢失以及信息的连续错误, 这 3 方面的困难决定了它不是一般纠错编码方法的简单推广. 多年来, 因为存在着以上 3 个方面的困难, 导致量子纠错码的方法很难推进. 直到 1996 年, Shor 和 Steane 分别提出了克服上述 3 个困难的方案, 从此撬开了量子纠错码的大门<sup>[5,8,9]</sup>. 由于 CSS (Calderbank-Shor-Steane) 量子纠错码的相位误差和比特误差不能一次测量得到, 需要单独计算<sup>[10]</sup>, 因此译码效率不高. 进而, 低密度奇偶校验 (low-density parity check, LDPC) 码进入了学者们的研究范围, LDPC 码是一个由稀疏矩阵或二部图定义的线性块错误校正码<sup>[11~13]</sup>. 2010 年, Fujiwara 等<sup>[11]</sup> 提出了量子低密度奇偶校验码 (quantum low-density parity check, QLDPC) 的系统的构造方法, 初始状态为纠缠态就能够进行编码. 2021 年, Sun 等<sup>[14]</sup> 对编码的最新进展进行了综述, 描述了量子纠错码在量子计算中的重要性. MacKay 等<sup>[10]</sup> 证明了经典 LDPC 码的性能接近了 Shannon 极限<sup>[10]</sup>, 该码的经典设计思想已经扩展到量子信息领域. 通常情况下, QLDPC 码可以实现完整的并行计算<sup>[15~17]</sup>, 具有更大的灵活性、更强的容错能力、更小的硬件复杂度和高速译码潜力.

利用稳定子码的循环差集特性和 QLDPC 码的 U 和 B 组合构造方法, 构造了高维量子低密度奇偶校验码<sup>[18~20]</sup>. 该方法可以在稀疏矩阵的基础上转化为矢量偶表示, 便于计算二进制 ‘0’, ‘1’ 矩阵中的码字纠缠度<sup>[21~23]</sup>. 另外, QLDPC 码可以并行计算比特误差和相位误差, 提高了译码效率. 以前的学者利用图态构造量子码, 这是很有前景的研究方向, 但是对于高维的量子码, 利用图态进行构造出现了不可跨越的难题, 因为高维图态本身就难以构造, 因此本文想到了利用数值解析的方法去解决几何方面的难题. 利用码字纠缠的上、下界可以解决大部分量子码的码字纠缠度, 但对于上、下界不相同的少数情况, Wei 等<sup>[23]</sup> 和 Chen 等<sup>[24,25]</sup> 利用数值计算中的迭代算法计算出相应量子码的纠缠度. 而本文则是利用机器学习中的学习向量量化 (learning vector quantization, LVQ) 算法求得码字纠缠度和编码复杂度, 并推出它们之间的关系<sup>[26~28]</sup>. 依据码字纠缠度, 设计出良好的编码以及测量纠错线路, 更大效率地使用量子纠错码<sup>[24,29~32]</sup>. 对于码字纠缠度的问题求解, 本文跳出高维图态难以构造的怪圈, 借助于数学理论的基础知识以及机器学习算法求解高维量子码的码字纠缠度. 利用码字纠缠的上界和下界考虑大部分量子纠错码的码字纠缠, 少数量子纠错码的上、下界不同时, 可以利用学习向量量化 (LVQ) 算法解决<sup>[33~36]</sup>. 首先对原型向量进行初始化, 然后对原型向量进行迭代优化, 最后达到最大迭代轮数 ( $N = 50000$ ), 或原型向量更新很小甚至不再更新, 算法满足上面两个停止条件时, 将当前原型向量作为最终结果返回, 方法很是巧妙. 上面选择最大迭代轮数为  $N = 50000$ , 因为经过多次在计算机上运行实验, 只有当  $N = 50000$  时, LVQ 算法精度和稳定度可以同时达到要求, LVQ 算法的运行速度比数值迭代计算运行速度提高了 37.68%. 由于码字纠缠的上、下界与生成元的数目有关, 考虑到 Z 型生成元对码字纠缠度的计算没有影响, 因此所构造的码字纠缠的上界为非 Z 型生成元的最小数目. 码字纠缠的下界是由 U 和 B 组合的校验矩阵  $H_1$  或  $H_1^\perp$  的秩所决定. 对基于 CSS 码量子低密度奇偶校验码的校验矩阵  $H$  和新型量子低密度奇偶校验码的校验矩阵  $H_1$  和  $H_1^\perp$  进行初等行变换, 以及对以上 3 个校验矩阵求秩, 求秩结果 (纠缠下界) 是一样的. 当上、下界不同时, 利用学习向量量化 (LVQ) 算法求得码字纠缠度<sup>[37~39]</sup>, 并且计算量子电路图的比特逻辑门的总数目即为编码复杂度<sup>[40~42]</sup>, 进而得到两者之间的关系是编码复杂度不小于码字纠缠度.

## 2 相关知识介绍

### 2.1 稳定子码和对易

设  $G_n$  为  $n$  阶群,  $S$  为  $n$  量子位 Pauli 算子群  $G_n$  的一个 Abel 子群, 对于任意的稳定子元素  $M$

( $M \in S$ ), 使用  $M$  的矢量偶表示<sup>[27]</sup>,  $G_n$  中两个元素的乘法可以映射到向量空间中的向量加法, 它可以表示为

$$MM^T = (\alpha|\beta)(\alpha^T|\beta^T) = (-1)^{\alpha^T \cdot \beta}(\alpha \oplus \alpha^T|\beta \oplus \beta^T), \quad (1)$$

其中  $\alpha^T \cdot \beta$  表示在相同的位置上  $M$  中的  $X$  和  $M^T$  的  $Z$  的奇偶性.

设  $|\psi\rangle$  是一个量子态, 满足  $C(S) = \{|\psi\rangle : M|\psi\rangle = |\psi\rangle, \forall M \in S\}$ , 且  $S = \{\prod_{j=1}^{n-k} M_j^{b_j}, b_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n-k\}$ , 则  $C(S)$  为稳定子码. 由  $M|\psi\rangle = |\psi\rangle$  可以推断出  $M^2|\psi\rangle = M|\psi\rangle$ , 由以上可知,  $M^2 = I$ . 从式 (1) 可得,  $MM = (\alpha|\beta)(\alpha|\beta) = (-1)^{\alpha \cdot \beta}(\alpha \oplus \alpha|\beta \oplus \beta)$ , 从而  $\alpha \cdot \beta = 0$ . 这里  $\alpha \cdot \beta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \beta_i$ . 因为稳定子元素是相互对易的, 对于任意的稳定子元素  $M$  和  $M^T$ , 满足  $MM^T = M^T M$ . 易知  $MM^T = (-1)^{\alpha^T \cdot \beta \oplus \alpha \cdot \beta^T} M^T M$ , 从而  $\alpha^T \cdot \beta \oplus \alpha \cdot \beta^T = 0$ .

### 2.2 稳定子码的矢量偶表示

设  $G = \{\pm I, \pm iI, \pm X, \pm iX, \pm Y, \pm iY, \pm Z, \pm iZ\}$ , 其中  $I$  是单位矩阵,  $X, Y, Z$  是泡利矩阵 (Pauli matrix).  $G_n = \{P_1 \otimes P_2 \otimes \dots \otimes P_n : P_j \in G, j = 1, 2, \dots, n\}$ , 则  $G_n$  是二进制向量空间  $V$  的  $2^n$  个向量所构成的群.

由于稳定子码的生成元由  $X, Y, Z$  这 3 个算子组成, 对于  $Y = ZX = -XZ$ , 如果 “-” 可以忽略, 那么  $M_1, M_2, \dots, M_{n-k}$  可以表示为矢量偶的  $(n-k) \times 2n$  的量子校验矩阵<sup>[43]</sup>, 即

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-k} \end{pmatrix} \iff (H_Z|H_X) = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-k} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中  $H_X$  和  $H_Z$  分别表示  $M_1, M_2, \dots, M_{n-k}$  的比特翻转和相位翻转. 稳定子码的矢量偶表示可以具体描述为

$$h_i = (\alpha_i|\beta_i), \alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}) \in H_Z, \beta_i = (\beta_{i1}, \dots, \beta_{in}) \in H_X, \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \{0, 1\}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

量子校验矩阵的生成元素  $M_i$  与行向量  $h_i = (\alpha_i|\beta_i)$  之间的对应关系为

$$M_i = \pm(Z^{\alpha_{i1}} X^{\beta_{i1}}) \otimes \dots \otimes (Z^{\alpha_{in}} X^{\beta_{in}}). \quad (4)$$

### 3 构造高维量子低密度奇偶校验码

定义1 ([18, 27]) 设  $G$  为  $\nu$  阶 Abel 加法群.  $D$  为  $G$  的一个  $k$  元子集,

$$D \equiv \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \pmod{\nu}, \quad (5)$$

$\lambda$  为  $D$  中两个元素的差的个数. 对  $G$  中任意元素  $d \neq 0 \pmod{\nu}$ , 若都有  $\lambda$  个序对  $(a_i, a_j), a_i, a_j \in D$ , 使

$$d \equiv a_i - a_j \pmod{\nu} \quad (6)$$

成立, 则称  $D$  为 Abel 群  $G$  中的一个  $(\nu, k, \lambda)$ -差集, 记作  $D(\nu, k, \lambda)$ . 特别地, 当  $G$  为循环群时, 称  $D$  为  $G$  中的一个  $(\nu, k, \lambda)$ -循环差集. 显然, 循环差集  $D(\nu, k, \lambda)$  的参数  $\nu, k, \lambda$  满足

$$k(k-1) = \lambda(\nu-1). \quad (7)$$

表 1 60 以内的循环差集  
Table 1 The set of cyclic differences up to 60

$\nu$	$Z_\nu$ and $D_\nu$
$\nu = 7$	$Z_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $D_7 = \{1, 2, 4\}$
$\nu = 11$	$Z_{11} = \{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$ $D_{11} = \{1, 3, 4, 5, 9\}$
$\nu = 19$	$Z_{19} = \{0, 1, 2, \dots, 17, 18\}$ $D_{19} = \{1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17\}$
$\nu = 23$	$Z_{23} = \{0, 1, 2, \dots, 21, 22\}$ $D_{23} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18\}$
$\nu = 31$	$Z_{31} = \{0, 1, 2, \dots, 29, 30\}$ $D_{31} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 14, 16, 18, 19, 20, 25\}$
$\nu = 43$	$Z_{43} = \{0, 1, 2, \dots, 41, 42\}$ $D_{43} = \{1, 4, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 21, 23, 24, 25, 31, 35, 36, 38, 40, 41\}$
$\nu = 47$	$Z_{47} = \{0, 1, 2, \dots, 45, 46\}$ $D_{47} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 17, 18, 21, 24, 25, 27, 28, 32, 34, 36, 37, 42\}$
$\nu = 59$	$Z_{59} = \{0, 1, 2, \dots, 57, 58\}$ $D_{59} = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 29, 35, 36, 41, 45, 46, 48, 49, 51, 53, 57\}$

表 2  $D(7, 3, 1)$  循环差集  
Table 2 The cyclic difference set of  $D(7, 3, 1)$

$D(7, 3, 1)-a_1 = 1$	$D(7, 3, 1)-a_2 = 2$	$D(7, 3, 1)-a_3 = 4$
1-2=6(mod 7)	2-1=1(mod 7)	4-1=3(mod 7)
1-4=4(mod 7)	2-4=5(mod 7)	4-2=2(mod 7)

引理1 ([19]) 一个长度为  $\nu$  的  $(0, 1)$  序列  $l_1, l_2, \dots, l_\nu$ , 它具有一个循环差集  $D(\nu, k, \lambda)$  序列的特性, 参数  $(\nu, k, \lambda)$  满足式 (7) 的充分必要条件: 对于任意整数  $i, j$ , 满足

$$\sum_{i=1}^{\nu} l_i l_{\langle i+j \rangle} = \begin{cases} k, & j = 0 \pmod{\nu}, \\ \lambda, & \text{其他}, \end{cases} \quad (8)$$

其中  $\langle i+j \rangle$  表示  $i+j$  的最小非负模类  $\nu$  余数, 上式  $\sum$  是对  $i = 1$  到  $\nu$  求和, 而且  $\nu$  的最大指标就是对应的循环差集中  $\nu$  的指标, 这里的求和是模 2 的。

选定一个模数  $\nu$ , 构造模  $\nu$  的非零平方值构成的集合  $D$ , 对比较大的  $\nu$  值, 需借助于计算机来完成. 利用 MATLAB 程序生成模  $\nu$  不同的非零平方值的集合. 由此得到表 1, 60 以内符合条件的  $\nu$ , 循环差集  $D$  以及其非零平方值的集合.

表 2 以  $D(7, 3, 1)$  为例来说明基于稳定子码的高维量子低密度奇偶校验码的构造.

在  $D = \{a_1 = 1, a_2 = 2, a_4 = 4\}$  中可以获得一组有序对  $(a_i, a_j)$ , 由式 (6) 及表 1 可知  $\lambda = 1$ . 从循

$L_1 \rightarrow 0110100$
$L_2 \rightarrow 0011010$
$L_3 \rightarrow 0001101$
$L_4 \rightarrow 1000110$
$L_5 \rightarrow 0100011$
$L_6 \rightarrow 1010001$

图 1 由一个序列 1101000 循环而成的矩阵  
 Figure 1 A matrix formed by a sequence of loops 1101000

环差集  $D(7, 3, 1)$  出发, 构造序列  $L$

$$L = l_1 l_2 \dots l_\nu, \quad l_j = \begin{cases} 1, & j \in D, \\ 0, & j \notin D. \end{cases} \quad (9)$$

由这个序列  $L \rightarrow 1101000$  循环组成的矩阵每两行仅且只有一列对应的元素全为 1, 如图 1 所示.

上述序列所对应的加法、乘法运算和加法逆运算可由图 2 表示. 由式 (8) 可知,  $L_i, L_j (1 \leq i, j \leq \nu)$  满足

$$L_i \cdot L_j = \sum_{k=1}^{\nu} l_{ik} l_{jk} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1, & i \neq j. \end{cases} \quad (10)$$

这里, 结合图 1 和式 (8), 构造的矩阵同时只有一列为 1, 其中,  $i = j$  时,  $L_i \cdot L_j = 0$ , 上式  $\sum$  是对  $i = 1$  到  $\nu$  求和, 而且  $\nu$  的最大指标就是对应的循环差集中  $\nu$  的指标,  $k$  是  $i = 1$  到  $\nu$  中的任意整数, 此时这里的求和以及乘法都是模 2 的.

根据循环差集的特性, 下面给出一种类似于  $[[5,1]]$  量子稳定子码的构造方法<sup>[5]</sup>, 进而结合 QLDPC 码的 U 和 B 组合构造法, 得到高维 QLDPC 码的构造方法, 具体步骤如下.

第 1 步. 选择编码长为  $k$  的量子信息位, 并使用该量子汉明界不等式 (任意量子编码系统  $[[n, k, t]]$ , 它可以纠正量子比特  $t$  个错误且满足不等式  $\sum_{j=0}^t C_n^j 3^j 2^k \leq 2^n$ )<sup>[28]</sup>, 得到最小量子码的码长为  $n$ .

第 2 步. 从码长为  $n$  的量子码中, 选择  $\alpha_t$  作为  $Z$  算子,  $\alpha_t$  是满足  $L = \{a_i | 1 \leq i \leq \alpha_t, 1 \leq a_i \leq n\}$  集合所包含元素的个数, 将  $L$  中每个元素代表几何上的位置, 所有满足  $L = \{a_i | 1 \leq i \leq \alpha_t, 1 \leq a_i \leq n\}$  的  $Z$  算子记为“1”; 选择  $\beta_t$  作为  $X$  算子,  $\beta_t$  是满足  $K = \{b_j | 1 \leq j \leq \beta_t, 1 \leq b_j \leq n\}$  集合所包含元素的个数, 将  $K$  中每个元素代表几何上的位置, 所有满足  $K = \{b_j | 1 \leq j \leq \beta_t, 1 \leq b_j \leq n\}$  的  $X$  算子记为“1”. 上面所描述的  $L, K$  中的元素满足式 (11) 或 (12). 因此对于任意  $d, d' \neq 0 \pmod{n}$ , 有且仅有一个有序对  $(b_j, a_i)$  使得下面的两个公式成立.

$$d \equiv b_j - a_i \pmod{n}, \quad (11)$$

同样地,

$$d' \equiv a_i - b_j \pmod{n}. \quad (12)$$

因为式 (7) 的  $D(\nu, k, \lambda)$  参数  $\nu$  相当于量子编码系统  $[[n, k, t]]$  中的  $n$ , 因此  $\alpha_t$  和  $\beta_t$  可以满足以下关系

$$\alpha_t \times \beta_t = n - 1. \quad (13)$$

第 3 步. 在第 2 步中, 在搜索前可根据式 (11) 或 (12) 得到  $\alpha_t$  和  $\beta_t$  的具体值, 这将缩短搜索时间. 如果  $L = \{a_i | 1 \leq i \leq \alpha_t\}$  和  $K = \{b_j | 1 \leq j \leq \beta_t\}$  满足方程式 (10) 和 (12), 则进入下一步; 否

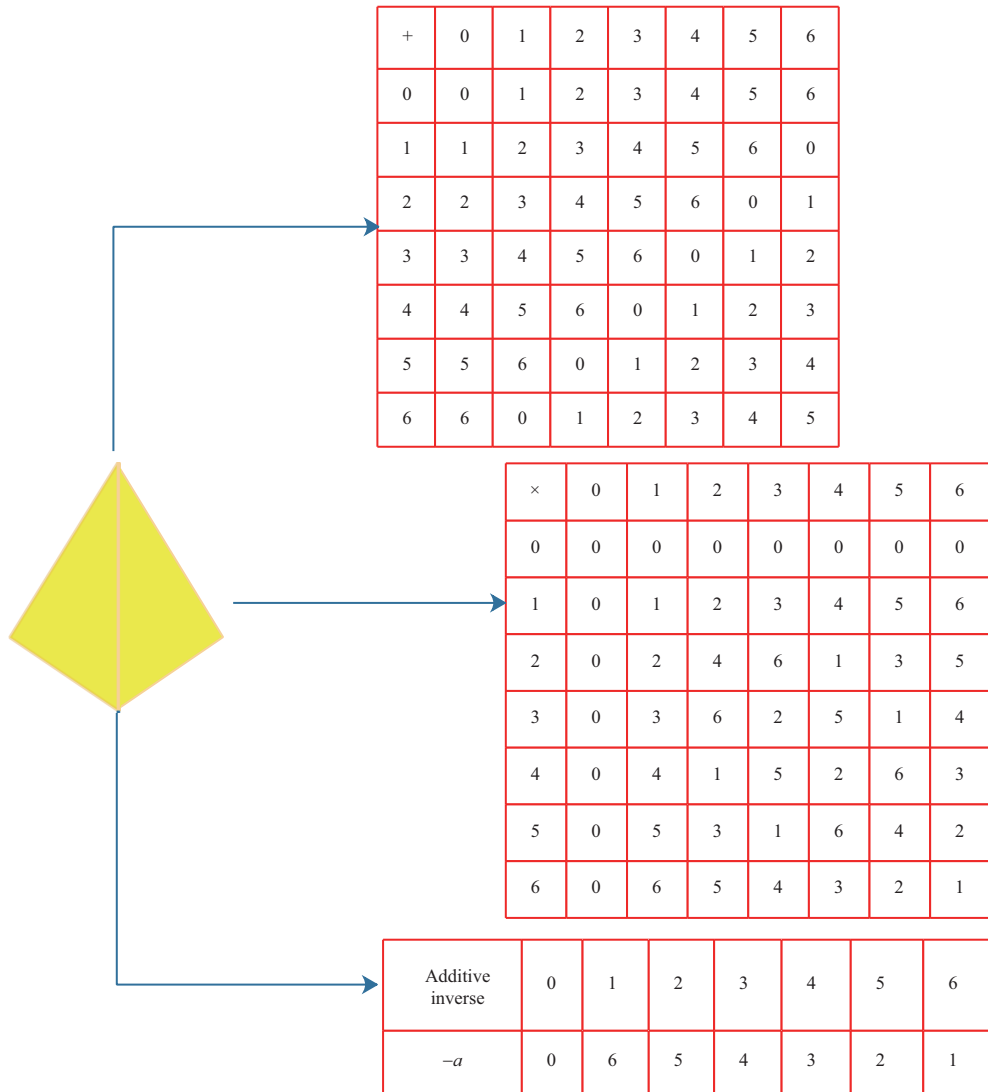


图 2 (网络版彩图)  $\nu=7$  的循环差集加法、乘法, 以及加法逆运算

Figure 2 (Color online) The addition, multiplication, and inversion of the cyclic difference set of  $\nu=7$

则, 转到第 2 步继续搜索. 这里给出的迭代次数是  $N = 50000$ , 因为经过多次在计算机上运行实验, 当  $N < 50000$ , 学习向量量化 (LVQ) 算法的运行精度与拉格朗日 (Lagrange) 乘数法中的迭代算法的运行精度相接近, 但是  $N$  太小时, LVQ 算法的运行精度小于拉格朗日乘数法中的迭代算法的运行精度; 当  $N > 50000$ , LVQ 算法稳定性达不到要求, 特别是  $N$  过大时, 运行结果出现负值, 这时的 LVQ 算法是失效的. 因此, 只有在  $N = 50000$  时, LVQ 算法精度和稳定度可以同时达到要求, LVQ 算法的运行速度比拉格朗日乘数法中的迭代算法的运行速度提高了 37.68%. 如果在  $N = 50000$  次迭代后没有找到结果, 则放弃搜索.

第 4 步. 构造泡利算符元素  $M$ , 在位置  $L = \{a_i | 1 \leq i \leq \alpha_t\}$  插入  $Z$ , 在位置  $K = \{b_j | 1 \leq j \leq \beta_t\}$  插入  $X$ , 在其他位置插入  $I$ .

第 5 步.  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  是由稳定子生成元  $M$  通过向右循环移位  $n-1$  次得到的, 从中任意选

择  $n - k$  个生成元并转换成矢量偶表示 (稀疏矩阵) 作为  $[[n, k]]$  量子稳定子码的校验矩阵  $H$ .

$$H = \left[ \begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \end{array} \right], \quad C_1 = \left[ \begin{array}{c} \alpha \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{array} \right], \quad C_2 = \left[ \begin{array}{c} \beta \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{array} \right]. \quad (14)$$

第 6 步. 令  $H_0 = [C_1, C_1]$  或  $H_0^\perp = [C_2, C_2]$ , 在  $H_0 = [C_1, C_1]$  或  $H_0^\perp = [C_2, C_2]$  的最后一列增加全为  $\mathbf{1}$  的一列, 选择两个  $Z$  型或  $X$  型生成元, 并将其组合形成高维 QLDPC 码的校验矩阵  $H_1$  或  $H_1^\perp$ , 其中  $H_1$  或  $H_1^\perp$  的构造方法叫做 U 和 B 组合.

利用上述 6 个步骤, 构造出高维量子低密度奇偶校验码.

## 4 高维量子低密度奇偶校验码纠缠度

### 4.1 码字纠缠上界

**定义 2** ([24]) 若一生成元仅由  $Z$  算符或恒等算符  $I$  的乘积构成, 即量子比特中不包含  $X$  和  $Y$  算符, 则称为  $Z$  型生成元.

**定义 3** ([24]) 量子编码复杂度指的是双量子比特及多量子比特逻辑门的总数目, 记为  $C$ . 显然, 同一个量子码会有不同的量子线路实现方法, 因此存在最小编码复杂度的问题.

**定义 4** ([24]) 称量子稳定子码字纠缠中非  $Z$  型生成元的最小数目为码字纠缠的上界, 并用字母  $E_u$  表示.

### 4.2 码字纠缠下界

**定义 5** ([24]) 称高维量子低密度奇偶校验码循环序列的以二进制 ‘0’, ‘1’ 的矢量偶表示校验矩阵的秩为码字纠缠的下界, 并用字母  $E_l$  表示.

在构造  $[[n, k]]$  高维 QLDPC 码时, 需要获得  $n - k$  个相互独立、互不相关的量子稳定子生成元. 基于上述构造方法的步骤第 5 步, 可以得到一个量子稳定子码生成元  $M$ , 其中  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ , 这  $n - 1$  个生成元可以由基准生成元  $M$  通过向右循环移位  $n - 1$  次得到. 它们中的  $n - k$  被任意选择为独立的  $n - k$  个量子稳定子生成元. 易知, 任意  $n - k$  个相互独立且不相关的量子稳定子生成元都是  $n - k$  量子位.

根据上述秩的性质, 得到高维的校验矩阵将量子低密度奇偶校验码转化为以二进制矢量偶表示的矩阵, 该矩阵的秩为码字纠缠的下界.

最后, 给出量子低密度奇偶校验码校验矩阵的结构如式 (14) 所示, 本文基于式 (14) 和  $H_1 = [C_1, C_1, \mathbf{1}]$  或  $H_1^\perp = [C_2, C_2, \mathbf{1}]$ , 稳定子码校验矩阵的结构构造了高维 QLDPC 码. 将式 (14) 和  $H_1 = [C_1, C_1, \mathbf{1}]$  或  $H_1^\perp = [C_2, C_2, \mathbf{1}]$  进行行阶梯型变换, 最终秩的结果是一致的, 说明上述基于稳定子码的高维 QLDPC 码结构可以应用于码字纠缠度的计算. 综上所述, 量子低密度奇偶校验码的码字纠缠的下界由码字的矢量偶表示所对应的校验矩阵的秩决定.

**定义 6** ([24]) 多纠缠测度包括对数鲁棒纠缠、相对熵纠缠、几何纠缠和平均纠缠, 本文码字纠缠度是码字纠缠的上、下界或利用 LVQ 算法计算得到的, 用字母  $E$  表示, 多纠缠测度计算公式可以参考文献 [24] 的介绍.

### 4.3 码字纠缠度以及编码复杂度

下面算法运用于码字纠缠上界和下界不同的情况. 设量子码  $[[n, k, d]]$ , 其中码长  $n$  是利用汉明界固定<sup>[28]</sup>. 其中码字纠缠  $E$  和复杂度  $C$  借助于学习向量量化 (LVQ) 技术试图在量子码中的  $k$  和码距  $d$  的基础上找到一组原型向量来刻画码字纠缠与复杂度之间的关系. 给定样本集  $J = \{(E_1, C_1), (E_2, C_2), \dots, (E_m, C_m)\}$ , 每个样本  $E_j$  是由  $n$  个属性描述组成的特征向量  $(E_{j1}; E_{j2}; \dots; E_{jn}), k_j \in \mathcal{D}$  是样本  $E_j$  的类别标记. LVQ 算法的目标是学得一组  $n$  维原型向量  $\{p_1, p_2, \dots, p_q\}$ , 每个原型向量代表一个簇, 簇标记  $t_i \in \mathcal{D}$ . LVQ 算法过程体现在算法 1 中.

---

**Algorithm 1** LVQ
 

---

Input: Sample set  $J = \{(E_1, C_1), (E_2, C_2), \dots, (E_m, C_m)\}$ , learning rate  $\eta \in (0, 1)$ .

The number of prototype vectors is  $q$ , the default category of each prototype vector is labeled as  $\{t_1, t_2, \dots, t_q\}$ ;

Process:

- 1: Initializing a set of prototype vectors is referred as  $\{p_1, p_2, \dots, p_q\}$ ; repeat;
  - 2: Samples  $(E_j, C_j)$  are randomly selected from sample set  $J$ ;
  - 3: To calculate the distance between samples  $E_j$  and  $p_i$  ( $1 \leq i \leq q$ ):  $c_{ji} = \|E_j - p_i\|_2$ ;
  - 4: To find the prototype vector  $p_i^*$ ,  $i^* = \operatorname{argmin}_{i \in \{1, 2, \dots, q\}} c_{ji}$  closest to  $E_j$ ;
  - 5: If  $C_j = t_{i^*}$ , then  $p' = p_{i^*} + \eta \cdot (E_j - p_{i^*})$ , else  $p' = p_{i^*} - \eta \cdot (E_j - p_{i^*})$ ;
  - 6: End if, updating the prototype vector  $p_{i^*}$  to  $p'$ , until the stop condition is met;
- Output: The prototype vectors are defined as  $\{p_1, p_2, \dots, p_q\}$ .
- 

LVQ 算法适用于该问题的原因主要体现在 4 个方面: (1) 利用循环差集特性和经典 LDPC 码的 U 和 B 组合构造 QLDPC 码, 最后得到的是一个矩阵, 如果将矩阵中的每一列作为一个向量, 能够更好地解决问题, LVQ 算法就是以向量为基础的算法, 而且由编码复杂度的定义可知, 由于同一个量子码会有不同的量子线路实现方法, 存在最小编码复杂度, 但是每一个码的最小编码复杂度是根据量子线路得出的, 而且是个确切的数, LVQ 算法最主要的问题是计算量子码字纠缠度, 由算法 1, 2 步可得. (2) 由于以前的学者已经得出几何测度是可以解决码字纠缠度的问题, 几何测度最终的落脚点还是两个态之间的最小的自信息量, 也就是一种“距离”. 算法 3, 4 步既能体现“距离”这个概念, 又能体现距离的最小值. (3) 本文主要是利用码字纠缠上界和下界进行求解码字纠缠度, 算法的第 5 步, 当编码复杂度确定时, 当中间符号为“+”时, 这里为码字纠缠的上界, 当中间符号为“-”时, 这里为码字纠缠的下界, 这样与我们本文计算方法是一致的, 因此适用于 LVQ 算法. (4) 以前的学者们一般利用拉格朗日乘数法中的迭代算法进行计算码字纠缠度, 但是计算时很有可能得不到算法的全局最值, 只能得到局部极值, LVQ 算法也是迭代算法, 可以通过调节学习率的值控制算法得到相对的最优解.

算法第 1 行先对原型向量进行初始化, 例如, 对第  $q$  个簇可从类别标记为  $t_q$  的样本中随机选取一个作为原型向量. 算法第 2 ~ 6 行对原型向量进行迭代优化. 在每一轮迭代中, 算法随机选取一个有标记训练样本, 找出与其距离最近三维原型向量, 并根据两者的类别标记是否一致来对原型向量进行相应的更新. 在第 6 行中, 若已满足算法的停止条件 (例如已达到最大迭代轮数  $N = 50000$ , 或原型向量更新很小甚至不再更新), 则将当前原型向量作为最终结果返回. 由算法 1 可得表 3 和 4<sup>[35]</sup>, 从表中可知, 当码长固定时, 对于码字纠缠上、下界相同与上、下界不同的这两种情况下, 无论是码字纠缠还是复杂度, 前者都不大于后者. 对于利用拉格朗日乘数法中的迭代计算码字纠缠度时, 它不能进行并行计算且算法公式是平方的, 计算码字纠缠度运行速度的效率相对较低. 而本文的学习向量量化 (LVQ) 算法可以有效地并行计算, 其运行速度的效率相应提高. 通过表 3 和 4 的数据, 两种算法同时在一台计算机上运算, 结果显示在计算运行速度方面, 由于学习向量量化算法可以并行计算并且算法



表 3 10 以内上、下界不相同的码字纠缠及编码复杂度

Table 3 Codewords entanglement and coding complexity with the different upper and lower bounds within 10

$[[n, k, d]]$	$E_u$	$E_l$	$E$	$C$
[[5,1,3]]	3	2	2.9275	4
[[6,1,3]]	3	2	2.9275	4
[[7,2,2]]	4	3	4	5
[[7,3,2]]	4	3	4	6
[[8,1,3]]	5	4	5	7
[[8,2,3]]	5	4	4.8549	7
[[9,1,3]]	5	4	5	8
[[9,2,3]]	5	4	5	8
[[9,3,3]]	5	4	5	8

表 4 10 以内相同上、下界的码字纠缠及编码复杂度

Table 4 Codewords entanglement and coding complexity with the same upper and lower bounds within 10

$[[n, k, d]]$	$E_u$	$E_l$	$E$	$C$
[[5,2,2]]	2	2	2	2
[[6,2,2]]	3	3	3	3
[[7,1,3]]	3	3	3	5
[[8,4,2]]	4	4	4	4
[[9,4,2]]	4	4	4	4

公式是线性的, 所以比拉格朗日乘法法的迭代算法的运行效率提高了 37.68%. 由表 3 和 4 的数据可以推得量子编码复杂度不小于码字纠缠度. 在精度和稳定性方面, 因为拉格朗日乘法法的迭代算法有时候不会达到算法的全局最值, 只能得到局部极值, 而 LVQ 算法可以通过调节学习率  $\eta$  和迭代次数  $N$ , 使得它的精度和稳定性方面更优, 所以 LVQ 算法是优于拉格朗日乘法法的迭代算法的.

由第 3 节所述的构造方法构造出的 QLDPC 码不仅是性能良好的量子码, 而且既具有稳定子码的循环差集特性又具有 QLDPC 码稀疏的校验矩阵. 上述构造出的量子低密度奇偶校验码, 大部分可以通过计算码字纠缠的上界和下界的方法得到码字纠缠度, 还有一部分当上、下界不同时, 可以利用学习向量量化 (LVQ) 算法求得码字纠缠度. 对于高维量子低密度奇偶校验码而言, 利用此方法求解码字纠缠度简单且易于理解, 相比于构造图态方法, 节约人力和物力的消耗.

#### 4.4 构造 $[[5,1]]$ 码以及编码测量纠错线路图

以经典的量子低密度奇偶校验码  $[[5,1]]$  作为例子来说明上述的构造以及其码字纠缠的上、下界的测量.  $k=1$  和  $n=5$  满足上述的构造条件, 且  $n=5$  满足其条件的最小值. 由于上述的构造, 新码的校验矩阵是  $X$  和  $Z$  算子的增广矩阵, 对于  $X$  算子而言,  $D = \{a_1 = 1, a_4 = 4\}$  中可以获得一组有序对  $(a_i, a_j)$ ,  $a_i, a_j \in D$ , 对于  $Z$  算子而言,  $D' = \{a_2 = 2, a_3 = 3\}$  中可以获得一组有序对  $(a_i, a_j)$ ,  $a_i, a_j \in D'$ , 对于  $D$  和  $D'$  进行异组间差的计算, 满足定义 1 的条件, 使  $d \equiv a_i - a_j \pmod{\nu}$  成立, 则  $D(5, 2, 1)$  为量子低密度奇偶校验码  $[[5,1]]$  的循环差集 (表 5).

由表 5 所知, 对于任何  $d \neq 0 \pmod{n}$ , 可以找到一个唯一的有序对  $(K_j, L_i)$  满足式 (10); 选择  $L = \{2, 3\}$  和  $K = \{1, 4\}$ , 由  $L$  和  $K$  可知,  $\alpha_t = 2, \beta_t = 2$  满足式 (13). 因此, 基于  $[[5,1]]$  量子稳定子

表 5  $D(5, 2, 1)$  循环差集  
Table 5 The cyclic difference set of  $D(5, 2, 1)$

$D(5, 2, 1)-a_1 = 1$	$D(5, 2, 1)-a_2 = 4$
$1-2=4 \pmod{5}$	$4-2=2 \pmod{5}$
$1-3=3 \pmod{5}$	$4-3=1 \pmod{5}$

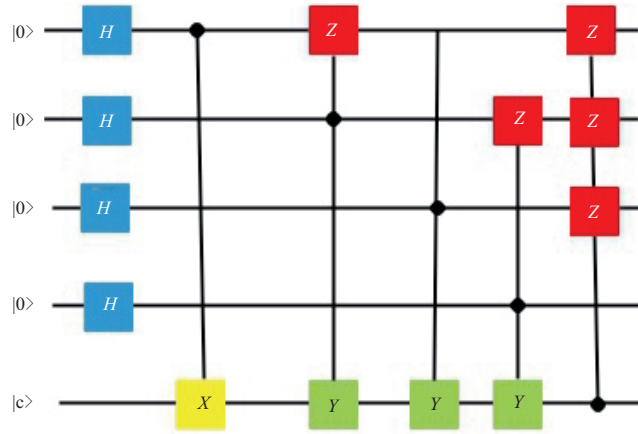


图 3 (网络版彩图)  $[[5,1]]$  量子码的编码线路, 其中  $X, Y, Z$  为泡利算子,  $H$  为哈达玛门操作算符

Figure 3 (Color online) The coding circuit of the quantum code  $[[5,1]]$ , where  $X, Y,$  and  $Z$  are Pauli operators and  $H$  is Hadamard gate operator

码构造的 QLDPC 码满足以上的构造条件.

根据  $L$  和  $K$  构造稳定子生成元为  $M = XZZXI$ . 由  $M$  分别向右循环 1, 2 和 3 量子比特, 可得

$$M_1 = IXZZX, \quad M_2 = XIXZZ, \quad M_3 = ZXIXZ. \quad (15)$$

经典量子低密度校验码  $[[5,1]]$  的校验矩阵  $H$ ,  $H$  矩阵的左侧为  $Z$  算子的校验矩阵, 右侧为  $X$  算子的校验矩阵:

$$H = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]. \quad (16)$$

本文中, 基于稳定子码的量子低密度奇偶校验码的校验矩阵为  $H_1$  和  $H_1^\perp$ . 下面将矩阵分为 3 部分,  $H_1$  左侧和中间为  $Z$  算子的校验矩阵,  $H_1^\perp$  左侧和中间为  $X$  算子的校验矩阵,  $H_1$  和  $H_1^\perp$  右侧都为 1 的向量, 这是符合构造方法中第 6 步的构造原则, 如下所示:

$$H_1 = \left[ \begin{array}{cccc|cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right], \quad H_1^\perp = \left[ \begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (17)$$

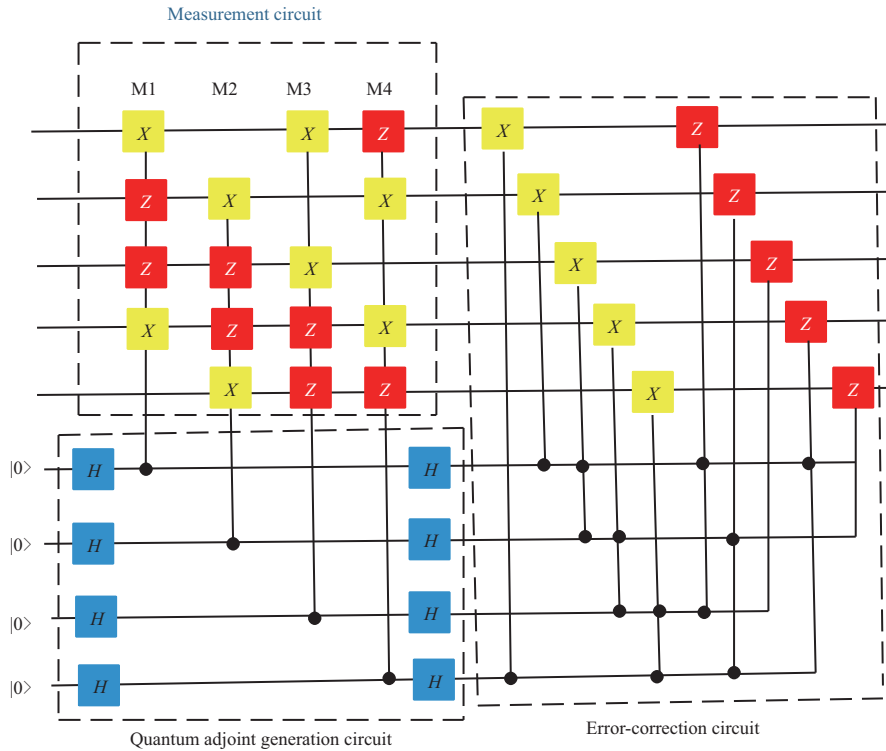


图 4 (网络版彩图)  $[[5,1]]$  量子码的稳定子测量和纠错线路,  $M_1, M_2, M_3, M_4$  为  $[[5,1]]$  的 4 个生成元且具备测量的作用

Figure 4 (Color online) Stabilizer measurement and error-correction circuits for quantum codes  $[[5,1]]$ ,  $M_1, M_2, M_3, M_4$  are as generators with the function of measurement

由矩阵理论, 易知

$$R(H) = R(H_1) = R(H_1^\perp) = 4 = n - k. \tag{18}$$

在上述研究中,  $[[5,1]]$  的非  $Z$  型生成元的最小数量为 4 个, 因此  $E_u = 4$ .  $[[5,1]]$  矢量偶表示的校验矩阵的秩为 4, 因此  $E_l = 4$ . 从而,  $[[5,1]]$  码字纠缠度为  $E = 4$ , 这里的编码复杂度  $C$  需要根据码距和编码电路中的逻辑门所确定.

由上述稳定子生成元的表示形式和码字纠缠度构造出量子码  $[[5,1]]$  的编码线路和测量纠错线路如图 3 和 4 所示. 图 3 和 4 是为了研究量子纠错码的译码器而做出的线路, 这为译码器的研究奠定了坚实的基础. 图 3 对一般的  $[[5,1]]$  的编码线路图进行了精简, 保证了其正确的操作和编码. 图 4 是  $[[5,1]]$  量子码的稳定子测量和纠错线路. 一般纠错是对症状测量后根据测量结果来纠错, 选择的纠正操作要求症状测量错误的稳定子不对易, 与其他所有的稳定子都对易.

### 5 结论

本文基于稳定子码的循环差集特性和 QLDPC 码的  $U$  和  $B$  组合, 提出了一种高维量子低密度奇偶校验码的构造方法. 码字纠缠的上界是非  $Z$  算子的最小数目; 码字纠缠的下界由  $U$  和  $B$  组合构造法形成的校验矩阵的秩所决定. 利用码字纠缠的上、下界可以解决码字纠缠度的大部分问题, 当码字纠缠上、下界不同时, 则利用机器学习中学习向量量化算法可以得到码字纠缠度和编码复杂度之

间的关系, 进而解决了高维 QLDPC 码的码字纠缠度的问题. 通过对表 3 和 4 的数据进行分析, 并且将两种算法同时在一台计算机上运行计算, 结果显示在计算运行速度方面, 由于学习向量量化 (LVQ) 算法可以并行计算并且算法公式是线性的, 所以它比拉格朗日乘法法中的迭代算法的运行效率提高了 37.68%. 由表 3 和 4 的数据可以推得量子编码复杂度不小于码字纠缠度. 在精度和稳定性方面, 因为拉格朗日乘法法中的迭代算法有时候不会达到算法的全局最优值, 只能得到局部极值, 而 LVQ 算法可以通过调节学习率  $\eta$  和迭代次数  $N$ , 使得它的精度和稳定性方面更优, 所以 LVQ 算法是优于拉格朗日乘法法中的迭代算法.

不过, 在本文中还有两个问题待进一步研究与探讨. 其一, 因在不同条件所构造的循环差集不是唯一的, 故需要寻找构造循环差集更适用于编码的固定条件. 其二, 在量子低密度校验码的码字纠缠的上、下界不同的情况下, 为了计算码字纠缠度, LVQ 算法的具体运算以及举例说明其适用性仍然是一个有待研究的问题, 将在后续论文中进行详细介绍.

## 参考文献

- 1 Ma H Y, Xu P A, Shao C H, et al. Quantum private query based on stable error correcting code in the case of noise. *Int J Theor Phys*, 2019, 58: 4241–4248
- 2 Ma H Y, Teng J K, Hu T, et al. Co-communication protocol of underwater sensor networks with quantum and acoustic communication capabilities. *Wirel Pers Commun*, 2020, 113: 337–347
- 3 Shi P, Li N C, Wang S M, et al. Quantum multi-user broadcast protocol for the “platform as a service” model. *Sensors*, 2019, 19: 5257
- 4 Li Y, Zeng G H, Lee M H. GENERAL: quantum quasi-cyclic low-density parity-check error-correcting codes. *Chin Phys B*, 2009, 18: 4154–4160
- 5 Calderbank A R, Shor P W. Good quantum error-correcting codes exist. *Phys Rev A*, 1996, 54: 1098–1105
- 6 Zhou N R, Song H C, Gong L H, et al. Tripartite quantum deterministic key distribution protocol based on GHZ state. *Acta Phy Sin*, 2012, 21: 225–231 [周南润, 宋汉冲, 龚黎华, 等. 基于 GHZ 态的三方量子确定性密钥分配协议. *物理学报*, 2012, 21: 225–231]
- 7 Zhou N R, Zeng G H, Gong L H, et al. A quantum synchronous communication protocol for automatic retransmission based on entanglement selection. *Acta Phy Sin*, 2010, 4: 2193–2199 [周南润, 曾贵华, 龚黎华, 等. 基于纠缠的选择自动重传量子同步通信协议. *物理学报*, 2010, 4: 2193–2199]
- 8 Yue S, Zhou X F, Zhou Z W. Quench dynamics in 1D model with 3rd-nearest-neighbor hoppings. *Chin Phys B*, 2021, 30: 026402
- 9 张卫平, 周正威, 苏晓龙. 量子信息专题简介. *中国科学: 信息科学*, 2020, 50: 1277–1278
- 10 MacKay D J C, Neal R M. Near Shannon limit performance of low density parity check codes. *Electron Lett*, 1996, 32: 1645
- 11 Fujiwara Y, Clark D, Vandendriessche P, et al. Entanglement-assisted quantum low-density parity check codes. *Phys Rev A*, 2010, 82: 272–277
- 12 MacKay D J C, Mitchison G, McFadden P L. Sparse-graph codes for quantum error correction. *IEEE Trans Inform Theor*, 2004, 50: 2315–2330
- 13 Zhou L, Sheng Y B, Long G L. Device-independent quantum secure direct communication against collective attacks. *Sci Bull*, 2020, 65: 12–20
- 14 Cai W Z, Ma Y W, Wang W T, et al. Bosonic quantum error correction codes in superconducting quantum circuits. *Fundamental Res*, 2021, 1: 50–67
- 15 Aly S A. A class of quantum LDPC codes constructed from finite geometries. In: *Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference*, 2008
- 16 Thorpe J. Low-Density Parity-Check (LDPC) Codes Constructed from Protographs. *IPN Progress Report 42-154*, 2003
- 17 Cross A, Smith G, Smolin J A, et al. Codeword stabilized quantum codes. *IEEE Trans Inform Theor*, 2009, 55: 433–438

- 18 Mamun M S A, Akhter F. Pseudo random binary sequence based on cyclic difference set. *Symmetry*, 2020, 12: 1202
- 19 Tian R, Shen R L. A necessary condition for cyclic difference sets. *J Hubei Inst Natl (Natl Sci Ed)*, 2019, 37: 37–40  
[田融, 沈如林. 关于循环差集的一个必要条件. *湖北民族学院学报 (自然科学版)*, 2019, 37: 37–40]
- 20 Sarvepalli P K, Klappenecker A, Rötteler M. Asymmetric quantum codes: constructions, bounds and performance. *Proc R Soc A*, 2009, 465: 1645–1672
- 21 Vidal G, Tarrach R. Robustness of entanglement. *Phys Rev A*, 1999, 59: 141–155
- 22 Vedral V, Plenio M B, Rippin M A, et al. Quantifying entanglement. *Phys Rev Lett*, 1997, 78: 2275–2279
- 23 Wei T C, Goldbart P M. Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states. *Phys Rev A*, 2003, 68: 4343–4349
- 24 Chen X Y. Entanglement of stabilizer codewords. *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2015, 45: 030001 [陈小余. 量子稳定子码的码字纠缠. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2015, 45: 030001]
- 25 Chen X Y, Jiang L Z. Property function criteria for the separability of quantum states. *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2018, 48: 020302 [陈小余, 蒋丽珍. 量子态可分离性的特性函数准则. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2018, 48: 020302]
- 26 Chen X Y, Wang T T. Decay of N-qubit GHZ states in Pauli channels. *Chin Phys B*, 2015, 24: 080303
- 27 Dillon J F, Dobbertin H. New cyclic difference sets with Singer parameters. *Finite Fields Their Appl*, 2004, 10: 342–389
- 28 Gottesman D. Class of quantum error-correcting codes saturating the quantum Hamming bound. *Phys Rev A*, 1996, 54: 1862–1868
- 29 Vedral V, Plenio M B. Entanglement measures and purification procedures. *Phys Rev A*, 1998, 57: 1619–1633
- 30 Wei T C. Relative entropy of entanglement for multipartite mixed states: permutation-invariant states and Dür states. *Phys Rev A*, 2008, 78: 012327
- 31 Hayashi M, Markham D, Murao M, et al. Bounds on multipartite entangled orthogonal state discrimination using local operations and classical communication. *Phys Rev Lett*, 2006, 96: 040501
- 32 Chandola V, Banerjee A, Kumar V. Anomaly detection: a survey. *ACM Comput Surv*, 2009, 41: 15
- 33 Deza M M, Deza E. *Encyclopedia of Distances*. Berlin: Springer, 2009
- 34 Aloise D, Deshpande A, Hansen P, et al. NP-hardness of Euclidean sum-of-squares clustering. *Mach Learn*, 2009, 75: 245–248
- 35 Liu F T, Ting K M, Zhou Z H. Isolation-based anomaly detection. *ACM Trans Knowl Discov Data*, 2012, 6: 1–39
- 36 Banerjee A, Merugu S, Dhillon I, et al. Clustering with Bregman divergences. *J Mach Learn Res*, 2005, 6: 1705–1749
- 37 Estivill-Castro V. Why so many clustering algorithms: a position paper. *SIGKDD Explor Newsl*, 2002, 4: 65–75
- 38 Hodge V, Austin J. A survey of outlier detection methodologies. *Artif Intell Rev*, 2004, 22: 85–126
- 39 Jain A K. Data clustering: 50 years beyond k-means. In: *Proceedings of Joint European Conference on Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases*, 2008
- 40 Tan X Y, Chen S C, Zhou Z H, et al. Face recognition under occlusions and variant expressions with partial similarity. *IEEE Trans Inform Forensic Secur*, 2009, 4: 217–230
- 41 von Luxburg U. A tutorial on spectral clustering. *Stat Comput*, 2007, 17: 395–416
- 42 Rui X, Wunsch II D. Survey of clustering algorithms. *IEEE T Neur Net*, 2005, 3: 645–678
- 43 Steane A M. Error correcting codes in quantum theory. *Phys Rev Lett*, 1996, 77: 793–797

## Entanglement degree of high-dimensional quantum low-density parity check codes

Xingkui FAN, Dandan YAN, Fen LIU & Hongyang MA\*

*Research Center for Quantum Optics and Quantum Communication, School of Science, Qingdao University of Technology, Qingdao 266525, China*

\* Corresponding author. E-mail: mahongyang@qut.edu.cn

**Abstract** The important part of quantum information science is quantum error-correction and quantum computation. In the practical application, some methods of quantum communication, such as the quantum communication based on the atmosphere transmission, require a mix of mathematics-potentially to solve the problem. The quantum error-correction code is an efficient method to calculate quantum communication. However, since the construction of quantum error-correction codes depends on the degree of quantum entanglement, it is difficult to be widely used in practice. At present, the graph state is a promising solution to reduce the degree of codewords entanglement. But there are still many difficulties in constructing the high-dimensional graph state. More importantly, the above difficulties can be skillfully solved by the upper and lower bounds of codewords entanglement. Based on the characteristics of the cyclic difference set of stabilizer codes and the combination of U and B of classical low-density parity check (LDPC) codes, a high-dimensional quantum low-density parity check (QLDPC) code is constructed creatively. By calculating the characteristics of the non- $Z$ -type generators of the new codewords, the minimum number is obtained and the entanglement upper bound of the new code is acquired. And then, the rank of the check matrix of the new code is calculated as the lower bound of entanglement. When the upper bound and lower bound of entanglement are different, the learning vector quantization (LVQ) algorithm in machine learning can be used to simultaneously obtain the codewords entanglement and the coding complexity of the code, in which the relationship between them can be derived. In terms of calculating the running speed, compared with the iterative algorithm in the Lagrange multiplier method, the running speed of LVQ algorithm is increased by 37.68%. In this paper, a measurement of quantum codewords entanglement is proposed, which supports a helpful role in the design of quantum error-correction codes with higher decoding efficiency.

**Keywords** quantum low-density parity codes, cyclic difference set of stabilizer codes, combination of U and B, codewords entanglement measurement, learning vector quantization