中国科学: 信息科学 2021 年 第 51 卷 第 12 期: 2134–2148
SCIENTIA SINICA Informationis
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论文

频谱拥挤环境下雷达扩展目标探测极小极大波形设计

徐舟[1,2], 朱家华[3*], 范崇祎[1], 黄晓涛[1]

1. 国防科技大学电子科学学院, 长沙 410073
2. 国防科技大学电子对抗学院, 合肥 230037
3. 国防科技大学气象海洋学院, 长沙 410073
* 通信作者. E-mail: zhujiahua1019@hotmail.com

收稿日期: 2021–02–19; 修回日期: 2021–03–25; 接受日期: 2021–05–20; 网络出版日期: 2021–12–15

湖南省自然科学基金 (批准号: 2020JJ5677) 和国防科技大学科研计划 (批准号: ZK20-35) 资助项目

摘要 雷达频段的逐渐拓宽以及 5G 通信的广泛应用使得频谱资源越发拥挤, 宽带雷达在提高距离分辨率的同时, 使得目标散射特征由原来的点特征向距离扩展特征转变. 本文立足于频谱拥挤环境下的扩展目标探测波形设计问题, 以输出信干噪比 (signal to interference pulse noise ratio, SINR) 为准则, 通过建立极小极大 (minimax) 优化模型, 研究在距离扩展目标冲击响应 (target impulse response, TIR) 非准确已知情况下, 具有良好的频谱兼容与脉冲压缩性能的雷达波形设计问题, 确保检测性能对 TIR 的偏差具有稳健性. 在波形优化过程中, 借鉴 Minorization Maximization (MM) 算法的思想, 构造序列的子 minimax 问题对原波形设计问题进行逼近. 针对子 minimax 问题, 给出了基于拉格朗日 (Lagrange) 对偶的求解算法, 并对算法复杂度和收敛性进行了分析. 仿真结果表明, 依照所提算法设计的波形能够满足频谱兼容性且具有较好的脉冲压缩性能, 是一种稳健的检测波形, 相比当前其他算法, 所提算法能够确保迭代的收敛性, 而且在 TIR 先验偏差较大时获得更高的 SINR.

关键词 扩展目标探测, 频谱兼容, 极小极大优化, Minorization Maximization 算法, 拉格朗日对偶

1 引言

近年来, 雷达频段的拓宽以及 5G 通信技术的广泛运用, 使得原本有限的频谱资源更加拥挤, 雷达和通信的频谱兼容问题日益突出, 通过波形设计的方法, 在有限频谱资源的条件下完成目标探测与识别任务需求显得十分迫切 [1~7]. Aubry 等 [1,8] 以最大化输出信干噪比 (signal to interference pulse noise ratio, SINR) 为准则, 研究了频谱兼容与波形相似性约束下的波形设计问题, 并基于半正定规划

引用格式: 徐舟, 朱家华, 范崇祎, 等. 频谱拥挤环境下雷达扩展目标探测极小极大波形设计. 中国科学: 信息科学, 2021, 51: 2134–2148, doi: 10.1360/SSI-2021-0058
Xu Z, Zhu J H, Fan C Y, et al. Radar minimax waveform design for extended target detection in the presence of spectrally crowded environment (in Chinese). Sci Sin Inform, 2021, 51: 2134–2148, doi: 10.1360/SSI-2021-0058

© 2021《中国科学》杂志社

松弛 (semi-definite programming relaxation, SDPR) 技术给出了波形优化方法. 然而, SDPR 技术计算复杂度高, 且只能够优化波形的自相关矩阵, 需要通过秩 1 分解或者随机化的方法获得实际发射波形, 当约束超过 3 个时, 秩 1 分解算法无法使用 [9]. 正如文献 [10] 所指出的那样, 当引入波形相似性约束时, 随机化方法也难以获得令人满意的波形. 鉴于以上原因, 一系列基于其他算法的波形优化方法被相继提出, 诸如序列二次约束二次规划 (quadratically constrained quadratic programming, QCQP) 算法 [10], Minorization Maximization (MM) 算法 [11], 交替方向乘子法 (alternating direction method of multipliers, ADMM) [12], 用于求解频谱兼容与波形相似约束下的波形优化问题.

然而, 以上方法均是以点目标模型为研究对象, 随着宽带雷达技术的发展 [13], 典型目标的散射特征呈现出距离扩展特性. 与传统的点目标模型不同的是, 扩展目标的雷达回波不再是发射波形的尺度变换, 而是目标冲击响应 (target impulse response, TIR) 与发射波形的卷积形式 [14], 同时 TIR 受到雷达频段、视角和目标姿态等多方面影响, 探测前无法确切已知 [15,16]. 鉴于此, 当感兴趣目标是扩展目标时, 需要考虑目标 TIR 不确定性所带来的影响, 而引申出极小极大 (minimax) 波形设计方法用于提升目标探测性能的稳健性 [17~22]. Chen 等 [17] 研究了 TIR 不确定集为球状集合且发射波形受到能量约束情况下的扩展目标探测波形设计问题, 并且采用交替迭代的方法对发射波形进行优化, 该条件下波形设计所对应的 minimax 问题存在鞍点, 收敛性能够保证. 针对更加复杂的 TIR 不确定集合, Jiu 等 [18] 提出使用一系列的球状凸集覆盖 TIR 不确定集合, 并通过求解球状凸集内的 minimax 问题构造最优波形. 遗憾的是, 仅考虑发射波形能量约束所设计的波形会具有较大的峰均比 (peak-to-average power ratio, PAR), 无法满足雷达发射机的要求. Karbasi 等 [19] 引入 PAR 约束到扩展目标探测波形设计中, 提出利用随机采样的方法对球状不确定 TIR 集合进行近似, 将 minimax 双重优化问题转换为最大化问题并利用 SDPR 方法进行求解, 但是当 TIR 不确定性较大时, 需要大量的随机采样, 否则容易造成信噪比损失. 文献 [20] 提出使用交替优化的方法求解 PAR 约束下的扩展目标探测波形设计问题, 但是此时 minimax 问题的鞍点不一定存在, 收敛性无法保证. 尽管学者们在扩展目标探测波形设计方面的研究取得了不错进展, 但是频谱兼容与波形相似性约束条件下的扩展目标探测波形设计技术鲜有报道. 该条件下, 当前广泛采用的 SDPR 技术无法直接用于该条件下的波形设计问题, 其原因在于从信号自相关矩阵中合成同时满足频谱兼容与相似性约束的波形存在困难.

综合以上分析, 本文研究雷达扩展目标探测的 minimax 波形设计问题, 以提升扩展目标探测性能的稳健性. 通过限制指定频段上信号的发射能量, 并在 2 范数度量下约束发射信号与参考信号的距离, 确保发射波形同时具有频谱兼容性与良好的脉冲压缩性能. 首先, 以输出端 SINR 为目标函数, 将稳健波形设计问题建模为一个 minimax 优化问题, 然后对波形的频谱兼容与相似性约束进行了分析, 给出了约束参数的设置方法. 在波形优化方面, 借鉴 MM 算法的思想, 构造序列的子 minimax 问题对原 minimax 波形设计问题进行逼近. 针对子 minimax 问题, 提出了基于拉格朗日对偶的求解方法, 利用对偶原理 [23], 将 minimax 双重优化问题转化为凸优化问题进行求解. 在此基础上进一步对所提算法的收敛性及复杂度进行了分析. 数值实验结果证明了本文所提算法的有效性.

2 问题描述与建模

2.1 符号定义与说明

在本文中, 标量变量用斜体字母表示 (如 a, A); 矢量变量用粗斜体小写字母表示 (如 $\boldsymbol{a}$), $\boldsymbol{a}(i)$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的第 i 个元素; 矩阵变量用粗斜体大写字母表示 (如 $\boldsymbol{A}$), $\boldsymbol{A}(p,q)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中位于第 p 行,

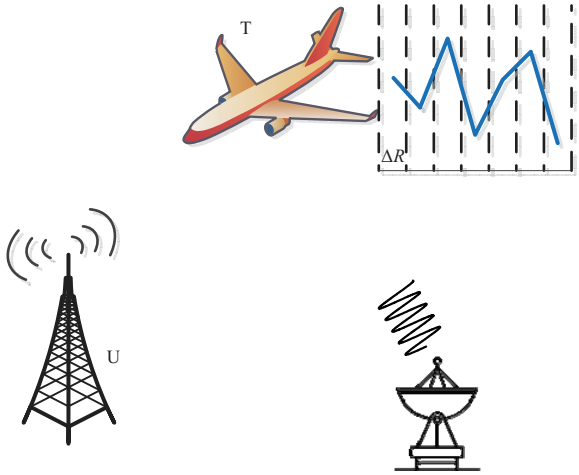


图 1 (网络版彩图) 探测场景示意图

Figure 1 (Color online) Radar detection scenario

第 q 列的元素; $\boldsymbol{A} \succeq 0$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵, $\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值. $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别表示实数域和复数域, $*$ 表示卷积运算, 上标 H 表示共轭转置. $\|\cdot\|_2$ 为欧几里得空间内的 2 范数.

2.2 信号模型

如图 1 所示, 场景中雷达对感兴趣目标 T 进行探测, 目标的尺寸显著大于雷达距离分辨单元 ΔR, 电磁散射特性由 TIR 进行描述. 除感兴趣目标外, 雷达不远处存在某个无线电使用设备 U, 要求雷达发射信号频段不能与 U 使用频段重合. 假定雷达发射信号的离散采样为 $\boldsymbol{s} = [\boldsymbol{s}(1), \boldsymbol{s}(2), \ldots, \boldsymbol{s}(N)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^N$, 那么雷达接收的回波可以表示为 [18, 19]

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{t} * \boldsymbol{s} + \boldsymbol{n}, \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{t} = [\boldsymbol{t}(1), \boldsymbol{t}(2), \ldots, \boldsymbol{t}(L)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^L$ 为 TIR, $\boldsymbol{n}$ 为不依赖于发射信号的干扰和噪声. 进一步表示成矩阵形式 [18, 19]

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{n} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{n}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{L} \boldsymbol{t}(i)\boldsymbol{J}_{i-1}$, $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{J}_0\boldsymbol{s}, \ldots, \boldsymbol{J}_{L-1}\boldsymbol{s}]$, $\boldsymbol{J}_i \in \mathbb{R}^{(N+L-1)\times N}$ 为移位矩阵:

$$\boldsymbol{J}_i(p,q) = \begin{cases} 1, & p-q=i, \\ 0, & p-q \neq i. \end{cases}$$

2.3 极小极大波形设计

在雷达接收端, 使用滤波器 $\boldsymbol{w}$ 对接收信号进行滤波, 则输出信干噪比 SINR 可以表示为关于三元组 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{s})$ 的函数:

$$\mathrm{SINR}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{s}) = \frac{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{w}} = \frac{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{t}\boldsymbol{t}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{w}}, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{R}_n$ 为干扰和噪声协方差矩阵.

假定雷达通过认知的方法 [16] 获得了 TIR 的先验知识 $\boldsymbol{t}_0$, 但是受到目标姿态、环境变化等因素的影响, 在实际探测过程中真实 TIR 与先验 $\boldsymbol{t}_0$ 存在一定的偏差. 雷达希望通过调整滤波器与发射波形,

使得在 TIR 偏差的情况下仍能对目标实现稳健探测. 那么, 该情况下的波形设计问题可以建模为以下 minimax 优化问题 [19]:

$$\begin{cases} \max\limits_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{w}} \min\limits_{\boldsymbol{t}} \mathrm{SINR}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{w},\boldsymbol{s}), \\ \text{s.t.} \quad \|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0\|_2 \leqslant r, s \in \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

其中, r 为 TIR 不确定集合的半径, 用于描述先验 $\boldsymbol{t}_0$ 与真实值的偏差, r 越大表示 TIR 不确定性越大, 先验知识越不准确. Ω 为波形约束集合, 具体包含能量约束、频谱兼容约束以及相似性约束 [4,11].

2.4 波形约束集合

雷达发射信号能量受到实际系统的限制, 因此需要对发射信号的总能量加以约束. 不失一般性, 将发射能量进行归一化表示, 那么发射信号的能量约束可以写为

$$\|\boldsymbol{s}\|_2^2 \leqslant 1. \tag{5}$$

另外, 设备 U 要求雷达在指定频段上对发射能量进行限制. 不妨设 $[f_1^m, f_2^m]$ 为第 m 个受到能量限制的频带, 则发射信号在该频带的辐射能量可以表示为 $\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_I^m\boldsymbol{s}$, 其中 [4]

$$\boldsymbol{R}_I^m(p,q) = \begin{cases} f_2^m - f_1^m, \ \ p=q, \\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_2^m(p-q)} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_1^m(p-q)}}{\mathrm{j}2\pi(p-q)}, \ p \neq q. \end{cases}$$

假设存在 M 个限制频带, 则频谱兼容约束由下式给出 [1,4,8]:

$$\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_I\boldsymbol{s} \leqslant e_I, \tag{6}$$

其中, e_I 为所有限制频带所允许的最大能量, $\boldsymbol{R}_I = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \boldsymbol{R}_I^m$, $\alpha_m \geqslant 0$ 为各频带的权系数.

为使得所设计波形具有良好的脉冲压缩性能与多普勒 (Doppler) 兼容性, 需要引入波形相似性约束 [11], 其表达式为

$$\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_0\|_2 \leqslant \delta. \tag{7}$$

其中, $\boldsymbol{s}_0$ 为具有良好脉冲压缩性能与多普勒兼容性的参考波形, δ 用于约束所设计波形与参考波形的相似程度.

从几何的角度对波形约束集合 Ω 进行分析可以发现, 能量约束集合为 N 维空间内以原点为球心的单位球, 将满足能量约束的波形约束在球内; 频谱兼容约束将满足频谱兼容性的波形约束在 N 维空间内以原点为球心的椭球内; $\boldsymbol{s}_0$ 为单位球上的一个点, 相似性约束集合为 N 维空间内以该点为球心, δ 为半径的球体, 将满足相似性约束的波形约束在球内. 图 2 以 2 维空间为例, 给出了约束集合的包含关系. 图 2(a) 中, 3 个约束集合存在部分交集, 意味着 Ω 非空, 即存在同时满足以上 3 个约束的波形, 相反, 图 2(b) 给出了另外一种情况, 3 个约束集合不存在交集, 不存在同时满足以上 3 个约束的波形. 需要指出的是, 当 $\delta \geqslant 2$ 时, 相似性约束集合可以完全覆盖能量约束集合, 此时任何满足能量约束的波形均满足相似性约束, 即相似性约束不起到实质作用; 当 $e_I \geqslant \lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_I)$ 时, 频谱兼容约束集合可以完全覆盖能量约束集合, 此时任何满足能量约束的波形均满足频谱兼容约束, 即频谱兼容约束不起到实质作用. 除此之外, 从图中还可以观察到, 无论何种情况, 能量约束与频谱兼容约束均存在交集, 而频谱兼容约束与信号相似性约束可能不存在交集. 鉴于此, 可通过以下方法设计约束参数, 以确保最优波形的存在性.

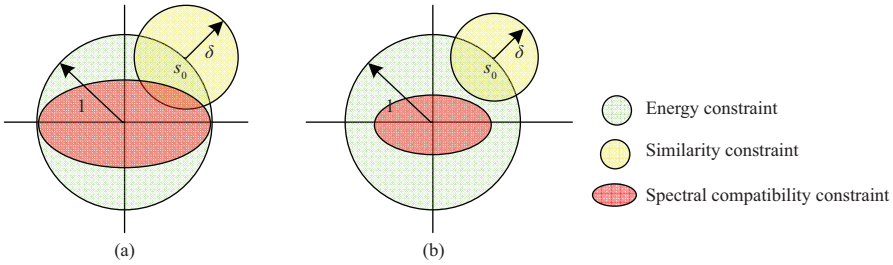


图 2 (网络版彩图) 约束的几何关系

Figure 2 (Color online) Geometric relations of constraints. (a) A feasible case; (b) an infeasible case

给定 $\boldsymbol{s}_0$ 与 e_I, 求解以下优化问题 $\mathcal{P}_\delta$:

$$\mathcal{P}_\delta \begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{s}} \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_0\|_2 \\ \text{s.t.} \quad \|\boldsymbol{s}\|_2^2 \leqslant 1,\ \boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_I\boldsymbol{s} \leqslant e_I. \end{cases} \tag{8}$$

令 $v(\mathcal{P}_\delta)$ 为 $\mathcal{P}_\delta$ 的最优值, 那么, 取 $\delta \geqslant v(\mathcal{P}_\delta)$ 可确保波形约束集合 Ω 非空.

综上, 频谱兼容条件下的扩展目标 minimax 波形设计模型可以表示为以下带约束的 minimax 问题:

$$\mathcal{P} \begin{cases} \max\limits_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{w}} \min\limits_{\boldsymbol{t}} \dfrac{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{t}\boldsymbol{t}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{w}} \\ \text{s.t.} \quad \|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0\|_2 \leqslant r,\ \|\boldsymbol{s}\|_2^2 \leqslant 1, \\ \qquad \boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_I\boldsymbol{s} \leqslant e_I,\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_0\|_2 \leqslant \delta. \end{cases} \tag{9}$$

注意到式 (9) 中, 模型对于 $\boldsymbol{w}$ 是无约束的且 $\|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0\|_2 \leqslant r$ 为凸集, 根据文献 [24] 中定理, 关于 $\boldsymbol{w}$ 的最大化问题可以先进行求解, 其最优解表达式为 $\boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{t}$. 将 $\boldsymbol{w}^*$ 代入式 (9) 中, 得到简化后的 minimax 波形设计问题:

$$\mathcal{P} \begin{cases} \max\limits_{\boldsymbol{s}} \min\limits_{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s} \\ \text{s.t.} \quad \|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0\|_2 \leqslant r,\ \|\boldsymbol{s}\|_2^2 \leqslant 1, \\ \qquad \boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_I\boldsymbol{s} \leqslant e_I,\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_0\|_2 \leqslant \delta. \end{cases} \tag{10}$$

3 极小极大波形优化算法

本节介绍用于求解问题 $\mathcal{P}$ 的优化算法. 首先, 简要给出 MM 算法的主要思想, 并以此为基础提供 $\mathcal{P}$ 中目标函数的一个 minorizer, 利用该 minorizer 构造一系列的子 minimax 问题对 $\mathcal{P}$ 进行逼近. 然后, 基于拉格朗日对偶 [23] 求解子 minimax 问题. 最后对算法的收敛性和运算复杂度进行分析.

3.1 MM 算法

MM 算法主要用于解决下列优化问题 [25]:

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} g(\boldsymbol{x}),$$

与直接优化 $g(\boldsymbol{x})$ 不同的是, MM 算法通过顺序地优化一系列代理函数 $\bar{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^{(l)})$ 去寻找原问题的最优解 $\boldsymbol{x}^*$. 第 l 次迭代求解的优化问题为

$$\boldsymbol{x}^{(l+1)} \in \arg\max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \bar{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^{(l)}).$$

在所有的代理函数中, 满足

$$\bar{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^{(l)}) \leqslant g(\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x}\in\mathcal{X},\quad \bar{g}(\boldsymbol{x}^{(l)},\boldsymbol{x}^{(l)}) = g(\boldsymbol{x}^{(l)}) \tag{11}$$

两条性质的 $\bar{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^{(l)})$ 称为 $g(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^{(l)}$ 点的一个 minorizer. minorizer 的性质确保了 MM 算法在迭代过程中目标函数的递增性, 即

$$\bar{g}(\boldsymbol{x}^{(l)},\boldsymbol{x}^{(l)}) = g(\boldsymbol{x}^{(l)}) \leqslant \bar{g}(\boldsymbol{x}^{(l+1)},\boldsymbol{x}^{(l)}) \leqslant g(\boldsymbol{x}^{(l+1)}).$$

针对式 (10) 中的问题 $\mathcal{P}$, 以下定理提供了目标函数在 $\boldsymbol{s}^{(l)}$ 处的一个 minorizer.

定理1 令 $g(\boldsymbol{s}) = \min_{\|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0\|_2\leqslant r} \boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}$, 那么

$$\bar{g}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}^{(l)}) = \min_{\|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0\|_2\leqslant r} 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\boldsymbol{s}^{(l)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}\right\} - \left(\boldsymbol{s}^{(l)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}^{(l)}$$

是 $g(\boldsymbol{s})$ 在 $\boldsymbol{s}^{(l)}$ 点的一个 minorizer.

证明 对任给的 $\boldsymbol{t}$, 可以得到

$$\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s} = \left(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}^{(l)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}^{(l)}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\boldsymbol{s}^{(l)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}\right\} - \left(\boldsymbol{s}^{(l)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}^{(l)}.$$

显然, $\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}$ 是半正定矩阵, 我们进一步得到

$$\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s} \geqslant 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\boldsymbol{s}^{(l)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}\right\} - \left(\boldsymbol{s}^{(l)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}^{(l)},\quad \forall \boldsymbol{s},$$

以及

$$\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\boldsymbol{s}^{(l)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}\right\} - \left(\boldsymbol{s}^{(l)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}^{(l)},\ \boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}^{(l)}.$$

以上两个式子对任给的 $\boldsymbol{t}$ 恒成立, 因此在等式或不等式的两边同时对 $\boldsymbol{t}$ 取最小化仍然成立, 即 $\bar{g}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}^{(l)})$ 满足式 (11) 中的性质, 是 $g(\boldsymbol{s})$ 在 $\boldsymbol{s}^{(l)}$ 点的一个 minorizer. 定理得证.

结合 MM 算法与定理 1, $\mathcal{P}$ 的解可通过序列化地求解以下问题得到:

$$\mathcal{P}^{(l)}\begin{cases}\boldsymbol{s}^{(l+1)} = \arg\max\limits_{\boldsymbol{s}} \bar{g}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}^{(l)}) \\ \text{s.t.}\quad \|\boldsymbol{s}\|_2^2 \leqslant 1,\ \boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_I\boldsymbol{s} \leqslant e_I, \\ \qquad \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_0\|_2 \leqslant \delta.\end{cases} \tag{12}$$

将优化问题 $\mathcal{P}^{(l)}$ 与 $\mathcal{P}$ 进行对比, 不难发现, 一方面, $\mathcal{P}^{(l)}$ 与 $\mathcal{P}$ 均是关于 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的 minimax 优化问题, 另一方面, $\mathcal{P}$ 中目标函数是关于 $\boldsymbol{s}$ 的二次函数, 而 $\mathcal{P}^{(l)}$ 中目标函数是关于 $\boldsymbol{s}$ 的线性函数, 因此更容易求解. 接下来给出 $\mathcal{P}^{(l)}$ 的优化算法.

3.2 基于拉格朗日对偶的波形优化算法

考虑第 l 次迭代问题 $\mathcal{P}^{(l)}$ 的内部最小化问题:

$$\min_{\|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0\|_2\leqslant r} 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(\boldsymbol{s}^{(l)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}\right\}-\left(\boldsymbol{s}^{(l)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}^{(l)}, \tag{13}$$

令 $\boldsymbol{S}^{(l)}=\left[\boldsymbol{J}_0\boldsymbol{s}^{(l)},\ldots,\boldsymbol{J}_{L-1}\boldsymbol{s}^{(l)}\right]$, 根据式 (2), 可将式 (13) 重新表述为

$$\min_{\|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0\|_2\leqslant r} \boldsymbol{t}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}^{(l)})\boldsymbol{t}, \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}^{(l)})=(\boldsymbol{S}^{(l)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{S}^{(l)}-(\boldsymbol{S}^{(l)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{S}^{(l)}$. 进一步将式 (14) 表示成如下的拉格朗日对偶形式 [23], 得到

$$\begin{aligned}&\max_{\mu,\gamma}\ \gamma\\&\text{s.t.}\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}^{(l)})+\mu\boldsymbol{I} & \mu\boldsymbol{t}_0\\ \mu\boldsymbol{t}_0^{\mathrm{H}} & \mu\boldsymbol{t}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{t}_0-\mu r^2-\gamma\end{bmatrix}\succeq 0,\\&\mu\geqslant 0,\end{aligned} \tag{15}$$

其中, μ 为约束 $\|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0\|_2\leqslant r$ 的对偶变量, γ 为引入的辅助变量. 注意到式 (14) 是关于 $\boldsymbol{t}$ 的单二次约束二次规划问题, 即使矩阵 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}^{(l)})$ 的半正定性质不满足, 强对偶性质仍然成立 [23].

将 $\mathcal{P}^{(l)}$ 的内部最小化问题表示成对偶形式, 可以得到 $\mathcal{P}^{(l)}$ 的等价优化问题如下:

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(l)}\begin{cases}(\boldsymbol{s}^{(l+1)},\gamma^*,\mu^*)=\arg\max\limits_{\boldsymbol{s},\mu,\gamma}\ \gamma,\\ \text{s.t.}\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}^{(l)})+\mu\boldsymbol{I} & \mu\boldsymbol{t}_0\\ \mu\boldsymbol{t}_0^{\mathrm{H}} & \mu\boldsymbol{t}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{t}_0-\mu r^2-\gamma\end{bmatrix}\succeq 0,\\ \quad\mu\geqslant 0,\ \|\boldsymbol{s}\|_2\leqslant 1,\ \boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_I\boldsymbol{s}\leqslant e_I,\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_0\|_2\leqslant\delta.\end{cases} \tag{16}$$

显然, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}^{(l)})$ 是 $\boldsymbol{s}$ 的线性函数, 且波形约束集合 Ω 是凸集. 因此, $\tilde{\mathcal{P}}^{(l)}$ 是一个凸优化问题, 可以利用 CVX 在多项式时间内求解 [26]. 迭代求解优化问题 $\tilde{\mathcal{P}}^{(l)}$ 直至收敛, 获得优化的发射波形 $\boldsymbol{s}^*$.

在得到 $\boldsymbol{s}^*$ 的基础上, 可通过下式计算最优滤波器 $\boldsymbol{w}^*$:

$$\boldsymbol{t}^*=\arg\min_{\|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0\|_2\leqslant r}\boldsymbol{t}^H(\boldsymbol{S}^*)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{t},\quad \boldsymbol{w}^*=\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{t}^*, \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{S}^*=[\boldsymbol{J}_0\boldsymbol{s}^*,\ldots,\boldsymbol{J}_{L-1}\boldsymbol{s}^*]$. 算法 1 总结了极小极大波形设计算法.

算法 1 Optimization algorithm for solving $\mathcal{P}$

Input: $\boldsymbol{R}_n$, $\boldsymbol{R}_I$, $\boldsymbol{t}_0$, $\boldsymbol{s}_0$, e_I, δ, ϵ;

Initialization: Set $l=0$, then initialize $\boldsymbol{s}^{(0)}$ with the optimal solution of $\mathcal{P}_\delta$ and record $g(\boldsymbol{s}^{(0)})$;

Iteration:

Step 1: Solve $\mathcal{P}^{(l)}$, and record $g(\boldsymbol{s}^{(l+1)})$;

Step 2: Check the condition $(g(\boldsymbol{s}^{(l+1)})-g(\boldsymbol{s}^{(l)}))/g(\boldsymbol{s}^{(l)})\leqslant\epsilon$; if it is true, go to Step 3, otherwise, set $l=l+1$ and go to step 1;

Step 3: Set $\boldsymbol{s}^*=\boldsymbol{s}^{(l)}$, then calculate the optimal filter with (17);

Output: $\boldsymbol{s}^*$, $\boldsymbol{w}^*$.

3.3 收敛性和运算复杂度

$\tilde{\mathcal{P}}^{(l)}$ 的凸性以及 MM 算法的性质确保了输出目标函数在迭代过程中的递增性. 不妨设 $v(\mathcal{P})$ 为问题 $\mathcal{P}$ 的最优值, 那么以下不等式成立:

$$v(\mathcal{P}) \leqslant \max_{\boldsymbol{s}\in\Omega} \boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{s} \leqslant \max_{\|\boldsymbol{s}\|_2^2\leqslant 1} \boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{s} = \lambda_{\max}\left(\boldsymbol{T}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{T}_0\right), \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{T}_0 = \sum_{i=1}^{L} \boldsymbol{t}_0(i)\boldsymbol{J}_{i-1}$. 第 1 个不等号成立, 因为将最小化运算变为取特定的 $\boldsymbol{t}_0$; 第 2 个不等号成立, 因为松弛了波形的部分约束. 以上分析表明算法 1 在迭代过程中所产生的迭代值构成了一个单调增且有上界的序列, 显然算法 1 是收敛的.

算法 1 的总运算复杂度由初始化、迭代优化和生成滤波器 3 部分构成. 算法初始化需要求解二阶锥规划问题 $\mathcal{P}_\delta$, 使用内点法最多需要 $O(N^{3.5})$ 阶数的浮点数运算 [27], 其中, 1 次浮点数运算表示 2 个浮点数进行一次加法或者乘法运算所需计算量; 迭代优化部分运算量与迭代次数成正比, 每次迭代中, 求解 $\mathcal{P}^{(l)}$ 最多需要 $O((L+N)^{0.5}((N)^4+(LN)^2+L^3N))$ 阶数的浮点数运算 [27], 不妨设总迭代次数为 M_1, 那么迭代的总运算量为

$$O\left(M_1(L+N)^{0.5}\left((N)^4+(LN)^2+L^3N\right)\right)$$

浮点数运算. 另一方面, 生成滤波器需要 $O(L^3+(N+L)^2)$ [28] 浮点数运算. 因此, 算法 1 的运算复杂度不超过

$$O\left(M_1(L+N)^{0.5}\left((N)^4+(LN)^2+L^3N\right)\right)$$

阶数的浮点数运算.

4 实验分析

本节通过数值实验对所提算法以及优化的波形性能进行验证. 在接下来的实验中, 波形编码长度取 $N=64$; 频谱兼容约束包含 3 个受到限制的归一化频带, 分别为 $[0.3, 0.35]$, $[0.5, 0.55]$ 和 $[0.65, 0.75]$, 对应的加权值为 0.3, 0.4, 0.3; 参考波形 $\boldsymbol{s}_0$ 选取线性调频信号, 其离散采样形式为 $\boldsymbol{s}_0(i) = \frac{1}{\sqrt{N}}\exp^{\frac{\mathrm{j}\pi(i-1)^2}{N}}$; 干扰与噪声协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_n(p,q) = \sigma^2 0.8^{|p-q|}$, 其中 σ^2 由输入 $\mathrm{SNR} = 10\log_{10}\frac{1}{\sigma^2}$ 定义; TIR 长度 $L=10$, 归一化的先验 $\boldsymbol{t}_0$ 由表 1 给出. 迭代终止参数取 $\epsilon = 10^{-4}$.

4.1 算法收敛性实验

图 3 绘制了输入 SNR = 20 dB, $r=0.5$ 条件下, $g(\boldsymbol{s}^{(l)})$ 关于不同 δ 和 e_I 的迭代曲线. 从图中不难看出, $g(\boldsymbol{s}^{(l)})$ 随迭代次数单调递增, 并且在若干次迭代后收敛, 足以验证算法的有效性. 具体而言, 图 3(a) 针对不同的 δ 进行了分析, 其中 $e_I = 10^{-5}$, 图中显示, 最终输出的 SINR 随着 δ 的增加而提高, 其原因在于 δ 的增大意味着波形相似性约束减弱, 波形可以利用更多的自由度提升 SINR. 除此之外, 可以看出当 δ 从 0.5 提升到 1.0 时, SINR 会有大约 3 dB 的提升; 而当 δ 继续提高到 1.5, 2.0 (无信号相似性约束) 时, SINR 提升不明显. 图 3(b) 给出了 $\delta=1$ 时, 不同 e_I 对 SINR 迭代曲线的影响. 与图 3(a) 具有相同的趋势, 最终输出的 SINR 同样随着 e_I 的增加而提高, 当 $e_I = \lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_I)$ 时, 取得最高 SINR 为 22.3 dB, 此约束意味着任意波形均可满足给定的频谱兼容约束, 即频谱兼容约束不对发射波形具有约束力.

表 1　先验 $\boldsymbol{t}_0$

Table 1　Prior knowledge of $\boldsymbol{t}_0$

$\boldsymbol{t}(1)$	$\boldsymbol{t}(2)$	$\boldsymbol{t}(3)$	$\boldsymbol{t}(4)$	$\boldsymbol{t}(5)$
$0.14\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}$	$0.35\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi/3}$	0.55	$0.21\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/6}$	$0.14\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}$
$\boldsymbol{t}(6)$	$\boldsymbol{t}(7)$	$\boldsymbol{t}(8)$	$\boldsymbol{t}(9)$	$\boldsymbol{t}(10)$
$0.28\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}$	$0.21\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/5}$	$0.28\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}$	$0.48\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\pi/8}$	$0.21\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/6}$

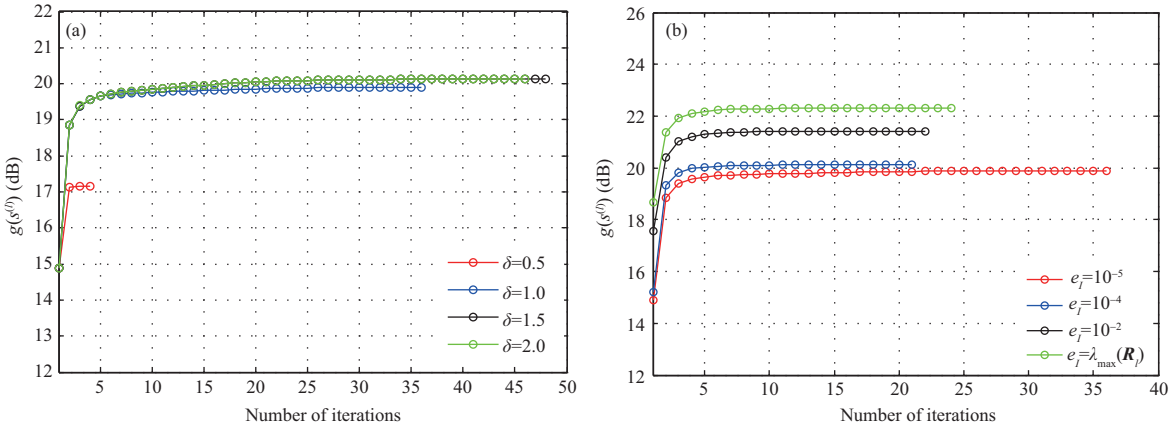


图 3　(网络版彩图) 极小信干噪比 $g(\boldsymbol{s}^{(l)})$ 迭代曲线

Figure 3　(Color online) Iteration curve of minimal SINR $g(\boldsymbol{s}^{(l)})$. (a) SINR for different δ; (b) SINR for different e_I

4.2　波形性能实验

本小节对算法 1 所优化波形的频谱兼容性和脉冲压缩性能展开分析. 图 4 和 5 分别给出了 4.1 小节仿真参数所优化的波形功率谱和脉冲压缩性能, 其中褐色曲线为参考信号 $\boldsymbol{s}_0$ 所对应的功率谱和脉冲压缩结果.

图 4 中, 限制频段以灰色矩形框标识. 仔细观察图 4(a), 我们发现在给定 $e_I = 10^{-5}$ 的情况下, 不同 δ 所优化的波形均在限制频段内形成约 -20 dB 的凹口, 且凹口深度几乎一致, δ 参数主要影响非限制频段区的功率谱形状, 小的 δ 使得其对应的波形功率谱在非限制频段更加接近参考信号功率谱. 另一方面, 从图 4(b) 中, 我们发现在给定 $\delta = 1$ 的情况下, 参数 e_I 主要对优化波形在限制频段内的功率谱产生影响, 就 $e_I = 10^{-5}$ 以及 $e_I = 10^{-4}$ 而言, 所设计波形的功率谱在 3 个限制频段内均形成凹口, 具有较好的频谱兼容性. 当 e_I 增大到 10^{-2} 时, 限制频段 $[0.3, 0.35]$ 内的功率谱凹口显著减小且频段 $[0.65, 0.75]$ 内的凹口消失; 更进一步, 当取消频谱兼容约束后 ($e_I = \lambda_{\max}(\boldsymbol{R}_I)$), 限制频段 $[0.5, 0.55]$ 内的凹口也同步消失. 凹口消失的原因可以解释为: 频谱兼容约束实质上是对所有限制频段上的总能量进行约束, 当频谱兼容约束放松时 (e_I 增加), 所设计波形仅需要满足所有限制频段内的总能量不超过 e_I 即可, 在此条件下, 可能会出现部分频段内凹口消失的现象. 也正是因为如此, 波形能够利用更多的自由度用于提升信干噪比. 鉴于以上分析, 探测波形在限制频段内的功率谱分布主要由参数 e_I 控制, 而限制频段外的功率谱分布主要受到参数 δ 影响.

图 5(a) 显示了不同 δ 所对应优化波形的脉冲压缩性能, 从图中不难看出, 参数 δ 对脉冲压缩的旁瓣有较大影响. 当 $\delta = 0.5$ 时, 脉冲压缩旁瓣在 -10 dB 以下, 其脉冲压缩结果也与参考信号较为相似, 而当 δ 增加到 1.0 以上时, 脉冲压缩性能有较大的下降, 旁瓣迅速抬升. 在不考虑波形相似性约束的

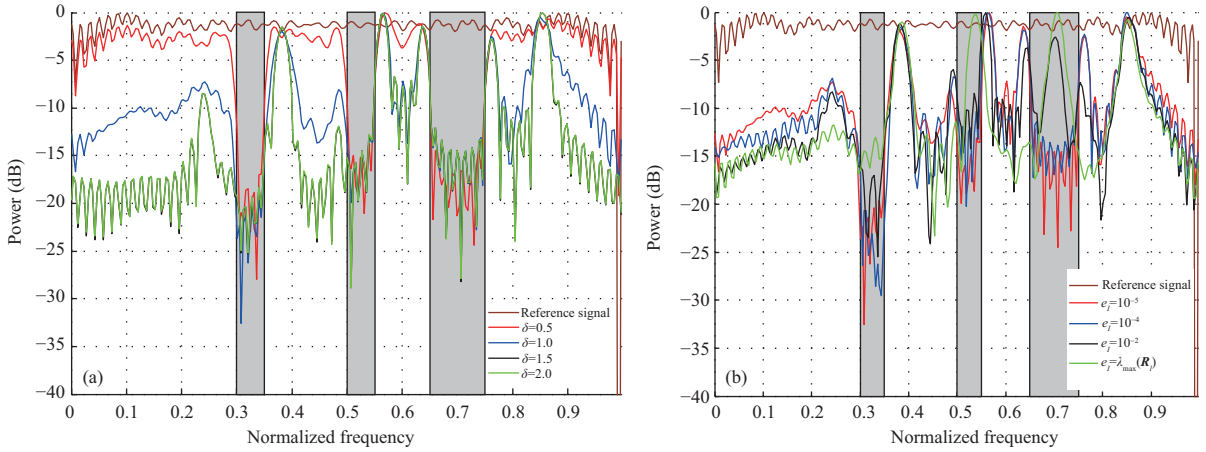


图 4 (网络版彩图) 极小极大波形功率谱

Figure 4 (Color online) Spectrum power of minimax waveform. (a) Spectrum power for different δ; (b) spectrum power for different e_I

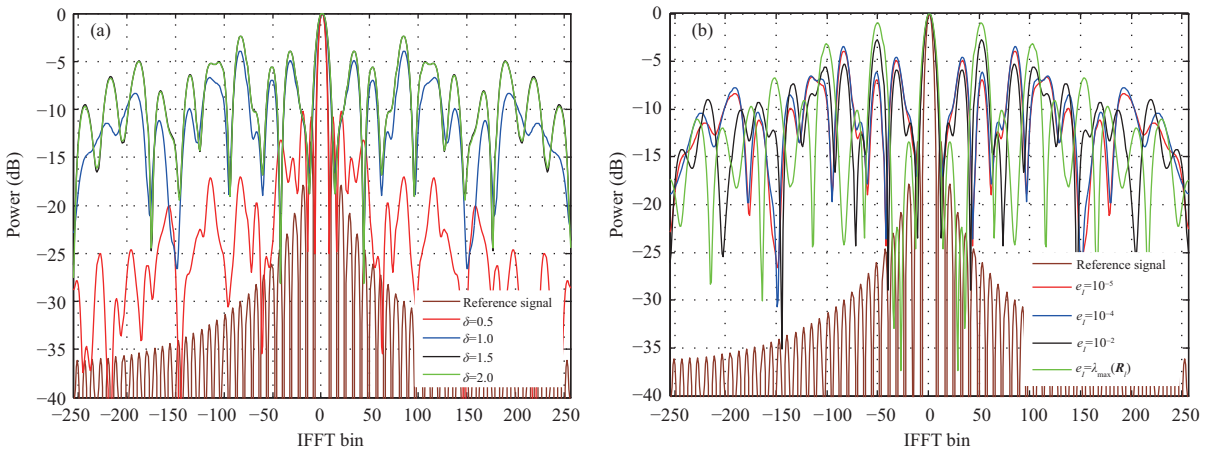


图 5 (网络版彩图) 极小极大波形脉冲压缩性能

Figure 5 (Color online) Compression properties of minimax waveform. (a) Compression properties for different δ; (b) compression properties for different e_I

情况下 ($\delta = 2.0$), 最高旁瓣已经抬升到约 -3 dB. 图 5(b) 给出了 $\delta = 1.0$ 条件下, 不同 e_I 对所优化波形脉冲压缩性能的影响. 对比图 5(a) 中的脉冲压缩曲线得到, 虽然不同的 e_I 会造成脉冲压缩结果的起伏变化, 但是其影响程度远小于参数 δ.

结合以上分析与 4.1 小节中的相关结果, 不难发现, 输出 SINR、频谱兼容和脉冲压缩性能三者之间存在相互制约的关系, 实际运用的雷达波形应该是结合实际情况对以上性能的折中.

4.3 波形探测性能实验

本小节对算法 1 所优化波形的探测性能展开研究, 首先验证算法 1 所设计的极小极大波形是稳健波形, 进一步证明所提算法的有效性. 然后, 在给定虚警概率 $P_{\rm fa}$ 的条件下, 研究不确定参数 r 对检测性能的影响.

4.1 和 4.2 小节的研究表明了输出 SINR、频谱兼容和脉冲压缩性能的制约关系, 为兼顾频谱兼容

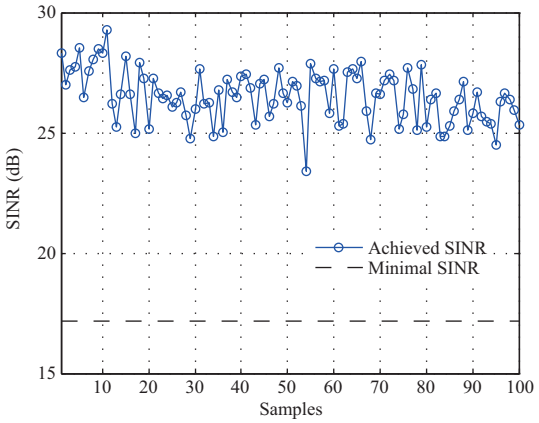


图 6 (网络版彩图) 随机采样输出 SINR

Figure 6 (Color online) Actually achieved SINR with respect to samples

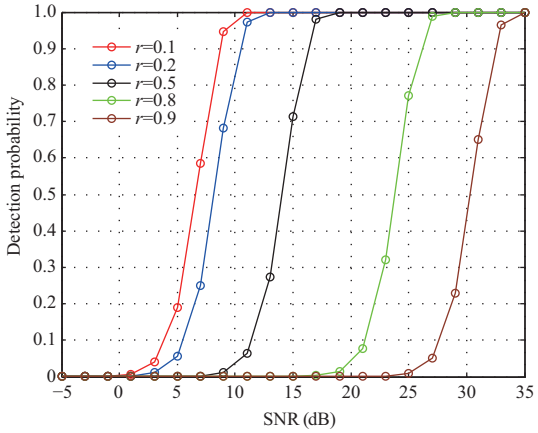


图 7 (网络版彩图) 不同 r 值对应的检测概率曲线

Figure 7 (Color online) Detection probability curve for different r

和脉冲压缩性能, 选取 $\delta = 0.5$, $e_I = 10^{-5}$.

接下来的实验用于验证算法 1 所设计波形的极小极大性质. 设算法 1 输出 SINR 为 $\widetilde{\mathrm{SINR}}(\boldsymbol{s}^*, \boldsymbol{t}^*)$, 对任给的 $\boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{t}^*$, 以 $\boldsymbol{s}^*$ 为发射波形, 实际获得的输出 SINR 为 $\widetilde{\mathrm{SINR}}(\boldsymbol{s}^*, \boldsymbol{t})$. 若 $\boldsymbol{s}^*$ 为极小极大波形, 必然有 $\widetilde{\mathrm{SINR}}(\boldsymbol{s}^*, \boldsymbol{t}^*) \leqslant \widetilde{\mathrm{SINR}}(\boldsymbol{s}^*, \boldsymbol{t})$. 在输入 SNR = 20 dB 与 $r = 0.5$ 的情况下, 以算法 1 所设计的波形为发射波形, 从 TIR 不确定集合的表面随机选取 100 个采样点作为 TIR 的真实值, 图 6 绘制了极小 SINR 与实际输出 SINR 的对比曲线. 图中曲线表明, 算法 1 所设计的波形为极小极大波形, 且具有稳健性, 即当 TIR 在约束集合内变化时, 实际获得 SINR 均高于算法 1 得到的极小 SINR, 以上结果进一步证明了所提算法的有效性.

高斯 (Gauss) 噪声条件下, 给定虚警概率 P_{fa}, 目标检测概率 P_d 是 SINR 的单调增函数 [29], 由下式给出:

$$P_d = \mathrm{MarcQ}\left(\sqrt{2\mathrm{SINR}}, \sqrt{-2\log(P_{\mathrm{fa}})}\right), \tag{19}$$

其中 $\mathrm{MarcQ}(\cdot,\cdot)$ 为 Marcum-Q 函数 [30]. 给定 $P_{\mathrm{fa}} = 10^{-6}$, 选取 $\delta = 0.5$, $e_I = 10^{-5}$, 通过算法 1 计算在不同参数 r 和输入 SNR 条件下的输出 SINR, 根据 Marcum-Q 函数计算检测概率 P_d 并绘制于图 7 中. 正如期望的那样, 检测概率随着输入 SNR 增加而提升. 与此同时, 在给定输入 SNR 的情况下, 检测概率随着 r 的增大而降低, 这个现象可以给予如下解释, 参数 r 用于衡量先验 $\boldsymbol{t}_0$ 与实际 TIR 之间的偏差, 较大的 r 值意味着 $\boldsymbol{t}_0$ 偏离真实 TIR 较大, 先验信息准确度低, 由此导致输出 SINR 的损失.

4.4 算法对比

本小节将所提波形设计算法与文献 [19,20] 中的现有算法进行对比. 文献 [19] 使用随机采样的方法对球状 TIR 不确定集合进行近似, 将双重优化的 minimax 问题转化为单重优化问题. 借鉴该思想, 在 TIR 不确定集表面随机抽取 50 个样本对不确定集进行近似, 在此基础上对波形进行优化. 图 8 以输出 SINR 为对比指标, 将本文算法与文献 [19] 中算法进行对比, 实验参数设置 $e_I = 10^{-5}$, $\delta = 0.5$ 以及输入 SNR = 20 dB. 从图中看出, 输出 SINR 随着 r 的增大而降低, 这与 4.3 小节结果一致. 当 r 较小时, 本文算法与文献 [19] 算法所得 SINR 几乎一致, 而当 r 扩大时, 文献 [19] 算法所得 SINR 下降更加剧烈, 其本质原因在于, 文献 [19] 所提算法使用随机采样对球状不确定集合进行近似, 半径 r 的

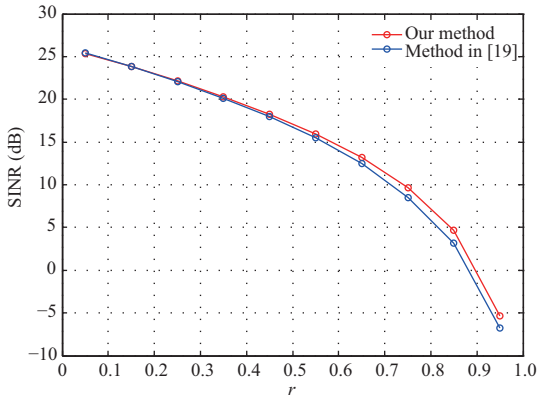


图 8 (网络版彩图) 输出 SINR 随 r 的变化

Figure 8 (Color online) Output SINR with respect to r

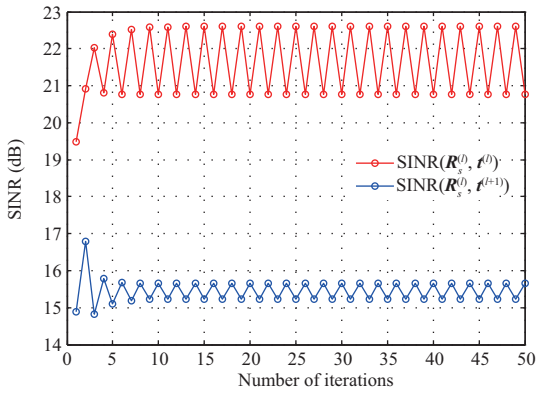


图 9 (网络版彩图) 文献 [20] 算法迭代曲线

Figure 9 (Color online) Iteration curve with method in [20]

扩大意味着不确定集合体积的膨胀, 在采样数目不变的情况下近似精度下降, 产生 SINR 损失. 相比之下, 本文算法基于对偶理论, 并且强对偶性成立, 因而不存在近似过程导致的 SINR 损失.

文献 [20] 提出使用交替优化的方法生成发射波形的自相关矩阵 $\boldsymbol{R}_s = \boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}$, 即在第 l 次迭代中给定 TIR 迭代值 $\boldsymbol{t}^{(l)}$, 最大化以 $\boldsymbol{R}_s$ 为优化变量的 SINR, 得到 $\boldsymbol{R}_s^{(l)}$; 然后再给定 $\boldsymbol{R}_s^{(l)}$, 最小化以 $\boldsymbol{t}$ 为优化变量的 SINR, 得到 $\boldsymbol{t}^{(l+1)}$; 如此反复进行. 图 9 展示了文献 [20] 中算法的迭代曲线, 其中 $r = 0.5$, $e_I = 10^{-5}$, $\delta = 0.5$ 以及输入 SNR = 20 dB. 结果显示, 关于 $\boldsymbol{R}_s$ 的最大化 SINR 曲线 (图中红色曲线) 与关于 $\boldsymbol{t}^{(l)}$ 的最小化 SINR 曲线 (图中蓝色曲线) 在迭代过程中出现震荡, 无法收敛. 其根本原因在于, 文献 [20] 所提算法需要确保目标函数相对于极大化变量 $\boldsymbol{R}_s$ 和极小化变量 $\boldsymbol{t}$ 分别是强凹和强凸, 且两个变量之间是弱耦合的 [31]. 然而, $\mathcal{P}$ 中的目标函数相对于 $\boldsymbol{R}_s$ 是线性的, 并不满足强凹性质, 文献 [20] 所提算法无法从理论上保证迭代的收敛性, 算法失效. 相比之下, 本文所提算法能够保证迭代过程收敛 (参照图 3).

5 结束语

本文研究了频谱拥挤环境下的扩展目标探测雷达波形设计问题. 在确保雷达波形具有较好频谱兼容和脉冲压缩性能的情况下, 以输出 SINR 为准则, 将波形设计问题建模为 miniamx 优化问题, 以应对扩展目标的 TIR 不能准确已知带来的不利影响. 在波形优化方面, 借鉴 MM 算法思想, 使用一系列的子 minimax 优化问题对波形进行迭代优化, 针对子 minimax 问题, 给出了基于拉格朗日对偶的优化算法. 实验结果展现了算法的收敛性以及所设计波形具有的良好频谱兼容和脉冲压缩性质. 在描述 TIR 不确定性方面, 本文采取的是球状不确定集合, 后续工作将开展非球状 TIR 不确定集合情况下的波形设计问题研究, 并致力于扩展到多输入多输出情况.

参考文献

1 Aubry A, Carotenuto V, de Maio A, et al. Optimization theory-based radar waveform design for spectrally dense environments. IEEE Aerosp Electron Syst Mag, 2016, 31: 14–25

2 Bica M, Koivunen V. Radar waveform optimization for target parameter estimation in cooperative radar-communications systems. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 2019, 55: 2314–2326

3 Zhao L, Palomar D P. Maximin joint optimization of transmitting code and receiving filter in radar and communications. IEEE Trans Signal Process, 2017, 65: 850–863

4 Aubry A, de Maio A, Govoni M A, et al. On the design of multi-spectrally constrained constant modulus radar signals. IEEE Trans Signal Process, 2020, 68: 2231–2243

5 Tang B, Li J. Spectrally constrained MIMO radar waveform design based on mutual information. IEEE Trans Signal Process, 2019, 67: 821–834

6 Shi J, Wen F, Liu T. Nested MIMO radar: coarrays, tensor modeling and angle estimation. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 2020. doi: 10.1109/TAES.2020.3034012

7 Li X. Progress in radar imaging for maneuvering targets. Sci Sin Inform, 2021, 51: 305–324 [黎湘. 复杂运动目标雷达成像研究进展. 中国科学: 信息科学, 2021, 51: 305–324]

8 Aubry A, de Maio A, Piezzo M, et al. Radar waveform design in a spectrally crowded environment via nonconvex quadratic optimization. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 2014, 50: 1138–1152

9 Ai W, Huang Y, Zhang S. New results on Hermitian matrix rank-one decomposition. Math Program, 2011, 128: 253–283

10 Aldayel O, Monga V, Rangaswamy M. Successive QCQP refinement for MIMO radar waveform design under practical constraints. IEEE Trans Signal Process, 2016, 64: 3760–3774

11 Wu L, Babu P, Palomar D P. Transmit waveform/receive filter design for MIMO radar with multiple waveform constraints. IEEE Trans Signal Process, 2018, 66: 1526–1540

12 Tang B, Li J, Liang J. Alternating direction method of multipliers for radar waveform design in spectrally crowded environments. Signal Processing, 2018, 142: 398–402

13 Gong P C, Shao Z H, Tu G P, et al. Low PAPR waveform design based on transmit beam-pattern synthesis for wideband MIMO radar. Sci Sin Inform, 2013, 43: 429–444 [巩朋成, 邵振海, 涂光鹏, 等. 基于发射方向图合成的低 PAPR 宽带 MIMO 雷达波形设计. 中国科学: 信息科学, 2013, 43: 429–444]

14 Bell M R. Information theory and radar waveform design. IEEE Trans Inform Theor, 1993, 39: 1578–1597

15 Li Q, Rothwell E J, Chen K-M, et al. Scattering center analysis of radar targets using fitting scheme and genetic algorithm. IEEE Trans Antenn Propagat, 1996, 44: 198–207

16 Haykin S. Cognitive radar: a way of the future. IEEE Signal Process Mag, 2006, 23: 30–40

17 Chen C Y, Vaidyanathan P P. MIMO radar waveform optimization with prior information of the extended target and clutter. IEEE Trans Signal Process, 2009, 57: 3533–3544

18 Jiu B, Liu H, Feng D, et al. Minimax robust transmission waveform and receiving filter design for extended target detection with imprecise prior knowledge. Signal Processing, 2012, 92: 210–218

19 Karbasi S M, Aubry A, de Maio A, et al. Robust transmit code and receive filter design for extended targets in clutter. IEEE Trans Signal Process, 2015, 63: 1965–1976

20 Hao T D, Zhou Q S, Sun C Y, et al. Low-PAR robust waveform design for cognitive radar with imprecise prior knowledge. J Electr Inf Technol, 2018, 40: 532–540 [郝天铎, 周青松, 孙从易, 等. 非准确先验知识下认知雷达低峰均比稳健波形设计. 电子与信息学报, 2018, 40: 532–540]

21 Yao Y, Miao P, Liu H, et al. Robust transceiver design for extended target detection in a signal-dependent interference scenario. IEEE Access, 2020, 8: 122292

22 Razaviyayn M, Huang T, Lu S, et al. Nonconvex min-max optimization: applications, challenges, and recent theoretical advances. IEEE Signal Process Mag, 2020, 37: 55–66

23 Boyd S P, Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 653–659

24 Kim S J, Magnani A, Mutapcic A, et al. Robust beamforming via worst-case SINR maximization. IEEE Trans Signal Process, 2008, 56: 1539–1547

25 Hunter D R, Lange K. A tutorial on MM algorithms. Am Statistician, 2004, 58: 30–37

26 Grant M, Boyd S. CVX: matlab software for disciplined convex programming, version 2.1, 2014. http://cvxr.com/cvx

27 Ben-Tal A, Nemirovski A. Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications. Philadelphia: SIAM, 2001. 438–441

28 Li J, Stoica P, Wang Z S. On robust capon beamforming and diagonal loading. IEEE Trans Signal Process, 2003, 51: 1702–1715

29 de Maio A, de Nicola S, Huang Y W, et al. Code design to optimize radar detection performance under accuracy and

similarity constraints. IEEE Trans Signal Process, 2008, 56: 5618–5629
30 Richards M A. Fundamentals of Radar Signal Processing. New York: McGraw-Hill, 2005. 308–319
31 Wang Y, Li J. Improved algorithms for convex-concave minimax optimization. Adv Neural Inform Process Syst, 2020, 33: 4800–4810

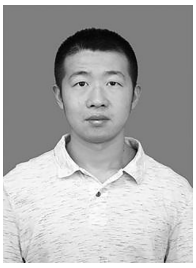
Radar minimax waveform design for extended target detection in the presence of spectrally crowded environment

Zhou XU[1,2], Jiahua ZHU[3*], Chongyi FAN[1] & Xiaotao HUANG[1]

1. *College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha* 410073*, China*;
2. *College of Electronic Countermeasure, National University of Defense Technology, Hefei* 230037*, China*;
3. *College of Meteorology and Oceanology, National University of Defense Technology, Changsha* 410073*, China*
* Corresponding author. E-mail: zhujiahua1019@hotmail.com

Abstract The extension of radar frequency bands, as well as widespread applications of 5G communications, makes spectrum resources more congested. On the other hand, targets will exhibit extended scattering characteristics instead of point-like scattering characteristics, since high range resolution is achieved for the wideband radar. This paper focuses on the waveform design problem for extended target detection in the presence of spectrally crowded environment, where a minimax optimization model is built up based on the signal to interference pulse noise ratio (SINR) criterion. Our goal is to design the waveform with good spectral compatibility and pulse compression properties, which guarantees the robust detection performance against uncertainties of the prior known target impulse response (TIR). At the stage of waveform optimization, the idea of the Minorization Maximization (MM) algorithm is introduced by constructing a sequence of sub-minimax problems to approximate the original minimax problem. These sub-minimax problems are easier to be solved, and we devise an algorithm converting the double-level minimax optimization to a maximization problem based on Lagrange duality theory. Moreover, the convergence and computational complexities of the proposed algorithm are analyzed theoretically. Experimental results demonstrate that the waveform designed by the proposed algorithm is the robust detection waveform with satisfactory spectral compatibility and pulse compression properties. Compared with other algorithms, the proposed algorithm will converge within several iterations and achieve a relatively higher minimal SINR when the error of prior TIR is large.

Keywords extended target detection, spectral compatibility, minimax optimization, Minorization Maximization algorithm, Lagrange duality



Zhou XU was born in 1990. He received his B.S. and M.S. degrees in electronic engineering from Naval Aeronautical University, Yantai, China, in 2012 and 2014, respectively. Since 2016, he has been a lecturer with College of Electronic Countermeasure, National University of Defense Technology, Hefei, China. He is currently working towards the Ph.D degree with the College of Electronic Science and Engineering at National University of Defense Technology. His current research interests mainly include multichannel radar signal processing, convex optimization, and game theory on signal processing.

Jiahua ZHU was born in 1991. He received his B.S. degree in electronic engineering and Ph.D degrees in information and communication engineering from National University of Defense Technology, Changsha, China, in 2012 and 2018, respectively. He is currently an assistant professsor with College of Meteorology and Oceanology, National University of Defense Technology. From November 2015 to November 2017, he was a visiting Ph.D. student with School of Engineering, RMIT University, and Department of Electrical and Electronic Engineering, University of Melbourne, Australia. His current research interests include waveform design and target detection for radar and sonar.

Chongyi FAN was born in 1984. She received her B.E. degree in electrical and electronic engineering and Ph.D. degrees in information and communication engineering from National University of Defense Technology (NUDT), Changsha, China, in 2006 and 2012, respectively. She is currently an associate professor in College of Electronic Science and Engineering, NUDT. Her recent research interests include convex optimization, MIMO radar, and array signal processing.

Xiaotao HUANG was born in 1972. He received his B.S. and Ph.D. degrees in information and communication engineering from National University of Defense Technology, Changsha, China, in 1990 and 1999, respectively. He is currently a professor of National University of Defense Technology. His fields of interest include radar theory, signal processing, and radio frequency signal suppression.