



# 两条层间连边下的双层链状网络同步能力分析

吴晓群<sup>1\*</sup>, 孟涵怡<sup>1</sup>, 陆君安<sup>1</sup>, 胡捷<sup>1</sup>, 韩秀萍<sup>2\*</sup>

1. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072

2. 山东师范大学数学与统计学院, 济南 250358

\* 通信作者. E-mail: xqwu@whu.edu.cn, xiuphan@sdu.edu.cn

收稿日期: 2021-02-07; 修回日期: 2021-03-30; 接受日期: 2021-04-29; 网络出版日期: 2021-11-15

国家重点研发计划 (批准号: 2018AAA0101100)、国家自然科学基金 (批准号: 61973241, 61773175) 和湖北省自然科学基金 (批准号: 2019CFA007) 资助项目

**摘要** 多层网络的结构和动力学是目前网络科学研究中的前沿方向. 在多层网络中单层之间的连接方式直接影响整个多层网络的动力学、传播、扩散和同步. 对于多层网络的一般结构, 目前还没有系统的理论和方法, 人们只能从简单的多层网络结构入手, 来探索层间连接如何影响多层整体动力学行为. 本文的工作针对单层是链状结构的双层网络, 通过图论理论和数值计算探讨这一问题, 寻找层间连接的优化方式. 首先, 根据主稳定函数方法, 在同步域无界的条件下证明了各层结构相同的多层网络在任意层间部分连边方式下, 均存在层间耦合强度阈值, 使得整个网络同步能力达到最大, 且最大同步能力就是其单层网络的同步能力. 其次, 仿真得到双层链状网络在层间两条连边下的最优连边位置分别为各条链的  $1/4$  和  $3/4$  处; 最差连边位置分别为其端点及相邻次端点处. 本文还分别利用主稳定函数方法以及“网络最短距离”结构指标, 细致地讨论了单层节点数分别为  $4N$ ,  $4N+1$ ,  $4N+2$ ,  $4N+3$  情况下的层间最优连边方式. 结果表明: 单层节点数  $4N$  对应有 4 种层间最优连边方式, 其他 3 种情况下层间最优连边方式均唯一. 最后, 本文提出了最优层间耦合强度的表达式, 并通过计算不同节点数情况下网络的最优层间耦合强度, 验证了该表达式的正确性.

**关键词** 多层网络, 同步能力, 链状网络, 层间连边方式, 层间耦合强度

## 1 引言

我们的日常生活中随处可见复杂网络, 如神经网络、电力网络、基因网络、交通网络、人际关系网、疾病/意见扩散网络等, 相关研究在疾病/舆论控制<sup>[1]</sup>、智能电网<sup>[2~4]</sup>、博弈、神经科学<sup>[5,6]</sup>等领域有着广泛的应用, 已成为科学和工程研究领域中的热门问题<sup>[7]</sup>. 其中, 网络在连续或脉冲通信下的同步<sup>[5,6,8~10]</sup>与控制<sup>[11,12]</sup>及其超扩散<sup>[13]</sup>、基于网络拓扑结构<sup>[14]</sup>以及 K-Core 分解法<sup>[15,16]</sup>的节点重要性评估及牵制控制<sup>[17]</sup>等, 都是复杂网络的重要研究方向, 并取得了大量成果.

**引用格式:** 吴晓群, 孟涵怡, 陆君安, 等. 两条层间连边下的双层链状网络同步能力分析. 中国科学: 信息科学, 2021, 51: 1931–1945, doi: 10.1360/SSI-2021-0048  
Wu X Q, Meng H Y, Lu J A, et al. Analysis of the synchronizability of two-layer chain networks with two inter-layer edges (in Chinese). Sci Sin Inform, 2021, 51: 1931–1945, doi: 10.1360/SSI-2021-0048

随着当今大数据时代的到来, 世界上大部分网络并不是孤立存在的, 而是由多个单层网络相互作用而形成的多层网络<sup>[18]</sup>. 多层网络的性质与传统的单层复杂网络有很大差别, 引起各研究领域的兴趣, 例如多层网络上的疾病传播<sup>[19]</sup>、结构识别<sup>[20,21]</sup>以及扩散与超扩散<sup>[22,23]</sup>等, 其中, 多层网络的同步问题自然也成为现下研究的热门问题. 文献<sup>[24,25]</sup>主要研究了两层网络的层间耦合节点度的大小及其相关性对网络同步能力的影响; 文献<sup>[26]</sup>分析了由不同拓扑结构的复杂网络所组成多层网络的特征值谱与同步能力; 文献<sup>[27]</sup>则对于两层规则网络的同步能力影响因素进行了初步研究, 包括星型网络、环状网络以及链状网络. 此后, 不同结构的多层规则网络同步能力的研究<sup>[28]</sup>被广泛关注.

目前关于多层规则网络同步能力的研究大多是对星型结构网络的讨论, 文献<sup>[29]</sup>得到两层星形网络的同步能力受层间连边方式的影响; 文献<sup>[30]</sup>计算并分析了层间一对一连边的多层星型以及星型环状网络的特征值谱和同步能力等. 然而, 对单层为链状/环状结构的多层网络的研究处于初级阶段, 文献<sup>[31]</sup>研究了单向和双向的单层环状与链状网络的特征值谱及网络的同步能力, 文献<sup>[32]</sup>计算层间一对一单向/双向连边的多层链状网络的特征值谱并分析各种因素对网络同步能力的影响情况.

长链状传感网络在矿井、隧道<sup>[33]</sup>、智慧路灯控制系统<sup>[34]</sup>、光纤通信<sup>[35,36]</sup>、货运列车状态监控<sup>[37]</sup>等场景下被广泛应用, 理论上大多需将实物及其状态传感器所组成的复杂网络抽象为两层结构相同的双层链状网络, 以针对如何更好地做到状态/负载的同步和均衡、如何选择合适的节点进行干扰和控制等实际问题进行分析与研究. 前文所述针对多层链状网络的相关研究均在层间一对一完全连接的情况下进行, 理论上, 此时网络的特征值谱表达式易得到解析解; 实际应用中, 层间完全连接也会占用更多资源, 造成高昂的成本和能耗的浪费. 本文在此基础上, 在层间一对一部分连接情况下, 首先证明了同步域无界时任意单层结构相同的多层网络存在最大同步能力及层间耦合强度阈值; 进一步, 对两层链状网络在层间两条连边情况下的同步能力进行猜想、计算、仿真与分析, 得到网络在同步域无界情况下, 达到最大同步能力和最小同步能力时分别对应的层间最优连边方式和层间最差连边方式; 此外, 提出了层间最优连边方式下的最优层间耦合强度的数值表达式, 并仿真验证其合理性.

本文结构如下: 第2节介绍了一般多层网络模型及相关矩阵. 第3节提出并证明最大同步能力定理, 随后介绍层间两条连边的双层链状网络模型, 并提出层间连边方式、网络节点数对同步能力的影响及网络最优层间耦合强度数值表达式的猜想. 第4节对上述猜想进行数值仿真: 分别利用主稳定函数方法<sup>[38,39]</sup>以及“网络最短距离”结构指标, 仿真并讨论网络在不同节点数下的最优/最差连边位置, 并仿真验证最优层间耦合强度数值表达式的合理性. 最后在第5节给出本文结论.

## 2 一般多层网络模型介绍

在单层有  $N$  个节点的  $M$  层网络中, 考虑层间一对一连边 (即第一层网络中第  $i$  个节点, 只可能与其他层网络中第  $i$  个节点相连), 且任意两个单层网络之间层间连边方式均完全相同的情况, 第  $K$  层网络中第  $i$  个节点的动力学方程为

$$\dot{x}_i^K = f(x_i^K) + d_K \sum_{j=1}^N w_{ij}^K H(x_j^K) + ac_i \sum_{\substack{L=1 \\ L \neq K}}^M v_{KL} \Gamma(x_i^L), \quad (1)$$

其中,  $K = 1, 2, \dots, M$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $x_i^K \in \mathbb{R}^n$  是第  $K$  层网络中第  $i$  个节点的  $n$  维状态变量;  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是节点动力学函数;  $d_K$  为第  $K$  层网络的层内耦合强度;  $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  和  $\Gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  分别是网络的层内耦合函数和层间耦合函数;  $W^K = (w_{ij}^K) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  是第  $K$  层网络的耦合矩阵, 若节点  $i$  与节点  $j$  ( $j \neq i$ ) 之间有连边, 则  $w_{ij}^K = 1$ , 否则,  $w_{ij}^K = 0$ , 且有  $w_{ii}^K = -\sum_{j=1, j \neq i}^N w_{ij}^K$ ;  $a$  是多层网

网络的层间耦合强度;  $C_{\text{inter}} = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_N)$  是网络的层间耦合矩阵, 若任意两层网络第  $i$  个节点对之间有连边, 则  $c_i = 1$ , 否则,  $c_i = 0$ ;  $V_M = (v_{KL}) \in \mathbb{R}^{M \times M}$  是网络的层间负 Laplace 矩阵, 若第  $K$  层与第  $L$  ( $L \neq K$ ) 层网络之间有连边, 则  $v_{KL} = 1$ , 否则,  $v_{KL} = 0$ , 且有  $v_{KK} = -\sum_{L=1, L \neq K}^M v_{KL}$ . 令  $L_K = -d_K W_K \in \mathbb{R}^{N \times N}$  为第  $K$  层网络的层内 Laplace 矩阵;  $L_{\text{inter}} = -V_M$  为网络的层间 Laplace 矩阵;  $\mathcal{L}, \mathcal{L}_{\text{intra}}$  以及  $\mathcal{L}_{\text{inter}}$  分别为  $M$  层网络的 Supra-Laplace 矩阵, 层内 Supra-Laplace 矩阵以及层间 Supra-Laplace 矩阵, 则有

$$\mathcal{L}_{\text{intra}} = \bigoplus_{K=1}^M L_K = \begin{pmatrix} L^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L^M \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\mathcal{L}_{\text{inter}} = L_{\text{inter}} \otimes aC_{\text{inter}}, \tag{3}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{intra}} + \mathcal{L}_{\text{inter}}. \tag{4}$$

### 3 理论推导及猜想

#### 3.1 多层任意网络

**引理1** (分块对称行列式的计算<sup>[38]</sup>) 对于任意正整数  $M$ , 以及任意两个  $N$  阶方阵  $A, B$ , 有

$$\begin{vmatrix} A & B & \cdots & B \\ B & A & \cdots & B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B & B & \cdots & A \end{vmatrix} = |A + (M - 1)B| \cdot |A - B|^{M-1}.$$

**定理1** (多层网络的最大同步能力) 如图 1 所示, 考虑单层网络结构相同 (任意网络结构) 且节点数为  $\mathcal{X}$  的  $M$  ( $M \geq 2$ ) 层网络, 网络同步域无界时, 在任意层间  $m$  ( $1 \leq m \leq \mathcal{X}$ ) 条连边 (层间一对一连边, 且任意两层网络的层间连边方式相同) 方式下, 都有如下结论:

- (1) 层间耦合强度  $a$  较小时, 多层网络的同步能力随  $a$  的增大而增大;
- (2) 任一层间连边方式, 都对有一个层间耦合强度阈值, 使得网络同步能力达到最大, 此后继续增大  $a$ , 同步能力保持不变;
- (3)  $M$  层网络在一切层间连边方式下所达到的最大同步能力, 就是其单层网络的同步能力.

**证明** 由于  $M$  层网络中所有单层网络结构均相同, 我们有

$$\begin{aligned} d_1 &= d_2 = \cdots = d_M \triangleq d, \\ L_1 &= L_2 = \cdots = L_M \triangleq L_{\text{intra}}, \\ L_{\text{inter}} &= \begin{pmatrix} M-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & M-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & M-1 \end{pmatrix}_{M \times M}, \end{aligned}$$

其中,  $L_{\text{intra}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{X} \times \mathcal{X}}$  是每个单层网络的层内 Laplace 矩阵, 满足耗散条件;  $L_{\text{inter}} \in \mathbb{R}^{M \times M}$  是多层网络的层间 Laplace 矩阵.

当层间连接  $m$  ( $1 \leq m \leq \mathcal{X}$ ) 个节点对  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ , 层间耦合强度为  $a$  时, 该多层网络的层间耦合矩阵  $C_{\text{inter}}$  为  $\mathcal{X}$  维对角矩阵, 其中,  $C_{\text{inter}}(p_1, p_1) = C_{\text{inter}}(p_2, p_2) = \dots = C_{\text{inter}}(p_m, p_m) = 1$ , 其他元素均为 0.

由式 (2)~(4) 可得, 此时  $M$  层网络的 Supra-Laplace 矩阵  $\mathcal{L}$  为

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_{\text{intra}} + (M-1)aC_{\text{inter}} & -aC_{\text{inter}} & \cdots & -aC_{\text{inter}} \\ -aC_{\text{inter}} & L_{\text{intra}} + (M-1)aC_{\text{inter}} & \cdots & -aC_{\text{inter}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -aC_{\text{inter}} & -aC_{\text{inter}} & \cdots & L_{\text{intra}} + (M-1)aC_{\text{inter}} \end{pmatrix}_{M\mathcal{X} \times M\mathcal{X}}. \quad (5)$$

根据引理 1, 矩阵  $\mathcal{L}$  的特征值有  $M\mathcal{X}$  个, 从小到大依次设为  $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{M\mathcal{X}}$ . 同时, 矩阵  $L_{\text{intra}}$  的特征值有  $\mathcal{X}$  个, 从小到大依次设为  $0 = \lambda_1^I < \lambda_2^I \leq \dots \leq \lambda_{\mathcal{X}}^I$ .

令  $L_{\text{intra}} + Ma \cdot C_{\text{inter}} \triangleq L^*$ , 当层间耦合强度  $a > 0$  时,  $L^*$  一定是正定矩阵, 且有  $\mathcal{X}$  个特征值, 从小到大依次设为  $0 < \lambda_1^* \leq \lambda_2^* \leq \dots \leq \lambda_{\mathcal{X}}^*$ .

故矩阵  $\mathcal{L}$  的特征值集合  $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq M\mathcal{X}}$  为

$$\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq M\mathcal{X}} = \underbrace{\{\lambda_i^I\}_{1 \leq i \leq \mathcal{X}}, \{\lambda_i^*\}_{1 \leq i \leq \mathcal{X}}, \{\lambda_i^*\}_{1 \leq i \leq \mathcal{X}}, \dots, \{\lambda_i^*\}_{1 \leq i \leq \mathcal{X}}}_{M-1 \uparrow}$$

从而得到其最小非零特征值为

$$\lambda_2 = \min \{\lambda_2^I, \lambda_1^*\}, \quad (6)$$

只与层内 Laplace 矩阵  $L_{\text{intra}}$  及矩阵  $L^*$  的最小非零特征值有关.

根据主稳定函数方法, 在同步域无界的情况下, 多层网络模型 (1) 的同步能力仅与其 Supra-Laplace 矩阵  $\mathcal{L}$  的最小非零特征值  $\lambda_2$  有关. 且  $\lambda_2$  越大, 网络同步能力越强.

显然, 当层内耦合强度  $d$  一定时,  $\forall a \in U_+(0, \delta)$ ,  $\lambda_2^I$  保持不变, 而  $\lambda_1^*$  的值随  $a$  的增大而增大 ( $\forall \epsilon, \lambda_1^* \underset{a=\delta}{>} \lambda_1^* \underset{a=\delta-\epsilon}{>} \lambda_1^* \underset{a=0}{=} \lambda_1^I = 0$ ). 特别地, 当  $a = 0$  时,  $L_{\text{intra}} = L^*$ , 此时  $\lambda_1^* = \lambda_1^I = 0$ . 因此, 对于任一层间连边方式, 若  $\lim_{a \rightarrow \infty} \lambda_1^* \geq \lambda_2^I$ , 则必存在层间耦合强度阈值  $a_m$ , 当  $a = a_m$  时,  $\lambda_1^* = \lambda_2^I$ , 即

$$\lambda_2 = \begin{cases} \lambda_1^*, & 0 < a \leq a_m, \\ \lambda_2^I, & a \geq a_m. \end{cases} \quad (7)$$

此时, 我们有

- (1) 当  $0 < a < a_m$  时,  $\lambda_2 = \lambda_1^*$  随  $a$  的增大而增大, 网络同步能力随层间耦合强度的增大而增强;
- (2) 当  $a = a_m$  时,  $\lambda_2 = \lambda_1^* = \lambda_2^I$ , 网络恰好达到最大同步能力, 即单层网络的同步能力;
- (3) 当  $a > a_m$  时,  $\lambda_2 = \lambda_2^I$ , 与  $a$  的值无关. 即, 此后继续增大  $a$  的值, 网络同步能力不再改变.

**注1** 定理 1 的结论与 Xu 等<sup>[25]</sup> 对两层结构相同不规则网络的仿真结果一致, 进一步说明了该定理的正确性.

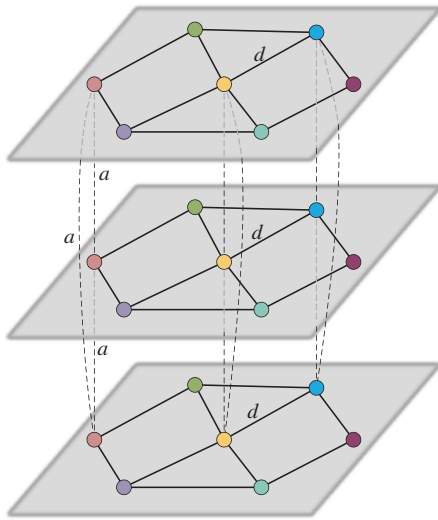


图 1 (网络版彩图)  $M$  ( $M = 3$ ) 层网络示意图. 单层  $\mathcal{X}$  个节点, 层内耦合强度为  $d$ ; 层间连接  $m$  ( $m = 3$ ) 条边, 层间耦合强度为  $a$

Figure 1 (Color online) Schematic diagram of an  $M$ -layer ( $M = 3$ ) network. There are  $\mathcal{X}$  nodes in a single layer, and the intra-layer coupling strength is  $d$ ; the layers are connected by  $m$  ( $m = 3$ ) edges, and the inter-layer coupling strength is  $a$

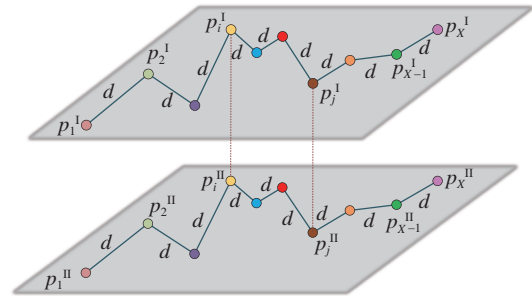


图 2 (网络版彩图) 双层链状网络结构示意图. 单层  $\mathcal{X}$  个节点, 层内耦合强度为  $d$ ; 层间两条连边 (节点对  $i$  和  $j$ ), 且层间耦合强度为  $a$

Figure 2 (Color online) Schematic diagram of a two-layer chain network. There are  $\mathcal{X}$  nodes in a single layer, and the intra-layer coupling strength is  $d$ ; two edges (node pairs  $i$  and  $j$ ) are connected between the layers, and the inter-layer coupling strength is  $a$

### 3.2 双层链状网络

本小节考虑如图 2 所示的双层链状网络, 其中, 单层网络均为  $\mathcal{X}$  个节点; 层间有且仅有两条连边且不会错位连边; 当层间分别连接两层网络中第  $i$  与第  $j$  个节点对时, 称此层间连边方式为“层间  $i \& j$  连边” ( $1 \leq i < j \leq \mathcal{X}$ ); 由链状网络的对称性, 本文仅讨论满足  $i < j$ ,  $1 \leq i \leq \lfloor \mathcal{X}/2 \rfloor$ , 且  $i + 1 \leq j \leq \mathcal{X}$  的“层间  $i \& j$  连边”. 两个单层网络的层内耦合强度及其层内 Laplace 矩阵都相同, 分别记为  $d$  以及  $L_{\text{intra}}$ . 即  $d_1 = d_2 \triangleq d$ ;  $L_1 = L_2 \triangleq L_{\text{intra}}$ . 当网络使用“层间  $i \& j$  连边”方式时, 其层间耦合矩阵  $C_{\text{inter}}$  为  $\mathcal{X}$  阶对角矩阵, 除  $C_{\text{inter}}(i, i) = C_{\text{inter}}(j, j) = 1$  外, 其他元素均为 0.

**推论 1** 由定理 1, 对于上文所述两条层间连边下的双层链状网络, 有下述结论.

(1) 双层链状网络在达到最大同步能力时的层间耦合强度阈值 ( $a_m$ ) 越小, 该层间连边方式越优. 即,  $a_m$  的最小值对应网络的层间最优连边方式. 将此层间耦合强度  $\min_{1 \leq i \leq \lfloor \mathcal{X}/2 \rfloor, i+1 \leq j \leq \mathcal{X}} a_m$  称为网络的最优层间耦合强度, 记作  $a_c$ ; 同理,  $\max_{1 \leq i \leq \lfloor \mathcal{X}/2 \rfloor, i+1 \leq j \leq \mathcal{X}} a_m$  为网络的最差层间耦合强度, 记作  $a_*$ ;

(2) 单层链状网络的最小非零特征值  $\lambda_2^I$  的表达式<sup>[31]</sup> 为

$$\lambda_2^I = 4d \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi}{2\mathcal{X}} \right), \quad (8)$$

其中,  $d$  为层内耦合强度,  $\mathcal{X}$  为单层链状网络的节点数. 故在层间最优连边方式下, 我们有

$$a = a_c \iff \lambda_2 = \lambda_1^* = \lambda_2^I = 4d \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi}{2\mathcal{X}} \right). \quad (9)$$

**猜想1** (双层链状网络同步能力的影响因素) 针对层间两条连边的双层链状网络, 本文对影响其同步能力的层间连边方式、层间耦合强度等因素猜想如下.

(1) 依次从单层链状网络中选择 3 个节点, 将网络尽量分成节点数相同的 4 部分, 当层间分别连接被选中的第 1 和第 3 个节点时, 网络同步能力最优, 此时  $a_m = a_c$ . 本文称此层间连边方式为“层间 (1/4)&(3/4) 连边”.

**注2** 仅在单层网络节点数  $\mathcal{X} = 4N + 3$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) 情况下可恰好找到所述节点, 其余情况会有 1 ~ 2 个节点的偏差, 下文将对其进行更为详细的分析.

(2) “层间 1&2 连边” 是网络的层间最差连边方式, 此时  $a_m = a_*$ .

(3) 若层间固定连接节点对  $i$  ( $2 \leq i \leq \mathcal{X} - 1$ ), 此时“层间 1& $i$  连边” ( $2 \leq i \leq \lfloor \mathcal{X}/2 \rfloor$ ) 以及“层间  $i$ & $\mathcal{X}$  连边” ( $\lfloor \mathcal{X}/2 \rfloor < i \leq \mathcal{X} - 1$ ) 是使得网络同步能力最差的连边方式.

**猜想2** (网络节点数对层间最优连边方式的影响) 针对猜想 1 中“层间 (1/4)&(3/4) 连边”这一层间最优连边方式, 本文根据单层网络节点数  $\mathcal{X}$  除以 4 所得余数, 考虑  $\mathcal{X} = 4N + x$  ( $x = 0, 1, 2, 3; N \in \mathbb{N}^*$ ) 4 种单层网络节点数的情况.

(1) 当  $\mathcal{X} = 4N$  时, 层间最优连边方式有 4 种, 分别为“层间  $(N + 1)$ & $(3N + 1)$  连边”, “层间  $(N)$ & $(3N)$  连边”, “层间  $(N)$ & $(3N + 1)$  连边”, 以及“层间  $(N + 1)$ & $(3N)$  连边”. 由链状网络的对称性, “层间  $N$ & $3N$  连边”与“层间  $(N + 1)$ & $(3N + 1)$  连边”等价, 实际只有 3 种不同的层间最优连边方式;

(2) 当  $\mathcal{X} = 4N + x$  ( $x = 1, 2, 3$ ) 时, 层间最优连边方式均唯一, 为“层间  $(N + 1)$ & $(3N + x)$  连边”.

**猜想3** (最优层间耦合强度  $a_c$ ) 针对任一本文所研究的双层链状网络, 其最优层间耦合强度  $a_c$  为

$$a_c = \sqrt{\lambda_2^1 \cdot d} = 2d \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2\mathcal{X}}\right), \quad (10)$$

其中,  $\lambda_2^1$  和  $d$  分别为单层链状网络的最小非零特征值及其层内耦合强度.

## 4 数值仿真与讨论

本节分别针对前文所提定理及 3 个猜想进行数值模拟仿真, 以验证其合理性.

### 4.1 双层链状网络同步能力的影响因素

本小节遍历单层  $\mathcal{X}$  个节点的两层链状网络所有层间连边方式, 以验证定理 1 以及猜想 1.

#### 4.1.1 层间连边方式以及层间耦合强度 $a$

图 3 给出单层 20 个节点的双层链状网络, 在所有层间连边方式下 Supra-Laplace 矩阵的最小非零特征值  $\lambda_2$  随层间耦合强度  $a$  的变化情况. 可以发现: 对于所有层间连边方式,  $\lambda_2$  的值均随  $a$  的增大先增大, 后保持不变, 且其最大值不超过  $\lambda_2^1$  (图中接近 0.025 处). 故由主稳定函数方法可以得出: 对所有  $\lambda_2$  可达到  $\lambda_2^1$  的层间连边方式, 当层间耦合强度  $a$  的值较小时, 网络的同步能力随  $a$  的增大而增大; 当  $a$  增大到阈值  $a_m$  时, 网络的同步能力达到最大. 对于一部分层间连边方式, 当  $a = a_m$  时,  $\lambda_2^1 = \lambda_1^*$ , 双层链状网络的最大同步能力就是其单层网络的同步能力. 这与本文定理 1 的结论一致.

图 3 进一步表明, 4 种最接近“层间 1/4&3/4 连边”的情况下网络  $\lambda_2$  随  $a$  的变化曲线完全重合, 即这 4 种层间连边方式对网络同步能力影响相同. 且此时  $\lambda_2$  随  $a$  的增长速度最快, 几乎呈线性增长; 网络达到最大同步能力 (单层网络同步能力) 的速度最快; 任一固定  $a$  对应的  $\lambda_2$  值最大. 显然, “层间 1/4&3/4 连边”是双层链状网络的层间最优连边方式. 与本文猜想 1 中的第 (1) 条结论一致.

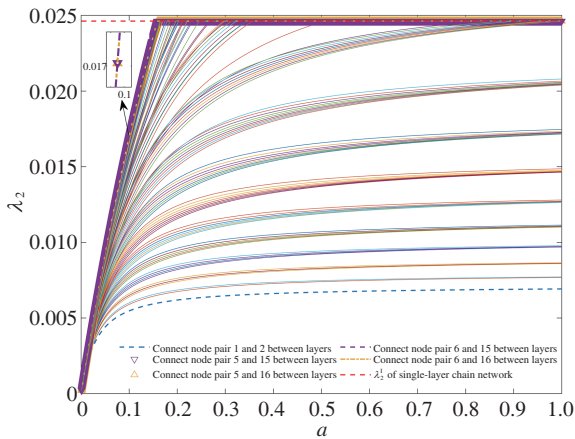


图 3 (网络版彩图) 单层网络节点数  $\mathcal{X} = 20$ , 双层网络所有“层间  $i \& j$  连边”方式下,  $\lambda_2$  随层间耦合强度  $a$  的变化情况

Figure 3 (Color online) Varying  $\lambda_2$  versus inter-layer coupling strength  $a$  for all the possible “inter-layer  $i \& j$  connection” modes for  $\mathcal{X} = 20$

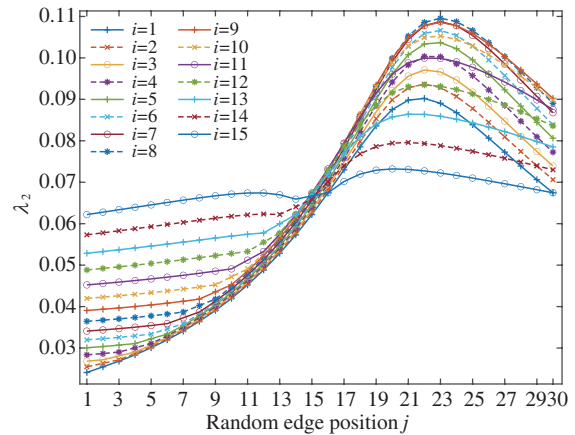


图 4 (网络版彩图) 单层网络节点数  $\mathcal{X} = 30$ , 一条层间连边固定连接节点对  $i$  ( $1 \leq i \leq 15$ ) 时,  $\lambda_2$  随另一层间连边位置  $j$  ( $1 \leq j \leq 30$ ) 的变化情况散点图及其拟合曲线

Figure 4 (Color online) Eigenvalue  $\lambda_2$  varying with position  $j$  ( $1 \leq j \leq 30$ ) when one inter-layer edge is located at node pair  $i$  ( $1 \leq i \leq 15$ ) for  $\mathcal{X} = 30$

此外, 在“层间 1&2 连边”方式下,  $\lambda_2$  随  $a$  的增长速度最慢; 且此时任一固定  $a$  对应的  $\lambda_2$  值也最小. 显然, “层间 1&2 连边”是双层链状网络的层间最差连边方式, 与本文猜想 1 中的第 (2) 条结论一致.

上述利用主稳定函数方法得到的结论与文献 [28] 中利用牵制控制的同步准则得出的关于链状网络最重要 2 个节点的节点组的结论具有一致性.

#### 4.1.2 固定一条层间连边, 改变另一层间连边位置

观察图 4 中所有 15 条拟合曲线可以发现: 对于任意固定连边位置  $i$  ( $1 \leq i \leq \lfloor \frac{\mathcal{X}}{2} \rfloor$ ), 层间最差连边方式总是“层间 1& $i$  连边”; 由链状网络的对称性, 当层间固定连边位置为  $\lfloor \mathcal{X}/2 \rfloor < i \leq \mathcal{X} - 1$  时, 其层间最差连边方式为“层间  $i \& \mathcal{X}$  连边”. 这与本文猜想 1 中第 (3) 条结论是一致的.

### 4.2 网络节点数对层间最优连边方式的影响

本小节利用主稳定函数方法和“网络最短距离”结构指标, 分别对单层节点数为  $\mathcal{X} = 4N + x$  ( $x = 0, 1, 2, 3$ ) 的 4 种情况下两层链状网络的层间最优连边方式与其单层节点数  $\mathcal{X}$  的关系进行数值仿真, 以验证猜想 2.

#### 4.2.1 基于主稳定函数方法

由定理 1, 当  $a < a_c$ , 即  $a$  未达到任一层间连边方式下的阈值  $a_m$  时, 网络在所有层间连边方式下均有  $\lambda_2 < \lambda_2^I$ , 即网络在任一层间连边方式下均未达到其最大同步能力, 根据主稳定函数方法, 此时所有层间连边方式下  $\lambda_2$  的最大值  $\lambda_2^{\max}$  就对应网络的层间最优连边方式.

此部分通过遍历计算单层  $4N + x$  ( $x = 0, 1, 2, 3$ ) 个节点的双层链状网络在一切层间连边方式下的  $\lambda_2$ , 以找到  $\lambda_2^{\max}$  对应的层间最优连边位置  $i, j$  与单层节点数  $\mathcal{X}$  之间的关系, 从而验证本文猜想 2 的

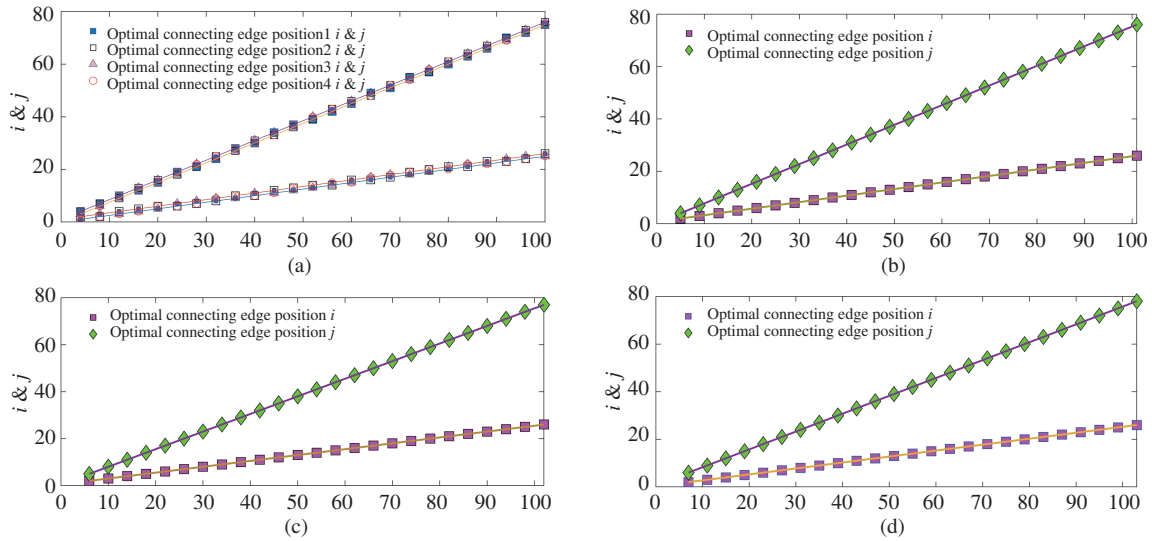


图 5 (网络版彩图) 当  $a < a_c$  时, 4 种单层网络节点数情况下网络的层间最优连边位置  $i, j$  随单层网络节点数  $\mathcal{X}$  的变化情况. (a)  $\mathcal{X} = 4N$ ; (b)  $\mathcal{X} = 4N + 1$ ; (c)  $\mathcal{X} = 4N + 2$ ; (d)  $\mathcal{X} = 4N + 3$

Figure 5 (Color online) The optimal inter-layer connection positions  $i$  and  $j$  changing with the number of single-layer network nodes  $\mathcal{X}$  for different network sizes for  $a < a_c$ . (a)  $\mathcal{X} = 4N$ ; (b)  $\mathcal{X} = 4N + 1$ ; (c)  $\mathcal{X} = 4N + 2$ ; (d)  $\mathcal{X} = 4N + 3$

正确性.

下文在 4 种单层网络节点数的情况下, 对所有层间连边方式下的  $\lambda_2$  ( $\lambda_2 < \lambda_2^1$ ) 进行遍历计算, 在误差小于  $1 \times 10^{-15}$  的条件下, 找到  $\lambda_2^{\max}$  及其对应的所有层间连边方式 (即网络的层间最优连边方式). 仿真中, 设定所有网络的层内耦合强度  $d = 1$ ; 当单层网络节点数相同时, 网络在不同的层间连边方式下的层间耦合强度  $a$  相同, 且  $a < a_c$ .

图 5 描绘了当  $a < a_c$ , 即双层链状网络在所有层间连边方式下均未达到其最大同步能力时, 4 种单层网络节点数  $\mathcal{X} = 4N + x$  ( $1 \leq N \leq 25$ ) 情况下的双层链状网络的层间最优连边位置  $i$  和  $j$  分别随  $\mathcal{X}$  的变化情况散点及其线性拟合直线.

由图 5(a) 可知单层网络节点数为  $\mathcal{X} = 4N$  时网络的层间最优连边方式有 4 种, 其对应的层间连边位置  $i$  和  $j$  完全分布在直线  $i = N, i = N + 1$ , 以及直线  $j = 3N, j = 3N + 1$  上. 因此, 当  $\mathcal{X} = 4N$  时, 本文所研究的两层链状网络有 4 种层间最优连边方式, 分别为“层间  $N \& 3N$  连边”, “层间  $(N + 1) \& 3N$  连边”, “层间  $N \& (3N + 1)$  连边”, 以及“层间  $(N + 1) \& (3N + 1)$  连边”. 这与上文图 3 的仿真结果完全一致.

观察图 5(b)~(d) 可知, 单层网络节点数为  $\mathcal{X} = 4N + x$  ( $x = 1, 2, 3$ ) 时, 网络的层间最优连边方式均唯一, 其对应的层间连边位置  $i$  均完全分布在直线  $i = N + 1$  上, 而其对应的层间连边位置  $j$  则分别在直线  $j = 3N + 1$ , 直线  $j = 3N + 2$ , 以及直线  $j = 3N + 3$  上. 因此, 当  $\mathcal{X}_x = 4N + x$  ( $x = 1, 2, 3$ ) 时, 网络的层间最优连边方式唯一, 为“层间  $(N + 1) \& (3N + x)$  连边” ( $x = 1, 2, 3$ ).

以上仿真结果与本文猜想 2 的结论完全一致.

#### 4.2.2 基于“网络最短距离”结构指标

此部分通过计算网络中所有节点到层间连边位置  $(i, j)$  之间最短距离之和作为“网络最短距离”, 对单层节点数  $4N + x$  ( $x = 0, 1, 2, 3$ ) 的两层链状网络在层间两条连边时的层间最优/最差连边位置  $i,$



$j$  与  $\mathcal{X}$  之间的关系进行数值仿真. 从另一角度再次验证猜想 2 以及猜想 1 中第 (2) 条结论的正确性.

将本文所研究的两层链状网络看作图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , 其中两个单层网络是两个相同的图  $G_1 = (V^I, E^I)$  和  $G_2 = (V^{II}, E^{II})$ , 层间两条连边分别记为  $e_i$  和  $e_j$  ( $1 \leq i \leq \lfloor \mathcal{X}/2 \rfloor$ , 且  $i+1 \leq j \leq \mathcal{X}$ ); 则有  $\mathcal{V} = \{V^I, V^{II}\}$ ,  $\mathcal{E} = \{E^I, E^{II}, e_i, e_j\}$ .

对于图  $\mathcal{G}$  所表示的双层链状网络, 在层间两条连边的情况下, 称任一节点  $v_k$  ( $1 \leq k \leq 2\mathcal{X}$ ) 到两条层间连边的端点节点  $v_i^I$  和  $v_j^I$  距离的最小值为节点  $v_k$  的最短距离, 记作  $P_k$ . 对于任一“层间  $i&j$  连边” ( $1 \leq i \leq \lfloor \mathcal{X}/2 \rfloor$ , 且  $i+1 \leq j \leq \mathcal{X}$ ), 其对应网络中所有  $2\mathcal{X}$  个节点的最短距离之和, 就是此时的“网络最短距离”, 记作  $P_{i&j}$ . 我们有  $P_{i&j} = \sum_{k=1}^{2\mathcal{X}} P_k$ .

当单层网络节点数为奇数, 即  $\mathcal{X} = 4N + 1$  以及  $\mathcal{X} = 4N + 3$  时, 由于节点对  $v_X$  ( $X = (\mathcal{X} + 1)/2$ ) 到网络两个端点的距离相同, 会被两边同时牵制, 故在此, 我们对节点对  $v_X$  进行特殊处理: 将节点对  $v_X$  用左/右两个新节点对  $v_{X_1}$  及  $v_{X_2}$  代替; 以第一层网络为例, 两个新节点对中与节点  $v_X^I$  相邻的左/右两个新节点分别为  $v_{X_1}^I$  以及  $v_{X_2}^I$ , 且它们与节点  $v_X^I$  之间的距离 (相当于网络中的耦合强度) 均为  $2d/3$ , 用两个新节点最短距离的平均值, 作为节点  $v_X^I$  的最短距离.

因此, 网络中节点  $v_k$  ( $1 \leq k \leq 2\mathcal{X}$ ) 的最短距离  $P_k$  为

$$P_k = \begin{cases} \frac{1}{d} \cdot \min(|k-i|, |k-j|), & v_k \in V^I, \\ \frac{1}{d} \cdot \min(|k-i|, |k-j|) + \frac{1}{a}, & v_k \in V^{II}, \end{cases} \quad (11)$$

其中,  $d$  和  $a$  分别为网络的层内和层间耦合强度.

特别地, 当单层网络节点数为奇数时, 由于节点对  $v_X$  ( $X = (\mathcal{X} + 1)/2$ ) 到单层网络两个端点的距离相同, 会被两边同时牵制, 造成资源浪费, 故对其最短距离  $P_X$  的计算公式进行如下特殊处理:

$$P_X = \begin{cases} \frac{1}{d} \cdot \frac{\min(|X - \frac{1}{3} - i|, |X - \frac{1}{3} - j|) + \min(|X + \frac{1}{3} - i|, |X + \frac{1}{3} - j|)}{2}, & v_X \in V^I, \\ \frac{1}{d} \cdot \frac{\min(|X - \frac{1}{3} - i|, |X - \frac{1}{3} - j|) + \min(|X + \frac{1}{3} - i|, |X + \frac{1}{3} - j|)}{2} + \frac{1}{a}, & v_X \in V^{II}. \end{cases} \quad (12)$$

当单层网络节点数  $\mathcal{X}$  一定时, 只需遍历计算所有层间连边方式下的网络最短距离  $P_{i&j}$ , 其最小值  $P_{\min}$  和最大值  $P_{\max}$  分别对应的两种层间连边方式, 就是“网络最短距离”结构指标下双层链状网络的层间最优连边方式和层间最差连边方式.

易证, 在本文所研究的双层链状网络中, 当  $\mathcal{X}$  一定时,  $d$  和  $a$  的值对不同  $P_{i&j}$  的大小关系没有影响, 即  $P_{\min}$  和  $P_{\max}$  所对应的层间最优/最差连边方式与  $d$  和  $a$  的值无关. 由于篇幅所限, 在此不再赘述. 本小节旨在找出  $P_{\min}$  及  $P_{\max}$  所对应的层间最优/最差连边方式, 故可将  $P_{\min}$  的表达式作如下简化:

$$P_{\min} = \begin{cases} \min_{\substack{1 \leq i \leq X \\ i+1 \leq j \leq 2X}} \left[ \sum_{k=1}^{2X} \min(|i-k|, |j-k|) \right], & \mathcal{X} = 2X, \\ \min_{\substack{1 \leq i \leq X-1 \\ i+1 \leq j \leq 2X-1}} \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq X-1}}^{2X} \min(|i-k|, |j-k|) + P_X \right], & \mathcal{X} = 2X - 1, \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $X \in \mathbb{N}_+$ ,  $P_X$  的表达式如式 (12).  $P_{\max}$  的表达式亦作相似简化. 由此计算得到所有  $\mathcal{X} = 4N + x$  ( $x = 0, 1, 2, 3; 1 \leq N \leq 100$ ) 下双层链状网络中  $P_{\min}$  及  $P_{\max}$  所对应的层间最优/最差连边方式.

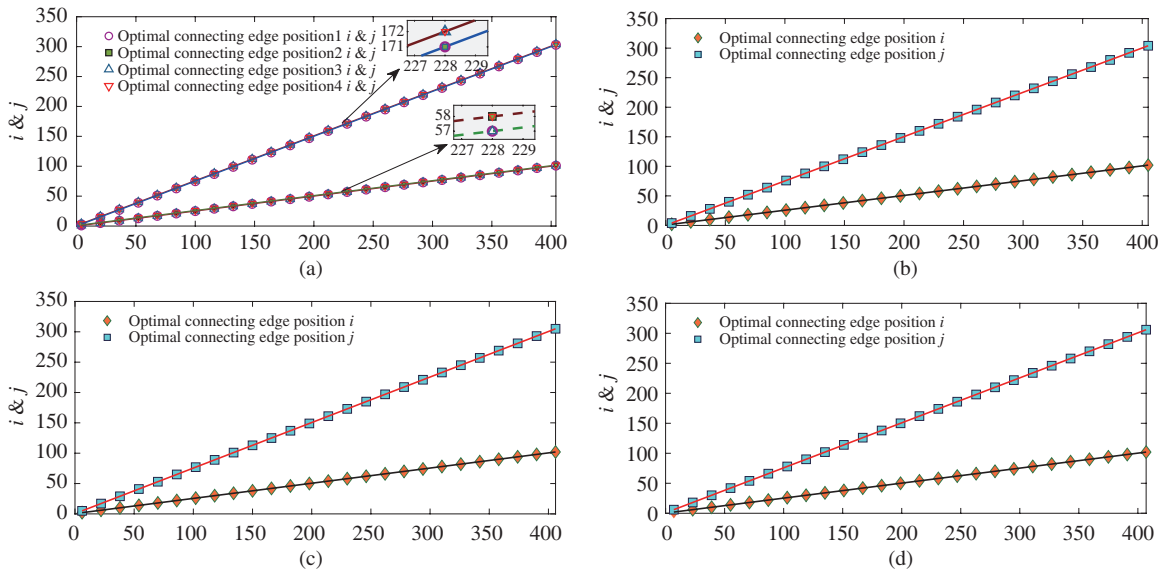


图 6 (网络版彩图) “网络最短距离” 结构指标下 4 种单层网络节点数对应的网络层间最优连边位置  $i, j$  随  $\mathcal{X}$  的变化情况. (a)  $\mathcal{X} = 4N$ ; (b)  $\mathcal{X} = 4N + 1$ ; (c)  $\mathcal{X} = 4N + 2$ ; (d)  $\mathcal{X} = 4N + 3$

Figure 6 (Color online) The optimal inter-layer connection positions  $i$  and  $j$  changing with  $\mathcal{X}$  using the “shortest distance” index. (a)  $\mathcal{X} = 4N$ ; (b)  $\mathcal{X} = 4N + 1$ ; (c)  $\mathcal{X} = 4N + 2$ ; (d)  $\mathcal{X} = 4N + 3$

(1)  $P_{\min}$  对应的层间最优连边方式. 图 6 给出了 4 种单层网络节点数  $\mathcal{X} = 4N + x$  ( $x = 0, 1, 2, 3; 1 \leq N \leq 100$ ) 下, 利用 “网络最短距离” 结构指标求得的双层网络层间最优连边方式中连边位置  $i$  和  $j$  与  $N$  的变化情况散点图及其在猜想 2 中的相应拟合直线.

通过观察图 6(a) 及其在两个数据提示处的放大图例, 可以发现: 当单层网络节点数为  $\mathcal{X} = 4N$  时, 网络的层间最优连边方式有 4 种, 分别为 “层间  $N \& 3N$  连边”, “层间  $(N + 1) \& 3N$  连边”, “层间  $N \& (3N + 1)$  连边”, 以及 “层间  $(N + 1) \& (3N + 1)$  连边”; 而图 6(b)~(d) 所表示的其他 3 种节点数  $\mathcal{X} = 4N + x$  ( $x = 2, 3, 4$ ) 情况下, 网络的层间最优连边方式皆唯一, 为 “层间  $(N + 1) \& (3N + x)$  连边” ( $x = 2, 3, 4$ ).

以上结论与上文利用主稳定函数方法得到的仿真结论一致, 进一步验证了本文猜想 2 中结论的正确性.

(2)  $P_{\max}$  对应的层间最差连边方式. 图 7 给出了 4 种单层网络节点数  $\mathcal{X} = 4N + x$  ( $x = 0, 1, 2, 3; 1 \leq N \leq 100$ ) 下, 利用 “网络最短距离” 求得的网络层间最差连边位置  $i$  和  $j$  与  $N$  的变化情况散点图及该关系在猜想 2 中的相应拟合直线.

观察 4 张子图 (图 7(a)~(d)) 发现: 对任一  $\mathcal{X}$ , 本文所研究层间两条连边下双层链状网络的层间最差连边方式均为 “层间 1&2 连边”. 这与上文图 3 中的仿真结果完全一致, 进一步验证了猜想 1 中第 (2) 条结论的正确性.

### 4.3 最优层间耦合强度 $a_c$

第 4.2 小节验证了猜想 2 结论的正确性, 本小节利用该结论, 对猜想 3 所提的网络最优层间耦合强度  $a_c$  的数值表达式进行仿真及误差分析, 以验证其合理性. 猜想 2 中, 当单层网络节点数为  $\mathcal{X} = 4N$ , 其 3 种层间最优连边方式下网络的同步能力完全相同, 故此情况下仅讨论 “层间  $(N) \& (3N)$  连边”.

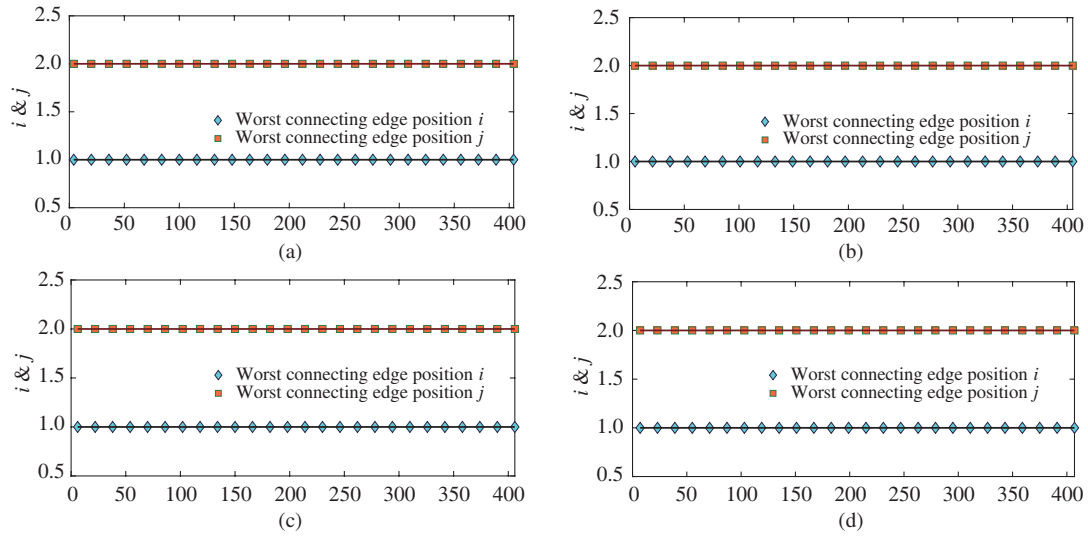


图 7 (网络版彩图) “网络最短距离” 结构指标下 4 种单层网络节点数对应的网络层间最差连边位置  $i, j$  随  $\mathcal{X}$  的变化情况. (a)  $\mathcal{X} = 4N$ ; (b)  $\mathcal{X} = 4N + 1$ ; (c)  $\mathcal{X} = 4N + 2$ ; (d)  $\mathcal{X} = 4N + 3$   
**Figure 7** (Color online) The worst inter-layer connection positions  $i$  and  $j$  changing with  $\mathcal{X}$  using the “shortest distance” index. (a)  $\mathcal{X} = 4N$ ; (b)  $\mathcal{X} = 4N + 1$ ; (c)  $\mathcal{X} = 4N + 2$ ; (d)  $\mathcal{X} = 4N + 3$

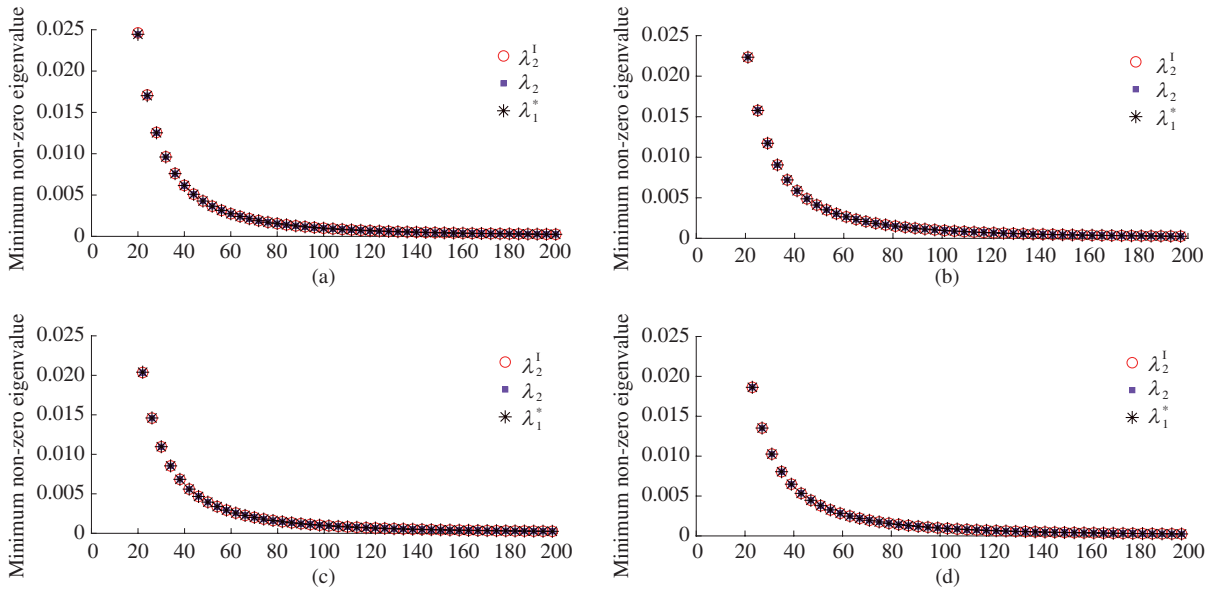


图 8 (网络版彩图) 单层节点数为  $\mathcal{X} = 4N + x$  ( $x = 0, 1, 2, 3; 5 \leq N \leq 50$ ) 的双层链状网络当层间耦合强度  $a = 2d \cdot \sin(\frac{\pi}{2\mathcal{X}})$  时矩阵  $\mathcal{L}, L_{\text{intra}}$  及  $L^*$  各自的最小非零特征值  $\lambda_2, \lambda_2^1$  及  $\lambda_1^*$  随  $N$  的变化情况. (a)  $\mathcal{X} = 4N$ ; (b)  $\mathcal{X} = 4N + 1$ ; (c)  $\mathcal{X} = 4N + 2$ ; (d)  $\mathcal{X} = 4N + 3$   
**Figure 8** (Color online) The minimum non-zero eigenvalues  $\lambda_2, \lambda_2^1$ , and  $\lambda_1^*$  corresponding to matrices  $\mathcal{L}, L_{\text{intra}}$ , and  $L^*$  changing with the number of single-layer network nodes  $\mathcal{X}$  for different network sizes while  $a = 2d \cdot \sin(\frac{\pi}{2\mathcal{X}})$ . (a)  $\mathcal{X} = 4N$ ; (b)  $\mathcal{X} = 4N + 1$ ; (c)  $\mathcal{X} = 4N + 2$ ; (d)  $\mathcal{X} = 4N + 3$

图 8 给出了 4 种单层网络节点数情况下, 层间耦合强度  $a = 2d \cdot \sin(\frac{\pi}{2\mathcal{X}})$  对应的双层链状网络的 Supra-Laplace 矩阵  $\mathcal{L}$ , 层内 Laplace 矩阵  $L_{\text{intra}}$ , 以及矩阵  $L^*(L_{\text{intra}} + 2aC_{\text{inter}})$  各自的最小非零特征

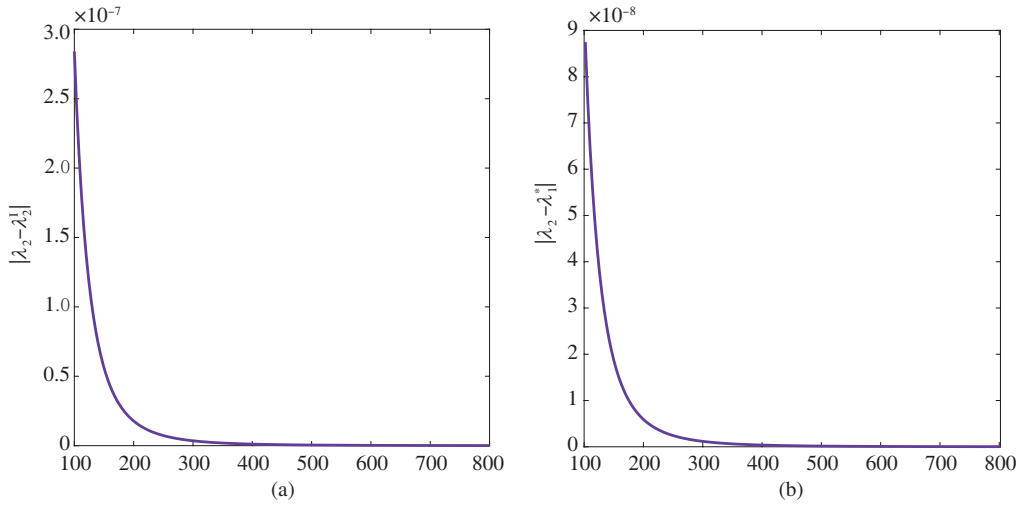


图 9 (网络版彩图) 单层网络节点数分别为  $4N$  及  $4N + 2$  ( $25 \leq N \leq 200$ ), 层间耦合强度  $a = 2d \cdot \sin(\frac{\pi}{2\mathcal{X}})$  时, 误差  $|\lambda_2 - \lambda_2^I|$  及  $|\lambda_2 - \lambda_1^*|$  分别随  $N$  的变化情况. (a)  $\mathcal{X} = 4N$ ; (b)  $\mathcal{X} = 4N + 2$

Figure 9 (Color online) The errors  $|\lambda_2 - \lambda_2^I|$  and  $|\lambda_2 - \lambda_1^*|$  varying with  $N$  respectively in the two cases where the number of single-layer network nodes  $\mathcal{X}$  is even for all  $25 \leq N \leq 200$  while  $a = 2d \cdot \sin(\frac{\pi}{2\mathcal{X}})$ . (a)  $\mathcal{X} = 4N$ ; (b)  $\mathcal{X} = 4N + 2$

值随  $N$  的变化情况.

观察图 8 可以发现: 单层网络节点数为奇数时, 对任意  $\mathcal{X}$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_2^I$ , 以及  $\lambda_1^*$  三者的值均完全相等; 而当单层网络节点数为偶数时, 三者基本相等, 但仍有一定误差, 且随着单层网络节点数的增加, 其误差越来越小.

当单层网络节点数为奇数时, 由式 (9), 网络的层间耦合强度  $2d \cdot \sin(\frac{\pi}{2\mathcal{X}})$  就是其最优层间耦合强度  $a_c$ , 即  $a_c = 2d \cdot \sin(\frac{\pi}{2\mathcal{X}})$ ; 当  $\mathcal{X} = 4N$  时, 由图 8(a), 此时  $\lambda_2 = \lambda_1^*$ , 根据式 (7) 可知, 当前层间耦合强度  $a < a_m$ ; 而当  $\mathcal{X} = 4N + 2$  时, 由图 8(b), 此时  $\lambda_2 = \lambda_2^I$ , 故当前层间耦合强度  $a > a_m$ .

进一步, 我们分别在  $\mathcal{X} = 4N$  和  $\mathcal{X} = 4N + 2$  时计算误差  $|\lambda_2 - \lambda_2^I|$  及  $|\lambda_2 - \lambda_1^*|$ , 以代替其最优层间耦合强度  $a_c$  与  $2d \cdot \sin(\frac{\pi}{2\mathcal{X}})$  之间的误差.

图 9 给出了当单层网络节点数分别为  $\mathcal{X} = 4N$  以及  $\mathcal{X} = 4N + 2$  时, 对于一切  $25 \leq N \leq 200$ , 当层间耦合强度  $a = 2d \cdot \sin(\frac{\pi}{2\mathcal{X}})$  ( $d = 1$ ) 时,  $\lambda_2$  与  $\lambda_2^I$  ( $\mathcal{X} = 4N$ ) 或  $\lambda_1^*$  ( $\mathcal{X} = 4N + 2$ ) 之间的误差随  $N$  的变化情况.

观察图 9 发现, 此时两种情况下所考虑的误差均非常趋近于零 (小于  $1E - 6$ ), 且随着单层网络节点数的增加, 误差越来越小, 故可认为此时网络的层间耦合强度  $2d \cdot \sin(\frac{\pi}{2\mathcal{X}})$  ( $d = 1$ ) 与其最优层间耦合强度  $a_c$  相等.

以上仿真结果与猜想 3 的结论一致, 验证了式 (10) 的正确性.

## 5 讨论和结论

本文证明了在同步域无界时, 单层网络结构相同的多层网络在任意层间一对一连边方式下均存在某个层间耦合强度阈值, 使得网络达到最大同步能力. 在此基础上, 本文利用主稳定函数方法对双层链状网络在层间两条连边下的最优/最差连边位置分别仿真, 验证其最优连边位置在  $1/4$  和  $3/4$  处; 其最差连边位置为端点及其邻居节点处. 进而, 本文将双层链状网络的单层节点数细分为  $4N$ ,  $4N + 1$ ,

$4N + 2$  及  $4N + 3$  这 4 种情况, 分别利用主稳定函数及“网络最短距离”结构指标讨论网络最优连边方式的数量及其连边位置. 最终发现: 单层节点数为  $4N$  时, 有 4 种最优连边方式, 而其他 3 种情况下的最优连边方式均唯一. 最后, 本文在不同节点数情况下, 对所提的层间两条连边下双层链状网络的最优层间耦合强度的表达式进行仿真及误差计算, 验证了其合理性.

目前对于两层网络层间连接方式的优化问题的研究大多停留在数值方法上, 要想在理论上得到结果还很困难. 本文从两层简单结构的网络出发, 针对两层网络的优化选点, 及其与复杂网络的节点重要性、牵制控制等研究方向之间的关系与联系等从理论和仿真上进行了证明与模拟, 为相关问题一般结果的研究打下基础. 但是, 本文只针对单层网络结构相同的双层链状网络在同步域无界情况下进行讨论, 存在一定局限性. 未来可在本文基础上进行更深入的研究, 如: 在同步域有界的情况下, 若网络层间非一对一连边, 利用何种方法探究网络同步能力; 当层间连边数大于 2 时, 或针对其他类型的网络, 其最优/最差连边方式在数量/位置上将会如何变化、其最优层间耦合强度将如何表达.

## 参考文献

- 1 Chen D X, Yang Y F, Zhang Y F, et al. Prediction of COVID-19 spread by sliding mSEIR observer. *Sci China Inf Sci*, 2020, 63: 222203
- 2 Wang K, Fu Z, Xu Q, et al. Distributed fixed step-size algorithm for dynamic economic dispatch with power flow limits. *Sci China Inf Sci*, 2021, 64: 112202
- 3 Yu W W, Li C J, Yu X H, et al. Economic power dispatch in smart grids: a framework for distributed optimization and consensus dynamics. *Sci China Inf Sci*, 2018, 61: 012204
- 4 Hong H F, Wang H, Wang Z L, et al. Finite-time and fixed-time consensus problems for second-order multi-agent systems with reduced state information. *Sci China Inf Sci*, 2019, 62: 212201
- 5 Sun W, Guan J X, Lu J H, et al. Synchronization of the networked system with continuous and impulsive hybrid communications. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2020, 31: 960–971
- 6 Li N, Wu X, Feng J, et al. Fixed-time synchronization of coupled neural networks with discontinuous activation and mismatched parameters. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2021, 32: 2470–2482
- 7 Lu J A, Liu H, Chen J. *Synchronization in Complex Dynamical Networks*. Beijing: Higher Education Press, 2016. 5–29 [陆君安, 刘慧, 陈娟. 复杂动态网络的同步. 北京: 高等教育出版社, 2016. 5–29]
- 8 Li N, Wu X Q, Yang Q R. Fixed-time synchronization of complex dynamical network with impulsive effects. *IEEE Access*, 2020, 8: 33072–33079
- 9 Li X D, Yang X Y, Huang T W. Persistence of delayed cooperative models: impulsive control method. *Appl Math Comput*, 2019, 342: 130–146
- 10 Li X D, Shen J H, Rakkiyappan R. Persistent impulsive effects on stability of functional differential equations with finite or infinite delay. *Appl Math Comput*, 2018, 329: 14–22
- 11 Mei G F, Wu X Q, Wang Y F, et al. Compressive-sensing-based structure identification for multilayer networks. *IEEE Trans Cybern*, 2018, 48: 754–764
- 12 Wang P, Wang D J, Lu J H. Controllability analysis of a gene network for arabidopsis thaliana reveals characteristics of functional gene families. *IEEE/ACM Trans Comput Biol Bioinf*, 2019, 16: 912–924
- 13 Niu R W, Wu X Q, Lu J A, et al. Adaptive diffusion processes of time-varying local information on networks. *IEEE Trans Circ Syst II*, 2019, 66: 1592–1596
- 14 Wu X Q, Wei W B, Tang L K, et al. Coreness and  $h$ -index for weighted networks. *IEEE Trans Circ Syst I*, 2019, 66: 3113–3122
- 15 Tang L K, Lu J A, Wu X Q, et al. Impact of node dynamics parameters on topology identification of complex dynamical networks. *Nonlin Dyn*, 2013, 73: 1081–1097
- 16 Liu H, Wang B-J, Lu J-A, et al. Node-set importance and an optimization algorithm of nodes selection in complex networks based on pinning control. *Acta Phys Sin*, 2021, 70: 056401
- 17 Zhao J C, Lu J A, Wu X Q. Pinning control of general complex dynamical networks with optimization. *Sci China Inf Sci*, 2010, 53: 813–822 [赵军产, 陆君安, 吴晓群. 一般复杂动力网络的优化牵制控制. 中国科学: 信息科学, 2010, 40:

- 821–830]
- 18 Lu J A. Structure, dynamics and function—from single-layer to multi-layer networks. *Modern Phys*, 2015, 27: 3–8 [陆君安. 从单层网络到多层网络——结构、动力学和功能. *现代物理知识*, 2015, 27: 3–8]
  - 19 Wei X, Wu X Q, Chen S H, et al. Cooperative epidemic spreading on a two-layered interconnected network. *SIAM J Appl Dyn Syst*, 2018, 17: 1503–1520
  - 20 Mei G F, Wu X Q, Ning D, et al. Finite-time stabilization of complex dynamical networks via optimal control. *Complexity*, 2016, 21: 417–425
  - 21 Wu X Q, Li Q S, Liu C Y, et al. Synchronization in duplex networks of coupled Rössler oscillators with different inner-coupling matrices. *Neurocomputing*, 2020, 408: 31–41
  - 22 Gómez S, Díaz-Guilera A, Gómez-Gardeñes J, et al. Diffusion dynamics on multiplex networks. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 028701
  - 23 Wei J. Synchronization and superdiffusion on duplex networks. Dissertation for Ph.D. Degree. Wuhan: Wuhan University, 2019 [魏娟. 两层复杂网络的同步与超扩散. 博士学位论文. 武汉: 武汉大学, 2019]
  - 24 Aguirre J, Sevilla-Escoboza R, Gutiérrez R, et al. Synchronization of interconnected networks: the role of connector nodes. *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 248701
  - 25 Xu M M, Lu J A, Zhou J. Synchronizability and eigenvalues of two-layer star networks. *Acta Phys Sin*, 2016, 65: 028902
  - 26 Wei X, Emenheiser J, Wu X, et al. Maximizing synchronizability of duplex networks. *Chaos*, 2018, 28: 013110
  - 27 Wei J, Wu X Q, Lu J A, et al. Synchronizability of duplex regular networks. *Europhys Lett*, 2017, 120: 20005
  - 28 Tu L L, Song S, Wang Y J, et al. The relationship between the topology and synchronizability of partially interdependent networks. *Europhys Lett*, 2017, 119: 40004
  - 29 Li Y, Wu X Q, Lu J A, et al. Synchronizability of duplex networks. *IEEE Trans Circ Syst II*, 2016, 63: 206–210
  - 30 Deng Y, Jia Z, Yang F M. Synchronizability of multilayer star and star-ring networks. *Discrete Dyn Nat Soc*, 2020, 2020: 1–20
  - 31 Han X P, Lu J A. The changes on synchronizing ability of coupled networks from ring networks to chain networks. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2007, 50: 615–624
  - 32 Deng Y, Jia Z, Deng G M, et al. Eigenvalue spectrum and synchronizability of multiplex chain networks. *Phys A-Stat Mech Appl*, 2020, 537: 122631
  - 33 Xia X, Chen Z G, Zeng F, et al. Multi-sink distributed power control algorithm for wireless sensor networks with long-chain structure. *Chin J Sensor Actuat*, 2015, 28: 920–926 [夏旭, 陈志刚, 曾锋, 等. 基于多 Sink 的长链状无线传感器网络功率控制算法. *传感技术学报*, 2015, 28: 920–926]
  - 34 Zi S F, Lin W L. Intelligent street light control system based on long chain sensor network. *China Illuminat Eng J*, 2015, 26: 48–56
  - 35 Ma Y G. A chain-based clustering routing algorithm in wireless sensor network. Dissertation for master's Degree. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2009 [马用功. 一种无线传感器网络中基于链状的分簇路由算法. 硕士学位论文. 上海: 上海交通大学, 2009]
  - 36 Liu X K. Implementation and optimization of MPICH2 multicast on optical fiber network. Dissertation for master's Degree. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2009 [刘晓坤. 一种无线传感器网络中基于链状的分簇路由算法. 硕士学位论文. 上海: 上海交通大学, 2009]
  - 37 Yao Z G, Lu W Y, Wu Z H. Dynamic routing algorithm research and apply base on wireless chain network. *Microcomput Inform*, 2012, 28: 105–106
  - 38 Pecora L M, Carroll T L. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys Rev Lett*, 1998, 80: 2109–2112
  - 39 Tang L, Wu X, Lü J, et al. Master stability functions for complete, intralayer, and interlayer synchronization in multiplex networks of coupled Rössler oscillators. *Phys Rev E*, 2019, 99: 012304

## Analysis of the synchronizability of two-layer chain networks with two inter-layer edges

Xiaoqun WU<sup>1\*</sup>, Hanyi MENG<sup>1</sup>, Jun'an LU<sup>1</sup>, Jie HU<sup>1</sup> & Xiuping HAN<sup>2\*</sup>

1. School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China;
  2. School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan 250358, China
- \* Corresponding author. E-mail: xqwu@whu.edu.cn, xiuphan@sdsu.edu.cn

**Abstract** The structure and dynamics of multi-layer networks are the frontiers in the current network science research. The inter-layer connections in a multi-layer network directly affect the dynamics, propagation, diffusion, and synchronization of the entire multi-layer network. However, there is rarely systematic theory or method for the general structure of multi-layer networks. People can only start with a simple structure to explore how the inter-layer connections affect the overall dynamic behaviors of multiple layers. The work of this paper aims at the two-layer networks where each layer is a chain network. Through graph theory and numerical calculation, this problem is explored to find the optimization method of the inter-layer connections. First of all, according to the master stability function method, this paper proves that when the synchronous region is unbounded, a multi-layer network with the same network structure at each layer has a certain inter-layer coupling strength threshold, so that the entire network reaches the maximum synchronizability, which is the synchronizability of its single-layer network. Secondly, the simulations show that when there are only two edges between layers, the optimal positions are respectively located at  $1/4$  and  $3/4$  of each chain, while the worst positions are the end node of the chain and its neighbor node. Furthermore, we discuss in detail about the optimal connection modes of two-layer chain networks when the number of single-layer nodes is  $4N + x$  ( $x = 0, 1, 2, 3$ ) using the master stability function method and “network shortest distance” structure index. In the case that the single-layer nodes number is  $4N$ , there are 4 optimal connection modes; in the other three cases, there is only one optimal connection mode respectively. Finally, we propose the expression of the optimal inter-layer coupling strength, and then verify the correctness of the expression by calculating the optimal inter-layer coupling strength values of the two-layer chain network with different sizes.

**Keywords** multi-layer networks, synchronizability, chain networks, inter-layer connection modes, inter-layer coupling strength



**Xiaoqun WU** received her B.S. degree in applied mathematics and her Ph.D. degree in computational mathematics from Wuhan University, Wuhan, China, in 2000 and 2005, respectively. She is currently a professor at the School of Mathematics and Statistics, Wuhan University. Her current research interests include complex networks and nonlinear dynamics.



**Jun'an LU** received his B.S. degree in geophysics from Peking University, Beijing, China, in 1968 and his M.S. degree in applied mathematics from Wuhan University, Wuhan, China, in 1982. He is currently a professor at the School of Mathematics and Statistics, Wuhan University. His current research interests include complex networks, nonlinear systems, chaos, and scientific and engineering computing.



**Jie HU** received her B.S. degree in information and computing science from Wuhan University, Wuhan, China, in 2004 and her Ph.D. degree in operations research and cybernetics from Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China, in 2009. She is currently a lecturer at the School of Mathematics and Statistics, Wuhan University. Her current research interests include combination optimization and network optimization.



**Xiuping HAN** was born in Heze in 1979. She received her B.S. degree in mathematics from Qufu Normal University, Qufu, China, in 2002 and her Ph.D. degree in computational mathematics from Wuhan University, Wuhan, China, in 2007. She currently works in the School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan, China. Her research interests include complex networks, impulsive control, and discontinuous control systems.