



# 多约束纯反馈非线性系统鲁棒自适应抗干扰控制

陈龙胜<sup>1,2</sup>, 杨辉<sup>1\*</sup>

1. 华东交通大学电气与自动化工程学院, 南昌 330013

2. 南昌航空大学飞行器工程学院, 南昌 330063

\* 通信作者. E-mail: yhshuo@ecjtu.edu.cn

收稿日期: 2020-05-07; 修回日期: 2020-08-20; 接受日期: 2020-10-01; 网络出版日期: 2021-02-23

国家自然科学基金 (批准号: 61733005, 61673172, 61963029) 资助项目

**摘要** 针对一类具有未知干扰和多约束的不确定纯反馈非线性系统, 提出一种基于干扰观测器的鲁棒自适应抗干扰控制方案. 该方法首先基于 Butterworth 低通滤波器和径向基神经网络设计非线性干扰观测器以实现系统未知非线性函数和复合扰动的在线精确逼近, 并消除“代数环”问题. 其次, 为确保系统在状态受限、预设性能和输入饱和等多重约束的综合影响下能够对期望轨迹进行稳定跟踪, 构造了一种新型的障碍 Lyapunov 函数, 结合辅助有界函数、Nussbaum 函数和一阶滑模微分器设计 Backstepping 控制器, 并通过 Lyapunov 稳定理论分析闭环系统稳定性. 最后, 仿真结果验证了所提控制方法的有效性.

**关键词** 径向基神经网络, 非线性干扰观测器, 障碍 Lyapunov 函数, 多约束, 纯反馈非线性系统

## 1 引言

严格来说, 任何系统都要受到各种实际条件的约束. 如果约束条件得不到满足, 将会导致控制性能下降、闭环不稳定, 甚至造成系统破坏. 约束问题是非线性系统控制的基本问题之一, 具有重要的理论意义和实际价值, 目前也产生了一些值得关注的成果<sup>[1~13]</sup>. 近十年来, 应用障碍 Lyapunov 函数 (barrier Lyapunov function, BLF) 解决具有状态或输出约束的非线性系统的控制问题取得了长足的进展, 但是这些研究大多是针对严反馈型非线性系统<sup>[1~3]</sup>的. 最近, 一些学者将 BLF 理论进一步推广到纯反馈非线性系统的状态或输出约束控制之中<sup>[4~6]</sup>. 另一方面, 随着复杂度增加和控制需求提升, 以往的仅以稳态误差作为指标来衡量闭环系统的跟踪性能难以满足实际需求, 在控制器的设计中需融合考虑系统的动态和稳态性能指标的约束需求. 为此, 预设性能控制 (prescribed performance control, PPC) 被提出, 其能够保证系统的跟踪误差收敛到预定义的任意小的残差集内, 同时超调量和收敛速度可满足预先设置的条件. PPC 同时兼顾了系统的稳态性能和动态跟踪性能, 因此得到了广泛关注.

**引用格式:** 陈龙胜, 杨辉. 多约束纯反馈非线性系统鲁棒自适应抗干扰控制. 中国科学: 信息科学, 2021, 51: 633–647, doi: 10.1360/SSI-2020-0331

Chen L S, Yang H. Adaptive robust anti-disturbance control for pure feedback nonlinear systems with multiple constraints (in Chinese). Sci Sin Inform, 2021, 51: 633–647, doi: 10.1360/SSI-2020-0331

文献 [7,8] 研究了具有预设性能约束的严反馈型非线性系统的自适应控制问题. 文献 [9,10] 进一步将 PPC 应用到更为一般的非仿射纯反馈非线性系统的控制器设计中. 实际系统执行器的机械构造和性能通常都要受到某种物理约束, BLF/PPC 潜在的奇异问题和未知的外部扰动可能会造成控制输入过大, 易导致输入饱和现象, 从而影响控制性能甚至导致系统失稳. 文献 [11,12] 为具有输入饱和的一类严反馈非线性系统研究了自适应约束控制策略. 文献 [13] 为具有对称饱和的随机纯反馈非线性系统构建了模糊自适应控制器. 针对非对称饱和的一类纯反馈非线性系统, 文献 [9] 研究了自适应神经网络控制器. 然而传统的对数型 BLF 参数设计需要预先离线调用 Matlab 中的 (fmincon.m) 函数计算虚拟控制变量的上界, 控制器的参数选取较为复杂, 难以满足工程实际的需求. 同时目前关于具有多约束的不确定纯反馈非线性系统控制的研究成果还较少.

系统的不确定性和多约束的综合影响容易引起控制的振荡, 难以满足鲁棒稳定度的需求, 因而有关不确定非线性系统的鲁棒控制研究吸引了众多学者的关注. 神经网络和 Backstepping 法在处理系统不确定性和维护系统稳定方面表现出较大优势, 将两者结合起来应用在不确定非线性系统的鲁棒控制中, 已引起了众多学者的关注. 文献 [1~3, 11, 14~16] 为一类严反馈非线性系统提出了鲁棒自适应神经网络控制方案. 最初 Backstepping 法仅适用于“参数严反馈”形式的非线性系统, 无法适应纯反馈这类复杂的非线性系统. 时至今日, 科研工作者在继承 Backstepping 法优点的基础上将其进一步应用到更为一般的不确定纯反馈系统中. 文献 [5,6,9~13] 基于神经网络和 Backstepping 法为一类纯反馈非线性系统设计鲁棒自适应控制方案. 然而传统的 Backstepping 法存在“计算膨胀”的缺陷, 且已有的纯反馈非线性系统的自适应控制策略通常未对神经网络逼近误差和外部时变干扰进行观测和补偿. 外部干扰和未知的逼近误差容易导致控制输入过大, 引起控制的振荡. 目前将非线性干扰观测器 (nonlinear disturbance observer, NDO) 和非线性控制方法相结合已成为进一步提升不确定非线性系统控制器鲁棒稳定度的一种有效方法<sup>[11,17~19]</sup>. 文献 [20] 基于径向基神经网络 (radial basis function neural network, RBFNN) 和 NDO 为一类具有周期扰动的非线性系统提出了事件触发控制方法. 同时 NDO 已被广泛应用于众多实际工程领域, 如高超声速飞行器系统<sup>[21]</sup>、移动机器人系统<sup>[22]</sup> 和 水下航行器系统<sup>[23]</sup> 等. 然而目前关于不确定纯反馈非线性系统基于干扰观测器的抗干扰控制研究成果还十分稀少.

鉴于以上分析, 本文为一类具有未知干扰和多约束的不确定纯反馈非线性系统提出基于 RBFNN 和 NDO 的鲁棒自适应 Backstepping 抗干扰控制方案. 主要工作为: (1) 基于 RBFNN 和 NDO 的耦合设计实现对系统未知非线性函数和复合扰动的在线精确逼近, 并结合辅助有界函数 (auxiliary bounded function, ABF)、BLF 和 Nussbaum 函数综合解决系统状态受限、预设性能和输入饱和的多重约束问题. (2) 设计新型障碍 Lyapunov 函数 (novel barrier Lyapunov function, NBLF) 保证闭环系统能够满足状态/输出约束、稳态和瞬态性能指标约束的需求. (3) 基于 Butterworth 低通滤波器和一阶滑模微分器设计 Backstepping 控制器消除纯反馈系统存在的“代数环”问题和 Backstepping 固有的“计算膨胀”问题.

## 2 问题提出及预备知识

### 2.1 问题阐述

考虑如下具有外部干扰和多约束的不确定纯反馈非线性系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) + x_{i+1} + d_i(t), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= f_n(\bar{x}_n, u) + u + d_n(t), \\ y &= x_1,\end{aligned}\tag{1}$$

其中,  $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T \in \mathbb{R}^i$  和  $y \in \mathbb{R}$  分别是非线性系统的状态向量和输出, 系统所有状态均受限, 即  $|x_i| < k_{c_i}, i = 1, \dots, n, k_{c_i}$  为已知正常数.  $f_i(\cdot) : \mathbb{R}^{i+1} \rightarrow \mathbb{R}$  是未知的光滑非线性函数,  $d_i(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$  表示未知的外部时变干扰. 为便于推导, 令  $x_{n+1} = u$ . 考虑系统存在输入饱和现象, 即

$$u = \text{sat}(v) = \begin{cases} \text{sgn}(v)u_M, & |v| > u_M, \\ v, & |v| \leq u_M, \end{cases}\tag{2}$$

其中,  $u_M$  为控制输入的饱和阈值, 自适应控制律  $v$  将在式 (35) 中给出.

控制目标: (P1) 设计相应控制器使系统的输出  $y$  能跟踪期望轨迹  $y_d$ , 且保证闭环系统所有信号有界; (P2) 跟踪误差  $z_1 = y - y_d$  满足预定的稳态和瞬态性能指标需求; (P3) 所有状态满足预定约束, 即  $|x_i| < k_{c_i}$ .

**注释1** 控制目标 P2 可采用不等式  $-\rho(t) < z_1 < \rho(t), \forall t \geq 0$  来描述, 其中  $\rho: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  是严格递减的连续光滑函数且满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho_\infty > 0$ , 即性能函数 (prescribed performance function, PPF). 本文选取的 PPF 为  $\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\ell t} + \rho_\infty$ , 其中,  $\rho_\infty$  表示预设的最大容许稳态误差,  $\ell > 0$  表示跟踪误差的最低收敛速度, 同时跟踪误差的最大超调量小于  $\rho_0 > 0$ . 因此, 通过选择合适的  $\rho_0, \rho_\infty$  和  $\ell$  可以保证系统的跟踪误差满足预定的稳态和瞬态性能指标约束需求.

**假设1** 期望轨迹  $y_d$  及其一阶导数连续有界, 且满足  $|y_d| \leq A_0 < k_{c_1}$ , 其中  $A_0$  为已知正常数.

**假设2** ([11, 17, 18]) 未知光滑干扰  $d_i(t)$  的导数有界, 即存在一个未知正常数  $\bar{d}_i$  使得  $|\dot{d}_i(t)| \leq \bar{d}_i$ .

**假设3** 非线性函数  $f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})$  对  $x_{i+1}$  的偏导数存在, 且存在正常数  $\underline{g}_i$  和  $\bar{g}_i$  使得  $0 < \underline{g}_i \leq |1 + \partial f(\bar{x}_i, x_{i+1})/\partial x_{i+1}| \leq \bar{g}_i < \infty, i = 1, \dots, n$ .

**注释2** 与已有的基于 NDO 的控制器设计要求系统控制增益及其方向已知相比, 假设 3 更具一般性.

**定义1** ([4, 11]) 若连续函数  $N(\varsigma) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  满足

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r N(\varsigma) d\varsigma = +\infty, \quad \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r N(\varsigma) d\varsigma = -\infty,\tag{3}$$

则称  $N(\varsigma)$  为 Nussbaum 函数. 本文选取 Nussbaum 函数为  $N(\varsigma) = \varsigma^2 \cos(\varsigma)$ .

**引理1** ([24]) 若  $N(\varsigma)$  是 Nussbaum 函数, 则对任意的有界函数  $\Psi(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, |\Psi(\cdot)| \in [\iota_0, \Psi_0]$  和  $\bar{\Psi}(\cdot) \in [-\iota_0, \iota_0] \subset \mathbb{R}$ , 其中  $\iota_0 < \Psi_0 < +\infty$  为任意的正常数,  $\Psi(\cdot)N(\varsigma)$  和  $(\varsigma + \bar{\Psi}(\cdot))$  也是 Nussbaum 函数.

**引理2** ([24]) 设  $V(\cdot)$  和  $\varsigma_j(\cdot), j = 1, \dots, m$  是定义在  $[0, t_f]$  上的光滑函数, 满足  $V(t) \geq 0, \forall t \in [0, t_f]; N(\varsigma_j)$  为 Nussbaum 函数. 若  $V(t) \leq Q + e^{-Ct} \sum_{j=1}^m \int_0^t N(\varsigma_j) \dot{\varsigma}_j e^{C\tau} d\tau$  成立, 则  $V(\cdot), \varsigma_j(\cdot)$  和  $\int_0^t N(\varsigma_j) \dot{\varsigma}_j d\tau$  在区间  $[0, t_f]$  必定有界, 其中,  $m$  为有界正整数,  $C$  为正常数,  $Q$  为适当的常数.

**引理3** ([25]) 对于任意给定的正常数  $t_f > 0$ , 若闭环系统的解在区间  $[0, t_f]$  上有界, 则  $t_f = +\infty$ .

**引理4** ([18]) 对一阶滑模微分器

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_0 &= \vartheta_0 = -\epsilon_0 |\xi_0 - \eta(t)|^{0.5} \operatorname{sgn} [\xi_0 - \eta(t)] + \xi_1, \\ \dot{\xi}_1 &= -\epsilon_1 \operatorname{sgn}(\xi_0 - \eta(t)),\end{aligned}\quad (4)$$

其中,  $\eta(t)$  是已知的信号,  $\xi_0, \xi_1$  和  $\vartheta_0$  为微分器的状态变量,  $\epsilon_0$  和  $\epsilon_1$  是待设计参数, 若初始跟踪误差  $\xi_0 - \eta(t_0)$  和  $\vartheta_0 - \dot{\eta}(t_0)$  有界, 则  $\vartheta_0$  可以任意精度逼近  $\dot{\eta}(t)$  且逼近误差有界.

## 2.2 RBFNN

RBFNN 结构简单且收敛速度快, 其能逼近任意非线性函数. 给定任意一个光滑非线性函数  $f(Z) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ , 则存在一个 RBF 基函数向量  $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$  以及理想的神经网络权值  $W^* \in \mathbb{R}^p$  使得

$$f(Z) = W^{*\top} \Phi(Z) + \varepsilon(Z), \quad \forall Z \in \Omega_Z, \quad (5)$$

其中,  $\Omega_Z$  为  $\mathbb{R}^q$  上的一个紧集,  $\varepsilon(Z)$  是逼近误差,  $p > 1$  为神经网络隐含层节点的个数. 理想的神经网络权值  $W^*$  取在紧集  $\Omega_Z$  内使得  $\varepsilon(Z)$  最小的估计值  $\hat{W}$ , 定义为  $W^* = \arg \min_{\hat{W}} [\sup_{Z \in \Omega_Z} |\hat{f}(Z, \hat{W}) - f(Z)|]$ . 对上述 RBFNN 逼近任意的非线性函数  $f(Z) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$  存在如下引理.

**引理5** ([11]) 理想的神经网络权值  $W^*$  向量、RBF 基函数向量  $\Phi(Z)$  和逼近误差  $\varepsilon(Z)$  均有界, 即存在正常数  $\bar{\varepsilon}, \bar{w}$  和  $\bar{\phi}$  满足  $|\varepsilon(Z)| \leq \bar{\varepsilon}, \|W^*\| \leq \bar{w}$  和  $\|\Phi(Z)\| \leq \bar{\phi}$ .

## 2.3 NBLF

为满足系统的状态/输出约束条件, 在应用 Backstepping 法时, 可以以约束区间为定义域构造 BLF, 传统的对数型 BLF 通常描述为如下形式<sup>[1]</sup>:

$$V'_{b_i} = 0.5 \ln [k_{b_i}^2 / (k_{b_i}^2 - z_i^2)], \quad (6)$$

其中,  $z_i$  是被约束变量, 满足  $|z_i(0)| < k_{b_i}, k_{b_i} > 0$  是待设计的约束边界. 本文提出如下一种 NBLF:

$$V_{b_i} = 0.5 [z_i^2 / (k_{b_i}^2 - z_i^2)], \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

对比传统的 BLF 和所设计的 NBLF 易知在紧集  $\Omega_z = \{z_i : |z_i| < k_{b_i}, i = 1, \dots, n\}$  内始终有  $V'_{b_i} < V_{b_i}$ . 对  $V_{b_i}$  和  $V'_{b_i}$  两边求导可得  $\dot{V}_{b_i} = k_{b_i}^2 z_i \dot{z}_i / (k_{b_i}^2 - z_i^2)^2$  和  $\dot{V}'_{b_i} = z_i \dot{z}_i / (k_{b_i}^2 - z_i^2)$ , 在  $k_{b_i}^2 / (k_{b_i}^2 - z_i^2) > 1$  和  $z_i \dot{z}_i < 0$  的隐含前提下满足  $\dot{V}_{b_i} < \dot{V}'_{b_i} < 0$ . 不等式  $V'_{b_i} < V_{b_i}$  和  $\dot{V}_{b_i} < \dot{V}'_{b_i}$  表明所提出的 NBLF 比传统的对数 BLF 具有更宽的稳定域. 尽管 NBLF 能够保证系统的状态约束不被违背, 但不能同时保证系统跟踪误差满足预定的稳态和瞬态性能指标约束需求. 为此, 将 PPF 和 NBLF 结合起来设计如下新型的预设性能障碍 Lyapunov 函数 (novel prescribed performance barrier Lyapunov function, PP-NBLF) 以同时保证状态、稳态和瞬态性能指标约束的需求:

$$V_{b_1} = 0.5 [\lambda^2 / (1 - \lambda^2)], \quad (8)$$

其中,  $\lambda = z_1 / \rho(t)$ ,  $\rho_0 = k_{b_1} = k_{c_1} - A_0 > \rho_\infty$  且满足  $|z_1(0)| < \rho_0$ .

**注释3** 式 (8) 所描述的 PP-NBLF 可综合解决系统状态和预设性能指标约束的问题, 且与作者前期的工作<sup>[5]</sup>相比, PP-NBLF 同样具有更宽的稳定域. 另一方面, 与已有的 PPC 利用误差转换函数将含有不等式约束  $-\rho(t) < z_1 < \rho(t)$  的系统转化为无约束系统进行控制器设计和稳定性分析相比, 本文提出的 PP-NBLF 可实现直接对原系统进行控制器设计和稳定性分析.

### 3 鲁棒自适应抗干扰控制设计及稳定性分析

#### 3.1 坐标变换

标准的 Backstepping 设计需定义如下坐标变换:

$$z_1 = x_1 - y_d, \quad z_i = x_i - \alpha_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n, \quad (9)$$

其中,  $z_1$  和  $z_i$  为误差面,  $\alpha_{i-1}$  为第  $i-1$  个子系统的虚拟控制律.

若所设计的控制器能保证  $|z_1| < k_{b_1}$  和  $|z_i| < k_{b_i}$ , 其中  $k_{b_1} > 0$  和  $k_{b_i} > 0$  为待设计的约束边界参数, 根据式 (9) 定义的坐标变换可知状态变量必满足  $|x_1| < |y_d| + k_{b_1}$  和  $|x_i| < |\alpha_{i-1}| + k_{b_i}$ . 因此, 如果期望轨迹  $y_d$  和虚拟控制变量  $\alpha_{i-1}$  满足条件  $|y_d| \leq A_0$  和  $|\alpha_{i-1}| \leq A_{i-1}$ , 则系统所有状态满足约束条件  $|x_1| < k_{c_1}$  和  $|x_i| < k_{c_i}$ . 传统的基于 BLF 的控制方法需通过离线调用 Matlab (fmincon.m) 函数计算虚拟控制变量  $\alpha_{i-1}$  的上界  $A_{i-1}$  以确定约束边界参数  $k_{b_i}$ , 参数设计过于繁琐, 不便于工程实现. 本文所设计的基于 NBLF 的自适应控制策略将通过引入 ABF  $\mathcal{T} : (-\diamond, \diamond) \rightarrow \mathbb{R}$  消除这一缺陷.

$$\mathcal{T}(*, \diamond) = (2\diamond/\pi) \arctan [\pi*/(2\diamond)], \quad (10)$$

其中,  $\diamond$  表示正常数. 利用 ABF  $\mathcal{T}$  可生成变量  $\eta_{i-1}$ :

$$\eta_{i-1} = \mathcal{T}(\alpha_{i-1}, A_{i-1}) = (2A_{i-1}/\pi) \arctan [\pi\alpha_{i-1}/(2A_{i-1})], \quad (11)$$

其中  $A_{i-1} > 0$  是由设计者决定的, 无需计算虚拟控制变量  $\alpha_{i-1}$  的上界. 显然, 由  $\arctan$  函数的特性可知变量  $\eta_{i-1}$  始终满足  $|\eta_{i-1}| < A_{i-1}$ . 于是, 可利用变量  $\eta_{i-1}$  为 Backstepping 设计定义如下新坐标变换:

$$z_1 = x_1 - y_d, \quad z_i = x_i - \eta_{i-1}. \quad (12)$$

利用  $0 < \rho(t) \leq k_{b_1}$  和  $k_{c_i} = k_{b_i} + A_{i-1}$  这一事实条件, 依据新坐标变换 (12) 可知只要所设计的控制器能实现  $|z_1| < \rho(t)$  和  $|z_i| < k_{b_i}$ , 则闭环系统所有状态满足  $|x_1| < k_{c_1}$  和  $|x_i| < k_{c_i}$ .

**注释 4** 根据假设 1 和  $\rho_0 = k_{b_1} = k_{c_1} - A_0$ ,  $|z_1(0)| < \rho_0$  可方便确定参数  $\rho_0$  和  $k_{b_1}$  的值, 且参数  $k_{b_i}$  和  $A_{i-1}$  的值可由设计者预先分配, 参数  $k_{b_i}$  和  $A_{i-1}$  的选取仅需要在满足  $k_{c_i} = k_{b_i} + A_{i-1}$  和  $|z_i(0)| < k_{b_i}$  的条件下让  $k_{b_i}$  尽可能小即可, 无需离线调用 Matlab (fmincon.m) 来计算, 本文基于 NBLF 设计的控制方法, 参数选取更为方便.

另一方面, ABF  $\mathcal{T}$  也可用来逼近式 (2) 中的饱和函数  $\text{sat}(\cdot)$  以处理系统输入饱和和受限约束的问题, 即

$$\eta_v = \mathcal{T}(v, u_M) = (2u_M/\pi) \arctan [\pi v/(2u_M)], \quad (13)$$

其中  $\Delta u := u - \eta_v$  为逼近误差. 根据  $\arctan$  函数的特性可知  $|\eta_v| < u_M$  且逼近误差  $\Delta u$  有界. 同时在实际工程系统中逼近误差  $\Delta u$  变化率也是有界的, 即存在未知正常数  $\bar{u}_0$  使得  $|\Delta \dot{u}| \leq \bar{u}_0$ .

为便于后续的控制器的设计, 利用中值定理可将式 (11) 和 (13) 进一步描述为

$$\begin{aligned} \eta_{i-1} &= \frac{\partial \mathcal{T}(\mathcal{I}_{i-1}\alpha_{i-1})}{\partial \alpha_{i-1}} (\alpha_{i-1} - 0) + \frac{2A_{i-1}}{\pi} \arctan \left( \frac{0}{2A_{i-1}} \right) \\ &= \frac{\alpha_{i-1}}{1 + [\pi \mathcal{I}_{i-1}\alpha_{i-1}/(2A_{i-1})]^2} = (1 - \varphi_{i-1})\alpha_{i-1}, \\ \eta_v &= \frac{\partial \mathcal{T}(\mathcal{I}_n v)}{\partial v} (v - 0) + \frac{2u_M}{\pi} \arctan \left( \frac{0}{2u_M} \right) = \frac{v}{1 + [\pi \mathcal{I}_n v/(2u_M)]^2} = (1 - \varphi_n)v, \end{aligned} \quad (14)$$

其中,  $0 < \mathcal{I}_{i-1} < 1, 0 < \mathcal{I}_n < 1$ ,  $\varphi_{i-1} = [\pi \mathcal{I}_{i-1} \alpha_{i-1} / (2A_{i-1})]^2 / [1 + (\pi \mathcal{I}_{i-1} \alpha_{i-1} / (2A_{i-1}))^2]$  和  $\varphi_n = [\pi \mathcal{I}_n v / (2u_M)]^2 / [1 + (\pi \mathcal{I}_n v / (2u_M))^2]$ . 显然,  $\varphi_{i-1}$  和  $\varphi_n$  满足  $0 < \varphi_{i-1}, \varphi_n < 1$ .

**注释5** 文献 [17] 中所提出的控制策略需预先离线计算  $\varphi_i$  和  $\varphi_n$  的最大值以避免控制器奇异值问题, 给控制器设计带来了不便, 不便于工程实现. 本文所提出的基于 NBLF 的控制策略将在 Backstepping 的每一步设计中引入 Nussbaum 函数来解决此问题.

### 3.2 基于 RBFNN 的干扰观测器设计

采用如下 RBFNN 来逼近系统中未知非线性函数  $f_i(\cdot)$ :

$$f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) = \gamma_i^{-1} W_i^{*T} \Phi_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) + \gamma_i^{-1} \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (15)$$

其中,  $\gamma_i > 0$  为待设计的参数,  $\varepsilon_i$  表示最优逼近误差. 为消除控制对象非仿射纯反馈特性而引起的“代数环”问题, 引入如下滤波信号 [26]:

$$x_{i+1,f} = H_L(s)x_{i+1} \approx x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (16)$$

其中  $H_L(s) = a_0 / (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)$  表示 Butterworth 低通滤波器, 其截止频率  $\omega_c = 1$  rad/s, 相应的滤波器参数可参见文献 [26]. 由于大部分执行机构都具有低通特性, 因此采用滤波信号  $x_{i+1,f}$  替换 RBF 基函数  $\Phi_i(\cdot)$  输入向量中的  $x_{i+1}$  解决“代数环”问题是合理可行的 [26].

将式 (11) 和 (13) 代入式 (1) 并结合式 (15) 可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \gamma_i^{-1} W_i^{*T} \Phi_i(\bar{x}_i, x_{i+1,f}) + x_{i+1} + D_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= \gamma_n^{-1} W_n^{*T} \Phi_n(\bar{x}_n, x_{n+1,f}) + \eta_v + D_n, \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $D_i = \gamma_i^{-1} \varepsilon_i + \gamma_i^{-1} W_i^{*T} [\Phi_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) - \Phi_i(\bar{x}_i, x_{i+1,f})] + d_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  和  $D_n = \gamma_n^{-1} \varepsilon_n + \Delta u + \gamma_n^{-1} W_n^{*T} [\Phi_n(\bar{x}_n, u) - \Phi_n(\bar{x}_n, x_{n+1,f})] + d_n(t)$  表示系统的复合扰动. 根据假设 2 和引理 5 可知, 复合扰动  $D_i$  及其变化率是有界的, 即

$$|\dot{D}_i| \leq \theta_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (18)$$

其中,  $\theta_i$  是未知的正常数. 为进一步抑制未知的复合扰动对闭环系统的跟踪性能和稳定性的影响, 设计如下的 NDO 以实现复合扰动  $D_i$  的在线估计.

$$\begin{aligned} \hat{D}_i &= Z_i + \gamma_i x_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \dot{Z}_i &= -\hat{W}_i^T \Phi_i(\bar{x}_i, x_{i+1,f}) - \gamma_i (x_{i+1} + \hat{D}_i), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{Z}_n &= -\hat{W}_n^T \Phi_n(\bar{x}_n, x_{n+1,f}) - \gamma_n (\eta_v + \hat{D}_n), \end{aligned} \quad (19)$$

其中,  $\hat{D}_i$  是  $D_i$  的估计值,  $\hat{W}_i$  为参数  $W_i^*$  的估计值,  $Z_i$  为观测器辅助系统状态. 定义  $\tilde{D}_i = D_i - \hat{D}_i$  和  $\tilde{W}_i = W_i^* - \hat{W}_i$ , 根据式 (19) 设计的 NDO, 可推导出

$$\dot{\tilde{D}}_i = \dot{D}_i - \dot{\hat{D}}_i = \dot{D}_i - \tilde{W}_i^T \Phi_i(\bar{x}_i, x_{i+1,f}) - \gamma_i \tilde{D}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (20)$$

### 3.3 控制器设计及稳定性分析

本小节基于所设计的 NDO 和 BLF, 使用 Backstepping 方法来设计鲁棒自适应抗干扰控制器.

**步骤 1.** 令  $z_1 = x_1 - y_d$ ,  $z_2 = x_2 - \eta_1$ , 依据式 (11) 可将  $\eta_1$  定义为  $\eta_1 = (2A_1/\pi) \arctan[\pi\alpha_1/(2A_1)]$ , 其中,  $\alpha_1$  为第 1 子系统待设计的虚拟控制律, 参数  $A_1$  和  $k_{b_2}$  的值可依据注释 4 确定. 根据式 (14) 和 (17) 可得

$$\dot{z}_1 = \gamma_1^{-1} W_1^{*T} \Phi_1(\bar{x}_1, x_{2,f}) + z_2 + (1 - \varphi_1)\alpha_1 + D_1 - \dot{y}_d, \quad (21)$$

其中  $0 < \varphi_1 < 1$ . 为第 1 个子系统设计如下虚拟控制律:

$$\alpha_1 = N(\varsigma_1)\varpi_1, \quad \varpi_1 = \kappa_1 z_1 - \dot{y}_d - \rho^{-1}\dot{\rho}z_1 + \frac{\rho^2 z_1}{2(\rho^2 - z_1^2)^2} + \gamma_1^{-1} \hat{W}_1^T \Phi_1(\bar{x}_1, x_{2,f}) + \hat{D}_1, \quad (22)$$

其中,  $\kappa_1 > 0$  为设计参数,  $\rho$  为注释 1 中定义的性能函数且满足  $|z_1(0)| < k_{b_1}$  和  $\rho_0 = k_{b_1} = k_{c_1} - A_0$ . 参数自适应设计律为

$$\dot{\varsigma}_1 = \rho^2 z_1 \varpi_1 / (\rho^2 - z_1^2)^2, \quad \dot{\hat{W}}_1 = \Lambda_1 \left[ \frac{\gamma_1^{-1} \rho^2 z_1}{(\rho^2 - z_1^2)^2} \Phi_1(\bar{x}_1, x_{2,f}) - \lambda_1 \hat{W}_1 \right], \quad (23)$$

其中,  $\lambda_1 > 0$  和  $\Lambda_1 = \Lambda_1^T > 0$  为设计参数.

**步骤 2.** 令  $z_3 = x_3 - \eta_2$ , 依据式 (11) 可将  $\eta_2$  定义为  $\eta_2 = (2A_2/\pi) \arctan[\pi\alpha_2/(2A_2)]$ , 其中,  $\alpha_2$  为第 2 子系统待设计的虚拟控制律, 设计参数  $A_2$  和  $k_{b_3}$  的值可依据注释 4 确定. 为消除 Backstepping 的“计算膨胀”问题, 利用如下的一阶滑模微分器获取  $\dot{\eta}_1$  的估计信号:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{20} &= \vartheta_{20} = -\epsilon_{20} |\xi_{20} - \eta_1|^{0.5} \operatorname{sgn}(\xi_{20} - \eta_1) + \xi_{21}, \\ \dot{\xi}_{21} &= -\epsilon_{21} \operatorname{sgn}(\xi_{20} - \eta_1), \end{aligned} \quad (24)$$

其中,  $\epsilon_{20}$  和  $\epsilon_{21}$  为设计的正常数,  $\xi_{20}$ ,  $\xi_{21}$  和  $\vartheta_{20}$  为微分器的状态变量. 根据引理 4 可得

$$\dot{\eta}_1 = \vartheta_{20} + \psi_2, \quad (25)$$

其中,  $\psi_2$  为微分器估计误差且有界, 即存在正常数  $\bar{\psi}_2$  使得  $|\psi_2| \leq \bar{\psi}_2$ . 结合式 (14), (17) 和 (25) 并对  $z_2 = x_2 - \eta_1$  关于时间  $t$  求导可得

$$\dot{z}_2 = \gamma_2^{-1} W_2^{*T} \Phi_2(\bar{x}_2, x_{3,f}) + z_3 + (1 - \varphi_2)\alpha_2 + D_2 - \vartheta_{20} - \psi_2, \quad (26)$$

其中  $0 < \varphi_2 < 1$ . 为第 2 个子系统设计如下虚拟控制律:

$$\alpha_2 = N(\varsigma_2)\varpi_2, \quad \varpi_2 = \kappa_2 z_2 - \vartheta_{20} + \frac{k_{b_2}^2 z_2}{(k_{b_2}^2 - z_2^2)^2} + \gamma_2^{-1} \hat{W}_2^T \Phi_2(\bar{x}_2, x_{3,f}) + \hat{D}_2 + \frac{\rho^2 z_1 (k_{b_2}^2 - z_2^2)^2}{k_{b_2}^2 (\rho^2 - z_1^2)^2}, \quad (27)$$

其中  $\kappa_2 > 0$  为设计参数. 参数自适应设计律为

$$\dot{\varsigma}_2 = k_{b_2}^2 z_2 \varpi_2 / (k_{b_2}^2 - z_2^2)^2, \quad \dot{\hat{W}}_2 = \Lambda_2 \left[ \frac{\gamma_2^{-1} k_{b_2}^2 z_2}{(k_{b_2}^2 - z_2^2)^2} \Phi_2(\bar{x}_2, x_{3,f}) - \lambda_2 \hat{W}_2 \right], \quad (28)$$

其中  $\lambda_2 > 0$  和  $\Lambda_2 = \Lambda_2^T > 0$  为设计参数.

步骤  $i = 3, \dots, n-1$ . 令  $z_i = x_i - \eta_{i-1}$  和  $z_{i+1} = x_{i+1} - \eta_i$ , 依据式 (11) 可将  $\eta_{i-1}$  和  $\eta_i$  定义为  $\eta_{i-1} = (2A_{i-1}/\pi) \arctan[\pi\alpha_{i-1}/(2A_{i-1})]$ ,  $\eta_i = (2A_i/\pi) \arctan[\pi\alpha_i/(2A_i)]$ , 其中,  $\alpha_i$  为第  $i$  子系统待设计的虚拟控制律, 参数  $A_i$  和  $k_{b_{i+1}}$  的值可依据注释 4 确定. 同样, 类似步骤 2, 根据引理 4 可得

$$\dot{\eta}_{i-1} = \vartheta_{i0} + \psi_i, \quad (29)$$

其中,  $|\psi_i| \leq \bar{\psi}_i$ ,  $\bar{\psi}_i$  为正常数. 结合式 (14), (17) 和 (29) 并对  $z_i$  关于时间  $t$  求导可得

$$\dot{z}_i = \gamma_i^{-1} W_i^{*T} \Phi_i(\bar{x}_i, x_{i+1}, f) + z_{i+1} + (1 - \varphi_i)\alpha_i + D_i - \vartheta_{i0} - \psi_i, \quad (30)$$

其中  $0 < \varphi_i < 1$ . 为第  $i$  个子系统设计如下虚拟控制律:

$$\alpha_i = N(\varsigma_i)\varpi_i, \quad \varpi_i = \kappa_i z_i - \vartheta_{i0} + \frac{k_{b_i}^2 z_i}{(k_{b_i}^2 - z_i^2)^2} + \gamma_i^{-1} \hat{W}_i^T \Phi_i(\bar{x}_i, x_{i+1}, f) + \hat{D}_i + \frac{k_{b_{i-1}}^2 z_{i-1} (k_{b_i}^2 - z_i^2)^2}{k_{b_i}^2 (k_{b_{i-1}}^2 - z_{i-1}^2)^2}, \quad (31)$$

其中  $\kappa_i > 0$  为设计参数. 参数自适应设计律为

$$\dot{\varsigma}_i = k_{b_i}^2 z_i \varpi_i / (k_{b_i}^2 - z_i^2)^2, \quad \dot{W}_i = \Lambda_i \left[ \frac{\gamma_i^{-1} k_{b_i}^2 z_i}{(k_{b_i}^2 - z_i^2)^2} \Phi_i(\bar{x}_i, x_{i+1}, f) - \lambda_i \hat{W}_i \right], \quad (32)$$

其中  $\lambda_i > 0$  和  $\Lambda_i = \Lambda_i^T > 0$  为设计参数.

步骤  $n$ . 类似步骤 2, 根据引理 4 可得

$$\dot{\eta}_{n-1} = \vartheta_{n0} + \psi_n, \quad (33)$$

其中  $|\psi_n| \leq \bar{\psi}_n$ ,  $\bar{\psi}_n$  为正常数. 结合式 (14), (17) 和 (33) 并对  $z_n = x_n - \eta_{n-1}$  关于时间  $t$  求导可得

$$\dot{z}_n = \dot{x}_n - \dot{\eta}_{n-1} = \gamma_n^{-1} W_n^{*T} \Phi_n(\bar{x}_n, x_{n+1}, f) + (1 - \varphi_n)v + D_n - \vartheta_{n0} - \psi_n, \quad (34)$$

其中  $0 < \varphi_n < 1$ . 为系统设计如下的自适应控制律  $v$ :

$$v = N(\varsigma_n)\varpi_n, \quad \varpi_n = \kappa_n z_n - \vartheta_{n0} + \frac{k_{b_n}^2 z_n}{(k_{b_n}^2 - z_n^2)^2} + \gamma_n^{-1} \hat{W}_n^T \Phi_n(\bar{x}_n, x_{n+1}, f) + \hat{D}_n + \frac{k_{b_{n-1}}^2 z_{n-1} (k_{b_n}^2 - z_n^2)^2}{k_{b_n}^2 (k_{b_{n-1}}^2 - z_{n-1}^2)^2}, \quad (35)$$

其中  $\kappa_n > 0$  为设计参数. 参数自适应设计律为

$$\dot{\varsigma}_n = k_{b_n}^2 z_n \varpi_n / (k_{b_n}^2 - z_n^2)^2, \quad \dot{W}_n = \Lambda_n \left[ \frac{\gamma_n^{-1} k_{b_n}^2 z_n}{(k_{b_n}^2 - z_n^2)^2} \Phi_n(\bar{x}_n, x_{n+1}, f) - \lambda_n \hat{W}_n \right], \quad (36)$$

其中  $\lambda_n > 0$  和  $\Lambda_n = \Lambda_n^T > 0$  为设计参数.

**定理1** 对系统 (1) 在满足假设 1~3 的前提下, NDO 为式 (19) 的形式, 参数自适应律设计为式 (23), (28), (32) 和 (36) 的形式, 则在所设计的鲁棒自适应抗干扰控制器 (35) 的作用下, 闭环系统满足指标: (1) 系统的输出信号  $y$  跟踪期望轨迹  $y_d$  的同时, 闭环系统中所有信号有界; (2) 跟踪误差  $z_1 = y - y_d$  满足预定的稳态和瞬态性能指标约束需求; (3) 系统所有状态满足预定的约束需求, 即  $|x_i| < k_{c_i}$ .

**证明** 结合式 (7) 和 (8) 中定义的  $V_{b_1}$  和  $V_{b_i}$ , 考虑如下的 Lyapunov 函数:

$$V = V_{b_1} + \sum_{i=2}^n V_{b_i} + 0.5 \sum_{i=1}^n \tilde{W}_i^T \Lambda_i^{-1} \tilde{W}_i + 0.5 \sum_{i=1}^n \tilde{D}_i^2. \quad (37)$$



对式 (37) 两边关于时间  $t$  求导并结合式 (7), (8), (20), (21), (26), (30) 和 (34) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{\rho^2 z_1}{(\rho^2 - z_1^2)^2} \left[ \gamma_1^{-1} W_1^{*T} \Phi_1(\bar{x}_1, x_{2,f}) + z_2 + (1 - \varphi_1) \alpha_1 + D_1 - \dot{y}_d - \rho^{-1} \dot{\rho} z_1 \right] - \tilde{W}_1^T \Lambda_1^{-1} \dot{\tilde{W}}_1 \\ & + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{k_{b_i}^2 z_i}{(k_{b_i}^2 - z_i^2)^2} \left[ \gamma_i^{-1} W_i^{*T} \Phi_i(\bar{x}_i, x_{i+1,f}) + z_{i+1} + (1 - \varphi_i) \alpha_i + D_i - \vartheta_{i0} - \psi_i \right] - \tilde{W}_i^T \Lambda_i^{-1} \dot{\tilde{W}}_i \\ & + \frac{k_{b_n}^2 z_n}{(k_{b_n}^2 - z_n^2)^2} \left[ \gamma_n^{-1} W_n^{*T} \Phi_n(\bar{x}_n, x_{n+1,f}) + (1 - \varphi_n) v + D_n - \vartheta_{n0} - \psi_n \right] - \tilde{W}_n^T \Lambda_n^{-1} \dot{\tilde{W}}_n \\ & + \sum_{i=1}^n \tilde{D}_i \left[ \dot{D}_i - \tilde{W}_i(\bar{x}_i, x_{i+1,f}) - \gamma_i \tilde{D}_i \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

根据式 (22), (23), (27), (28), (31), (32), (35) 和 (36) 可将式 (38) 进一步表述为

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\frac{\kappa_1 \rho^2 z_1^2}{(\rho^2 - z_1^2)^2} + [(1 - \varphi_1) N(\varsigma_1) + 1] \dot{\varsigma}_1 + \frac{\rho^2 z_1 \tilde{D}_1}{(\rho^2 - z_1^2)^2} - \frac{\rho^4 z_1^2}{2(\rho^2 - z_1^2)^4} + \lambda_1 \tilde{W}_1^T \hat{W}_1 - \frac{\kappa_2 k_{b_2}^2 z_2^2}{(k_{b_2}^2 - z_2^2)^2} \\ & + [(1 - \varphi_2) N(\varsigma_2) + 1] \dot{\varsigma}_2 + \frac{k_{b_2}^2 z_2 z_3}{(k_{b_2}^2 - z_2^2)^2} - \frac{k_{b_2}^4 z_2^2}{(k_{b_2}^2 - z_2^2)^4} + \frac{k_{b_2}^2 z_2 \tilde{D}_2}{(k_{b_2}^2 - z_2^2)^2} - \frac{k_{b_2}^2 z_2 \psi_2}{(k_{b_2}^2 - z_2^2)^2} + \lambda_2 \tilde{W}_2^T \hat{W}_2 \\ & + \sum_{i=3}^{n-1} \left[ -\frac{\kappa_i k_{b_i}^2 z_i^2}{(k_{b_i}^2 - z_i^2)^2} + [(1 - \varphi_i) N(\varsigma_i) + 1] \dot{\varsigma}_i - \frac{k_{b_i}^4 z_i^2}{(k_{b_i}^2 - z_i^2)^4} + \frac{k_{b_i}^2 z_i \tilde{D}_i}{(k_{b_i}^2 - z_i^2)^2} - \frac{k_{b_i}^2 z_i \psi_i}{(k_{b_i}^2 - z_i^2)^2} + \lambda_i \tilde{W}_i^T \hat{W}_i \right] \\ & + \sum_{i=3}^{n-1} -\frac{k_{b_{i-1}}^2 z_{i-1} z_i}{(k_{b_{i-1}}^2 - z_{i-1}^2)^2} + \sum_{i=3}^{n-1} \frac{k_{b_i}^2 z_i z_{i+1}}{(k_{b_i}^2 - z_i^2)^2} - \frac{k_{b_{n-1}}^2 z_{n-1} z_n}{(k_{b_{n-1}}^2 - z_{n-1}^2)^2} - \frac{\kappa_n k_{b_n}^2 z_n^2}{(k_{b_n}^2 - z_n^2)^2} + [(1 - \varphi_n) N(\varsigma_n) + 1] \dot{\varsigma}_n \\ & - \frac{k_{b_n}^4 z_n^2}{(k_{b_n}^2 - z_n^2)^4} + \frac{k_{b_n}^2 z_n \tilde{D}_n}{(k_{b_n}^2 - z_n^2)^2} - \frac{k_{b_n}^2 z_n \psi_n}{(k_{b_n}^2 - z_n^2)^2} + \lambda_n \tilde{W}_n^T \hat{W}_n + \sum_{i=1}^n \tilde{D}_i \left[ \dot{D}_i - \tilde{W}_i(\bar{x}_i, x_{i+1,f}) - \gamma_i \tilde{D}_i \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

考虑引理 5 并利用 Young's 不等式可得

$$\rho^2 z_1 \tilde{D}_1 / (\rho^2 - z_1^2)^2 \leq 0.5 \rho^4 z_1^2 / (\rho^2 - z_1^2)^4 + 0.5 \tilde{D}_1^2, \quad (40)$$

$$\lambda_i \tilde{W}_i^T \hat{W}_i \leq -0.5 \lambda_i \tilde{W}_i^T \tilde{W}_i + 0.5 \|W_i^*\|^2 \leq -0.5 \lambda_i \tilde{W}_i^T \tilde{W}_i + 0.5 \lambda_i \bar{w}_i^2, \quad i = 1, \dots, n, \quad (41)$$

$$k_{b_i}^2 z_i \tilde{D}_i / (k_{b_i}^2 - z_i^2)^2 \leq 0.5 k_{b_i}^4 z_i^2 / (k_{b_i}^2 - z_i^2)^4 + 0.5 \tilde{D}_i^2, \quad i = 2, \dots, n, \quad (42)$$

$$-k_{b_i}^2 z_i \psi_i / (k_{b_i}^2 - z_i^2)^2 \leq 0.5 k_{b_i}^4 z_i^2 / (k_{b_i}^2 - z_i^2)^4 + 0.5 \bar{\psi}_i^2, \quad i = 2, \dots, n, \quad (43)$$

$$-\tilde{D}_i \dot{D}_i \leq 0.5 \tilde{D}_i^2 + 0.5 \theta_i^2, \quad -\tilde{D}_i \tilde{W}_i^T \Phi_i(\bar{x}_i, x_{i+1,f}) \leq 0.5 \varrho_i \bar{\phi}_{if}^2 \tilde{D}_i^2 + 0.5 \tilde{W}_i^T \tilde{W}_i / \varrho_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (44)$$

其中,  $\varrho_i > 0$  为设计参数,  $\bar{\phi}_{if}$  和  $\bar{w}_i$  为正常数. 对任意的  $z_1$  和  $z_i, i = 2, \dots, n$  满足  $|z_1| < \rho$  和  $|z_i| < k_{b_i}$ , 如下不等式成立:

$$\frac{z_1^2}{\rho^2 - z_1^2} \leq \frac{z_1^2}{\rho^2 - z_1^2} \frac{\rho^2}{\rho^2 - z_1^2} = \frac{\rho^2 z_1^2}{(\rho^2 - z_1^2)^2}, \quad \frac{z_i^2}{k_{b_i}^2 - z_i^2} \leq \frac{z_i^2}{k_{b_i}^2 - z_i^2} \frac{k_{b_i}^2}{k_{b_i}^2 - z_i^2} = \frac{k_{b_i}^2 z_i^2}{(k_{b_i}^2 - z_i^2)^2}. \quad (45)$$

将式 (40)~(45) 代入式 (39) 可得

$$\dot{V}_n \leq -\frac{\kappa_1 z_1^2}{(\rho^2 - z_1^2)} - \sum_{j=2}^n \frac{\kappa_j z_j^2}{k_{b_j}^2 - z_j^2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (2\gamma_j - 2 - \varrho_j \bar{\phi}_{jf}^2) \tilde{D}_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \lambda_j - \frac{1}{\varrho_j} \right) \tilde{W}_j^T \tilde{W}_j$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^n [(1 - \varphi_j) N(\varsigma_j) + 1] \dot{\varsigma}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \theta_j^2 + \lambda_j \bar{w}_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n \bar{\psi}_j^2 \\
 & \leq -CV + M + \sum_{j=1}^n [(1 - \varphi_j) N(\varsigma_j) + 1] \dot{\varsigma}_j,
 \end{aligned} \tag{46}$$

其中,  $C =: \min_{j=1, \dots, n} (2\kappa_j, 2\gamma_j - 2 - \varrho_j \bar{\phi}_{jf}^2, \lambda_j - \varrho_j^{-1})$ ,  $M = 0.5 \sum_{j=1}^n \theta_j^2 + \lambda_j \bar{w}_j^2 + 0.5 \sum_{j=2}^n \bar{\psi}_j^2$ . 为保证系统稳定, 参数  $\kappa_j, \gamma_j, \varrho_j$  和  $\lambda_j$  的选取需满足  $2\gamma_j - 2 - \varrho_j \bar{\phi}_{jf}^2 > 0$  和  $\lambda_j - \varrho_j^{-1} > 0$ . 式 (46) 两边同时乘以  $e^{Ct}$  并在  $[0, t]$  内积分可得

$$0 \leq V_n \leq M/C + V_n(0) + e^{-Ct} \sum_{j=1}^n \int_0^t [(1 - \varphi_j) N(\varsigma_j) + 1] \dot{\varsigma}_j e^{C\tau} d\tau. \tag{47}$$

根据引理 1 可知  $(1 - \varphi_j) N(\varsigma_j) + 1$  也为 Nussbaum 函数, 再依据引理 2 和 3 可得  $\int_0^t [(1 - \varphi_j) N(\varsigma_j) + 1] \dot{\varsigma}_j d\tau, V_j, \tilde{W}_j, \tilde{D}_j, z_j$  和  $z_j$  在  $[0, +\infty)$  内有界. 令  $H$  为  $\sum_{j=1}^n |[(1 - \varphi_j) N(\varsigma_j) + 1] \dot{\varsigma}_j|$  的上界, 式 (46) 可表述为

$$\dot{V}_n \leq -CV + \delta, \tag{48}$$

其中,  $\delta = M + H$ . 因此, 根据参考文献 [1] 中的引理 1 可知在初始误差满足  $|z_i(0)| < k_{b_i}, i = 1, \dots, n$  的前提下,  $\lambda$  和  $z_i$  必满足  $|\lambda| < 1$  (即  $|z_1| < \rho$ ) 和  $|z_i| \leq k_{b_i}, i = 2, \dots, n$ . 再依据坐标变换 (12) 可知系统的所有状态满足预定的约束需求, 即  $|x_i| < k_{c_i}, i = 1, \dots, n$ .

#### 4 仿真研究

本节将通过数值仿真验证所提出控制策略的有效性. 考虑如下二阶纯反馈非线性系统:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) + d_1(t), \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) + d_2(t), \\
 y &= x_1,
 \end{aligned} \tag{49}$$

其中,  $f_1(x_1, x_2) = (1 - e^{-x_1})/(1 + e^{-x_1}) + x_2^3 + x_2 e^{-1-x_1^2}$ ,  $f_2(x_1, x_2, u) = x_1^2 + 0.15u^3 + \chi(1 + x_2^2)u + \sin(0.1u)$ ,  $\chi = 0.1$ ,  $d_1(t) = 0.5 \sin(2t)$  和  $d_2(t) = 0.3e^{-3t} \cos(t)$ , 系统的初始状态为  $x_0 = [0.05, 0]^T$ .

在仿真时, 系统的期望信号为  $y_d = 0.5 \sin(t/5)$ , 且要求系统状态和控制输入满足约束  $|x_1| < k_{c_1} = 0.6, |x_2| < k_{c_2} = 0.9$  和  $|u_M| < 5$ , 稳态跟踪误差不超过 0.01, 跟踪误差收敛速度不低于  $e^{-3t}$ . 为保证所有约束均能满足, 性能函数及约束边界参数设计为  $\rho(t) = (k_{b_1} - 0.005)e^{-4t} + 0.005, k_{b_1} = 0.1$  和  $k_{b_2} = 0.3$ , 再根据注释 4 可十分容易地将参数  $A_0$  和  $A_1$  选为  $A_1 = 0.5$  和  $A_2 = 0.6$ . 显然, 期望信号和所设计的参数满足  $|y_d| \leq A_0, |z_1(0)| < k_{b_1}$  和  $|z_2(0)| < k_{b_2}$ .

为了更好地说明本文所设计控制器的有效性, 在仿真时, 将本文所设计的基于 NN+NDO+NBLF 的抗干扰控制策略分别与基于 NN 和 NN+NDO 的控制策略进行对比仿真, 控制器的自适应参数的初始值选为  $\varsigma_1(0) = \varsigma_2(0) = 0$  和  $\hat{W}_1(0) = \hat{W}_2(0) = 0$ , 其他参数如表 1 所示, 仿真结果如图 1~6 所示.

图 1 和 2 为跟踪结果及跟踪误差曲线, 系统的状态变化情况在图 1 和 3 中给出, 图 4 表示系统控制输入曲线, 图 5 给出了神经网络权值变化曲线, 图 6 为复合扰动的估计值的变化情况. 显而易见, 仿真结果表明本文所提出的基于 NN+NDO+NBLF 的抗干扰控制策略既能满足状态和输入饱和

表 1 控制器参数

Table 1 The parameters of controllers

NN	NN+NDO	NN+NDO+NBLF
$\gamma_1 = 100, \kappa_1 = 50$	$\gamma_1 = 10, \kappa_1 = 150$	$\gamma_1 = 10, \kappa_1 = 150$
$\lambda_1 = 0.5, \Lambda_1 = \text{diag}\{100\}$	$\lambda_1 = 0.5, \Lambda_1 = \text{diag}\{50\}$	$\lambda_1 = 0.2, \Lambda_1 = \text{diag}\{15\}$
$\gamma_2 = 50, \kappa_2 = 50$	$\gamma_2 = 50, \kappa_2 = 50$	$\gamma_2 = 5, \kappa_2 = 5.5$
$\lambda_1 = 0.1, \Lambda_1 = \text{diag}\{100\}$	$\lambda_1 = 0.1, \Lambda_1 = \text{diag}\{100\}$	$\lambda_1 = 0.1, \Lambda_1 = \text{diag}\{25\}$
$\epsilon_{20} = 2, \epsilon_{21} = 4$	$\varrho_1 = \varrho_2 = 100, \epsilon_{20} = 2, \epsilon_{21} = 4$	$\varrho_1 = \varrho_2 = 10, \epsilon_{20} = 2, \epsilon_{21} = 4$

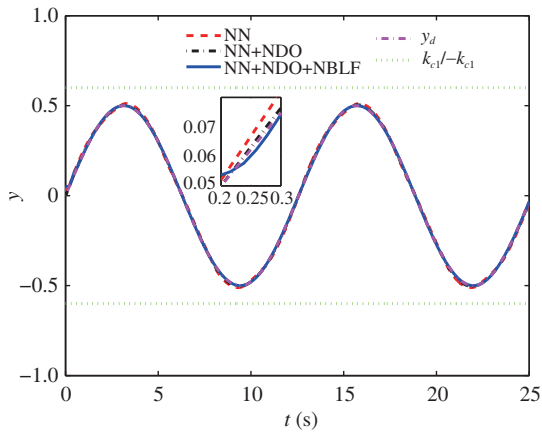


图 1 (网络版彩图) 跟踪结果

Figure 1 (Color online) Tracking results

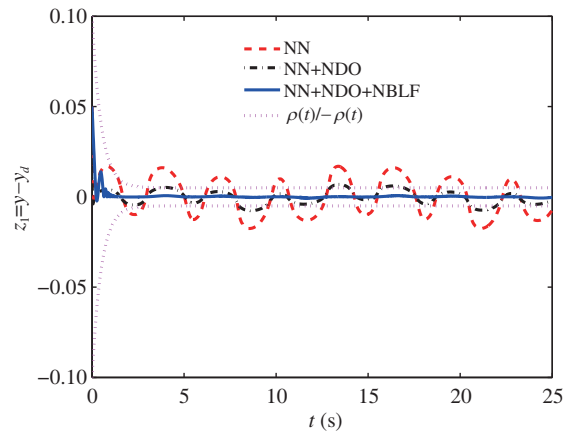


图 2 (网络版彩图) 跟踪误差  $z_1 = y - y_d$

Figure 2 (Color online) Tracking error  $z_1 = y - y_d$

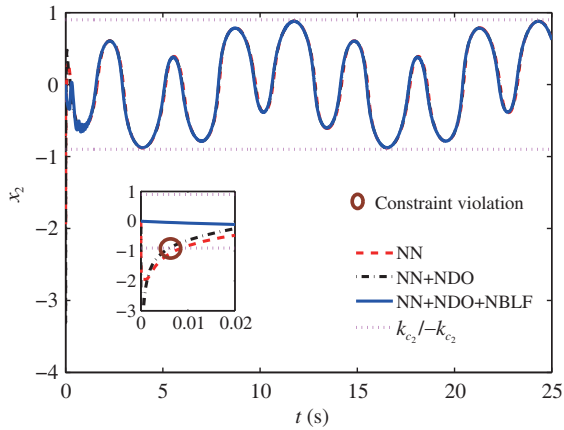


图 3 (网络版彩图) 状态  $x_2$

Figure 3 (Color online) The state  $x_2$

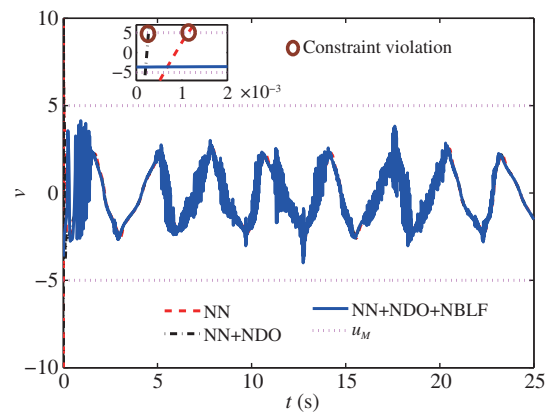


图 4 (网络版彩图) 控制输入  $v$

Figure 4 (Color online) Actual control  $v$

约束的需求, 又能保证系统的跟踪误差满足预定的稳态及动态跟踪性能约束需求, 然而, 基于 NN 和 NN+NDO 的控制策略难以保证这些约束同时得到满足。

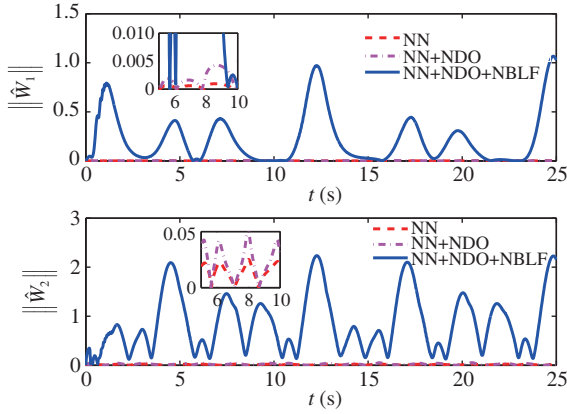


图 5 (网络版彩图) 神经网络权值向量范数  
Figure 5 (Color online) Norm of NN weights

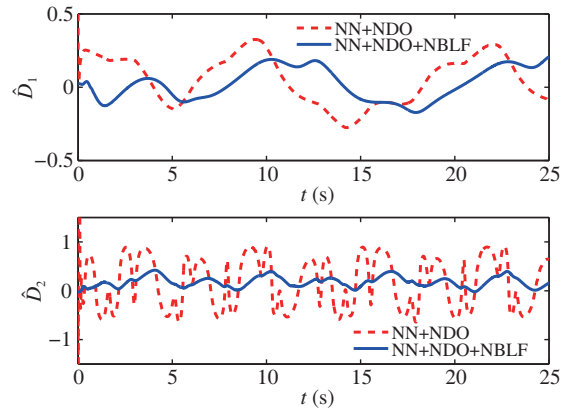


图 6 (网络版彩图) 干扰估计值  
Figure 6 (Color online) Estimation of disturbances

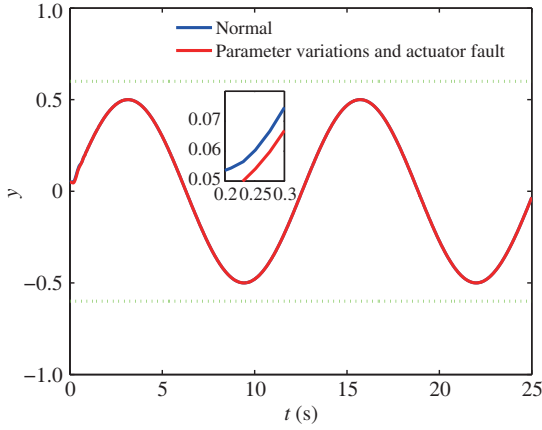


图 7 (网络版彩图) 鲁棒性验证时仿真结果  
Figure 7 (Color online) Tracking results for robustness verification

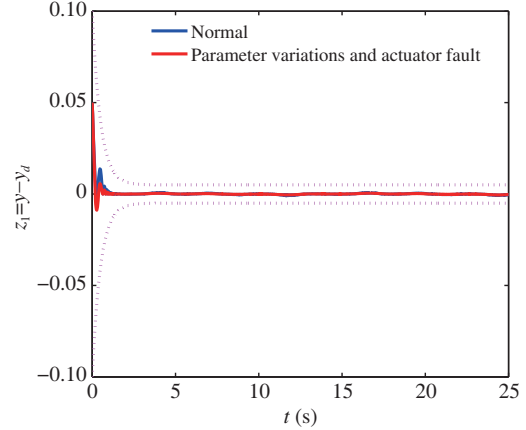


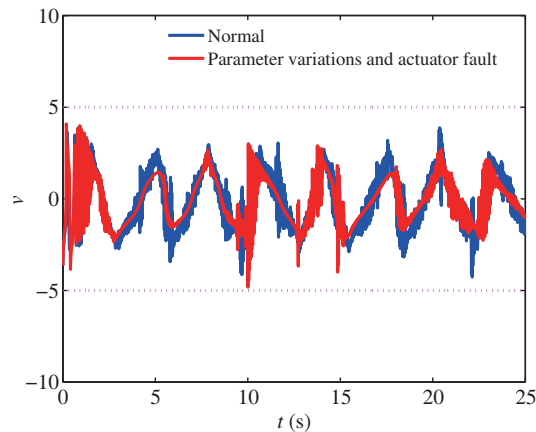
图 8 (网络版彩图) 鲁棒性验证时跟踪误差  
Figure 8 (Color online) Tracking error for robustness verification

为验证所提出控制方法的鲁棒性, 进一步考虑系统存在如下参数摄动和执行机构故障的情形:

$$\chi = \begin{cases} 0.1, & t \leq 15 \text{ s}, \\ 0.5, & t > 15 \text{ s}, \end{cases} \quad d_1(t) = \begin{cases} 0.5 \sin(2t), & t \leq 10 \text{ s}, \\ 0.8 \sin(2t), & t > 10 \text{ s}, \end{cases} \quad d_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 5 \text{ s}, \\ 0.3e^{-3t} \cos(t), & t > 5 \text{ s}, \end{cases} \quad (50)$$

$$u^F(t) = (1 - \phi(t))u(t), \quad \phi(t) = 1 - \frac{1}{1+ae^{-b(x)}}, \quad t > t_f,$$

其中,  $b(x)$  和  $a > 0$  分别为未知连续有界函数和未知常数, 表征在执行机构故障发生的  $t_f$  时刻系统相关参数的变化情况. 仿真时, 假设在  $t_f = 3 \text{ s}$  时执行机构发生故障, 且假设  $b(x) = 2 + 0.01\sqrt{\cos(x_1x_2)}$  和  $a = 1$  [27], 控制器的其他参数选取与表 1 中的 NN+NDO+NBLF 情形一致. 仿真结果如图 7~9 所示. 根据仿真结果可知所提出的基于 NN+NDO+BLF 的鲁棒自适应抗干扰控制策略在系统具有参数摄动和执行机构故障时仍具有很好的鲁棒性, 且能保证良好的控制效果.

图 9 (网络版彩图) 鲁棒性验证时控制输入  $v$ Figure 9 (Color online) Actual control  $v$  for robustness verification

## 5 结论

本文针对一类具有外部动态干扰和多约束的不确定纯反馈非线性系统提出了基于 RBFNN, NDO 和 NBLF 的鲁棒自适应抗干扰 Backstepping 控制设计方案. 所提出的控制方案融合考虑系统状态受限、输入饱和以及预设稳态和动态性能指标约束的需求, 可保证闭环系统满足所有的约束. 同时, 明确考虑了系统的不确定性和外部时变干扰, 在不确定性和外部干扰的综合影响下仍可保证闭环系统的稳定性, 系统具有较好的抗干扰能力. 仿真结果表明了本文所提出的鲁棒自适应控制方案的可行性和有效性.

## 参考文献

- 1 Ren B B, Ge S S, Tee K P, et al. Adaptive neural control for output feedback nonlinear systems using a barrier Lyapunov function. *IEEE Trans Neural Netw*, 2010, 21: 1339–1345
- 2 Liu Y J, Ma L, Liu L, et al. Adaptive neural network learning controller design for a class of nonlinear systems with time-varying state constraints. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2020, 31: 66–75
- 3 Liu L, Liu Y J, Chen A Q, et al. Integral barrier Lyapunov function-based adaptive control for switched nonlinear systems. *Sci China Inf Sci*, 2020, 63: 132203
- 4 Chen L S, Wang Q. Prescribed performance-barrier Lyapunov function for the adaptive control of unknown pure-feedback systems with full-state constraints. *Nonlin Dyn*, 2019, 95: 2443–2459
- 5 Xia X N, Zhang T P. Robust adaptive quantized DSC of uncertain pure-feedback nonlinear systems with time-varying output and state constraints. *Int J Robust Nonlin Control*, 2018, 28: 3357–3375
- 6 Si W J, Dong X D. Adaptive neural control for MIMO stochastic nonlinear pure-feedback systems with input saturation and full-state constraints. *Neurocomputing*, 2018, 275: 298–307
- 7 Zhang J J, Sun Q M. Prescribed performance adaptive neural output feedback dynamic surface control for a class of strict-feedback uncertain nonlinear systems with full state constraints and unmodeled dynamics. *Int J Robust Nonlin Control*, 2020, 30: 459–483
- 8 Xiao W B, Cao L, Li H Y, et al. Observer-based adaptive consensus control for nonlinear multi-agent systems with time-delay. *Sci China Inf Sci*, 2020, 63: 132202
- 9 Chen Q, Shi L L, Na J, et al. Adaptive echo state network control for a class of pure-feedback systems with input and output constraints. *Neurocomputing*, 2018, 275: 1370–1382
- 10 Sun R S, Na J, Zhu B. Robust approximation-free prescribed performance control for nonlinear systems and its application. *Int J Syst Sci*, 2018, 49: 511–522

- 11 Chen M, Shao S Y, Jiang B. Adaptive neural control of uncertain nonlinear systems using disturbance observer. *IEEE Trans Cybern*, 2017, 47: 3110–3123
- 12 Gao S G, Ning B, Dong H R. Fuzzy dynamic surface control for uncertain nonlinear systems under input saturation via truncated adaptation approach. *Fuzzy Sets Syst*, 2016, 290: 100–117
- 13 Sui S, Tong S C, Li Y M. Adaptive fuzzy backstepping output feedback tracking control of MIMO stochastic pure-feedback nonlinear systems with input saturation. *Fuzzy Sets Syst*, 2014, 254: 26–46
- 14 Yu Q, Wang X Y, Zong G D, et al. Adaptive neural tracking control for a class of uncertain nonstrict-feedback nonlinear systems. *J Franklin Institute*, 2017, 354: 6503–6519
- 15 Yong K N, Chen M, Wu Q X. Constrained adaptive neural control for a class of nonstrict-feedback nonlinear systems with disturbances. *Neurocomputing*, 2018, 272: 405–415
- 16 Jiang H, Zhang H G, Luo Y H, et al. Neural-network-based robust control schemes for nonlinear multiplayer systems with uncertainties via adaptive dynamic programming. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2019, 49: 579–588
- 17 Chen Z T, Li Z J, Chen C L P. Adaptive neural control of uncertain MIMO nonlinear systems with state and input constraints. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2017, 28: 1318–1330
- 18 Chen M, Ge S S. Adaptive neural output feedback control of uncertain nonlinear systems with unknown hysteresis using disturbance observer. *IEEE Trans Ind Electron*, 2015, 62: 7706–7716
- 19 Zhou Q, Chen G D, Lu R Q, et al. Disturbance-observer-based event-triggered control for multi-agent systems with input saturation. *Sci Sin Inform*, 2019, 49: 1502–1516 [周琪, 陈广登, 鲁仁全, 等. 基于干扰观测器的输入饱和多智能体系统事件触发控制. *中国科学: 信息科学*, 2019, 49: 1502–1516]
- 20 Ma H, Li H Y, Lu R Q, et al. Adaptive event-triggered control for a class of nonlinear systems with periodic disturbances. *Sci China Inf Sci*, 2020, 63: 150212
- 21 Chen M, Yu J. Adaptive dynamic surface control of NSVs with input saturation using a disturbance observer. *Chin J Aeronautics*, 2015, 28: 853–864
- 22 Chen M. Disturbance attenuation tracking control for wheeled mobile robots with skidding and slipping. *IEEE Trans Ind Electron*, 2017, 64: 3359–3368
- 23 Liu S Y, Liu Y C, Wang N. Nonlinear disturbance observer-based backstepping finite-time sliding mode tracking control of underwater vehicles with system uncertainties and external disturbances. *Nonlin Dyn*, 2017, 88: 465–476
- 24 Liu Y J, Tong S C, Wang W. Adaptive fuzzy output tracking control for a class of uncertain nonlinear systems. *Fuzzy Sets Syst*, 2009, 160: 2727–2754
- 25 Ryan E P. A universal adaptive stabilizer for a class of nonlinear systems. *Syst Control Lett*, 1991, 16: 209–218
- 26 Tong S C, Li Y M, Liu Y J. Adaptive fuzzy output feedback decentralized control of pure-feedback nonlinear large-scale systems. *Int J Robust Nonlin Control*, 2014, 24: 930–954
- 27 Chen L S. Asymmetric prescribed performance-barrier Lyapunov function for the adaptive dynamic surface control of unknown pure-feedback nonlinear switched systems with output constraints. *Int J Adapt Control Signal Process*, 2018, 32: 1417–1439

# Adaptive robust anti-disturbance control for pure feedback nonlinear systems with multiple constraints

Longsheng CHEN<sup>1,2</sup> & Hui YANG<sup>1\*</sup>

1. School of Electrical and Automation Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China;

2. School of Aircraft Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China

\* Corresponding author. E-mail: yhshuo@ecjtu.edu.cn

**Abstract** To solve the control problem for a class of uncertain pure feedback nonlinear systems subjected to external disturbances and multiple constraints, an adaptive robust control methodology is proposed based on a disturbance observer. To handle unknown nonlinearity and external unknown disturbances, a nonlinear disturbance observer is constructed based on a radial basis function neural network, which uses a Butterworth low-pass filter to remove the algebraic loop problem. Then, to guarantee that the system can stably track the desired trajectory under the state constraints, input saturation, and prescribed tracking performance constraints, we developed a novel barrier Lyapunov function and a backstepping controller that combines an auxiliary bounded function, a Nussbaum function, and a first-order sliding-mode differentiator. Subsequently, the stability of the closed-loop system is rigorously proved by Lyapunov analysis. Finally, simulations are conducted to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

**Keywords** radial basis function neural network, nonlinear disturbance observers, barrier Lyapunov function, multiple constraints, pure feedback nonlinear systems



**Longsheng CHEN** was born in 1983. He received his M.S. degree in control theory and engineering from Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, China, in 2009. He is currently pursuing his Ph.D. degree in control science and engineering from East China Jiaotong University, Nanchang, China. He is currently an associate professor in School of Aircraft Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang, China. His research

interests include nonlinear system control & application, intelligent control, and flight control.



**Hui YANG** was born in 1965. He received his Ph.D. degree in control science and engineering from Northeastern University, Shenyang, China, in 2004. He is currently a professor in School of Electrical and Automation Engineering and the Chief of the Scientific Research Division, East China Jiaotong University, Nanchang, China. His research interests include intelligent transportation system control, complex system modeling, control and optimization,

and process industry integrated automation technology and applications.