



多输入多输出非线性系统的受限滑模控制

吴立刚*, 王思怡, 高亚斌, 刘健行, 孙光辉

哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001

* 通信作者. E-mail: ligangwu@hit.edu.cn

收稿日期: 2020-06-05; 修回日期: 2020-07-22; 接受日期: 2020-07-27; 网络出版日期: 2021-02-23

科技部重点研发计划项目 (批准号: 2019YFB1312001)、国家自然科学基金 (批准号: 62033005, 62022030, 41772377)、国网黑龙江省电力有限公司科技项目 (批准号: 522417190057)、黑龙江省科学基金 (批准号: F2018012) 和先进焊接与连接国家重点实验室开放课题资助

摘要 本文针对一类具有执行器和状态约束的多输入多输出非线性系统, 研究了基于高阶滑模观测器的滑模控制和稳定性分析问题. 通过对该系统进行逆变换并考虑其控制输入系数矩阵的对合跨度分布, 我们设计了一类高阶滑模观测器用于实现系统的状态估计, 其中, 采用鲁棒精确微分器分析了所得误差估计系统的收敛性. 然后, 利用原系统的部分状态变量设计了二阶滑模控制律, 进而分别分析了在执行器/状态无约束和硬约束情形下的系统有限时间稳定性, 同时, 依据最大吸引域和几何分析法分析了系统状态在滑模阶段的运动轨迹. 最后, 通过两个仿真算例验证了本文所提出的控制方法的有效性.

关键词 滑模控制, 约束系统, 多输入多输出系统, 吸引域, 几何分析

1 引言

在实际控制系统中, 出于对物理硬件的安全、节省成本以及系统自身特征或人为需求的考虑, 系统的输入或输出往往会受到某些约束, 如常见的执行器约束、系统状态约束、系统输出约束. 一方面, 受硬约束的系统变量的值通常被限制在一个预先规定的范围内, 由此可以避免一些不理想的结果和硬件损伤; 另一方面, 这些约束可能会降低系统的性能甚至带来复杂非线性项和不确定项, 为系统的分析和综合带来困难. 目前, 针对如何处理执行器饱和问题, 已有大量的研究. 例如, 对于一类线性系统, 文献 [1, 2] 基于圆判据和 Popov 判据将执行器饱和作为强非线性, 利用二次和 Lur'e 型 Lyapunov 函数分析了在饱和和执行器下该控制系统的收敛域. Hu 等 [3, 4] 针对一类不确定线性系统采用多面体形式来表示约束非线性项. 文献 [5] 利用多面体型约束研究了针对相对阶为二的单输入单输出非线性系统的受限控制. 文献 [6, 7] 提出了一种基于模型预测控制的最优控制方法分别解决了离散系统和非线性

引用格式: 吴立刚, 王思怡, 高亚斌, 等. 多输入多输出非线性系统的受限滑模控制. 中国科学: 信息科学, 2021, 51: 430–448, doi: 10.1360/SSI-2020-0162
Wu L G, Wang S Y, Gao Y B, et al. Constrained sliding mode control of MIMO nonlinear systems (in Chinese). Sci Sin Inform, 2021, 51: 430–448, doi: 10.1360/SSI-2020-0162

系统中存在的约束问题. 此外, 对于非线性系统, 针对执行器饱和的其他控制方法有滑模控制^[8]、鲁棒自适应控制^[9]、 H_∞ 控制^[10] 和基于观测器的控制^[11] 等方法.

滑模控制因其对匹配型不确定性、噪声和参数变化的强鲁棒性, 常用于不确定非线性系统的控制器设计^[12,13]. 通常, 在滑模控制系统中, 滑模控制器可以实现系统状态的快速收敛, 因此这也是导致实际控制输入值较大的原因. 同时, 由于前面提到的物理限制, 有时过大的控制输入对控制系统来说是不现实的, 由此这也引发了我们对具有硬约束的滑模控制的思考. 为了解决该问题, 文献^[14] 通过考虑系统状态受限的情况设计了一类特定的滑模面, 并且基于代数 Ricotta 方程和参数化 Lyapunov 函数分析了滑模运动. 文献^[15] 提出了一种饱和超扭曲算法, 其中采用了正不变集的方法避免高频切换和有限环现象. 文献^[16] 针对受约束的滑模控制提出了一种几何分析方法, 并且详细介绍了在执行器饱和的情况下如何分析滑模运动的最大吸引域. Ferrara 等^[17] 分析了一类非线性不确定系统执行器饱和情形下的次优二阶滑模控制, 并在文献^[18,19] 中分析了执行器饱和以及状态受约束情形时的滑模条件. 值得指出的是, 这些研究结果都假设了原控制系统状态是完全已知的. 然而在现实中, 许多控制系统的状态通常是部分可测, 甚至完全不可测的. 因此, 对于此类实际控制问题, 本文将在系统状态部分可测的情况下解决执行器饱和情形下的滑模控制问题.

滑模观测器由于其对于不确定性项的鲁棒性而被广泛用于估计控制系统的状态变量. 在很多控制系统中都可以看到滑模观测器的使用, 例如含有不确定的机械系统^[20], 带未知输入的系统^[21] 和不满足最小相位条件的系统^[22]. 为了简化高阶滑模观测器的设计, 通常根据控制输入得到系统的相对阶^[23,24], 例如 Levant 在文献^[25] 中提出了一种基于相对阶的鲁棒精确微分器, 随后有一些学者将其进一步发展用于状态估计^[26~28] 和干扰估计^[29,30] 的高阶滑模观测器. 值得一提的是, 目前尚缺乏对多输入多输出系统基于高阶滑模观测器的饱和滑模控制与分析.

基于以上讨论, 本文将对含有不确定的非线性系统的状态估计和受限滑模控制问题进行研究. 相比于现存的将鲁棒微分器直接用于状态估计的设计方法, 本文构造一种新的高阶滑模观测器, 并将鲁棒精确微分器形式用于系统状态和观测器间的误差方程, 从而证明该误差系统的收敛性. 然后, 采用基于高阶滑模观测器的二阶滑模控制律控制具有状态和输入受限的不确定非线性仿射系统, 给出了该系统在硬约束情形下滑模运动的几何分析, 并提供了详细的执行器饱和以及状态约束情形下的滑模运动的收敛域分析方法. 此外, 通过正不变集的方法得到一个保守性更低的收敛域边界条件. 具体来说, 本文的贡献包括如下 3 方面.

- (1) 设计用于估计多输入多输出的高阶滑模观测器, 并且该观测器有利于滑模运动轨迹的分析;
- (2) 基于线性滑模面设计了二阶滑模控制器, 并用于标准变换后的非线性仿射系统, 该控制器保证了闭环系统的有限时间的收敛性;
- (3) 基于文献^[16] 中的几何分析方法分析了状态和执行器约束情形下的滑模运动轨迹的最大收敛域, 并讨论了不同情形下系统状态的收敛性.

本文的结构安排: 第 2 节将给出不确定非线性仿射系统模型及其转换. 第 3 节将介绍基于高阶滑模控制器的二阶滑模控制方法. 第 4 和 5 节分别表述了无约束情形下和硬约束情形下的滑模运动的几何分析. 第 6 节将采用两个仿真案例对理论结果进行验证, 最后在第 7 节总结全文的工作.

符号说明. 在本文中, 符号 $\|\cdot\|$ 被用来表示向量或矩阵的 2-范数. \mathbb{R} , \mathbb{R}^n 和 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 分别表示实数的集合, 实数项的 n 维向量和实数项的 $m \times n$ 维矩阵. I 表示单位矩阵, 上标 T 和 -1 分别表示矩阵的转置和逆运算. 对任意向量 $s \in \mathbb{R}^n$, 符号函数 $\text{sign}(s)$ 表示 $[\text{sign}(s_1) \text{sign}(s_2) \cdots \text{sign}(s_n)]^T$, 其中对于任意 $s_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 如果 $s_i(t) < 0$, 则 $\text{sign}(s_i) = -1$; 如果 $s_i(t) = 0$, 则 $\text{sign}(s_i) = (-1, 1)$; 如果 $s_i(t) > 0$, 则 $\text{sign}(s_i) = 1$. 符号 $\lambda_{\max}(\cdot)$ ($\lambda_{\min}(\cdot)$) 表示矩阵的最大 (最小) 特征值. $a \leq b$ 表示

$a_i \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 其中 a_i 和 b_i 分别表示向量 $a \in \mathbb{R}^n$ 和 $b \in \mathbb{R}^n$ 的第 i 个分量. $\mathcal{E}(P, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T(t)Px(t) \leq \rho\}$ 表示由正矩阵 P 和标量 ρ 定义的椭球体.

2 问题描述

2.1 多输入多输出系统的建模及其模型转换

考虑以下带有执行器饱和的多输入多输出非线性仿射系统:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = a(z, t) + \sum_{j=1}^m b_j(z, t)\sigma(u_j(z, t)), \\ y(t) = h(z, t), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别表示系统状态变量, 控制输入和系统输出. $\sigma(u(t)) \in \mathbb{R}^m$ 表示饱和状态下的实际控制输入. 对每个控制通道定义

$$u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]^T, \quad \sigma(u) = [\sigma_1(u_1) \ \sigma_2(u_2) \ \dots \ \sigma_m(u_m)]^T,$$

其中 $\sigma_j(u_j) = \text{sign}(u_j) \min\{u_j, |u_j|\}$, $u_{\max} = [u_{1\max} \ u_{2\max} \ \dots \ u_{m\max}]^T \in \mathbb{R}^m$. 另外, 在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中定义光滑矩阵函数 $a(z, t) \in \mathbb{R}^n$ 以及 $b(z, t) = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $h(z, t) = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_m]^T \in \mathbb{R}^m$. 对于所有的系统状态 $z(t) \in \Omega$, 系统 (1) 相对于 $u(t)$ 的相对阶 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$, 满足

$$\begin{aligned} L_{b_j} L_a^k h_i(z, t) &= 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, r_j - 2, \\ L_{b_j} L_a^k h_i(z, t) &\neq 0, \quad k = r_j - 1, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m, \quad i = 1, 2, \dots, p, \end{aligned}$$

且 $L_a^k h_i(z, t) = \frac{d(L_a^{k-1} h_i(z, t))}{dz(t)} a(z, t) \in \mathbb{R}$, $L_{b_j} L_a^k h_i(z, t) = \frac{d(L_a^k h_i(z, t))}{dz(t)} b_j(z, t) \in \mathbb{R}$, 保证在开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中, 总相对阶 $\sum_{i=1}^p r_i \leq n$.

注释1 如果 $r = n$, 则可以观测到全部系统状态. 若 $r < n$, 则始终存在 $n-r$ 个函数, 如 $\varphi_{r+1}(z, t)$, $\varphi_{r+2}(z, t), \dots, \varphi_n(z, t)$, 使得映射^[31]

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \text{col}\{h_1(z, t), L_a^1 h_1(z, t), \dots, L_a^{r_1-1} h_1(z, t), \dots, h_p(z, t), L_a^1 h_p(z, t), \\ &\quad \dots, L_a^{r_p-1} h_p(z, t), \varphi_{r+1}(z, t), \dots, \varphi_n(z, t)\} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2)$$

在 $z(t) \in \bar{\Omega} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 的区域内是一个局部微分同胚.

基于相对阶的概念, 我们采用坐标变换 $\Phi(z) = [x^T \ \varsigma^T]^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ^[31], 得到

$$\begin{cases} \dot{x}_1^i(t) = x_2^i(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_{r_i-1}^i(t) = x_{r_i}^i(t), \\ \dot{x}_{r_i}^i(t) = f_i(x, t) + g_i(x, t)\sigma(u(x, t)), \quad i = 1, \dots, p, \\ \dot{\varsigma} = q(x, \varsigma), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $x(t) = [x^1(t) \ x^2(t) \ \dots \ x^p(t)]^T \in \mathbb{R}^r$, $x^i(t) = [x_1^i(t) \ x_2^i(t) \ \dots \ x_{r_i}^i(t)]^T \in \mathbb{R}^{r_i}$, $q(x, \varsigma) = [q_{r+1} \ q_{r+2} \ \dots \ q_n]^T \in \mathbb{R}^{n-r}$, $q_i(x, \varsigma) = L_a \varphi_i(z, t)$, $\varsigma(t) = [\varphi_{r+1} \ \varphi_{r+2} \ \dots \ \varphi_n]^T \in \mathbb{R}^{n-r}$. 在逆

变换 $z = \Phi^{-1}(x, \varsigma)$ 下可得 $f_i(x, t) = L_a^{r_i} h_i(z, t)$, $g_i(x, t) = [L_{b_1} L_a^{r_i-1} h_i(z, t) \cdots L_{b_m} L_a^{r_i-1} h_i(z, t)]$, $i = 1, \dots, p$. 其中 $f_i(x, t)$ 和 $g_i(x, t)$ 分别是 $f(x, t) \in \mathbb{R}^m$ 和 $g(x, t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ 的第 i 行, $f(x, t)$, $g_1(x, t)$, \dots , $g_p(x, t)$ 是定义在 \mathbb{R}^n 的开紧集上的光滑向量场.

假设1 ([19]) 状态约束为 $|x_j^i(t)| \leq \alpha_j^i$, 其中 α_j^i ($i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, r_i$) 为已知正标量.

假设2 ([32]) 假定 $f(x, t)$ 和 $g(x, t)$ 分别由已知部分 $\bar{f}(x, t)$, $\bar{g}(x, t)$ 和未知的不确定部分 $\Delta f(x, t)$, $\Delta g(x, t)$ 来表示, 即 $f(x, t) = \bar{f}(x, t) + \Delta f(x, t)$, $g(x, t) = \bar{g}(x, t) + \Delta g(x, t)$.

假设3 ([19]) 对于 $i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, m$, 假设 $|\bar{f}_i(x, t)| \leq F_i$, $|\bar{g}_{ij}(x, t)| \leq G_{ij}$, 其中 $F_i > 0$ 是矩阵 $F \in \mathbb{R}^m$ 的第 i 个分量, $G_{ij} > 0$ 是矩阵 $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$ 的第 i 行, 第 j 列.

假设4 ([31]) 非奇异分布 $\Delta = \text{span}\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x)\}$ 是对合的, 矩阵值函数 $g(x, t)$ 行满秩.

注释2 系统 (3) 是 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 域中 n 维光滑流形上的一个微分方程, 假设 4 表明方程 (3) 可积.

引理1 ([33]) 针对闭环控制系统 (3) 动力学 $x(t)$, 考虑 Lyapunov 函数 $V(x(t))$, 若不等式 $\dot{V}(x) + \alpha V(x) + \beta V^\gamma(x) \leq 0$ 成立, 其中 $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < \gamma < 1$, 则状态 $x(t)$ 在有限时间内收敛到原点, 且该有限时间

$$T \leq \frac{1}{\alpha(1-\gamma)} \ln \frac{\alpha V^{1-\gamma}(x_0) + \beta}{\beta},$$

其中 x_0 是 $x(t)$ 的初始状态.

引理2 ([2]) 考虑 Lyapunov 函数 $V(x(t)) = x^T(t)Q^{-1}x(t)$, 其中状态向量 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, 对称正定矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. 定义一个超平面 $\mathcal{H} := \{x(t) | Hx(t) = r\}$, 其中向量 $H \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, 标量 $r > 0$. 那么, 沿超平面 \mathcal{H} 的 $V(x(t))$ 的最小值是 $\alpha_r = \frac{r^2}{H^T Q^{-1} H}$. 定义一个椭球面: $\mathcal{E}(Q^{-1}, \alpha) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x^T(t)Q^{-1}x(t) \leq \alpha\}$. $V(x(t))$ 的 α -水平集合用 $\text{lev}_\alpha V = \mathcal{E}(Q^{-1}, \alpha)$ 表示. 假设动态系统的输入为 $u(t) = H_u x(t) \in \mathbb{R}^m$, 并定义区域 $R_r := \{x(t) | |H_{u,j} x(t)| \leq r_j, j = 1, 2, \dots, m\}$, 其中 $H_{u,j}$ 是 $H_u \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 的第 j 行. 那么, 存在一个使得关于 V 的 α -水平集在区域 R_r 内的充要条件是 $\alpha \leq \alpha_r$, 其中

$$\alpha_r = \min_{j=1,2,\dots,m} \frac{r_j^2}{H_{u,j} Q^{-1} H_{u,j}^T}.$$

2.2 高阶滑模观测器的设计

精确鲁棒微分器可以直接作为状态观测器, 详细的公式可参考文献 [25, 27]. 在本文研究中, $\hat{x}_{r_i}^i$ 中的输入提高了观测器 (4) 的估计速率. 根据假设 2 和 4, 基于 $x_1(t) = [x_1^1 \ x_1^2 \ \cdots \ x_1^p]^T \in \mathbb{R}^p$ 和 $x_1^i = h_i(\Theta^{-1}(x, \zeta))$, 为系统 (1) 设计如下形式的高阶滑模观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1^i = \lambda_1^i |x_1^i - \hat{x}_1^i|^{\frac{r_i-1}{r_i}} \text{sign}(x_1^i - \hat{x}_1^i) + \hat{x}_2^i, \\ \dot{\hat{x}}_2^i = \lambda_2^i |\hat{x}_2^i - \hat{x}_1^i|^{\frac{r_i-2}{r_i-1}} \text{sign}(\hat{x}_2^i - \hat{x}_1^i) + \hat{x}_3^i, \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{r_i-1}^i = \lambda_{r_i-1}^i |\hat{x}_{r_i-1}^i - \hat{x}_{r_i-2}^i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{x}_{r_i-1}^i - \hat{x}_{r_i-2}^i) + \hat{x}_{r_i}^i, \\ \dot{\hat{x}}_{r_i}^i = \lambda_{r_i}^i \text{sign}(\hat{x}_{r_i}^i - \hat{x}_{r_i-1}^i) + \bar{f}_i(\hat{x}, t) + \bar{g}_i(\hat{x}, t)\sigma(u(\hat{x}, t)), \\ i = 1, 2, \dots, p, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\hat{x}_j^i(t)$ 表示 $x_j^i(t)$ 的估计值 ($i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, r_i$). 根据高阶滑模观测器 (4) 的动态方程, 下面的命题 1 证明了所设计的高阶滑模观测器能够准确地估计系统 (3) 的部分状态.

命题1 根据文献 [25], 当参数选择适当时, 观测器 (4) 能够在有限时间内估计系统 (3) 的状态.

证明 将估计误差变量定义为 $e_1^i = x_1^i - \hat{x}_1^i, e_2^i = x_2^i - \hat{x}_2^i, \dots, e_{r_i}^i = x_{r_i}^i - \hat{x}_{r_i}^i, \varrho_i(t) = \dot{x}_{r_i}^i - (\bar{f}_i(\hat{x}, t) + \bar{g}_i(\hat{x}, t)\sigma(u(x, t)))$ ($i = 1, 2, \dots, p$). 系统 (3) 与高阶滑模观测器 (4) 相减得到如下估计误差动态方程:

$$\begin{cases} \dot{e}_1^i = -\lambda_1^i |e_1^i|^{\frac{r_i-1}{r_i}} \text{sign}(e_1^i) + e_2^i, \\ \dot{e}_2^i = -\lambda_2^i |e_1^i - e_2^i|^{\frac{r_i-2}{r_i-1}} \text{sign}(e_1^i - e_2^i) + e_3^i, \\ \vdots \\ \dot{e}_{r_i-1}^i = -\lambda_{r_i-1}^i |e_{r_i-1}^i - e_{r_i-2}^i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{r_i-1}^i - e_{r_i-2}^i) + e_{r_i}^i, \\ \dot{e}_{r_i}^i = -\lambda_{r_i}^i \text{sign}(e_{r_i-1}^i - e_{r_i}^i) + \varrho_i, \\ i = 1, 2, \dots, p. \end{cases} \quad (5)$$

根据文献 [25], 假设 $|\varrho_i(t)| \leq L$, 其中 L 为已知的正常数. 在没有误差 $|e_1^i|$ 的情况下, 估计误差 e_j^i ($i = 1, 2, \dots, p; j = 2, 3, \dots, r_i$) 将在一个瞬态过程的有限时间内渐近收敛到零. 如果存在有界误差 $|e_1^i| \leq \varepsilon^i$, 则估计误差 e_j^i 收敛到关于 ε^i 的有界区域内. 文献 [25] 给出了参数 λ_j^i 详细的选取方法, 并由此可以得出估计误差是收敛的.

对于一些初始状态, 可以用 $\hat{x}(t)$ 替换 $x(t)$ 来估计方程 (3) 中 $\dot{z} = q(x, z)$ 的剩余状态 $z(t)$. 因此, 状态 $z(t)$ 可以通过估计 $\hat{x}(t)$ 和 $z(t)$ 来获得. 值得注意的是, 与文献 [27, 34] 的结果不同, 本文将精确鲁棒微分器应用于所得到的误差系统 (5), 式 (4) 最后一行中所设计的 $\hat{x}_{r_i}^i(t)$ 用来估计 $\bar{f}_i(\hat{x}, t) + \bar{g}_i(\hat{x}, t)\sigma(u(\hat{x}, t))$ 而不是 $\dot{x}_{r_i}^i(t)$, 这有助于第 3 节中的控制器 (8) 的设计. 第 3 节在高阶滑模观测器 (4) 的基础上, 设计了一个特定的控制器 $u = u(\hat{x}, t)$, 以此来对非线性仿射系统 (3) 的状态估计进行闭环控制.

3 二阶滑模控制器设计

如文献 [35] 所述, 二阶滑模控制包括了超螺旋算法的优点, 且可以处理更复杂的扰动. 利用 (4) 的状态估计 $\hat{x} = [\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^p]$, 本文设计了如下线性滑模面:

$$s_i(t) = C_i \hat{x}^i(t), \quad (6)$$

其中, $s_i(t)$ 是 $s(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_p(t)]^T$ 的第 i 个分量, $C_i = [c_{i1} \ c_{i2} \ \dots \ c_{ir_i}]$, 标量 $c_{ij} > 0$, 且 $\hat{x}^i(t) = [\hat{x}_1^i(t) \ \hat{x}_2^i(t) \ \dots \ \hat{x}_{r_i}^i(t)]^T$, $i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, r_i$, 正定系数 c_{ij} 保证 $\ell^{r_i} + c_{ir_i}\ell^{r_i-1} + \dots + c_{i2}\ell + c_{i1}$ 是 Hurwitz 多项式. 此外, 为了方便起见, 将 c_{ir_i} 表示为 c_{r_i} . 本文中, 将矩阵 C_s 定义为 $C_s = \text{diag}\{c_{r_1}, c_{r_2}, \dots, c_{r_p}\}$.

定理1 若存在正标量 η_1, η_2 和 η_3 满足以下条件:

$$4\eta_2\eta_3 I > (8\eta_2 + 9\eta_1^2)(C_s^T C_s)^{-1}, \quad (7)$$

则在二阶滑模控制律 (8) 的作用下, 系统 (3) 在有限时间 T_s 内渐近稳定:

$$u = u(\hat{x}, t) = u_{\text{nom}}(\hat{x}, t) + u_{\text{st}}(\hat{x}, t), \quad (8)$$

其中 $u_{\text{nom}}(\hat{x}, t) = -\hat{g}^{-1}(\hat{x}, t)(\hat{f}(\hat{x}, t) + C_s^{-1}\Pi(\hat{x}, t)), u_{\text{st}}(\hat{x}, t) = -\hat{g}^{-1}(\hat{x}, t)C_s^{-1}(C_s^{-1}s(t) + \eta_1\mathcal{D}(s(t)) \times \text{sign}(s(t)) + v(t)), \dot{v}(t) = -\eta_2\text{sign}(s(t)) - \eta_3s(t)$, 且 $g^+(\hat{x}, t) \triangleq \bar{g}^T(\hat{x}, t)(\bar{g}(\hat{x}, t)\bar{g}^T(\hat{x}, t))^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times p}$,

$\mathcal{D}(s(t)) \triangleq \text{diag}\{\sqrt{|s_1(t)|}, \dots, \sqrt{|s_m(t)|}\}$, $\Pi(\hat{x}, t) \triangleq [\Pi_1 \ \Pi_2 \ \dots \ \Pi_p]^T$, $\Pi_i(\hat{x}, t) \triangleq \sum_{j=1}^{r_i-1} c_{ij} \hat{x}_{j+1}^i(t)$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$. $v(t) \triangleq [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m]^T$. 此外, 有限时间 T_s 的界为

$$T_s = \max\{T_s^1, T_s^2, \dots, T_s^p\}, \quad T_s^i \leq \frac{2}{\gamma_2^i} \ln \frac{\gamma_2^i \sqrt{V_i(s_{i,0})} + \gamma_1^i}{\gamma_1^i}, \quad (9)$$

其中 $\gamma_1^i = \frac{\lambda_{\min}(Q^i) \sqrt{\lambda_{\min}(P^i)}}{\lambda_{\max}(P^i)}$, $\gamma_2^i = \frac{\lambda_{\min}(R^i)}{\lambda_{\max}(P^i)}$, $s_{i,0}$ 是 $s_i(t)$ 的初始状态.

证明 根据估计误差系统 (5), 进一步将式 (6) 写成

$$\dot{x}_{r_i-1}^i(t) = \frac{1}{c_{r_i}} \left(s_i(t) - \sum_{j=1}^{r_i-1} c_{ij} x_j^i(t) + \sum_{j=1}^{r_i-1} c_{ij} e_j^i(t) \right) = \frac{1}{c_{r_i}} \left(s_i(t) - \sum_{j=1}^{r_i-1} c_{ij} \hat{x}_j^i(t) \right). \quad (10)$$

对式 (6) 求导, 可以得到

$$\dot{s}_i(t) = \sum_{j=1}^{r_i-1} c_{ij} \dot{\hat{x}}_j^i(t) + c_{r_i} \dot{x}_{r_i}^i(t) = \Pi_i(\hat{x}, t) + \Psi_i(e^i(t)) + c_{r_i} (\bar{f}_i(\hat{x}, t) + \bar{g}_i(\hat{x}, t) \sigma(u(\hat{x}, t))), \quad (11)$$

且 $\Psi_i(e^i(t)) \triangleq \sum_{j=2}^{r_i-1} c_{ij} \lambda_j^i |e_{j-1}^i - e_j^i|^{\frac{r_i-j}{r_i-j+1}} \text{sign}(e_{j-1}^i - e_j^i) + c_{r_i} \lambda_{r_i}^i \text{sign}(e_{r_i-1}^i - e_{r_i}^i) + c_{i1} \lambda_1^i |e_1^i|^{\frac{r_i-1}{r_i}} \text{sign}(e_1^i)$. 根据命题 1, 滑模面能够在有限时间内收敛到零. 由于式 (12) 等号右侧是不连续的, 因此可以将它的解理解为 Filippov^[36] 意义上的解. 此外, 将不带饱和的控制器 (8) 代入式 (11), 得到

$$\dot{s}_i(t) = -c_{r_i}^{-1} s_i(t) - \eta_1 |s_i(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i(t)) + v_i(t), \quad \dot{v}_i(t) = -\eta_2 \text{sign}(s_i(t)) - \eta_3 s_i(t).$$

定义 $\xi_i(t) = [|s_i(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i(t)) s_i(t) v_i(t)]^T$, 设计如下 Lyapunov 函数:

$$V_i(s_i(t)) = 2\eta_2 |s_i(t)| + \eta_3 s_i^2 + \frac{1}{2} (v_i^2(t) + \dot{s}_i^2(t)) = \xi_i^T(t) P^i \xi_i(t), \quad (12)$$

$$P^i \triangleq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4\eta_2 + \eta_1^2 & \eta_1 c_{r_i}^{-1} & -\eta_1 \\ \eta_1 c_{r_i}^{-1} & 2\eta_3 + c_{r_i}^{-2} & -c_{r_i}^{-1} \\ -\eta_1 & -c_{r_i}^{-1} & 2 \end{bmatrix}.$$

对式 (12) 求导 (见文献 [35]), 得到 $\dot{V}_i(s_i(t)) = -\frac{1}{|s_i(t)|^{\frac{1}{2}}} \xi_i^T(t) Q^i \xi_i(t) - \xi_i^T(t) R^i \xi_i(t)$, 其中

$$Q^i \triangleq \frac{\eta_1}{2} \begin{bmatrix} Q_{11}^i & 0 & -\eta_1 \\ 0 & Q_{22}^i & Q_{23}^i \\ -\eta_1 & Q_{32}^i & 1 \end{bmatrix}, \quad R^i \triangleq \begin{bmatrix} R_{11}^i & 0 & 0 \\ 0 & R_{22}^i & R_{23}^i \\ 0 & R_{32}^i & c_{r_i}^{-1} \end{bmatrix},$$

$Q_{11}^i = 2\eta_2 + \eta_1^2$, $Q_{22}^i = 2\eta_3 + 5c_{r_i}^{-2}$, $Q_{23}^i = Q_{32}^i = -3c_{r_i}^{-1}$, $R_{11}^i = (\eta_2 + 2\eta_1^2)c_{r_i}^{-1}$, $R_{22}^i = c_{r_i}^{-1}(\eta_3 + c_{r_i}^{-2})$, $R_{23}^i = R_{32}^i = -c_{r_i}^{-2}$. 如果矩阵 $Q^i > 0$, $R^i > 0$, 则 $\xi_i(t)$ 在有限时间内收敛到零, 该结论可由式 (7) 验证.

根据 $\xi_i(t)$ 的定义, 得到 $|s_i(t)|^{\frac{1}{2}} \leq \|\xi_i(t)\| \leq \sqrt{\frac{V_i(s_i(t))}{\lambda_{\min}(P^i)}}$, 因为 $s_i(t) \neq 0$ 和 $\dot{s}_i(t) \neq 0$, 可以将 $\dot{V}_i(s_i(t))$ 进一步写为 $\dot{V}_i(s_i(t)) \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q^i)}{|s_i(t)|^{\frac{1}{2}}} \|\xi_i(t)\|^2 - \lambda_{\min}(R^i) \|\xi_i(t)\|^2 \leq -\gamma_1^i \sqrt{V_i(s_i(t))} - \gamma_2^i V_i(s_i(t)) < 0$. 因此根据引理 1, 在由式 (9) 给出的有限时间 T_s 中可以达到稳定状态 $s_i(t) = \dot{s}_i(t) = 0$. 系统 (10) 的状态收

敛到零, 且 $s_i(t) = \sum_{j=1}^{r_i-1} c_{ij} \hat{x}_j^i(t)$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$. 易见, 可以通过适当选择式 (6) 中的系数 c_{ij} 来确保 $\hat{x}_j^i(t)$ 的渐近稳定性.

所以, 针对执行器饱和, 基于高阶滑模观测器的二阶滑模控制律设计步骤简述如下:

- (1) 根据系统 (3) 的状态 x_1 , 采用高阶滑模观测器 (4) (含执行器饱和状态下的滑模控制律) 对系统 (3) 剩余状态 $x_2^1, \dots, x_{r_1}^1, x_2^2, \dots, x_{r_2}^2, \dots, x_p^p$ 进行估计;
- (2) 由高阶滑模观测器 (4) 与系统模型 (3) 相减得到误差状态方程 (5), 观测器参数 λ_j^i , $j = 1, \dots, r_i, i = 1, \dots, p$ 的选取参考命题 1, 并根据文献 [25] 验证观测器收敛;
- (3) 采用 (1) 得到的估计值 \hat{x} 设计滑模面 (6);
- (4) 采用 (1) 得到的估计值 \hat{x} 和 (3) 中的滑模变量 s 设计二阶滑模控制律 (8), 参数选取参考定理 1;
- (5) 考虑执行器饱和情形 ($\sigma(u)$) 并将其作用于系统模型 (3) 和高阶滑模观测器 (4).

4 无约束情形下滑模运动的几何分析

接下来在滑模变量 $s(t)$ (6) 的基础上, 利用方程 (10) 对相应的滑模运动进行几何分析. 本文将文献 [16] 中的几何分析方法推广到了多输入多输出系统的二阶滑模控制器. 由于变量 $s(t)$ 的分量是线性独立的, 本文暂时选取其中一个分量 $s_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 进行分析. 因此, 从式 (6) 和 (10) 可得

$$\begin{aligned} \dot{s}_i(t) &= -\frac{1}{c_{r_i}} s_i(t) - \eta_1 |s_i(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i(t)) + v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= -\eta_2 \text{sign}(s_i(t)) - \eta_3 s_i(t), \quad \forall i = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (13)$$

根据 $s_i(t)$ 的结构, 引入以下辅助变量: $\Gamma_{1,i}(t) = v_i(t) - \frac{1}{c_{r_i}} s_i(t) - \eta_1 |s_i(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i(t))$, $\Gamma_{2,i}(t) = v_i(t) + \frac{1}{c_{r_i}} s_i(t) + \eta_2 |s_i(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i(t))$, 其中 $\Gamma_{1,i}(t)$ 和 $\Gamma_{2,i}(t)$ 分别为向量 $\Gamma_1(t) = [\Gamma_{1,1} \ \Gamma_{1,2} \ \dots \ \Gamma_{1,m}]^T \in \mathbb{R}^m$, $\Gamma_2(t) = [\Gamma_{2,1} \ \Gamma_{2,2} \ \dots \ \Gamma_{2,m}]^T \in \mathbb{R}^m$ 的第 i 个分量. 图 1 中的曲线 $\Gamma_{1,i}(t) = 0$ 和 $\Gamma_{2,i}(t) = 0$ 用虚线表示. 假设滑模运动轨迹 (trajectory of sliding motion, TSM) 从原点 $(0, v_i(0))$ 出发如图 1. 因为左半平面与右半平面符号对称, 这里只讨论右半平面 (s_i, v_i) 的轨迹. 曲线 $\Gamma_{1,i}(t) = 0$ 和 $\Gamma_{2,i}(t) = 0$ 将平面分为 4 个区域, 即

$$\text{区域 1: } (v_i(t) > 0, \Gamma_{1,i}(t) > 0, \Gamma_{2,i}(t) > 0), \quad \text{区域 2: } (v_i(t) > 0, \Gamma_{1,i}(t) < 0, \Gamma_{2,i}(t) > 0),$$

$$\text{区域 3: } (v_i(t) < 0, \Gamma_{1,i}(t) < 0, \Gamma_{2,i}(t) > 0), \quad \text{区域 4: } (v_i(t) < 0, \Gamma_{1,i}(t) < 0, \Gamma_{2,i}(t) < 0).$$

在本小节中, 由右半平面 $s_i(t) > 0$ 得到 $\dot{v}_i(t) < 0$. 因此滑模运动轨迹接近线 $s_i = 0$. 接下来, 将分析从 $(0, v_i(0))$ 到 $(0, -v_i(t))$ 滑模运动的 4 个步骤.

步骤 1 (S1): 假设轨迹从图 1 中的 $(0, v_i(0))$ 进入第一象限. $\Gamma_{1,i}(t) > 0$ 表示 $\dot{s}_i(t) > 0$ 且 $\dot{v}_i(t) = -\eta_2 \text{sign}(s_i(t)) - \eta_3 s_i(t) < 0$. 在此考虑“最坏情况” ($\dot{v}_i(t) = 0$), 由此可知, 从 $v_i(0)$ 开始的任何轨迹都在 $v_i(t) = v_i(0)$ 上. 此外, 轨迹在点 $(s_i(t_1), \frac{1}{c_{r_i}} s_i(t_1) + \eta_1 |s_i(t_1)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i(t_1)))$ 处到达曲线 $\Gamma_{1,i}(t) = 0$, 其中 $s_i(t_1) = 4c_{r_i}(2\eta_1^2 + 4v_i(0) - 2\eta_1 \sqrt{4c_{r_i} v_i(0) + c_{r_i}^2 \eta_1^2})$.

步骤 2 (S2): 本步骤中 $\Gamma_{1,i}(t) < 0$ 意味着 $\dot{s}_i(t) < 0$ 和 $\dot{v}_i(t) < 0$. 因此设置 $\dot{s}_i(t) = 0$, 使得滑模运动的所有轨迹都保持在图 1 中所示的垂直线的范围内, 因而轨迹在点 $(s_i(t_1), 0)$ 处到达 $v_i = 0$.

为了减少计算, $\dot{s}_i(t)$ 的表达式将分别在区域 3 和 4 中简化, 即 (1) 如果 $s_i(t)$ 位于区域 3 ($\Gamma_{2,i}(t) > 0$), 则 $\dot{s}_i(t) \leq 2v_i(t)$; (2) 如果 $s_i(t)$ 位于区域 4 ($\Gamma_{2,i}(t) < 0$), 则 $\dot{s}_i(t) \leq -\frac{2}{c_{r_i}} s_i(t) - 2\eta_1 |s_i(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i(t))$, 也可在第四象限中表示为 $\dot{s}_i(t) = \max\{2v_i(t), -\frac{2}{c_{r_i}} s_i(t) - 2\eta_1 |s_i(t)|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_i(t))\}$.

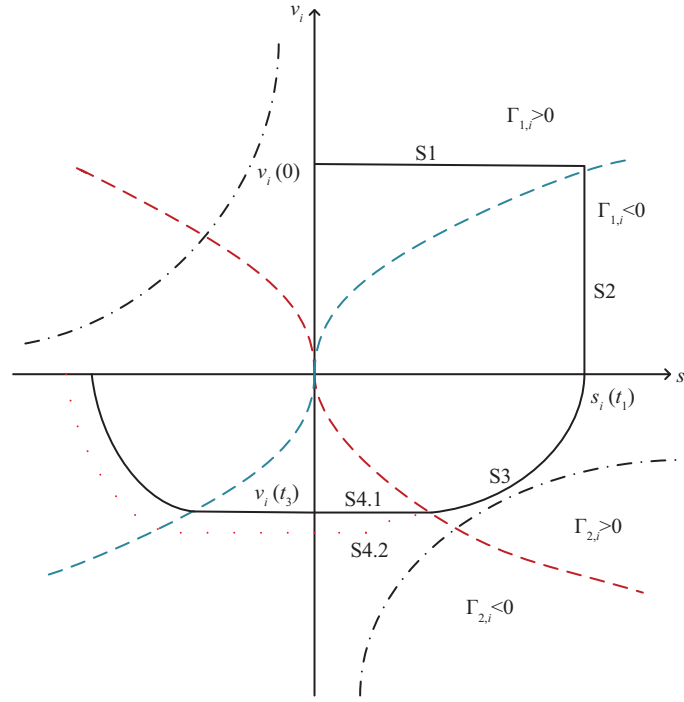


图 1 (网络版彩图) 平面 (s_i, v_i) 内的滑模运动轨迹
 Figure 1 (Color online) TSM in plane (s_i, v_i)

步骤 3 (S3): 一旦滑模运动轨迹进入区域 3, 用式 (13) 中的 $\dot{v}_i(t)$ 求解 $\dot{s}_i(t) = 2v_i(t)$ 即可得到

$$v_i^2(t) = -\eta_2(s_i(t) - s_i(t_1)) - \frac{\eta_3}{2}(s_i^2(t) - s_i^2(t_1)). \quad (14)$$

在点 $(s_i(t_2), -\frac{2}{c_{r_i}}s_i(t_2) - 2\eta_1|s_i(t_2)|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s_i(t_2)))$ 处轨迹到达曲线 $\Gamma_{2,i}(t) = 0$. 在步骤 3 中, $v_i(t) - v_i(t_2)$ 的表达式可以表示为 $(\mathcal{F}(s_i(t_2), s_i(t_1)) = 0)$

$$\mathcal{F}(s_i(t), s_i(t_1)) = \left(\frac{1}{c_{r_i}^2} + \frac{\eta_3}{2}\right)s_i^2(t) + \frac{2\eta_1}{c_{r_i}}s_i^{\frac{3}{2}}(t) + (\eta_1^2 + \eta_2)s_i(t) + \frac{\eta_3}{2}s_i^2(t_1) + \eta_2s_i(t_1). \quad (15)$$

步骤 4 (S4): 在区域 4 中, $\dot{s}_i(t) = -\frac{2}{c_{r_i}}s_i(t) - 2\eta_1|s_i(t)|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s_i(t))$. 为了进一步简化计算, 定义 $\tau_i = (\eta_1 c_{r_i})^2$, 则 (1) 如果 $s_i(t) > \tau_i$, 则 $\dot{s}_i(t) \leq -4\eta_1|s_i(t)|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s_i(t))$; (2) 如果 $s_i(t) \leq \tau_i$, 则 $\dot{s}_i(t) \leq -\frac{4}{c_{r_i}}s_i(t)$. 基于以上讨论, 得到 $\dot{s}_i(t) = \max\{-\frac{4}{c_{r_i}}s_i(t), -4\eta_1|s_i(t)|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s_i(t))\}$. 在此步骤中, 我们将讨论 $s(t_2) > \tau_i$ 和 $s(t_2) \leq \tau_i$ 两种情况.

步骤 4.1 (S4.1): 如果 $s(t_2) > \tau_i$, 则区域 4 内有两个阶段 (参见图 1 第四象限 (s_i, v_i) 中的点划线). 如果 $s_i(t) \in [\tau_i, s(t_2)]$, 则 $\dot{s}_i(t) = -4\eta_1|s_i(t)|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s_i(t))$. 由此可得

$$v_i(t) = \frac{1}{2\eta_1} \left(\frac{\eta_3}{3}s_i^{\frac{3}{2}}(t) + \eta_2s_i^{\frac{1}{2}}(t) \right) - \Lambda_2(s_i(t_2)), \quad (16)$$

其中 $\Lambda_2(s_i(t_2)) \triangleq \frac{\eta_3}{6\eta_1}s_i^{\frac{3}{2}}(t_2) + \frac{1}{c_{r_i}}s_i(t_2) + (\eta_1 + \frac{\eta_2}{2\eta_1})s_i^{\frac{1}{2}}(t_2)$. 同时, 令 $s_i(t_3) = \tau_i$. 如果 $s_i(t) \in [0, \tau_i]$, 则第 2 阶段 $\dot{s}_i(t) = -\frac{4}{c_{r_i}}s_i(t)$. 结合式 (13), 轨迹曲线的求解如下:

$$v_i(t) = \frac{c_{r_i}}{4} \left(\eta_2 \ln \left(\frac{s_i(t)}{s_i(t_3)} \right) + \eta_3(s_i(t) - s_i(t_3)) \right) + v_i(t_3). \quad (17)$$

根据式 (17), 当 $s_i(t)$ 接近零时, $v_i(t)$ 趋于负无穷大. 这意味着当 $\dot{s}_i(t) = -\frac{4}{c_{r_i}}s_i(t)$ 时, 滑模运动轨迹无法在有限时间内收敛到零. 将 $v_i(t)$ 的导数设为零, 因此当轨迹到达 $s_i = 0$ 时, $v_i(t_4) = v_i(t_3)$.

为了验证轨迹 $v_i(t)$ 的收敛性, 给出了以下定理.

定理2 如果下列条件成立, 轨迹 $v_i(t)$ 是有限时间收敛的:

$$\frac{\eta_3}{6\eta_1} \leq \frac{1}{c_{r_i}^2} + \frac{\eta_3}{2}, \quad \eta_1 \leq \eta_1^2 + \eta_2, \quad 1 \leq 2\eta_1, \quad (18)$$

且 $v_i(t)$ 的初始状态满足

$$v_i(0) \in \vartheta_0^i := \left\{ \mathcal{V} \in \mathbb{R} \mid \mathcal{V} = \frac{1}{c_{r_i}}s_i(t_1) + \eta_1|s_i(t_1)|^{\frac{1}{2}}, \Lambda_1(s_i(t_1)) \leq (\eta_3\eta_1^3c_{r_i}^4)/3 + \eta_1\eta_2c_{r_i}^2 \right\}, \quad (19)$$

其中 ϑ_0^i 是 $v_i(0)$ 的初始状态的集合, $\Lambda_1(s_i(t_1)) \triangleq \eta_3s_i^2(t_1) + (2\eta_2 - \eta_1)s_i(t_1) - c_{r_i}\eta_1^2s_i^{\frac{1}{2}}(t_1)$. 令 $|\frac{v_i(t_4)}{v_i(0)}| = \theta_1$ ($0 < \theta_1 < 1$), 有限时间 T_1 可计算得到

$$T_1 \leq \frac{1 + \theta_1}{\eta_2(1 - \theta_1)}v_i(0). \quad (20)$$

证明 在步骤 4.1 中, 当 $||v_i(t_3)| - |v_i(t_2)|| \leq ||v_i(t_2)| - v_i(t_1)|$, 可以得到轨迹 $v_i(t)$ 的有限时间收敛性. 因为 $(s_i(t_2), v_i(t_2))$ 取决于曲线 $\Gamma_{2,i}(t) = 0$, 由式 (14)~(16) 可以得到 $\Lambda_2(s_i(t_2)) \leq \frac{1}{c_{r_i}}s_i(t_1) + \eta_1s_i^{\frac{1}{2}}(t_1) + \frac{\eta_3}{6\eta_1}\tau_i^{\frac{3}{2}} + \frac{\eta_2}{2\eta_1}\tau_i^{\frac{1}{2}}$. 在条件 (18) 下, 可以进一步得到

$$\begin{aligned} \Lambda_2(s_i(t_2)) &\leq s_i^{-\frac{1}{2}}(t_2) \left[\left(\frac{1}{c_{r_i}^2} + \frac{\eta_3}{2} \right) s_i^2(t_2) + \frac{2\eta_1}{c_{r_i}}s_i^{\frac{3}{2}}(t_2) + (\eta_1^2 + \eta_2)s_i(t_2) \right] \\ &\leq \tau^{-\frac{1}{2}} (2\eta_2s_i(t_1) + \eta_3s_i^2(t_1)). \end{aligned} \quad (21)$$

因此, 式 (19) 可由式 (21) 得出. 此外, 式 (13) 意味着 $-\eta_2 - \eta_3s_i(t_1) \leq \dot{v}_i(t) \leq -\eta_2$. 考虑到上述不等式的右侧, 得到 $t_4 \leq \frac{1+\theta_1}{\eta_2}v_i(0)$. 接着, 我们得到了总收敛时间 $T_1 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \theta_1^i t_4$, 即式 (20).

步骤 4.2 (S4.2): 如果 $s_i(t_2) \leq \tau_i$, 则区域 4 内有一个阶段. 相应的分析类似于步骤 4.1 的第 2 种情形, 在这一步骤变为 $\dot{v}_i(t) = 0$ 和 $v_i(t'_3) = v_i(t'_2)$. 在此情形下, 令 $|\frac{v_i(t_3)}{v_i(0)}| = |\frac{v_i(t'_2)}{v_i(t_1)}| = \theta_2$. 由于 $v_i(t_1)$ 和 $v_i(t'_2)$ 分别位于曲线 $\Gamma_{1,i}(t) = 0$ 和 $\Gamma_{2,i}(t) = 0$ 上, 可以得到 $0 < \theta_2 < 1$. 这意味着滑模运动轨迹将在有限时间 $T_2 \leq \frac{1+\theta_2}{\eta_2(1-\theta_2)}v_i(0)$ 内收敛到零. 其结果和证明可参考定理 2.

注释3 定理 1 给出了二阶滑模控制器 (8) 和高阶滑模观测器 (4) 的参数设计方法, 保证了滑模轨迹是收敛的. 在此基础上, 定理 2 给出了在执行器和状态饱和的情况下滑模轨迹收敛域的分析结果, 使得从可行域内部开始的滑模运动轨迹保持在该区域内, 定理 1 得到的参数给出了收敛域的范围.

5 硬约束情形下滑模运动的几何分析

本节研究在平面 (s_i, v_i) 和超平面 (s_i, v_i, \hat{x}^i) 上均有状态和输入限制的滑模运动轨迹的可容许区域的范围. 考虑饱和控制器 (8) 以及代入变量 $s_i(t)$ 的导数 (11) 可以得到

$$|\Gamma_{1,i}(\hat{x}, t)| \leq |c_{r_i}(g_i(\hat{x}, t)u_{\max} + f_i(\hat{x}, t)) + \Pi_i(\hat{x}, t)|. \quad (22)$$

系统 (10) 的吸引域的情形将通过考虑状态 \hat{x}_j^i 是否受约束来讨论.

5.1 状态硬约束的情形

根据假设 1 和 3, 滑模运动轨迹将受到饱和控制力和状态受限的约束. 其轨迹在图 1 中用黑色点划线表示. 因此, 式 (22) 可以进一步写成

$$|\Gamma_{1,i}(\hat{x}, t)| \leq |c_{r_i}\chi_i + \beta_i|, \quad (23)$$

其中 $\chi_i \triangleq G_i u_{\max} + F_i$, $G_i \triangleq [G_{i1} \ G_{i2} \ \cdots \ G_{im}]$, $\beta_i \triangleq \sum_{j=1}^{r_i-1} c_{ij}\alpha_{j+1}^i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). 为了避免由于将状态 \hat{x}_j^i 作为假设 1 中的上限 α_j^i 而导致的估计值偏大, 从而提出以下命题.

命题 2 当下列条件成立时, 存在正标量 $\rho_i < \beta_i$ 使得 $\Pi_i(\hat{x}, t)$ 的上界为 $|\Pi_i(\hat{x}, t)| \leq \rho_i$, 其中 $\rho_i = \frac{c_{r_i}\chi_i\kappa_i + c_{i1}\alpha_1^i}{1-\kappa_i}$, $\kappa_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$). κ_i 的证明和表达式详见附录.

注释 4 ρ_i 相对于 β_i 降低了上界估计值的保守性, 但由于 Lyapunov 函数 (12) 不是系统 (10) 的最大正不变集函数, 因此 ρ_i 也不是 $|\Pi_i(\hat{x}, t)|$ 的严格界限.

这里对 $|\Pi_i(\hat{x}, t)|$ 的上界估计值的讨论告一段落, 接下来先对受约束的滑模运动轨迹的吸引域进行分析. 由于第一象限内的轨迹永远不会超过约束边界, 因此, 稍后仅讨论步骤 3 和 4 的部分 (见下文阶段 1, 2.1 和 2.2). 滑模运动轨迹不会违反约束条件, 即

$$v_i(s_i(t)) > v_c(s_i(t)), \quad (24)$$

其中 $v_i(s_i(t))$ 取决于它所处的区域, 根据式 (23) 和命题 2, 给出 $v_c(s_i(t))$ 如下:

$$v_c(s_i(t)) = \frac{1}{c_{r_i}}s_i(t) + \eta_1|s_i(t)|^{\frac{1}{2}} - c_{r_i}\chi_i - \rho_i. \quad (25)$$

$s_i(t_1)$ 可以作为吸引域体积的度量, 其最大值将在阶段 1, 2.1 和 2.2 中讨论, 分别对应于区域 4 的步骤 3, 4.1 和 4.2. 在式 (24) 的约束下, 以及阶段 1, 2.1 和 2.2 中提到的 $\phi_{i,1}$, $\phi_{i,2}$, $\phi_{i,3}$ 条件下, 将 ϕ_i 表示为 $s_i(t_1)$ 的值. 目标是在步骤 3 和 4 的约束条件下, 求出滑模运动轨迹的最大值.

根据步骤 4 的讨论, 获得最大值 ϕ_i 的方法表述如下.

阶段 1: 在本阶段中, 对于 $s_i(t) > \mathcal{S}_i$, $v_i(t)$ 由式 (14) 在步骤 3 给出. 结合 (14), (24) 和 (25), 求解最大值 $\phi_{i,1}$ 的问题转换成以下的数学求解:

$$\phi_{i,1} = \max_{\vartheta_1 > 0} \{ \vartheta_1 \in \mathbb{R} \mid v_i(s_i(t), \vartheta_1) > v_c(s_i(t)), s_i(t) \in [0, \vartheta_1] \}, \quad (26)$$

其中 $v_i(s_i(t), \vartheta_1) = \sqrt{\eta_2(\vartheta_1 - s_i(t)) + \frac{\eta_3}{2}(\vartheta_1^2 - s_i^2(t))}$.

注释 5 \mathcal{S}_i 表示 $v_c(s_i(t))$ 与 $\Gamma_{2,i}(t)$ 的交点的横坐标值, 由此可以看出 \mathcal{S}_i 不小于 $s_i(t_2)$. 在区间 $[s_i(t_2), \mathcal{S}_i]$, 滑模运动轨迹仍位于步骤 3, 无论 $s_i(t_2) > \tau_i$ 与否, 其导数 $\dot{s}_i(t) = 2v_i(t)$. 因此, 为了简化分析, 可以通过考虑两种情况来讨论阶段 2, 即 $\mathcal{S}_i > \tau_i$ 和 $\mathcal{S}_i \leq \tau_i$.

阶段 2.1: 当 $\mathcal{S}_i > \tau_i$ 时, 需要将步骤 4.1 的两个情况与 $v_c(s_i(t))$ 进行比较.

若 $s_i(t) \in [\tau_i, s_i(t_2)]$, 结合式 (24) 以及式 (16) 中定义的 $v_i(s_i(t))$, 求解吸引域最大值的问题可转换成

$$\phi_{i,2} = \max_{\vartheta_2 > 0} \{ \vartheta_2 \in \mathbb{R} \mid v_i(s_i(t), s_i(t_2)) > v_c(s_i(t)), \mathcal{F}(s_i(t_2), \vartheta_2) = 0, s_i(t) \in [\tau_i, s_i(t_2)] \}, \quad (27)$$

其中, 在优化过程中 $s_i(t_2)$ 的值由 ϑ_2 确定.

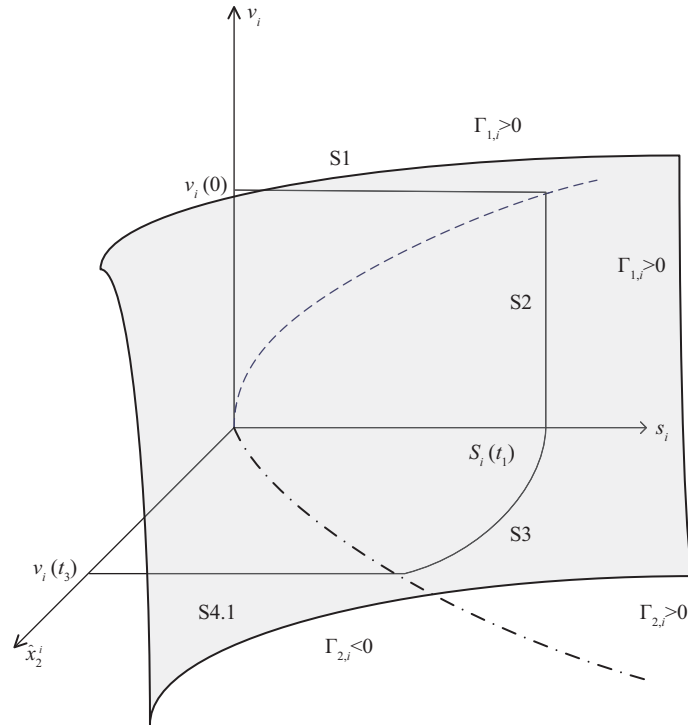


图 2 在空间 (s_i, v_i, \hat{x}_2^i) 内的滑动模运动轨迹
 Figure 2 TSM in space (s_i, v_i, \hat{x}_2^i)

若 $s_i(t) \in [0, \tau_i]$, 则参考步骤 4.1 的分析. 当 $s_i(t) \in [0, \tau_i]$ 且 $v_i(t_4) = v_i(t_3)$ 时, 满足条件 (27), 曲线则永远不会穿过稳定区域. 综合阶段 1 和 2.1 的分析, 易得 $\phi_i = \min\{\phi_{i,1}, \phi_{i,2}\}$.

阶段 2.2: 当 $S_i \leq \tau_i$ 时, 根据步骤 4.2 ($v_i(t'_3) = v_i(t'_2)$), 得到 $\phi_i = \phi_{i,1}$.

以上讨论集中在受状态和执行器约束的滑模运动轨迹的吸引域的分析, 通过优化最大容许集的方法描述具有硬约束的非线性仿射系统的吸引域.

5.2 状态无约束的情形

接下来将基于超平面 (s_i, v_i, \hat{x}^i) 考虑不需要 \hat{x}_2^i 边界的情形对滑模运动轨迹进行分析. 结合式 (11) 中变量 $s_i(t)$ 导数以及饱和二阶滑模控制律 (8), 式 (23) 重写为 $|\Gamma_{1,i}(t) - \Pi_i(\hat{x}, t)| \leq c_{r_i} \chi_i$. 当 $r_i = 2$ 时,

$$|\Gamma_{1,i}(t) - c_{i1} \hat{x}_2^i(t)| \leq c_{i2} \chi_i. \quad (28)$$

由图 2 可以看出平面 (s_i, v_i) 中的 $\hat{x}_2^i(t) = 0$, 位于第四象限中的 $\Gamma_{1,i} = -c_{i2} \chi_i$ 是约束面和平面 (s_i, v_i) 的相交线之一. 当 $\hat{x}_2^i(t) \neq 0$ 时, 由式 (28) 定义的外边界将逐渐变为随 $\hat{x}_2^i(t)$ 增大或减小的双曲抛物面. 更具体地说, 方程 (25) 在每个平面 (s_i, v_i, \hat{x}_2^i) 中根据 $\hat{x}_2^i(t)$ 而变化, 将其重写为 $v_c(t) = \frac{1}{c_{r_i}} s_i(t) + \eta_1 |s_i(t)|^{\frac{1}{2}} - c_{i2} \hat{x}_2^i(t) - c_{r_i} \chi_i$. 因此, 根据边界 $v_c(t)$ 可以得到 $\phi_i(t)$, 在空间 $(s_i, v_i, \hat{x}_2^i(t))$ 中逐渐形成吸引域的面. 此外, 式 (28) 意味着双曲抛物面有一个上限, 滑模运动轨迹将受到一个边界面的限制 (见图 2 中的阴影部分).

此外, 当 $r_i > 2$ 时, 可以引入一些新的变量来构造基于超平面 $(s_i, v_i, \hat{x}_2^i, \dots, \hat{x}_{r_i}^i)$ 的新边界. 例如, 平面 (s_i, v_i) 中的线边界 $\Gamma_{1,i}$ 是 s_i 和 v_i 的函数, 空间 (s_i, v_i, \hat{x}_2^i) 中的面边界 $\Gamma(s_i, v_i, \hat{x}_2^i)$ 是 $\Gamma_{1,i}$

和 \hat{x}_2^i 的函数. 当 $r_i = 3$ 时, 添加变量 \hat{x}_3^i 到与变量 s_i, v_i 和 \hat{x}_2^i 线性无关的相位超平面. 因此, \hat{x}_3^i 和 $\Gamma(s_i, v_i, \hat{x}_2^i)$ 可以在超平面 $(s_i, v_i, \hat{x}_2^i, \hat{x}_3^i)$ 中构造一些新的边界, 其中新的轴 \hat{x}_3^i 垂直于 $\Gamma(s_i, v_i, \hat{x}_2^i)$ 每个点的梯度. 在此, 省略了对相关滑模运动轨迹的分析, 其仍然是一个开放的问题, 将是未来进一步研究的课题.

6 仿真实例

本节给出了两个仿真例子来说明所提出方法的有效性.

例1 在本例中, 通过与无约束控制的比较, 验证了所设计的硬约束控制的有效性. 考虑车辆系统^[37], 将其表示为系统 (3) 的形式如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = -2\frac{k_a}{m}x_2(t)x_3(t) - \frac{1}{\tau}\left[x_3(t) + \frac{k_a}{m}x_2^2(t)\right] + \frac{u(t)}{m\tau}, \end{cases} \quad (29)$$

其中 $x_1(t), x_2(t), x_3(t), m, k_a, \tau$ 和 u 分别表示位置 (m), 速度 (m/s), 加速度 (m/s²), 车辆质量 (kg), 空气动力阻力系数, 发动机时滞 (s) 和油门指令输入 (N). 模拟实验中参数的数值为 $m = 9$ kg, $k_a = 0.26, \tau = 0.1$ ^[37]. 在本例中, 设系统 (29) 的初始状态 $x(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$, 观测器 (4) 的初始状态 $\hat{x}(0) = [0.2 \ 0.2 \ 0.2]^T$, 非线性仿射函数的不确定项 $\Delta f(x, t) = 0.01 \sin(t), \Delta g(x, t) = 0.01 \cos(t)$. 控制力的上限 $u_{\max} = 5.0$, 状态上限 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.2$.

根据定理 1, 高阶滑模观测器和二阶滑模控制器的增益设计如下.

- (a) 高阶滑模观测器 (4) 的增益: $\lambda_1 = 0.3, \lambda_2 = 0.15, \lambda_3 = 0.11$.
- (b) 滑模面 (6) 的参数: $c_1 = c_2 = 1, c_3 = 0.02$.
- (c) 二阶滑模控制器 (8) 的增益: $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 1$.

接下来, 滑模面 (6) 可以设计为 $s(t) = \hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t) + 0.02\hat{x}_3(t)$, 控制器 (8) 给出如下:

$$u(\hat{x}, t) = u_{\text{nom}}(\hat{x}, t) + u_{\text{st}}(\hat{x}, t), \quad (30)$$

其中 $\dot{v}(t) = -\text{sign}(s(t)) - s(t), u_{\text{nom}}(\hat{x}, t) = -45\hat{x}_2(t) - 36\hat{x}_3(t) - 0.052\hat{x}_2(t)\hat{x}_3(t) + 0.26\hat{x}_2^2(t), u_{\text{st}}(\hat{x}, t) = -2250s(t) - 45|s(t)|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(s(t)) - 45v(t)$.

对于所得到的闭环控制系统 (29), 图 3 描绘了执行器无任何约束情形下的状态轨迹, 图 4 描绘了受执行器和状态约束的实际控制力下的状态轨迹. 从中可以看出, 在两种控制情况下, 闭环系统的状态均可以在有限时间内渐近收敛到零. 饱和控制在将控制力约束在一定范围内的同时, 达到了比较理想的控制效果.

例2 本例说明状态和控制输入受限的控制系统的滑模运动轨迹吸引域. 考虑非线性系统^[27]:

$$\dot{z}(t) = a(z, t) + b(z, t)u(t), \quad (31)$$

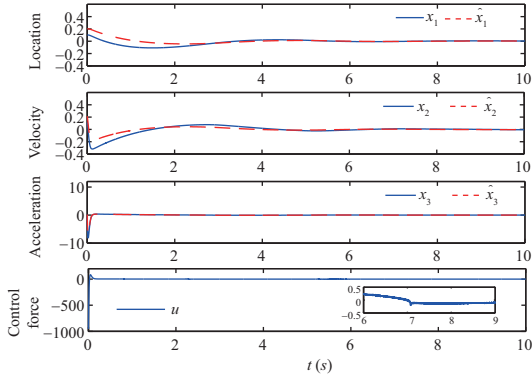


图 3 (网络版彩图) 无约束情形下的系统状态和控制变量 (30)

Figure 3 (Color online) Trajectories of the states and control forces (30)

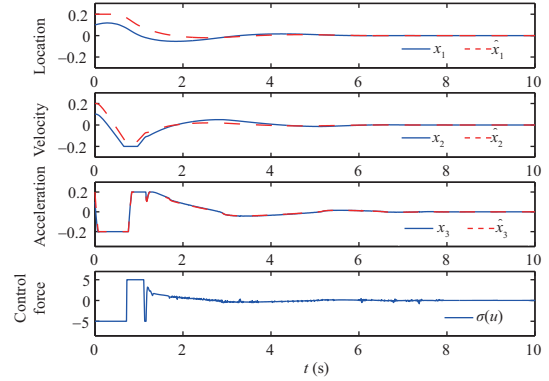


图 4 (网络版彩图) 硬约束情形下的系统状态和控制变量

Figure 4 (Color online) Trajectories of constrained states and control forces

以及

$$a(z, t) = \begin{bmatrix} -2z_1(t) - z_2(t) \\ z_1(t) \\ -z_3^3(t) - 2z_3(t) - z_4(t) \\ z_3(t) \\ (z_2(t) - 4) \frac{2z_5(t) + \sin(z_5(t))}{2 + \cos(z_5(t))} \end{bmatrix}, \quad b(z, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 + (2z_5(t) + \sin(z_5(t)))^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix},$$

并且系统的输出为 $y_1(t) = h_1(z, t) = z_2(t)$, $y_2(t) = h_2(z, t) = z_4(t)$. 式 (31) 的相对阶为 $r_1 = 2$ 和 $r_2 = 2$, 通过对式 (3) 坐标变换 $[x^T, \varsigma^T]^T = \Phi^{-1}(z, t)$, 可以进一步重构为

$$\begin{cases} \dot{x}_1^1(t) = x_2^1(t), \quad \dot{x}_2^1(t) = f_1(x, t) + g_1(x, t)u_1(x, t), \\ \dot{x}_2^1(t) = x_2^2(t), \quad \dot{x}_2^2(t) = f_2(x, t) + g_2(x, t)u_2(x, t), \\ \dot{\varsigma}(t) = (x_1^1(t) - 4)\varsigma(t), \end{cases} \quad (32)$$

其中根据式 (2) 通过选择 $\varsigma(t) = 2z_5(t) + \sin(z_5(t))$ 可得

$$f(x, t) = \begin{bmatrix} L_a^2 h_1 \\ L_a^2 h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2^1(t) - x_1^1(t) \\ -(x_2^2(t))^3 - x_1^2(t) - 2x_2^2(t) \end{bmatrix}, \quad g(x, t) = \begin{bmatrix} L_{b_1} L_a h_1 & L_{b_2} L_a h_1 \\ L_{b_1} L_a h_2 & L_{b_2} L_a h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \varsigma^2(t) \end{bmatrix}.$$

非线性仿射系统的不确定性给出为 $\Delta f(x, t) = 0.01 [\sin(t) \quad \sin(t)]^T$, $\Delta g(x, t) = 0.01 \text{diag}\{\cos(t), \cos(t)\}$.

仿真 1: 关于系统状态估计和控制的仿真. 系统 (31) 的初始状态设为 $x^1(0) = [0.1 \ 0.1]^T$, $x^2(0) = [0.1 \ 0.1]^T$, $\varsigma(0) = 0.1$, 观测器初始状态设为 $\hat{x}^1(0) = [0.5 \ 0.5]^T$, $\hat{x}^2(0) = [0.5 \ 0.5]^T$, $\hat{\varsigma}(0) = 0.5$. 输入上限设为 $u_{\max} = [0.2 \ 0.2]^T$.

根据定理 1, 高阶滑模观测器和二阶滑模控制器的增益设计如下.

(a) 高阶滑模观测器 (4) 的增益: $\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = 0.15$, $\lambda_2^1 = \lambda_2^2 = 0.11$.

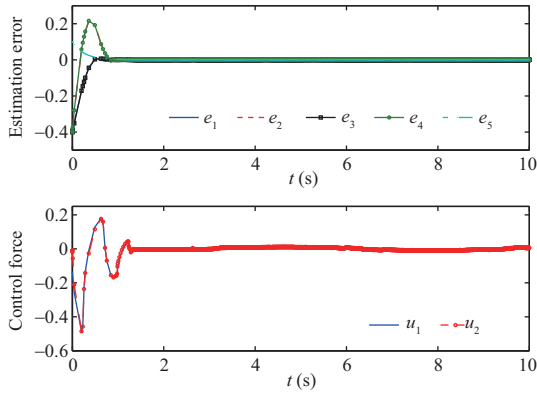


图 5 (网络版彩图) 无约束情形下的估计误差和相应控制变量

Figure 5 (Color online) Trajectories of the estimation errors and corresponding control forces without constraints

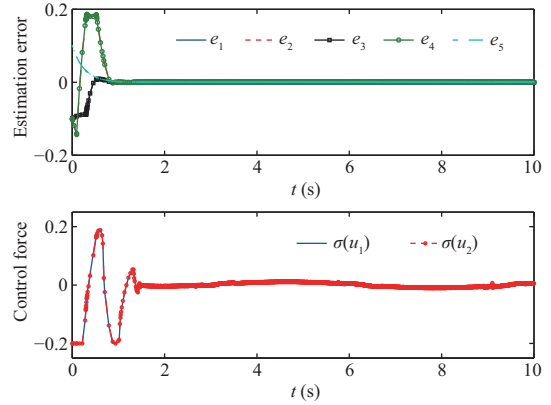


图 6 (网络版彩图) 硬约束情形下的估计误差和控制变量

Figure 6 (Color online) Trajectories of the estimation errors and corresponding constrained control forces

(b) 滑模面 (6) 的参数: $c_{11} = c_{21} = 1, c_{12} = c_{22} = 1.5$.

(c) 二阶滑模控制器 (8) 的增益: $\eta_1 = \eta_2 = 1, \eta_3 = 2$.

接下来, 滑模面 (6) 可以设计为 $s_1(t) = \hat{x}_1^1(t) + 1.5\hat{x}_2^1(t), s_2(t) = \hat{x}_1^2(t) + 1.5\hat{x}_2^2(t)$. 控制器 (8) 设计为

$$u(\hat{x}, t) = u_{\text{nom}}(\hat{x}, t) + u_{\text{st}}(\hat{x}, t), \quad (33)$$

其中 $\dot{v}(t) = -\text{sign}(s(t)) - 2s(t)$, u_{nom} 和 u_{st} 分别为

$$u_{\text{nom}} = \frac{1}{1 + \varsigma^2(t)} \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\hat{x}_2^1(t) + \hat{x}_1^1(t) \\ (\hat{x}_2^2(t))^3 + \hat{x}_1^2(t) + \frac{4}{3}\hat{x}_2^2(t) \end{bmatrix}, \quad u_{\text{st}} = -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + \varsigma^2(t)} \end{bmatrix} \left(\frac{2}{3}s(t) + \mathcal{D}(s(t)) + v(t) \right).$$

仿真结果如图 5~7 所示. 在无约束控制律 (33) 的控制下, 估计误差 $e^i(t)$ 渐近收敛到零, 同样地, 具有硬约束的控制律下的估计误差也收敛到零. 在图 7 中, 实线和虚线分别表示无约束控制器 (33) 和硬约束控制器 $\sigma(u)$ 作用下的状态轨迹 $x^i(t)$ ($i = 1, 2$).

仿真 2: 关于系统吸引域的仿真. 在第 5 节中对 $\mathcal{S}_i > \tau_i$ 和 $\mathcal{S}_i \leq \tau_i$ 两种情形, 分别分析了滑模运动轨迹在平面 (s_i, v_i) 和空间 (s_i, v_i, \hat{x}_2^i) 中的吸引域.

(1) 平面吸引域 (s_i, v_i) .

情形一: 根据约束条件 (23), 假设系统仿射函数的边界为 $F_i(x, t) = 2.0, G_i(x, t)u_{\text{max}} = 2.0, \beta_i = c_{ir_i-1}\alpha_2^i = 2.0, 2\chi_i + \beta_i = 10.0$. 在这种情形下, $\mathcal{S}_i = 4.3654 > \tau_i = 2.25$. 如图 8 所示, 蓝色线, 黑色线和红色线分别表示轨迹 $v_i(t)$, 辅助线 $\Gamma_{1,i}(t)$ 和边界线 $v_c(t)$. 根据步骤 4.1 和阶段 2.1, 第四象限有 3 部分轨道, 以及两个转折点, 即 $s_i(t_2) = 3.6004$ 和 $s_i(t_3) = \tau_i$. 式 (26) 和 (27) 的解为 $\phi_{i,1} = 5.4400$ 和 $\phi_{i,2} = 6.4776$. 因此, $\phi_i = \min\{\phi_{i,1}, \phi_{i,2}\} = 5.4400$.

情形二: 在此情形下, 为了分析阶段 2.2, 将 c_{r_i} 设置为 0.5. 假设系统仿射函数的边界为 $F_i(x, t) = 1.0, G_i(x, t)u_{\text{max}} = 1.0, \alpha_1^i = 0.2, \alpha_2^i = 0.6$, 由命题 2 计算得 $\rho_i = 0.4645 < \beta_i = 0.6$. 接下来, 针对约束 (23) 得 $0.5\chi_i + \rho_i = 1.4645$. 第四象限的轨迹 $v_i(t)$ 如图 9 所示. 通过计算, 得到 $s_i(t_2) = 0.1250 \leq \tau_i = 0.25$. 然后采用阶段 2.2 的分析结果, 得到式 (26) 的解是 $\phi_i = s_i(t_1) = 0.4070$.

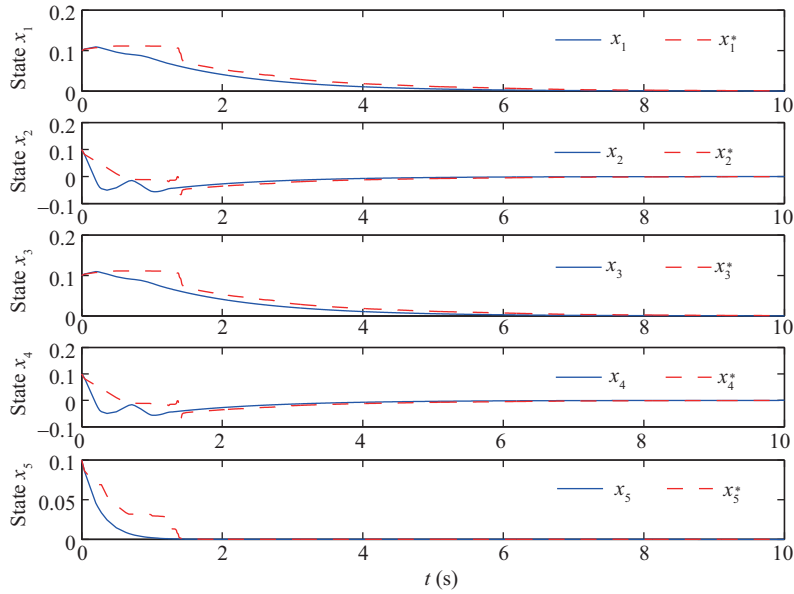


图 7 (网络版彩图) 系统状态 (32) 分别在无约束 ($x_{1\sim 5}$) 和硬约束 ($x_{1\sim 5}^*$) 下的变化

Figure 7 (Color online) States of the system (32) respectively without constraints ($x_{1\sim 5}$) and with constraints ($x_{1\sim 5}^*$)

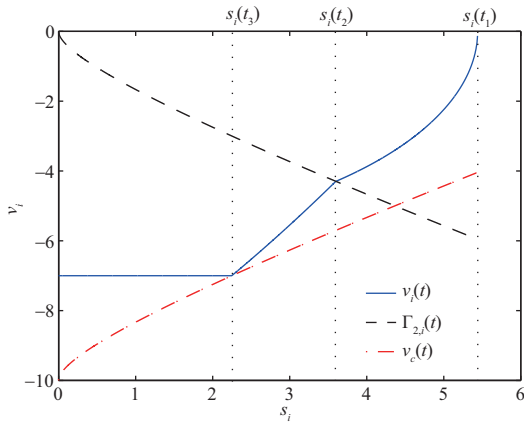


图 8 (网络版彩图) 在阶段 2.1 ($S_i > \tau_i$) 时的轨迹

Figure 8 (Color online) Trajectories under Segment 2.1 Case ($S_i > \tau_i$)

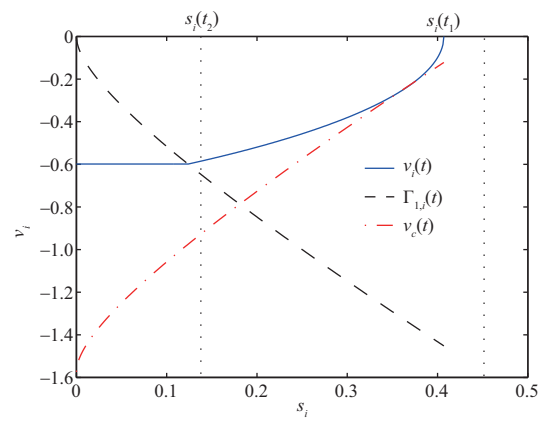


图 9 (网络版彩图) 在阶段 2.2 ($S_i \leq \tau_i$) 时的轨迹

Figure 9 (Color online) Trajectories under Segment 2.2 Case ($S_i \leq \tau_i$)

(2) 空间吸引域 (s_i, v_i, \hat{x}_2^i). 本文将约束设为 $\chi_i = 3.5$ ($i = 1, 2$), 状态界限为 $\hat{x}_2^i \in [-2, 2]$. 由于系统 (31) 的相对阶是 $r_i = 2$, 则滑模运动轨迹的吸引域将在空间 (s_i, v_i, \hat{x}_2^i) 中. 在图 10 中, 根据式 (28), 将下层的未渲染面用作边界面 $\Gamma_{1,i} = c_{i2}\chi_i + c_{i1}\hat{x}_2^i$, 而上层的渲染面是受约束 (28) 限制的滑模运动轨迹的吸引域. 这清楚地表明吸引域涵盖了上述两种情况. 在平面 (v_i, s_i) ($i = 1, 2$) 的约束下, 系统的滑模运动轨迹如图 11 所示, 它们均收敛到原点.

7 结论

本文针对具有执行器和状态约束的不确定非线性系统, 研究了基于高阶滑模观测器的二阶滑模控

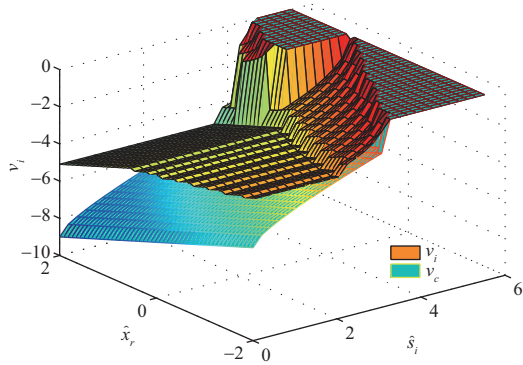


图 10 (网络版彩图) 在约束条件 (28) 下滑模运动轨迹所在区域

Figure 10 (Color online) Domain of the TSM under the constraints (28)

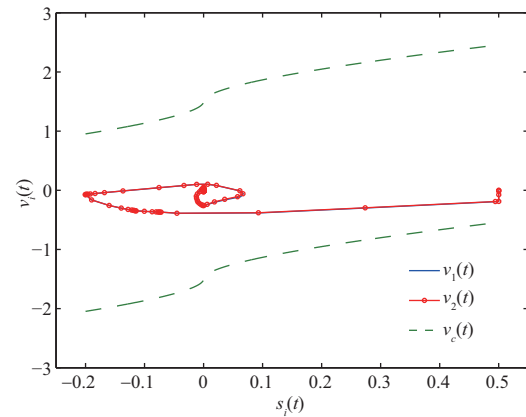


图 11 (网络版彩图) 系统 (32) 的实际滑模运动轨迹

Figure 11 (Color online) The real TSM of system (32)

制问题. 根据系统输出的相对阶设计了高阶滑模观测器; 利用高阶滑模观测器的部分状态设计二阶滑模控制器, 使闭环系统在约束条件下稳定; 并分别给出了具有硬约束和无约束情形下的滑模运动的几何分析; 最后通过实例验证了所提出的估计控制方法.

参考文献

- Pittet C, Tarbouriech S, Burgat C. Stability regions for linear systems with saturating controls via circle and Popov criteria. In: Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision & Control, 1997. 4518–4523
- Hindi H, Stephen B. Analysis of linear systems with saturation using convex optimization. In: Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control, 1998. 903–908
- Hu T, Lin Z, Chen B M. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. Automatica, 2002, 38: 351–359
- Hu T, Lin Z, Chen B M. Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation. Syst Control Lett, 2002, 45: 97–112
- Valmorbida G, Tarbouriech S, Garcia G. Design of polynomial control laws for polynomial systems subject to actuator saturation. IEEE Trans Automat Contr, 2013, 58: 1758–1770
- Chisci L, Rossiter J A, Zappa G. Systems with persistent disturbances: predictive control with restricted constraints. Automatica, 2001, 37: 1019–1028
- Dinuzzo F, Ferrara A. Higher order sliding mode controllers with optimal reaching. IEEE Trans Automat Contr, 2009, 54: 2126–2136
- Edwards C, Herrmann G, Hredzak B, et al. A discrete-time sliding mode scheme with constrained input. In: Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision & Control, 2007. 3203–3208
- Chen M, Ge S S, How B V E, et al. Robust adaptive position mooring control for marine vessels. IEEE Trans Contr Syst Technol, 2013, 21: 395–409
- Sun L, Wang Y, Feng G. Control design for a class of affine nonlinear descriptor systems with actuator saturation. IEEE Trans Automat Contr, 2015, 60: 2195–2200
- Battilotti S. Robust observer design under measurement noise with gain adaptation and saturated estimates. Automatica, 2017, 81: 75–86
- Utkin V. Variable structure systems with sliding modes. IEEE Trans Automat Contr, 1977, 22: 212–222
- Utkin V. Sliding Modes in Control and Optimization. Berlin: Springer-Verlag, 1992

- 14 Fulwani D, Bandyopadhyay B. Design of sliding mode controller with actuator saturation. In: *Advances in Sliding Mode Control*. Berlin: Springer-Verlag, 2013
- 15 Castillo I, Steinberger M, Fridman L. Saturated super-twisting algorithm: Lyapunov based approach. In: *Proceedings of the 14th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, 2016. 269–273
- 16 Behera A K, Chalanga A, Bandyopadhyay B. A new geometric proof of super-twisting control with actuator saturation. *Automatica*, 2018, 87: 437–441
- 17 Ferrara A, Rubagotti M. A sub-optimal second order sliding mode controller for systems with saturating actuators. *IEEE Trans Automat Contr*, 2009, 54: 1082–1087
- 18 Tanizawa H, Ohta Y. Sliding mode control under state and control constraints. In: *Proceedings of the 16th IEEE International Conference on Control Applications*, Amsterdam, 2007. 1173–1178
- 19 Incremona G P, Rubagotti M, Ferrara A. Sliding mode control of constrained nonlinear systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2017, 62: 2965–2972
- 20 Davila J, Fridman L, Levant A. Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2005, 50: 1785–1789
- 21 Kalsi K, Lian J, Hui S, et al. Sliding-mode observers for systems with unknown inputs: a high-gain approach. *Automatica*, 2010, 46: 347–353
- 22 Wang X, Tan C P, Zhou D. A novel sliding mode observer for state and fault estimation in systems not satisfying matching and minimum phase conditions. *Automatica*, 2017, 79: 290–295
- 23 Rath J J, Veluvolu K C, Deffort M, et al. Higher-order sliding mode observer for estimation of tyre friction in ground vehicles. *IET Control Theor Appl*, 2014, 40: 399–408
- 24 Chalanga A, Kamal S, Fridman L M, et al. Implementation of super-twisting control: super-twisting and higher order sliding-mode observer-based approaches. *IEEE Trans Ind Electron*, 2016, 63: 3677–3685
- 25 Levant A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *Int J Control*, 2003, 76: 924–941
- 26 Pisano A, Usai E. Output-feedback control of an underwater vehicle prototype by higher-order sliding modes. *Automatica*, 2004, 40: 1525–1531
- 27 Fridman L, Shtessel Y, Edwards C, et al. Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems. *Int J Robust Nonlin Control*, 2008, 18: 399–412
- 28 Belkhatir Z, Laleg-Kirati T M. High-order sliding mode observer for fractional commensurate linear systems with unknown input. *Automatica*, 2017, 82: 209–217
- 29 Yang J, Su J, Li S, et al. High-order mismatched disturbance compensation for motion control systems via a continuous dynamic sliding-mode approach. *IEEE Trans Ind Inf*, 2014, 10: 604–614
- 30 Efimov D, Edwards C, Zolghadri A. Enhancement of adaptive observer robustness applying sliding mode techniques. *Automatica*, 2016, 72: 53–56
- 31 Isidori A. *Nonlinear Control Systems*. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013
- 32 Liu X, Han Y. Finite time control for MIMO nonlinear system based on higher-order sliding mode. *ISA Trans*, 2014, 53: 1838–1846
- 33 Yu S, Yu X, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. *Automatica*, 2005, 41: 1957–1964
- 34 Incremona G P, Cucuzzella M, Ferrara A. Second order sliding mode control for nonlinear affine systems with quantized uncertainty. *Automatica*, 2017, 86: 46–52
- 35 Moreno J A, Osorio M. Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Trans Automat Contr*, 2012, 57: 1035–1040
- 36 Filippov A F. *Differential Equations With Discontinuous Righthand Sides: Control Systems*. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013
- 37 Stankovic S S, Stanojevic M J, Siljak D D. Decentralized overlapping control of a platoon of vehicles. *IEEE Trans Contr Syst Technol*, 2000, 8: 816–832

附录 A 命题 2 的证明

参考定理 1 的证明, 约束 (23) 表示状态空间 $\xi_i(t) \in \mathbb{R}^3$ 的一个子集, 其可以重新定义为 $\Omega_{\xi_i} = \{\xi_i(t) \in \mathbb{R}^3 \mid |A\xi_i(t)| \leq$

$c_{r_i}\chi_i + \beta_i$, 其中 $A_i \triangleq [-\eta_1 \quad -\frac{1}{c_{r_i}} \quad 1]$. 而后可以通过引理 2 得到 Lyapunov 泛函 (12) 的最大正不变集 $\Omega_{p_i} = \{\xi_i(t) \in \Omega_{\xi_i}(t) | V_i(\xi_i(t)) \leq V_{p_i}\} \subset \Omega_{\xi_i}$, 其中 $V_{p_i} \triangleq (c_{r_i}\chi_i + \beta_i)^2 \delta_i$, $\delta_i \triangleq \frac{|P^i|}{|AP^iA^T|}$.

同时, 将关于 $s_i(t) \in \mathbb{R}$ 的不变集表示为 $\Omega_{s_i} = \{s_i(t) \in \Omega_{\xi_i}(t) | V_i(s_i(t)) \leq V_{p_i}\}$, 其也是 Ω_{ξ_i} 的子集, 即 $\Omega_{s_i} \subset \Omega_{\xi_i}$. 因此得到 $V_i(s_i(t)) \leq p_{22}^i |s_i(t)|^2 \leq V_{p_i}$, 其中 $p_{22}^i \triangleq \eta_3 + \frac{1}{2c_{r_i}^2}$ 是矩阵 P^i 的第 2 行和第 2 列. 由此可得

$$|s_i(t)| = |C_i \hat{x}^i(t)| \leq \sqrt{\frac{2c_{r_i}^2 V_{p_i}}{2\eta_3 c_{r_i}^2 + 1}} = c_{r_i} (c_{r_i}\chi_i + \beta_i) \sqrt{\frac{2\delta_i}{2\eta_3 c_{r_i}^2 + 1}}.$$

至此我们得到了关于 $s_i(t)$ 的水平集. 接下来我们将分析 $|\Pi_i(t)|$ 的水平集的边界.

状态变量 $\hat{x}_j^i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, r_i$) 可以渐近收敛到零, 这在定理 1 中得到了证明. 由于 $s_i(t)$ 和 $\Pi_i(\hat{x}, t)$ 都是 $\hat{x}_j^i(t)$ 的线性正组合, 它们在有限时间内有界并收敛到零. 因此,

$$\begin{aligned} |\Pi_i(\hat{x}, t)| &= |C_i C_d \hat{x}^i(t) - c_{i1} \hat{x}_1^i(t)| \leq \|C_d\| |C_i \hat{x}^i(t)| + |c_{i1} \hat{x}_1^i(t)| \\ &\leq \|C_d\| |s_i(t)| + c_{i1} \alpha_1^i \leq \kappa_i (c_{r_i}\chi_i + \beta_i) + c_{i1} \alpha_1^i = \rho_i, \end{aligned} \tag{A1}$$

其中 $C_d \triangleq \text{diag}\{1, \frac{c_{i1}}{c_{i2}}, \dots, \frac{c_{i2}}{c_{i3}}, \frac{c_{i r_i - 1}}{c_{r_i}}\} \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i}$, $\kappa_i \triangleq c_{r_i} \|C_d\| \sqrt{\frac{2\delta_i}{2\eta_3 c_{r_i}^2 + 1}}$. 此外, β_i 可以用 ρ_i 代替, 以此进一步逼近 $|\Pi_i(\hat{x}, t)|$ 的实际值. 可以将式 (A1) 重写为 $|\Pi_i(\hat{x}, t)| \leq \kappa_i (c_{r_i}\chi_i + \rho_i) + c_{i1} \alpha_1^i$. 因此, 在条件 (23) 下, 总是存在参数 $\rho_i < \beta_i$ 满足式 (A1).

Constrained sliding mode control of MIMO nonlinear systems

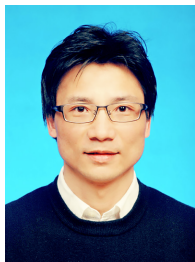
Ligang WU*, Siyi WANG, Yabin GAO, Jianxing LIU & Guanghui SUN

School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China

* Corresponding author. E-mail: ligangwu@hit.edu.cn

Abstract In this paper, the problems of state estimation and saturated control based on a high-order sliding mode observer (HOSMO) are evaluated for a class of multi-input and multi-output (MIMO) nonlinear systems under actuator and state constraints. For the state estimation of nonlinear systems, an estimation error system is established based on HOSMO and the convergence of the error system is analyzed using a robust exact differentiator. Then, a control scheme of the second-order sliding mode (SOSM) using the information from HOSMO is designed for uncertain nonlinear affine systems with arbitrary relative degrees. The finite-time stability of the estimated system is analyzed using the designed SOSM control law under both unconstrained and constrained actuators and states. Accordingly, the geometric analysis of the resulting sliding motions is performed to depict the maximal attraction domain of the sliding motions. Finally, two simulation examples are provided to validate the effectiveness of the presented methods.

Keywords sliding mode control, constrained system, MIMO system, attraction domain, geometric analysis



Ligang WU received his B.S. degree in automation from Harbin University of Science and Technology, China, in 2001, M.E. degree in navigation guidance and control from Harbin Institute of Technology, China, in 2003, and Ph.D. degree in control theory and control engineering from Harbin Institute of Technology, China, in 2006. In 2008, he joined Harbin Institute of Technology as an associate professor and was then

promoted to a full professor in 2012. His current research interests include switched systems, stochastic systems, computational and intelligent systems, sliding mode control, and advanced control techniques for power electronic systems.



Siyi WANG received her B.E. degree in electrical engineering and automation in 2017 and M.E. degree in control science and engineering in 2019, both from Harbin Institute of Technology, China. She is currently pursuing her Ph.D. degree in electrical and computer engineering from the Technical University of Munich, Munich, Germany. Her current research interests include the control of networked systems, network scheduling, and sliding mode

control.



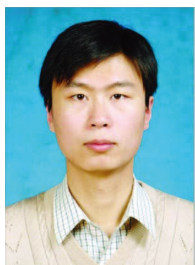
Yabin GAO received his B.E. degree in information management and information system in 2012, M.E. degree in software engineering in 2015, both from Bohai University, Jinzhou, China, and Ph.D. degree in control science and engineering from Harbin Institute of Technology, Harbin, China, in 2020. Currently, he is a lecturer at the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology. His

current research interests include sliding mode control, intelligent control, fault detection, cyber-physical systems.



Jianxing LIU received his B.S. degree in Mechanical Engineering and M.E. degree in Control Science and Engineering from the Harbin Institute of Technology, Harbin, China, in 2004 and 2010, respectively, and Ph.D. degree in Automation from the Technical University of Belfort-Montbéliard, France, in 2014. Currently, he is a professor at the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology. His current research interests include

sliding mode control, nonlinear control and observation, industrial electronics, and renewable energy solutions.



Guanghui SUN received his B.S. degree in automation and M.S. and Ph.D. degrees in control science and engineering from Harbin Institute of Technology, Harbin, China, in 2005, 2007, and 2010, respectively. He is currently a professor at the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology. His research interests include fractional-order systems, networked control systems, and sliding mode control.