SCIENTIA SINICA Informationis





# 基于 TOA 和 TDTOA 的增广状态脉冲星组合导 航误差抑制方法

宁晓琳1\*, 桂明臻2, 黄月清2\*, 房建成1, 吴伟仁3

1. 北京航空航天大学前沿科学技术创新研究院, 北京 100191

2. 北京航空航天大学仪器科学与光电工程学院, 北京 100191

3. 中国国家航天局探月与航天工程中心, 北京 100037

\* 通信作者. E-mail: ningxiaolin@buaa.edu.cn, sy1917224@buaa.edu.cn

收稿日期: 2020-04-08; 接受日期: 2020-06-09; 网络出版日期: 2021-05-18

国家自然科学基金 (批准号: 61722301) 资助项目

**摘要** 脉冲星导航是一种极具潜力的深空自主导航技术,通常采用脉冲到达时间 (time of arrival, TOA) 作为量测信息. 但脉冲星星历误差和星载原子钟误差等系统误差对导航性能有显著影响. 为了解决上述问题,提出了一种基于 TOA 和时间差分 TOA (TDTOA) 的增广状态脉冲星组合导航误差抑制方法,通过将每个脉冲星的星历误差和时钟误差增加到状态向量,并利用 TOA 和 TDTOA 量测值对其进行估计和校正. 仿真结果表明,该方法提高了脉冲星星历误差和时钟误差的可观测性,有效地消除了这些系统误差的影响,导航精度相比传统脉冲星导航提高了 29%.

关键词 自主导航,脉冲星导航,系统误差,时间差分,可观测性分析

#### 1 引言

有效的导航和控制是确保深空探测任务成功的一个重要前提.因为深空任务地面测控的局限 性<sup>[1~3]</sup>,提高深空探测器的自主导航能力势在必行.脉冲星导航是一种极具吸引力的自主导航方 法<sup>[4,5]</sup>.通过对脉冲到达时间 (time of arrival, TOA) 信号的观测,经过相应的信号和数据处理,深 空探测器可以自主确定轨道、时间和姿态等导航参数<sup>[6~8]</sup>.2006 年,Sheikh 等<sup>[7]</sup>将卡尔曼 (Kalman) 滤波引入脉冲星导航,在不考虑系统误差影响的情况下,实现了精度高于 200 m 的脉冲星导航.然而, 在目前的脉冲星观测技术中,脉冲星的星历参数,如脉冲星的方向,存在着不可避免的误差.研究表明, 脉冲星方向 1 毫弧秒 (mas) 的误差将引起约 800 m 的系统误差<sup>[9]</sup>.此外,星载原子钟的误差也是影响 长期行星际飞行任务导航性能的重要因素<sup>[10,11]</sup>.1 μs 的时钟误差将导致约 300 m 的系统误差.

引用格式: 宁晓琳, 桂明臻, 黄月清, 等. 基于 TOA 和 TDTOA 的增广状态脉冲星组合导航误差抑制方法. 中国科学: 信息科学, 2021, 51: 971-984, doi: 10.1360/SSI-2020-0085
 Ning X L, Gui M Z, Huang Y Q, et al. TOA and TDTOA-based augmented state pulsar integrated navigation error suppression method (in Chinese). Sci Sin Inform, 2021, 51: 971-984, doi: 10.1360/SSI-2020-0085

© 2021《中国科学》杂志社

目前消除系统误差的方法,主要可以分为两类:一类是把系统误差增广到状态向量中并在滤波器中进行估计和校正<sup>[12]</sup>,另一种是对量测进行位置差分或时间差分,从而消除共同的系统误差. Liu 等<sup>[13,14]</sup>分析了由脉冲星星历误差和时钟误差引起的系统误差,得出了系统误差是慢变的结论. 在此基础上,将系统误差增广到状态量中,采用无迹卡尔曼滤波 (unscented Kalman filter, UKF) 对系统误差进行估计和校正,提高了导航精度. 然而,由于 TOA 量测中无法区分星历误差和时钟误差的影响,因此该方法可观测性差,对系统误差的估计精度是有限的.

在差分方面, Xiong 等<sup>[15]</sup>提出了一种基于卫星星座的位置差分技术, 用两个航天器间的 TOA 之 差来代替 TOA 量测.差分量测对系统误差不敏感, 可以提高导航精度. 然而, 这项技术要求多颗卫 星同步观测一颗脉冲星, 增加了任务的复杂度. 时间差分是一种新的消除系统误差的方法, 最早是在 GPS 中提出的<sup>[16]</sup>.载波相位时间差分可用于消除对流层延迟、电离层延迟、卫星和接收机时钟误差 等常见误差的影响<sup>[17]</sup>.由于时间差分量测只能提供相对位置信息, 所以时间差分 GPS 通常借助惯性 导航提供绝对信息<sup>[18,19]</sup>. Wang 等<sup>[9]</sup>提出了一种采用时间差分 TOA (TDTOA) 量测的脉冲星导航方 法, 即用相邻时刻 TOA 量测值的差值代替不同航天器 TOA 量测值的. 该方法可以消除系统误差的 影响, 适用于单航天器. 然而, 差分 TOA 量测只包含相对位置信息, 缺乏绝对位置信息, 位置误差可能 会随时间而发散.本文作者的科研团队提出了一种同时使用 TOA 量测和 TDTOA 量测的脉冲星导航 方法, 其中使用 TOA 量测提供绝对位置信息, 使用 TDTOA 量测提供相对位置信息<sup>[20]</sup>. 该方法的性 能优于单独使用 TDTOA 的脉冲星导航方法, 但是 TOA 量测中存在系统误差, 仍然会影响导航精度.

针对上述问题,本文提出了一种新的基于 TOA 和 TDTOA 的增广状态脉冲星组合导航误差抑制 方法,每个脉冲星的星历误差和时钟误差都被增加到状态向量,由 TOA 和 TDTOA 量测值联合进行 估计和校正.基于奇异值分解的可观测性分析表明,该方法提高了各脉冲星星历误差和时钟误差的可 观测性. 仿真结果表明,该方法可以有效地抑制系统误差的影响,导航精度相比传统脉冲星导航方法 精度提高 29%.

## 2 基于 TOA 和 TDTOA 的增广状态脉冲星组合导航误差抑制

为了减小脉冲星星历误差和星载时钟误差对系统误差的影响,将脉冲星星历误差和时钟误差增广 到状态向量,并以 TOA 和 TDTOA 组合作为量测对其进行估计和校正.

#### 2.1 增广状态模型

受目前观测技术的限制,不可避免存在脉冲星星历误差. 假设  $\varphi^i$  和  $\theta^i$  分别为第 *i* 个脉冲星的实际赤经和赤纬.  $\tilde{\varphi}^i$  和  $\tilde{\theta}^i$  分别为存在误差的第 *i* 个脉冲星的赤经和赤纬. 则第 *i* 个脉冲星的星历误差可表示为

$$\delta\varphi^i = \varphi^i - \widetilde{\varphi}^i,\tag{1}$$

$$\delta\theta^i = \theta^i - \bar{\theta}^i. \tag{2}$$

除了上述脉冲星星历误差,还存在星载时钟误差 (δt<sub>c</sub>).因为脉冲星的星历误差和时钟误差是慢变的 <sup>[21]</sup>,所以在状态模型中可被建模为常量 <sup>[13]</sup>.本文以火星探测器为例,将这些误差增加到状态向量中,同时考虑太阳和地球的引力,并将其他扰动视为过程噪声,则火星中心惯性系 (J2000.0)中的增广

状态模型可表示为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}}_{pm} = \boldsymbol{v}_{pm}, \\ \dot{\boldsymbol{v}}_{pm} = -\mu_m \frac{\boldsymbol{r}_{pm}}{\|\boldsymbol{r}_{pm}\|^3} - \mu_s \left(\frac{\boldsymbol{r}_{ps}}{\|\boldsymbol{r}_{ps}\|^3} + \frac{\boldsymbol{r}_{sm}}{\|\boldsymbol{r}_{sm}\|^3}\right) - \mu_e \left(\frac{\boldsymbol{r}_{pe}}{\|\boldsymbol{r}_{pe}\|^3} + \frac{\boldsymbol{r}_{em}}{\|\boldsymbol{r}_{em}\|^3}\right) + \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{v}_{pm}}, \\ \delta \dot{\varphi}^i = w_{\delta \varphi^i}, \\ \delta \dot{\theta}^i = w_{\delta \theta^i}, \\ \delta \dot{t}_c = w_{\delta t_c}, \end{cases}$$
(3)

其中  $\mathbf{r}_{pm} = [r_{pmx}, r_{pmy}, r_{pmz}]^{\mathrm{T}}$  和  $\mathbf{v}_{pm} = [v_{pmx}, v_{pmy}, v_{pmz}]^{\mathrm{T}}$  分别是探测器相对于火星的位置矢量和 速度矢量.  $\mu_m, \mu_e$  和  $\mu_s$  分别为火星、地球和太阳的引力常数.  $\mathbf{r}_{ps} = \mathbf{r}_{pm} - \mathbf{r}_{sm}$  是探测器相对于太阳 的位置矢量,  $\mathbf{r}_{sm}$  是太阳相对于火星的位置矢量.  $\mathbf{r}_{pe} = \mathbf{r}_{pm} - \mathbf{r}_{em}$  是探测器相对于地球的位置矢量,  $\mathbf{r}_{em}$  是地球相对于火星的位置矢量.  $\mathbf{w}_{vpm}, w_{\delta\varphi^i}, w_{\delta\theta^i}$  和  $w_{\delta t_c}$  是过程噪声.

假设  $X = [r_{pm}, v_{pm}, \delta \varphi^i, \delta \theta^i, \delta t_c]^T$  是增广状态向量,  $W = [0, w_{v_{pm}}, w_{\delta \varphi^i}, w_{\delta \theta^i}, w_{\delta t_c}]^T$  是过程噪声 向量, 则 k 时刻的状态模型可以用如下一般形式表示:

$$\boldsymbol{X}_{k} = f(\boldsymbol{X}_{k-1}) + \boldsymbol{W}_{k}.$$
(4)

#### 2.2 TOA 和 TDTOA 的量测模型

#### 2.2.1 TOA 的量测模型

采用探测器上第 i 颗脉冲星的脉冲到达时间 ( $t_{sc}^i$ ) 与其到太阳系质心 (solar system barycenter, SSB) 的到达时间 ( $t_b^i$ ) 的差值作为量测量. 在考虑相对论效应和几何效应的情况下, 量测方程可表示 为<sup>[7]</sup>

$$t_{b}^{i} - t_{sc}^{i} = \frac{1}{c} (\boldsymbol{r}_{ps} - \boldsymbol{b}) \widetilde{\boldsymbol{n}}^{i} + \frac{1}{2cD_{0}^{i}} \Big[ - \|\boldsymbol{r}_{ps}\|^{2} + (\boldsymbol{r}_{ps}\widetilde{\boldsymbol{n}}^{i})^{2} + \|\boldsymbol{b}\|^{2} - (\boldsymbol{b}\widetilde{\boldsymbol{n}}^{i})^{2} \Big] + \frac{2\mu_{s}}{c^{3}} \ln \left| \frac{(\boldsymbol{r}_{ps} - \boldsymbol{b})\widetilde{\boldsymbol{n}}^{i} + \|\boldsymbol{r}_{ps} - \boldsymbol{b}\|}{\boldsymbol{b}\widetilde{\boldsymbol{n}}^{i} + \|\boldsymbol{b}\|} + 1 \right| + \delta t_{c} + v^{i},$$
(5)

其中 **b** 是 SSB 相对于太阳的位置矢量. c 是光速.  $D_0^i$  是从脉冲星到 SSB 的距离.  $v^i$  是第 *i* 个脉冲星 的量测噪声.  $\tilde{n}^i$  是修正后的脉冲星方向矢量, 可以用以下形式表示:

$$\widetilde{\boldsymbol{n}}^{i} = \begin{bmatrix} \cos(\widetilde{\theta}^{i} + \delta\theta^{i})\cos(\widetilde{\varphi}^{i} + \delta\varphi^{i})\\ \cos(\widetilde{\theta}^{i} + \delta\theta^{i})\sin(\widetilde{\varphi}^{i} + \delta\varphi^{i})\\ \sin(\widetilde{\theta}^{i} + \delta\theta^{i}) \end{bmatrix}.$$
(6)

假设 TOA 量测  $Z_p = [t_b^1 - t_{sc}^1, \dots, t_b^i - t_{sc}^i, \dots, t_b^{n_p} - t_{sc}^{n_p}]^T$ , 量测噪声  $V_p = [v^1, \dots, v^i, \dots, v^{n_p}]^T$ , 其 中  $1 < i < n_p, n_p$  是观测到的脉冲星个数. 则 k 时刻的 TOA 量测模型可表示如下:

$$\boldsymbol{Z}_{p,k} = \boldsymbol{h}_p(\boldsymbol{X}_k) + \boldsymbol{V}_{p,k}.$$
(7)

#### 2.2.2 TDTOA 的量测模型

两个相邻历元之间的脉冲星星历误差和时钟误差的变化很小<sup>[9,10]</sup>.因此,可以通过将相邻历元的脉冲星 TOA 量测 **Z**<sub>p,k</sub>和 **Z**<sub>p,k-1</sub> 作差,以消除其中的共同系统误差.TDTOA 的量测模型可表示

如下:

$$\Delta \boldsymbol{Z}_{p,k} = \boldsymbol{Z}_{p,k} - \boldsymbol{Z}_{p,k-1} = \boldsymbol{h}_p(\boldsymbol{X}_k) - \boldsymbol{h}_p(\boldsymbol{X}_{k-1}) + \boldsymbol{V}_{p,k} - \boldsymbol{V}_{p,k-1}$$
$$= \boldsymbol{h}_p(\boldsymbol{X}_k) - \boldsymbol{h}_p(f'(\boldsymbol{X}_k)) + \boldsymbol{V}_{p,k} - \boldsymbol{V}_{p,k-1}$$
$$= \boldsymbol{h}_{dp}(\boldsymbol{X}_k) + \boldsymbol{V}_{dp,k},$$
(8)

其中  $f'(\cdot)$  是状态模型  $f(\cdot)$  的逆过程, 即从  $X_k$  获得  $X_{k-1}$  的过程.

# 2.2.3 增广状态时间差分量测模型

本文方法以  $Z_{p,k}$  和  $\Delta Z_{p,k}$  作为量测, 即  $Z_k = [Z_{p,k}, \Delta Z_{p,k}]^T$ , 量测噪声  $V_k = [V_{p,k}, V_{dp,k}]^T$ , 基于 增广状态和时间差分的量测模型为

$$\boldsymbol{Z}_k = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}_k) + \boldsymbol{V}_k, \tag{9}$$

其中  $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}_k) = [\boldsymbol{h}_p(\boldsymbol{X}_k), \boldsymbol{h}_{dp}(\boldsymbol{X}_k)]^{\mathrm{T}}.$ 

#### 2.3 滤波过程

由于脉冲星 TOA 量测量观测周期较长, 在没有脉冲星量测的情况时状态量和预测误差协方差仅 进行时间更新. 在获得脉冲星 TOA 量测量时, 采用 UKF 滤波技术同时进行时间更新和量测更新.

# 3 基于 UKF 的可观测性分析

#### 3.1 基于 UKF 的可观测性矩阵的计算

从状态模型和量测模型可以看出,所提出的脉冲星导航系统是非线性的、时变的,且时间差分的 量测模型非常复杂,如果使用传统的线性化状态模型和量测模型的方法计算可观测性矩阵是非常复杂 且耗时的<sup>[22]</sup>. 文献 [23] 中给出了利用 UKF 计算转移矩阵  $\Phi_k \in i^{n \times n}$  和量测矩阵  $H_k \in i^{m \times n}$  的方法, n 和 m 分别是状态向量和量测向量的维数.

#### 3.1.1 通过 sigma 点获得等效状态转移矩阵

在 k-1 时刻获得的后验状态估计  $\hat{X}^+_{k-1}$  附近选取 2n+1 个采样点, 其中 n 表示状态变量的维数, 这些样本点的均值等于后验状态估计  $\hat{X}^+_{k-1}$ , 协方差等于 k-1 时刻获得的后验误差协方差  $P^+_{k-1}$ ; 那么选取的采样点  $x^{(0)}_{k-1}$ ,  $x^{(1)}_{k-1}$ , ...,  $x^{(2n)}_{k-1}$  及其权重  $w_0$ ,  $w_1$ , ...,  $w_{2n}$  分别如下:

$$\begin{aligned} x_{k-1}^{(0)} &= \hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}^{+}, & w_{0} &= \tau/(n+\tau), \\ x_{k-1}^{(i)} &= \hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}^{+} + \sqrt{n+\tau} \left(\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}^{+}}\right)_{i}, & w_{i} &= 1/[2(n+\tau)], & i = 1, 2, \dots, n, \\ x_{k-1}^{(i+n)} &= \hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}^{+} - \sqrt{n+\tau} \left(\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}^{+}}\right)_{i}, & w_{i+n} &= 1/[2(n+\tau)], \end{aligned}$$
(10)

其中  $\tau$  表示缩放参数,  $(\sqrt{P_{k-1}^+})_i$  表示取平方根矩阵的第 *i* 行或列.

传递 sigma 采样点,得到每个采样点的一步预测  $x_k^{(i)}$  为

$$x_k^{(i)} = F(x_{k-1}^{(i)}, k-1), \tag{11}$$

974

其中 F(g) 为系统非线性连续状态转移函数. 由 2n+1 个 sigma 采样点  $x_{k-1}^{(i)}$  构成矩阵

$$\boldsymbol{x}_{k-1} = \begin{bmatrix} x_{k-1}^{(0)}, x_{k-1}^{(1)}, \dots, x_{k-1}^{(2n)} \end{bmatrix}.$$
 (12)

再由 2n+1个 sigma 采样点的一步预测  $x_k^{(i)}$  构成矩阵

$$\boldsymbol{x}_{k} = \begin{bmatrix} x_{k}^{(0)}, x_{k}^{(1)}, \dots, x_{k}^{(2n)} \end{bmatrix}.$$
(13)

可通过矩阵  $x_{k-1}$  的广义逆矩阵求得等效状态转移矩阵  $\tilde{\mathbf{\Phi}}_k$ :

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{k} = \boldsymbol{x}_{k} \boldsymbol{x}_{k-1}^{(\mathrm{T})} (\boldsymbol{x}_{k-1} \boldsymbol{x}_{k-1}^{(\mathrm{T})})^{-1}.$$
(14)

#### 3.1.2 获得等效量测矩阵

通过卡尔曼滤波的统计学推导可知

$$\boldsymbol{P}_{xy,k} = \boldsymbol{P}_k^- \tilde{\boldsymbol{H}}_k^{\mathrm{T}},\tag{15}$$

其中  $P_{xy,k}$  是互协方差矩阵,  $P_k^-$  是先验估计协方差矩阵,  $\tilde{H}_k^T$  表示等效量测矩阵; 由式 (16) 可计算  $\tilde{H}_k^T$ .

$$\tilde{\boldsymbol{H}}_{k} = (\boldsymbol{P}_{xy,k})^{\mathrm{T}} ((\boldsymbol{P}_{k}^{-})^{-1})^{\mathrm{T}}.$$
(16)

#### 3.1.3 构建可观测矩阵

基于 3.1.1 小节及 3.1.2 小节得到的  $\tilde{\Phi}_k$  及  $\tilde{H}_k^{\mathrm{T}}$ ,构造每时段的可观测矩阵<sup>[24]</sup>

$$\boldsymbol{Q}_{j}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{H}}_{k} \\ \tilde{\boldsymbol{H}}_{k+1} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{k} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{H}}_{k+n-1} & \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{k+n-2} & \cdots \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{k} \end{bmatrix}, \qquad (17)$$

其中 j = 1, 2, ..., l; 构造系统条带化可观测矩阵  $Q_s$ :

$$\boldsymbol{Q}_{s}(l) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{1} \\ \boldsymbol{Q}_{2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Q}_{l} \end{bmatrix}.$$
(18)

#### 3.2 基于奇异值分解的可观测度分析

利用奇异值分解来分析每个状态的可观测度 $^{[25,26]}$ .可观测矩阵 $Q_j^{\mathrm{T}}$ 可以分解为

$$\boldsymbol{Q}_{i}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}},\tag{19}$$

其中  $U^{\mathrm{T}} = [u_1, u_2, \dots, u_n], V^{\mathrm{T}} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  是正交矩阵.  $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  是对角矩阵,  $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \dots \ge \sigma_n \ge 0$  是可观测性矩阵的奇异值. 奇异值可以表示出每维状态的可观测程度.

Table 1 Orbital parameters	s of the Mars Reconnaissance Orbiter
Parameter	Value
Semimajor axis	$3684.5 \mathrm{~km}$
Eccentricity	0.010
Track inclination	$93.0^{\circ}$
Right ascension	$278.0^{\circ}$
Near rising angle	$270.0^{\circ}$

表 1 "火星勘测轨道器"轨道参数

 Table 1
 Orbital parameters of the Mars Reconnaissance Orbiter

表 2 脉冲星参数 Table 2 Pulsar parameters

Parameter	B0531+21	B1821-24	B0540-69
Right ascension $\varphi$ (°)	83.63	276.13	85.046
Right ascension uncertainty $\delta \varphi$ (mas)	75	0.90	4.5
Declination $\theta$ (°)	22.01	-24.87	-69.332
Declination uncertainty $\delta\theta$ (mas)	60	12	4.99
$D_0~({ m kpc})$	2.0	5.5	47.3
P (s)	0.0334	0.00305	0.0504
W (s)	$1.7 \times 10^{-3}$	$5.5 \times 10^{-5}$	$2.5 \times 10^{-3}$
$F_x ~({\rm ph/cm^2/s})$	1.54	$1.93 \times 10^{-4}$	$5.15 \times 10^{-3}$
$P_f$ (%)	70	98	67

## 4 仿真分析

仿真中首先对比了以 TOA 作为观测量的传统脉冲星导航、以 TDTOA 作为观测量的时间差分脉 冲星导航、以 TOA 和 TDTOA 作为观测量的脉冲星组合导航、以 TOA 作为观测量的增广状态脉冲 星导航、以 TOA 和 TDTOA 作为观测量的增广状态脉冲星组合导航 5 种不同方法的导航结果,其次 对提出的以 TOA 和 TDTOA 作为观测量的增广状态脉冲星组合导航系统误差抑制方法与仅以 TOA 作为观测量的增广状态脉冲星导航方法的可观测度进行了比较,证明了通过增加 TDTOA 可有效地增 强系统的可观测度.

#### 4.1 仿真条件

探测器的标称轨迹依据美国"火星勘测轨道器"的轨道参数,由 STK 软件产生,如表 1 所示,仿 真时间从 2021 年 3 月 5 日 0 时至 3 月 6 日 0 时.

火星的理想轨道是用 JPLDE421 从 STK 得到<sup>[27]</sup>. 仿真中使用的脉冲星是 B0531+21, B1821-24 和 B0540-69, 其参数如表 2 所示<sup>[28]</sup>. 假设初始时钟误差为 1 × 10<sup>-6</sup> s, 时钟误差漂移和漂移变化率 分别为 3.637979 × 10<sup>-11</sup>, 以及 6.66 × 10<sup>-18</sup>/s. 航天器的初始位置误差和速度误差分别为 [1000, 1000, 1000]<sup>T</sup> m, [1,1,1]<sup>T</sup> m/s.





Figure 1 (Color online) Results of traditional pulsar navigation with TOA as observation. (a) Position error; (b) velocity error

#### 4.2 5种导航方法的仿真结果比较

#### 4.2.1 以 TOA 作为观测量的传统脉冲星导航结果

图 1 给出了不存在系统误差和存在系统误差两种情况下以 TOA 作为观测量的传统脉冲星导航 方法的导航结果. 仿真结果表明, 在没有系统误差时, 位置和速度估计误差能够快速收敛并达到精确 的稳态. 由于脉冲星量测的观测周期较长, 位置和速度估计误差曲线呈波浪形. 在没有脉冲星量测的 情况下, 仅进行时间更新, 导致了位置和速度估计误差的快速增大. 当有脉冲星量测时, 同时进行时间 更新和量测更新, 位置和速度估计误差急剧减小. 无系统误差时以 TOA 作为观测量的传统脉冲星导 航方法的平均位置误差约为 1.20 km, 平均速度误差约为 1.29 m/s. 然而, 当存在系统误差时, 以 TOA 作为观测量的传统脉冲星导航方法的位置和速度估计误差会显著增大, 且其中存在恒定的误差. 有系 统误差的以 TOA 作为观测量的传统脉冲星导航系统的平均位置误差和速度误差分别是无系统误差时 的 3 倍和 2.2 倍.

#### 4.2.2 以 TDTOA 作为观测量的时间差分脉冲星导航结果

图 2 给出了以 TDTOA 作为观测量的时间差分脉冲星导航在有系统误差时的结果. 可以看出, 在 有系统误差时, 以 TDTOA 作为观测量的时间差分脉冲星导航的位置误差相比以 TOA 作为观测量的 传统脉冲星导航的位置误差减少了约 50%, 速度误差减少了约 45%, 这是由于时间差分方法有效地消 除了系统误差的影响. 但是, 由于缺少绝对位置信息, 其位置误差仍是无系统误差时以 TOA 作为观测 量的传统脉冲星导航的位置误差的 1.5 倍.

#### 4.2.3 以 TOA 和 TDTOA 作为观测量的脉冲星组合导航结果

将 TOA 量测量与 TDTOA 量测量组合,可利用 TOA 提供绝对位置信息,利用 TDTOA 提供相对位置信息,提高导航性能.图 3 给出了以 TOA 和 TDTOA 作为观测量的脉冲星组合导航结果.可以看出,通过将 TOA 与 TDTOA 组合,位置误差相比单独以 TDTOA 作为观测量的时间差分脉冲星导航位置误差减小了 8%.以 TOA 和 TDTOA 作为观测量的脉冲星组合导航的位置和速度估计误差曲线与单独以 TDTOA 作为观测量的时间差分脉冲星导航的位置和速度估计误差曲线较为相似.这是



图 2 以 TDTOA 作为观测量的时间差分脉冲星导航结果

Figure 2 Time-difference pulsar navigation results using TDTOA as observation. (a) Position error; (b) velocity error



图 3 以 TOA 和 TDTOA 作为观测量的脉冲星组合导航结果

Figure 3 Pulsar integrated navigation results using TOA and TDTOA as observations. (a) Position error; (b) velocity error

由于 TOA 仍然受系统误差影响,并且其量测噪声方差阵大于 TDTOA 的量测噪声方差阵,因此在量 测更新中 TDTOA 发挥主要作用.

#### 4.2.4 以 TOA 作为观测量的增广状态脉冲星导航结果

以 TOA 作为观测量的增广状态脉冲星导航的状态模型为式 (4),量测模型为式 (8).图 4 给出了 以 TOA 作为观测量的增广状态脉冲星导航结果.可以看出,在有系统误差时,以 TOA 作为观测量的 增广状态脉冲星导航的结果显著优于以 TOA 作为观测量的传统脉冲星导航的结果,位置误差减少了 约 48%,速度误差减少了约 38%.但是,由位置和速度估计误差曲线可看出,位置和速度估计误差仍存 在常值误差,这是由于仅利用 TOA 量测量无法准确估计脉冲星星历误差及时钟误差.

#### 4.2.5 以 TOA 和 TDTOA 作为观测量的增广状态脉冲星组合导航结果

本文提出的以 TOA 和 TDTOA 作为观测量的增广状态脉冲星组合导航的状态模型为式 (4),量 测模型为式 (10). 图 5 给出了以 TOA 和 TDTOA 作为观测量的增广状态脉冲星组合导航结果.可以



图 4 以 TOA 作为观测量的增广状态脉冲星导航结果

Figure 4 Results of augmented state pulsar navigation using TOA as observation. (a) Position error; (b) velocity error





Figure 5 Results of augmented state pulsar integrated navigation with TOA and TDTOA as observations. (a) Position error; (b) velocity error

看出,本文的方法可以获得更高的导航精度,平均位置误差相比以 TOA 作为观测量的增广状态脉冲 星导航减少了约 29%,平均速度误差减少了约 27%.上述 5 种导航方法的结果比较如表 3 所示.可以 看到,本文的方法可以获得与无系统误差的理想状态相似的精度,验证了以 TOA 和 TDTOA 作为观 测量的增广状态脉冲星组合导航方法抑制系统误差影响的有效性.

#### 4.3 脉冲星星历误差和时钟误差的可观测度

本小节比较了本文提出的以 TOA 和 TDTOA 作为观测量的增广状态脉冲星组合导航方法与以 TOA 作为观测量的增广状态脉冲星导航方法的可观测度. 表 4 分别给出了两种方法中脉冲星星历误 差及时钟误差的估计误差和对应的基于奇异值的可观测度. 可以看到, 本文方法的各脉冲星星历误差 及时钟误差的奇异值相比以 TOA 作为观测量的增广状态脉冲星导航方法均明显增大, 验证了本文提 出的方法可提高星历误差和时钟误差的可观测度, 另外星历误差和时钟误差估计结果也验证了可观测 分析结果的正确性.

r	0		
Method	Average position error (km)	Average velocity error (m/s)	
Traditional pulsar navigation	1.20	1.29	
with TOA as observation (without systematic error)	1.20		
Traditional pulsar navigation	2 59	2 80	
with TOA as observation (with systematic error)	3.58 2.89		
Time-difference pulsar navigation	1 70 1 59		
using TDTOA as observation (with systematic error)	1.75	1.00	
Pulsar integrated navigation using	d navigation using		
TOA and TDTOA as observations (with systematic error)	d TDTOA as observations (with systematic error)		
Augmented state pulsar navigation	0.06	2.04	
using TOA as observation (with systematic error)	2.20	2.04	
Augmented state pulsar integrated navigation	1.00	1.31	
with TOA and TDTOA as observations (with systematic error)	1.20		

#### 表 3 各种脉冲星导航方法的结果

 Table 3
 Results of various pulsar navigation methods

#### 表 4 脉冲星星历误差和时钟误差的结果

Table 4 Pulsar ephemeris and clock error using augmented state pulsar navigation

Method	Precision and		$\delta \theta^1$	$\delta \varphi^2$	$\delta \theta^2$	$\delta \varphi^3$	$\delta \theta^3$	$\delta t_c$
	observability							
Using TOA as	Estimation error	$0.52 \mathrm{mas}$	6.00  mas	0.65  mas	8.39  mas	4.24  mas	4.96  mas	$2.52{\times}10^{-7}$
observation	Singular value	2305.29	$6.56{\times}10^{-2}$	2203.41	$3.03{\times}10^{-2}$	879.43	1.42	$4.47{\times}10^{-4}$
Using TOA and TDTOA	Estimation error	$0.17 \mathrm{mas}$	4.35  mas	$0.41 \mathrm{mas}$	$6.17 \mathrm{mas}$	$0.99 \mathrm{mas}$	3.48 mas	$2.51 \times 10^{-7}$
as observations	Singular value	2305.31	$7.44{\times}10^{-2}$	2203.43	$4.36{\times}10^{-2}$	879.45	1.47	$5.05{\times}10^{-4}$

#### 表 5 观测不同个数脉冲星时提出方法的导航结果

Table 5Navigation results of the proposed method when observing different numbers of pulsars

Number of pulsars	Pulsars	Average position error (km)	Average velocity error (m/s)
1	B0531+21	2.18	1.97
2	B0531+21, B1821-24	1.80	1.76
3	B0531+21, B1821-24, B0540-69	1.28	1.31

#### 4.4 脉冲星个数对导航精度的影响

图 6 和 7 分别给出了本文的方法在只观测脉冲星 B0531+21 及同时观测 B0531+21 和 B1821-24 两颗脉冲星时的导航结果. 从图 5~7 可以看到, 本文提出的方法在仅观测 1 颗脉冲星时同样可以获 得收敛的导航结果. 表 5 给出了本文提出的方法在脉冲星个数不同时的导航结果. 随着观测脉冲星个数的减少, 位置和速度估计误差增大. 观测 1 颗脉冲星时的平均位置误差及平均速度误差分别是观测 3 颗脉冲星时的 1.43 倍及 1.35 倍.

#### 4.5 时间复杂度

时间复杂度也是一个重要的指标,尤其在实时性较高的场景中.运行环境如表 6 所示.表 7 给出

980



图 6 观测一颗脉冲星时导航结果

Figure 6 Navigation results when observing a pulsar. (a) Position error; (b) velocity error



图 7 观测两颗脉冲星时导航结果

Figure 7 Navigation results when observing two pulsars. (a) Position error; (b) velocity error

表	6	仿真运行环境
Table 6	O	perating environment

Item	Description
CPU	Intel Core i 7-8565 U $1.80~\mathrm{GHz}$
RAM	16 GB
Operating system	Windows 10
Simulation software	Matlab R2018b

了 5 种方法的时间复杂度.

可以看出,以 TOA 作为观测量的传统脉冲星导航和以 TDTOA 作为观测量的时间差分脉冲星导航的运行耗时相近;同时以 TOA 和 TDTOA 作为观测量时,由于量测量的维数增加,导致运行耗时略有增加;当在状态向量中加入脉冲星的星历误差及星载时钟误差进行在线估计时,由于状态量的维数由 6 维增加到 13 维,导致其运行耗时增加较多,相比传统脉冲星导航运行耗时增加 0.942 s;以 TOA

Method	Time-consuming	Single cycle	Time-consuming	
	operation (s)	time (ms)	ratio	
Traditional pulsar	3.976	2 76	1	
navigation with TOA as observation	5.510	2.10		
Time-difference pulsar navigation	4 999	2.03	1.06	
using TDTOA as observation	4.222	2.55	1.00	
Pulsar integrated navigation	1 553	3 16	1 15	
using TOA and TDTOA as observations	4.000	5.10	1.15	
Augmented state pulsar	1 018	3 49	1.94	
navigation using TOA as observation	4.510	5.42	1.24	
Augmented state pulsar integrated	4 081 3 46		1.25	
navigation with TOA and TDTOA as observations	4.301	0.40	1.20	

表7	时间复杂度的仿真结果
Table 7	The results of time consuming

和 TDTOA 作为观测量的增广状态脉冲星组合导航的运行耗时与以 TOA 作为观测量的增广状态脉 冲星导航相近. 它们的运行耗时比为 1: 1.06: 1.15: 1.24: 1.25.

# 5 结论

本文将增广状态法与时间差分法相结合,提出了基于 TOA 和 TDTOA 的增广状态脉冲星组合导 航误差抑制方法,将各脉冲星星历误差和时钟误差均作为状态量增广到状态向量中,并同时利用 TOA 及 TDTOA 共同估计、补偿各系统误差. 仿真结果表明,本文提出的方法相比以 TDTOA 作为观测量 的时间差分脉冲星导航、以 TOA 作为观测量的增广状态脉冲星导航等其他方法可以获得更高的导航 精度,可以有效地消除系统误差的影响. 利用奇异值分解对以 TOA 和 TDTOA 作为观测量的增广状态脉冲星组合导航和以 TOA 作为观测量的增广状态脉冲星导航的可观测度进行了分析. 可观测性分 析结果表明,本文提出的方法提高了各脉冲星星历误差和时钟误差的可观测性. 本文所提出的方法也 可应用于地球卫星等航天器.

#### 参考文献 -

1 Liu J, Fang J C, Liu G, et al. Solar flare TDOA navigation method using direct and reflected light for mars exploration. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 2017, 53: 2469–2484

- 3 Bhaskaran S. Autonomous navigation for deep space missions. In: Proceedings of SpaceOps 2012 Conference, 2012
- 4 Emadzadeh A A, Speyer J L. X-ray pulsar-based relative navigation using epoch folding. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 2011, 47: 2317–2328
- 5 Wang Y D, Zhang W. Pulsar phase and Doppler frequency estimation for XNAV using on-orbit epoch folding. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 2016, 52: 2210–2219
- 6 Hanson J E. Principles of X-ray navigation. Dissertation for Ph.D. Degree. Palo Alto: Stanford University, 1996
- 7 Sheikh S I, Pines D J, Ray P S, et al. Spacecraft navigation using X-ray pulsars. J Guidance Control Dyn, 2006, 29: 49–63

<sup>2</sup> Jiang W J, Zong P. Prediction and compensation of sun transit in LEO satellite systems. In: Proceedings of International Conference on Communications and Mobile Computing, 2010

- 8 Emadzadeh A A, Speyer J L. Relative navigation between two spacecraft using X-ray pulsars. IEEE Trans Control Syst Technol, 2011, 19: 1021–1035
- 9 Wang Y D, Zheng W, Sun S M, et al. X-ray pulsar-based navigation using time-differenced measurement. Aerospace Sci Tech, 2014, 36: 27–35
- 10 Sun S M, Zheng W, Tang G J, et al. A research on the pulsar timing based on Kalman filtering. Chin Astron Astrophys, 2010, 34: 187–193
- 11 Chan Y C, Johnson W A, Karuza S K, et al. Self-monitoring and self-assessing atomic clocks. IEEE Trans Instrum Meas, 2010, 59: 330–334
- 12 You K H, Hong M. Robust linear quadratic sliding-mode control for hard disk drives. IEEE Trans Instrum Meas, 2007, 56: 1087–1093
- 13 Liu J, Ma J, Tian J W, et al. X-ray pulsar navigation method for spacecraft with pulsar direction error. Adv Space Res, 2010, 46: 1409–1417
- 14 Liu J, Ma J, Tian J W, et al. Pulsar navigation for interplanetary missions using CV model and ASUKF. Aerospace Sci Tech, 2012, 22: 19–23
- 15 Xiong K, Wei C L, Liu L D. The use of X-ray pulsars for aiding navigation of satellites in constellations. Acta Astronaut, 2009, 64: 427–436
- 16 Wendel J, Trommer G F. Tightly coupled GPS/INS integration for missile applications. Aerospace Sci Tech, 2004, 8: 627–634
- 17 Zhou W D, Cai J N, Sun L, et al. Time-space difference based GPS/SINS ultra-tight integrated navigation method. Measurement, 2014, 58: 87–92
- 18 Soon B K H, Scheding S, Lee H K, et al. An approach to aid INS using time-differenced GPS carrier phase (TDCP) measurements. GPS Solut, 2008, 12: 261–271
- 19 Zhao Y. Applying time-differenced carrier phase in nondifferential GPS/IMU tightly coupled navigation systems to improve the positioning performance. IEEE Trans Veh Technol, 2017, 66: 992–1003
- 20 Ning X L, Yang Y Q, Gui M Z, et al. Pulsar navigation using time of arrival (TOA) and time differential TOA (TDTOA). Acta Astronaut, 2018, 142: 57–63
- 21 Gui M Z. Research on autonomous celestial navigation method of deep space probe based on time correlation measurement. Dissertation for Ph.D. Degree. Beijing: Beihang University, 2019 [桂明臻. 基于时间相关测量的深空探测器自主天文导航方法研究. 博士学位论文. 北京: 北京航空航天大学, 2019]
- 22 Goshen-Meskin D, Bar-Itzhack I Y. Observability analysis of piece-wise constant systems Part I: theory. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 1992, 28: 1056–1067
- 23 Ning X L, Gui M Z, Zhang J, et al. Impact of the pulsar's direction on CNS/XNAV integrated navigation. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 2017, 53: 3043–3055
- 24 Fang J C, Ning X L. Installation direction analysis of star sensors by hybrid condition number. IEEE Trans Instrum Meas, 2009, 58: 3576–3582
- 25 Yim J R, Crassidis J L, Junkins J L. Autonomous orbit navigation of interplanetary spacecraft. In: Proceedings of Astrodynamics Specialist Conference, 2000
- 26 Liu Y F, Cui P Y. Observability analysis of deep-space autonomous navigation system. In: Proceedings of Chinese Control Conference, 2006
- 27 Folkner W M, Williams J G, Boggs D. The Planetary and Lunar Ephemeris DE 421. IPN Progress Report 42-178, 2009
- 28 Sheikh S I. The use of variable celestial X-ray sources for spacecraft navigation. Dissertation for Ph.D. Degree. Washington: University of Maryland, 2005

# TOA and TDTOA-based augmented state pulsar integrated navigation error suppression method

Xiaolin NING<sup>1\*</sup>, Mingzhen GUI<sup>2</sup>, Yueqing HUANG<sup>2\*</sup>, Jiancheng FANG<sup>1</sup> & Weiren WU<sup>3</sup>

1. Institute of Frontier Science and Technology Innovation, Beihang University, Beijing 100191, China;

2. School of Instrument and Optoelectronic Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China;

3. Lunar Exploration and Aerospace Engineering Center, China National Space Administration, Beijing 100037, China

\* Corresponding author. E-mail: ningxiaolin@buaa.edu.cn, sy1917224@buaa.edu.cn

**Abstract** Pulsar navigation is a promising deep space autonomous navigation technology, which usually uses the time of arrival (time of arrival, TOA) as the measurement information. However, system errors such as pulsar ephemeris errors and space-borne atomic clock errors have a significant impact on navigation performance. To solve the above problems, an error suppression method for augmented state pulsar integrated navigation based on TOA and time difference TOA (TDTOA) is proposed. By adding the ephemeris error and clock error of each pulsar to the state vector, the TOA and TDTOA measurements are used to estimate and correct them. Simulation results show that this method improves the observability of the pulsar ephemeris and clock errors, eliminates the effect of these systematic errors, and improves navigation accuracy by 29% compared to traditional pulsar navigation.

Keywords autonomous navigation, pulsar navigation, system error, time difference, observability analysis



Xiaolin NING was born in Jinan, China, in 1979. She received her B.E. degree in computer science from Shandong Normal University in 2001, and her Ph.D. degree in mechanical engineering from Beihang University in 2008. She has been a professor at Beihang University since 2018. Her research interests include the guidance, navigation, and control system of spacecraft and autonomous navigation of deep space explorers.



Mingzhen GUI was born in Nanchang, China, in 1992. He received his B.E. degree in measurement control technology and instruments from Northwestern Polytechnical University, Xi'an, in 2013, and his Ph.D. degree from Beihang University, in 2019. His research interests include autonomous navigation of deep space explorers and integrated navigation.



Yueqing HUANG was born in Inner Mongolia Autonomous Region, China, in 1997. She received her B.E. degree in electronic information science and technology from Inner Mongolia University, Inner Mongolia, in 2019. She is currently pursuing a master's degree at Beihang University. Her research interest includes spacecraft autonomous navigation.