



五次间接 PH 曲线的几何特征

李毓君¹, 方林聪^{2*}

1. 浙江财经大学东方学院, 海宁 314408

2. 浙江财经大学信息管理与人工智能学院, 杭州 310018

* 通信作者. E-mail: lincongfang@gmail.com

收稿日期: 2019–10–06; 修回日期: 2019–12–22; 接受日期: 2020–05–07; 网络出版日期: 2021–03–31

浙江省自然科学基金 (批准号: LY18F020023)、浙江省一流学科 A 类 (浙江财经大学统计学) 资助和浙江财经大学东方学院院级重点课题 (批准号: 2020dfy007) 资助

摘要 针对五次间接 PH 曲线的判别问题, 本文结合高斯消元法与几何方法给出 Bézier 控制多边形满足的充分必要条件. 间接 PH 曲线通过一个二次有理参数变换后, 其等距线是有理形式的. 间接 PH 曲线的代数充分必要条件本质是其一阶导数的因式分解满足特定条件, 是一种积的形式. 考虑到 Bézier 曲线的表示是 Bernstein 多项式形式, 是一种和的形式. 通过这两种形式的相容性引出待求解的非线性方程组并讨论求解问题, 最后将所得结果应用在控制多边形上, 得到五次间接 PH 曲线的几何特征.

关键词 Bézier 曲线, 等距曲线, 几何特征, 有理参数化

1 引言

等距曲线在路桥设计、机器人路径规划、数控加工等领域中有着非常重要的应用. 众所周知, 在主流的计算机辅助设计与制造 (computer aided design and manufacturing, CAD/CAM) 系统中应用最成熟的工具之一是多项式参数曲线曲面, 通常被表示成 Bernstein 多项式形式, 又称为 Bézier 曲线^[1]. 然而, 一般 Bézier 曲线的等距线无法表示为有理形式的^[2], 更不是多项式形式, 给几何设计造成了极大的困难, 因而很多应用中都采用逼近方法去构造曲线的等距线^[3~5].

本文讨论一类等距曲线为有理形式的多项式参数曲线的几何性质. 平面多项式曲线 $P(t) = (x(t), y(t))$ 具有有理等距曲线当且仅当多项式 $x'^2(t) + y'^2(t)$ 的奇数重复根 (有非零虚部) 不超过一个^[6]. 这类曲线可进一步分为两类, Pythagorean hodograph (PH) 曲线^[7] 和间接 PH 曲线^[8], 前者的等距线直接可为有理形式, 后者则需要经过一个二次有理参数变换才能得到有理形式的等距曲线. 为便于研究这两类曲线, 复变模型、四元数等方法^[9, 10] 是最常用的代数方法, 但是这些方法所得结论通常不易于导出曲线的几何特征, 即曲线的 Bézier 控制多边形满足的充分必要条件.

引用格式: 李毓君, 方林聪. 五次间接 PH 曲线的几何特征. 中国科学: 信息科学, 2021, 51: 808–821, doi: 10.1360/SSI-2019-0219
Li Y J, Fang L C. Geometric characteristics of quintic indirect-PH curves (in Chinese). Sci Sin Inform, 2021, 51: 808–821, doi: 10.1360/SSI-2019-0219

目前, PH 曲线^[7]的研究工作相对更加深入, 相关研究工作已推广至有理 PH 曲线^[11, 12]、Minkowski PH 曲线^[13]、空间 PH 曲线, 以及高维 PH 曲线^[12, 14]等. 同时, PH 曲线构造被广泛应用于几何设计与建模中^[15~21], 特别是过渡曲线、直角倒角曲线的设计与构造.

PH 曲线的几何特征, 即 PH 曲线控制多边形满足的充分必要条件, 已被深入研究. 早在 PH 曲线概念提出之初, 三次 PH 曲线控制多边形的几何特征就已经被证明^[7], 其中包括 Bézier 控制多边形两内角与边长满足的约束条件. Wang 等^[22]借助于平面参数曲线的复表示方法, 给出了四次 PH 曲线的几何特征, 该方法进一步被推广研究高次 PH 曲线的几何特征^[23~25]和三次间接 PH 曲线^[8].

PH 曲线和间接 PH 曲线几何特征的研究, 使得这类曲线在实际应用特别是在逆向工程^[26]中可以有效地被识别或进行交互构造. 五次间接 PH 曲线的构造方法已有研究^[27], 然而, 它们尚无有效可行的判别方法, 这是由于他们的几何特征还未明确. 本文采用平面参数曲线的复表示方法, 对五次间接 PH 曲线的控制多边形进行分析. 间接 PH 曲线的代数充分必要条件是多项式积的形式, 根据因式分解中多项式次数不同将五次间接 PH 曲线分为两类, 然后分别展开讨论. 首先利用 Bernstein 多项式求导性质与间接 PH 曲线一阶导数的因式分解建立非线性系统, 再采用高斯 (Gauss) 消元法、几何求解方法等对非线性系统进行讨论, 得到五次间接 PH 曲线控制多边形满足的充分必要条件.

2 间接 PH 曲线

记 $i = \sqrt{-1}$ 为虚数单元, $\|c\|$ 为复数 $c \in \mathbb{C}$ 的模, 一个复数 c 也可表示为极坐标形式, 即 $c = re^{i\theta}$, 其中 $r = \|c\|$, $\theta = \arg c$ 为 c 的辐角. 令 $c_i = r_i e^{i\theta_i}$, $i = 0, 1$, 于是从 c_0 到 c_1 的方向角为 $\theta_1 - \theta_0 = \arg \frac{c_1}{c_0}$.

在复平面 \mathbb{C} 内, 平面参数曲线 $\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t))$ 也可以表示为复数形式, 即 $\mathbf{P}(t) = x(t) + iy(t)$, 这种表示方法不仅在 PH 曲线的分析与构造上发挥了极大的作用^[22, 28], 而且也被用于讨论参数曲线具有有理等距曲线的充分必要条件^[6].

定理 1 记 $\mathbf{P}(t) = x(t) + iy(t)$ 是适当参数化的多项式曲线, 则该曲线具有有理等距曲线当且仅当其速端曲线 $\mathbf{P}'(t) = x'(t) + iy'(t)$ 满足

$$\mathbf{P}'(t) = \rho(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{W}^2(t), \quad (1)$$

其中 $\rho(t)$ 是关于 t 的实多项式, $\mathbf{R}(t)$ 和 $\mathbf{W}(t)$ 具有如下形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \lambda t + 1 + i\mu t, \\ \mathbf{W}(t) &= u(t) + iv(t), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u(t)$ 和 $v(t)$ 是关于 t 的互素实多项式.

由式 (1) 的因式分解形式知, 一条具有有理等距曲线的平面参数曲线 $\mathbf{P}(t)$ 不一定是 PH 曲线, 即多项式 $\mathbf{R}(t)$ 为复多项式. 记 $B_i^n(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$ 为 Bernstein 多项式, $i = 0, \dots, n$,

$$b = \sqrt{(\lambda+1)^2 + \mu^2}, \quad c = \sqrt{(\lambda+2)^2 + \mu^2},$$

由如下的二次参数变换^[6, 8]

$$t(s) = \frac{B_1^2(s) + (c-1+b)B_2^2(s)}{(c+1-b)B_0^2(s) + (1+b)B_1^2(s) + (c-1+b)B_2^2(s)},$$

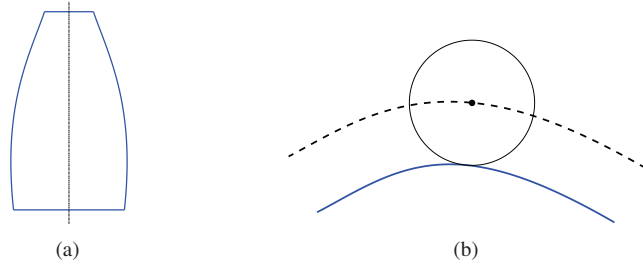


图 1 (网络版彩图) 五次间接 PH 曲线的应用实例. (a) 五次间接 PH 曲线作为侧面轮廓构造的杯子侧视图; (b) 五次间接 PH 曲线构造的模型 (实线) 在数控加工时, 刀具中心轨迹曲线 (虚线) 为有理曲线

Figure 1 (Color online) Examples of quintic indirect PH curves. (a) A cup with a contour of a quintic indirect PH curve. (b) The offset of a given curve is a rational curve (dashed), if the given curve which is sampled from a model is a quintic indirect PH curve (solid)

得到 $P(t)$ 的等距曲线可表示为有理形式, 这是由于

$$(\lambda t + 1)^2 + (\mu t)^2 = \left(\frac{(c + 1 - b)B_0^2(s) + \frac{c^2 - (1-b)^2}{2}B_1^2(s) + b(c - 1 + b)B_2^2(s)}{(c + 1 - b)B_0^2(s) + (1 + b)B_1^2(s) + (c - 1 + b)B_2^2(s)} \right)^2.$$

这样的曲线称之为间接 PH 曲线^[6,8].

给定复平面内 6 个控制顶点 $P_i = x_i + iy_i, i = 0, \dots, 5$, 则可定义一条五次 Bézier 曲线

$$P(t) = \sum_{i=0}^5 P_i B_i^5(t).$$

它的速端曲线有如下形式

$$P'(t) = 4 \sum_{i=0}^4 \Delta P_i B_i^4(t), \tag{3}$$

其中 $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$.

本文讨论五次间接 PH 曲线的几何特征, 该类曲线可有效应用于曲线造型和数控加工中. 如图 1(a) 所示为一个杯子模型侧视图, 该模型的侧轮廓线为一条五次间接 PH 曲线. 在图 1(b) 中, 实线为某模型轮廓曲线, 在对该模型进行数控加工 (如抛光或切削) 时, 刀具中心轨迹 (虚线) 为有理等距曲线, 故可在传统的 CAD 系统中精确表示.

3 五次间接 PH 曲线的几何特征

记多项式 $P(t)$ 的次数为 $\deg(P(t))$. 由定理 1 知, 根据 $P'(t)$ 因式分解的不同次数, 五次间接 PH 曲线可分为两类: 第 1 类 $\deg(\rho(t)) = 1, \deg(\mathbf{R}(t)) = 1, \deg(\mathbf{W}(t)) = 1$, 第 2 类 $\deg(\rho(t)) = 3, \deg(\mathbf{R}(t)) = 1, \deg(\mathbf{W}(t)) = 0$, 下文分别讨论这两类曲线的几何特征.

3.1 第 1 类五次间接 PH 曲线

若一条五次 Bézier 曲线 $P(t)$ 是第 1 类五次间接 PH 曲线, 则其速端曲线有形式 (1), 其中 $\rho(t), \mathbf{R}(t), \mathbf{W}(t)$ 都是一次多项式, 将它们表为 Bernstein 多项式,

$$P'(t) = [(1 - t) + at][(1 - t) + z_0 t][z_1(1 - t) + z_2 t]^2,$$

或

$$\mathbf{P}'(t) = [a(1-t) + t][z_0(1-t) + t][z_1(1-t) + z_2t]^2, \quad (4)$$

其中 $a \in \mathbb{R}$, $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_0 \notin \mathbb{R}$. 此外, 有 $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, 且 $z_1 \neq kz_2, \forall k \in \mathbb{R}$, 否则, 该曲线为第 2 类五次间接 PH 曲线. 注意到, 上述 $\mathbf{P}'(t)$ 的表达式其实是等价的, 差别在于尖点的参数值 ξ 的取值范围, 即 $\xi \neq 0$ 或 $\xi \neq 1$. 这里仅考虑第 2 种分解形式, 第 1 种形式的讨论是类似的, 且结论相同.

给定一条第 1 类五次间接 PH 曲线 $\mathbf{P}(t)$, 这里讨论 Bézier 控制多边形的内在几何特性. 虽然已知其一阶导数有形式 (4), 然而, 该式中的系数 $a, z_i, i = 0, 1, 2$, 不是显而易见的. 这里首先将式 (4) 展开得到

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) = & az_0z_1^2(1-t)^4 + [(a+z_0)z_1^2 + 2az_0z_1z_2](1-t)^3t + [az_0z_2^2 + 2(a+z_0)z_1z_2 + z_1^2](1-t)^2t^2 \\ & + [2z_1z_2 + (a+z_0)z_2^2](1-t)t^3 + z_2^2t^4. \end{aligned}$$

比较上式与式 (3) 中 Bernstein 多项式的系数, 可以得到一个关于未知数 a, z_0, z_1, z_2 的非线性系统:

$$\frac{1}{5}az_0z_1^2 = \Delta P_0, \quad (5a)$$

$$\frac{1}{20}[(a+z_0)z_1^2 + 2az_0z_1z_2] = \Delta P_1, \quad (5b)$$

$$\frac{1}{30}[az_0z_2^2 + 2(a+z_0)z_1z_2 + z_1^2] = \Delta P_2, \quad (5c)$$

$$\frac{1}{20}[2z_1z_2 + (a+z_0)z_2^2] = \Delta P_3, \quad (5d)$$

$$\frac{1}{5}z_2^2 = \Delta P_4. \quad (5e)$$

由方程 (5e) 可得 $z_2 = \pm\sqrt{5\Delta P_4}$.

由于 $z_0 \notin \mathbb{R}$, 因此 $a+z_0 \neq 0$, 对方程 (5b) 和 (5c), (5c) 和 (5d) 分别消去 $a+z_0$, 则有

$$\begin{aligned} z_1^3 - 3az_0z_1z_2^2 - 30\Delta P_2z_1 + 40\Delta P_1z_2 &= 0, \\ az_0z_2^3 - 3z_1^2z_2 - 30\Delta P_2z_2 + 40\Delta P_3z_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

由方程 (5a) 得到 $az_0 = \frac{5\Delta P_0}{z_1^2}$, 将其代入 (6); 又因 $z_1 \neq 0$, 故分别乘 z_1 和 z_1^2 并约去公因数, 再按 z_1 次数由高到低重新整理, 得到两个关于 z_1 的四次方程:

$$\begin{aligned} z_1^4 - 30\Delta P_2z_1^2 + 40\Delta P_1z_1z_2 - 15\Delta P_0z_2^2 &= 0, \\ 3z_1^4z_2 - 40\Delta P_3z_1^3 + 30\Delta P_2z_1^2z_2 - 5\Delta P_0z_2^3 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

因 z_2 已知, 故 $15\Delta P_0z_2^2$ 和 $5\Delta P_0z_2^3$ 为常数项. 分别消去 z_1^4 项和常数项, 并约去公因式, 上述方程组可化简为关于 z_1 的三次方程组:

$$\begin{aligned} \Delta P_3z_1^3 - 3\Delta P_2z_1^2z_2 + 3\Delta P_1z_1z_2^2 - \Delta P_0z_2^3 &= 0, \\ z_1^3z_2 - 15\Delta P_3z_1^2 + 15\Delta P_2z_1z_2 - 5\Delta P_1z_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

同理, 分别消去 z_1^3 项、常数项 $\Delta P_0z_2^3$ 和 $5\Delta P_1z_2^2$, 并约去公因式, 该方程组可进一步简化为关于 z_1 的二次方程组:

$$\begin{aligned} (15\Delta P_3^2 - 3\Delta P_2z_2^2)z_1^2 + (3\Delta P_1z_2^2 - 15\Delta P_2\Delta P_3)z_1z_2 + (5\Delta P_1\Delta P_3 - \Delta P_0z_2^2)z_2^2 &= 0, \\ (5\Delta P_1\Delta P_3 - \Delta P_0z_2^2)z_1^2 + 15(\Delta P_0\Delta P_3 - \Delta P_1\Delta P_2)z_1z_2 + 15(\Delta P_1^2 - \Delta P_0\Delta P_2)z_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

最终, 将该方程视为关于 z_1 与 z_1^2 的二元一次方程组, 并用 $5\Delta P_4$ 代入 z_2^2 , 可求解得到

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} \Delta P_1 \Delta P_3 - \Delta P_0 \Delta P_4 & 3(\Delta P_3^2 - \Delta P_2 \Delta P_4) \\ 3(\Delta P_1^2 - \Delta P_0 P_2) & \Delta P_1 \Delta P_3 - \Delta P_0 \Delta P_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3(\Delta P_3^2 - \Delta P_2 \Delta P_4) & 3(\Delta P_1 \Delta P_4 - \Delta P_2 \Delta P_3) \\ \Delta P_1 \Delta P_3 - \Delta P_0 \Delta P_4 & 3(\Delta P_0 \Delta P_3 - \Delta P_1 \Delta P_2) \end{vmatrix}} z_2, \quad (9)$$

$$z_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} 3(\Delta P_1 \Delta P_4 - \Delta P_2 \Delta P_3) & \Delta P_1 \Delta P_3 - \Delta P_0 \Delta P_4 \\ 3(\Delta P_0 \Delta P_3 - \Delta P_1 \Delta P_2) & 3(\Delta P_1^2 - \Delta P_0 \Delta P_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3(\Delta P_3^2 - \Delta P_2 \Delta P_4) & 3(\Delta P_1 \Delta P_4 - \Delta P_2 \Delta P_3) \\ \Delta P_1 \Delta P_3 - \Delta P_0 \Delta P_4 & 3(\Delta P_0 \Delta P_3 - \Delta P_1 \Delta P_2) \end{vmatrix}} z_2^2. \quad (10)$$

为进一步揭示第 1 类五次间接 PH 曲线的几何特征, 这里先介绍辅助控制顶点的构造方法.

步骤 1. 令

$$Q_1 = P_2 - \frac{az_0 z_1 z_2}{10} = P_2 - \frac{\Delta P_0 z_2}{2 z_1}, \quad (11)$$

其中 z_2 已由 (5e) 得到, 因此 $\frac{z_2}{z_1}$ 可由式 (9) 求得, 点 Q_1 是可求的, 如图 2(b).

步骤 2. 令

$$Q_5 = P_3 + \frac{z_1 z_2}{10}, \quad (12)$$

其中 z_2 已知, 从而 $z_1 z_2$ 可由式 (9) 求得, 故点 Q_5 可确定, 如图 2(c).

步骤 3. 令 Q_0 和 Q_6 分别是直线 $P_0 P_1$ 和 $P_4 P_5$ 上的点, 且满足

$$\arg \Delta Q_0 = 2\theta_1, \quad \arg \Delta Q_5 = \theta_0 + 2\theta_2,$$

如图 2(d). 记 $\theta_i = \arg z_i$, $i = 0, 1, 2$, 其中 θ_1 与 θ_2 是已知的, 因此可计算 $\theta_0 = \arg \Delta P_0 - 2\theta_1$. 换言之, 存在实数 k_i , $i = 0, \dots, 3$, 使得 $Q_0 = P_1 + k_0 \cdot e^{i(\theta_0 + 2\theta_1)} = Q_1 + k_1 \cdot e^{i2\theta_1}$, $Q_6 = Q_5 + k_2 \cdot e^{i(\theta_0 + 2\theta_2)} = P_4 + k_3 \cdot e^{i2\theta_2}$, 考虑上述方程的实部与虚部分别得到关于 k_0 和 k_1 , k_2 和 k_3 的二元一次方程组, 即可求得 k_i , $i = 0, \dots, 3$, 且有

$$\begin{aligned} Q_0 &= P_1 - \frac{\operatorname{Re}(Q_1 - P_1) \sin 2\theta_1 - \operatorname{Im}(Q_1 - P_1) \cos 2\theta_1}{\sin \theta_0} [\cos(\theta_0 + 2\theta_1) + i \sin(\theta_0 + 2\theta_1)], \\ Q_6 &= Q_5 - \frac{\operatorname{Re}(P_4 - Q_5) \sin 2\theta_2 - \operatorname{Im}(P_4 - Q_5) \cos 2\theta_2}{\sin \theta_0} [\cos(\theta_0 + 2\theta_2) + i \sin(\theta_0 + 2\theta_2)]. \end{aligned} \quad (13)$$

步骤 4. 根据 Q_0 的构造方法, 可知 $Q_0 - P_1$ 的方向与复数 $z_0 z_1^2$ 表示的向量相同, 且 ΔQ_1 的方向与复数 z_1^2 表示的向量相同. 由于 $z_0 z_1^2$ 与 z_1^2 是线性无关的, 且 $Q_1 - P_1 = \Delta Q_0 + (Q_0 - P_1)$, 故由式 (5b) 可得

$$\begin{aligned} Q_0 - P_1 &= \frac{1}{20} z_0 z_1^2, \\ \Delta Q_0 &= \frac{a}{20} z_1^2. \end{aligned} \quad (14)$$

根据式 (5a) 计算

$$a = \frac{\Delta P_0}{4(Q_0 - P_1)}. \quad (15)$$

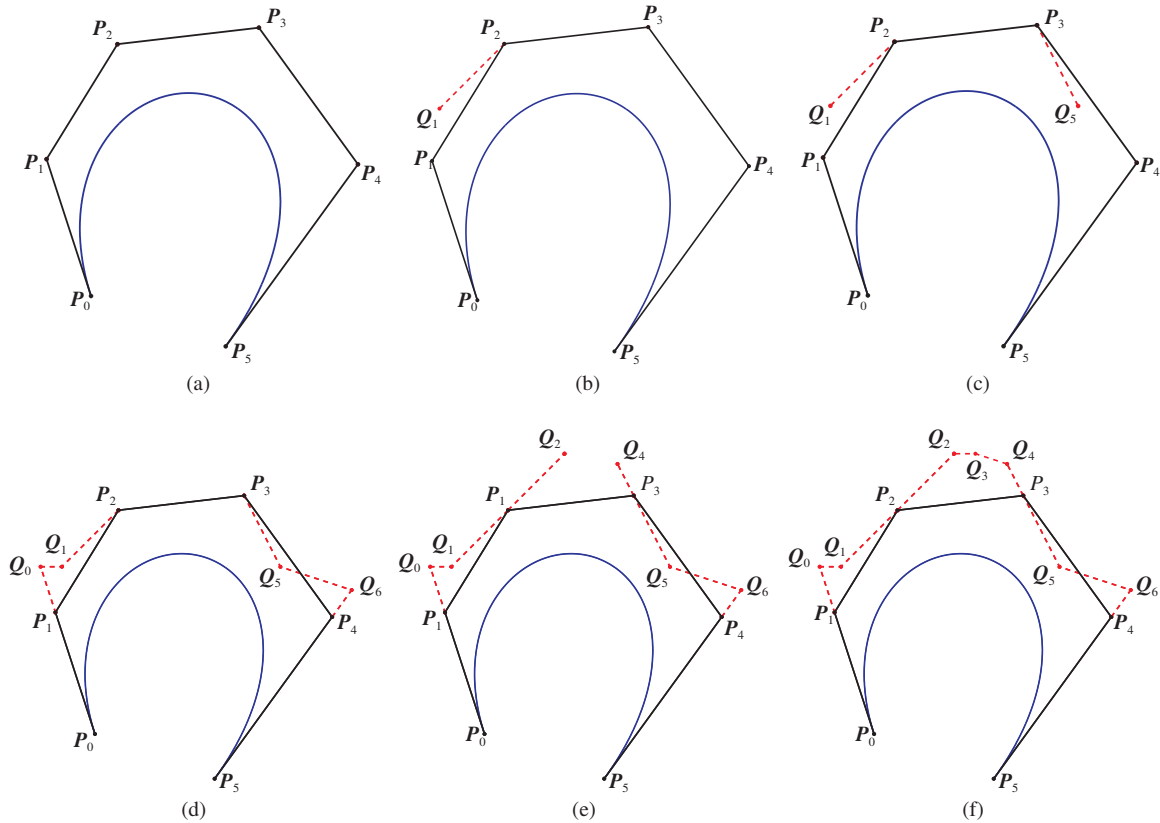


图 2 (网络版彩图) 第 1 类五次间接 PH 曲线辅助控制顶点的构造过程, 虚线边为辅助控制边. (a) 五次间接 PH 曲线的 Bézier 控制多边形; (b) 辅助控制顶点 Q_1 的构造; (c) 辅助控制顶点 Q_5 的构造; (d) 辅助控制顶点 Q_0 和 Q_6 的构造; (e) 辅助控制顶点 Q_2 和 Q_4 的构造; (f) 辅助控制顶点 Q_3 的构造

Figure 2 (Color online) The procedure of construction of the auxiliary points for a class I quintic indirect-PH curve, dashed lines are auxiliary edges. (a) The Bézier control polygon of a quintic indirect-PH curve; (b) construction of Q_1 ; (c) construction of Q_5 ; (d) construction of Q_0 and Q_6 ; (e) construction of Q_2 and Q_4 ; (f) construction of Q_3

令 Q_2 和 Q_4 分别为

$$\begin{aligned} Q_2 &= P_2 + \frac{2}{3a}(P_2 - Q_1), \\ Q_4 &= P_3 - \frac{2a}{3}(Q_5 - P_3), \end{aligned} \tag{16}$$

如图 2(e).

步骤 5. 令点 Q_3 满足

$$\arg \Delta Q_2 = 2\theta_1, \quad \arg \Delta Q_3 = \theta_0 + 2\theta_2,$$

如图 2(f), 于是存在实数 k_0, k_1 , 使得 $Q_3 = Q_2 + k_0 \cdot e^{i2\theta_1} = Q_4 + k_1 \cdot e^{i(\theta_0+2\theta_2)}$, 分别考虑该方程的实部与虚部可得关于 k_0, k_1 的二元一次方程组并求解, 因此可得 Q_3 为

$$Q_3 = Q_2 + \frac{\operatorname{Re}(Q_4 - Q_2) \sin(\theta_0 + 2\theta_2) - \operatorname{Im}(Q_4 - Q_2) \cos(\theta_0 + 2\theta_2)}{\sin[(\theta_0 + 2\theta_2) - 2\theta_1]} [\cos 2\theta_1 + i \sin 2\theta_1]. \tag{17}$$

综上所述 (11), (12), (16) 有

$$\begin{aligned} P_2 - Q_1 &= \frac{a}{10} z_0 z_1 z_2, \\ Q_2 - P_2 &= \frac{1}{15} z_0 z_1 z_2, \\ P_3 - Q_4 &= \frac{a}{15} z_1 z_2, \\ Q_5 - P_3 &= \frac{1}{10} z_1 z_2. \end{aligned} \quad (18)$$

于是由式 (5) 可得 $\Delta Q_2 + \Delta Q_3 = Q_4 - Q_2 = \frac{1}{30} z_1^2 + \frac{a}{30} z_0 z_2^2$, $\Delta Q_5 + (P_4 - Q_6) = P_4 - Q_5 = \frac{1}{20} z_0 z_2^2 + \frac{a}{20} z_2^2$, 考虑向量的线性无关性, 由式 (13) 和 (17) 可以得出

$$\begin{aligned} \Delta Q_2 &= \frac{1}{30} z_1^2, \\ \Delta Q_3 &= \frac{a}{30} z_0 z_2^2, \\ \Delta Q_5 &= \frac{1}{20} z_0 z_2^2, \\ P_4 - Q_6 &= \frac{a}{20} z_2^2. \end{aligned} \quad (19)$$

综上所述, 若给定曲线是一条第 1 类五次间接 PH 曲线, 则方程 (14), (18), 与 (19) 必须是相容的.

反之, 若一条 Bézier 曲线所构造的辅助控制顶点满足方程 (14), (18), 和 (19), 则式 (4) 的所有系数可被反求, 即给定的曲线是第 1 类五次间接 PH 曲线.

总而言之, 第 1 类五次间接 PH 曲线的充分必要条件可表述为如下定理.

定理 2 平面参数曲线 $P(t)$ 是一条第 1 类五次间接 PH 曲线当且仅当 $\theta_0 \neq k\pi$, $\theta_2 - \theta_1 \neq k\pi$, $\forall k \in \mathbb{R}$, 且满足

$$2\|P_2 - Q_1\|^2 = 3\|\Delta P_0\| \cdot \|\Delta Q_3\|, \quad (20a)$$

$$9\|Q_2 - P_2\|^2 = 16\|Q_0 - P_1\| \cdot \|\Delta Q_5\|, \quad (20b)$$

$$9\|P_3 - Q_4\|^2 = 16\|\Delta Q_0\| \cdot \|P_4 - Q_6\|, \quad (20c)$$

$$2\|Q_5 - P_3\|^2 = 3\|\Delta Q_2\| \cdot \|\Delta P_4\|. \quad (20d)$$

综上所述, 第 1 类五次间接 PH 曲线的判别可表述为算法 1.

3.2 第 2 类五次间接 PH 曲线

给定一条平面五次 Bézier 曲线 $P(t)$, 这里构造 3 个辅助控制顶点: 令 Q_0 是直线 P_0P_1 上的点, 且满足 $Q_0P_2 \parallel P_4P_5$. 令 Q_2 是直线 P_4P_5 上的点且满足 $Q_2P_3 \parallel P_0P_1$. 令 Q_1 为直线 Q_0P_2 与 Q_2P_3 的交点, 如图 3(a) 所示. 因此当控制多边形已知时, 则存在实数 k_i , $i = 0, \dots, 5$, 使得 $Q_0 = P_1 + k_0\Delta P_0 = P_2 + k_1\Delta P_4$, $Q_1 = P_2 + k_2\Delta P_4 = P_3 + k_3\Delta P_1$, $Q_2 = P_3 + k_4\Delta P_1 = P_4 - k_5\Delta P_4$, 分别考虑每个方程的实部与虚部, 不难求得 k_i , $i = 0, \dots, 5$, 从而辅助顶点 Q_0, Q_1, Q_2 可得到如下表达式:

$$\begin{aligned} Q_0 &= P_1 + \frac{\operatorname{Re}\Delta P_1 \operatorname{Im}\Delta P_4 - \operatorname{Im}\Delta P_1 \operatorname{Re}\Delta P_4}{\operatorname{Re}\Delta P_0 \operatorname{Im}\Delta P_4 - \operatorname{Im}\Delta P_0 \operatorname{Re}\Delta P_4} \cdot \Delta P_0, \\ Q_1 &= P_2 + \frac{\operatorname{Re}\Delta P_0 \operatorname{Im}\Delta P_2 - \operatorname{Im}\Delta P_0 \operatorname{Re}\Delta P_2}{\operatorname{Re}\Delta P_0 \operatorname{Im}\Delta P_4 - \operatorname{Im}\Delta P_0 \operatorname{Re}\Delta P_4} \cdot \Delta P_4, \\ Q_2 &= P_3 + \frac{\operatorname{Re}\Delta P_3 \operatorname{Im}\Delta P_4 - \operatorname{Im}\Delta P_3 \operatorname{Re}\Delta P_4}{\operatorname{Re}\Delta P_0 \operatorname{Im}\Delta P_4 - \operatorname{Im}\Delta P_0 \operatorname{Re}\Delta P_4} \cdot \Delta P_0. \end{aligned} \quad (21)$$

算法 1 Class[Test($\{P_i\}_{i=0}^5$)**Input:** Control points $P_i, i = 0, \dots, 5$.**Output:** TRUE: It is a class I quintic indirect PH curve.

FALSE: It is not a class I quintic indirect PH curve.

```

1: Compute  $z_2 = \sqrt{5\Delta P_4}$ , and  $\theta_2 = \arg \Delta P_4$ ;
2: Compute  $z_1$  following Eq. (9), and  $\theta_1 = \arg z_1$ ;
3: if  $\theta_2 - \theta_1 = k\pi, k \in \mathbb{R}$  then
4:   return FALSE;
5: end if
6: Compute  $Q_1$  following Eq. (11);
7: Compute  $Q_5$  following Eq. (12);
8: Compute  $\theta_0 = \arg \Delta P_0 - 2\theta_1$ ;
9: if  $\theta_0 = k\pi, k \in \mathbb{R}$  then
10:  return FALSE;
11: end if
12: Compute  $Q_0$  and  $Q_6$  following Eq. (13);
13: Compute  $a$  following (15);
14: Compute  $Q_2$  and  $Q_4$  following Eq.(16);
15: Compute  $Q_3$  following (17);
16: if the system of Eqs. (20a)–(20d) does not hold then
17:  return FALSE;
18: end if
19: return TRUE.

```

图 3(b)–(d) 分别给出了当控制多边形退化为 5 个控制顶点 ($P_0 = P_1$), 或 4 个控制顶点 ($P_0 = P_1 = P_2$), 或 3 个控制顶点 ($P_0 = P_1 = P_2 = P_3$) 时的辅助控制顶点.

于是第 2 类五次间接 PH 曲线的充分必要条件可描述为如下定理.

定理 3 一条平面参数曲线 $P(t)$ 是第 2 类五次间接 PH 曲线当且仅当

$$\begin{aligned} & 3\|\Delta P_0\| : 4\|Q_0 - P_1\| : 6\|P_3 - Q_1\| : 12\|Q_2 - P_3\| \\ & = 12\|P_2 - Q_0\| : 6\|Q_1 - P_2\| : 4\|P_4 - Q_2\| : 3\|\Delta P_4\|. \end{aligned} \quad (22)$$

证明 由定理 1 知, $P(t)$ 是第 2 类五次间接 PH 曲线当且仅当

$$P'(t) = \rho(t)[z_0(1-t) + z_1t], \quad (23)$$

其中 $\rho(t)$ 是三次实多项式. 不失一般性, 不妨假设

$$\rho(t) = (1-t)^3 + 3a_1(1-t)^2t + 3a_2(1-t)t^2 + a_3t^3,$$

其中 $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 3, z_0, z_1 \in \mathbb{C}, z_0 \neq kz_1, \forall k \in \mathbb{R}$.

将式 (23) 作多项式展开得到

$$P'(t) = z_0(1-t)^4 + (z_1 + \lambda_1 z_0)(1-t)^3t + (a_1 z_1 + a_2 z_0)(1-t)^2t^2 + (a_2 z_1 + a_3 z_0)(1-t)t^3 + a_3 z_1 t^4.$$

由于控制顶点是已知的, 通过比较系数法考虑上式与式 (3) 得到关于 5 个未知数 z_0, z_1 , 与 $a_i, i = 1, 2, 3$

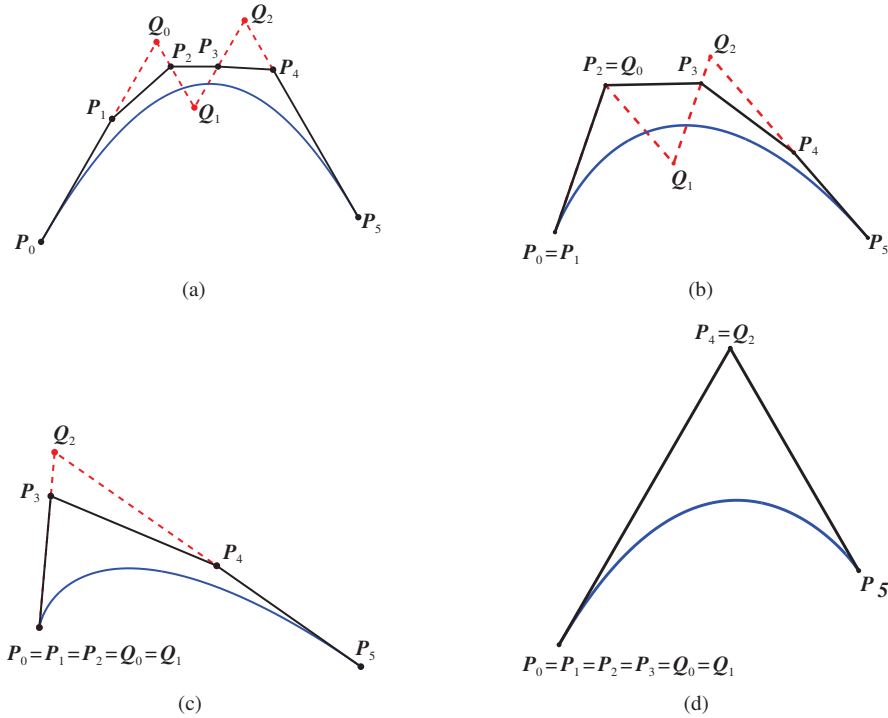


图 3 (网络版彩图) 第 2 类五次间接 PH 曲线的控制多边形和辅助控制顶点, 虚线是辅助控制边. (a) 6 个相异控制顶点的曲线. (b) 5 个相异控制顶点的曲线, 即 $P_0 = P_1$. (c) 4 个相异控制顶点的曲线, 即 $P_0 = P_1 = P_2$. (d) 3 个相异控制顶点的曲线, 即 $P_0 = P_1 = P_2 = P_3$

Figure 3 (Color online) Bézier control polygons and auxiliary points of class II quintic indirect-PH curves, dashed lines are auxiliary edges. (a) A curve with six distinct control points. (b) A curve with five distinct control points, i.e., $P_0 = P_1$. (c) A curve with four distinct control points, i.e., $P_0 = P_1 = P_2$. (d) A curve with three distinct control points, i.e., $P_0 = P_1 = P_2 = P_3$

的非线性方程组.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{5}z_0 &= \Delta P_0, \\
 \frac{1}{20}(z_1 + 3a_1z_0) &= \Delta P_1, \\
 \frac{1}{30}(3a_1z_1 + 3a_2z_0) &= \Delta P_2, \\
 \frac{1}{20}(3a_2z_1 + a_3z_0) &= \Delta P_3, \\
 \frac{1}{5}a_3z_1 &= \Delta P_4.
 \end{aligned} \tag{24}$$

由辅助控制顶点的构造方法, 可知 $P_0P_1 \parallel Q_0P_1 \parallel Q_2P_3 \parallel P_3Q_1$, $Q_0P_2 \parallel P_2Q_1 \parallel Q_2P_4 \parallel P_4P_5$, 由式 (24) 有如下事实:

- (1) 向量 $Q_0 - P_1$, $P_3 - Q_1$ 和 $Q_2 - P_3$ 的方向可由复数 z_0 确定.
- (2) 向量 $P_2 - Q_0$, $Q_1 - P_2$ 和 $P_4 - Q_2$ 的方向可由复数 z_1 确定.

考虑到 z_0 与 z_1 是线性无关的, 且 $\Delta P_1 = (P_2 - Q_0) + (Q_0 - P_1)$, $\Delta P_2 = (P_3 - Q_1) + (Q_1 - P_2)$, $\Delta P_3 = (P_4 - Q_2) + (Q_2 - P_3)$, 因此由式 (24) 得到

$$Q_0 = P_1 + \frac{3a_1}{20}z_0 = P_2 - \frac{1}{20}z_1,$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= P_2 + \frac{a_1}{10}z_1 = P_3 - \frac{a_2}{10}z_0, \\ Q_2 &= P_3 + \frac{a_3}{20}z_0 = P_4 - \frac{3a_2}{20}z_1, \end{aligned}$$

如图 3. 换言之, 当辅助顶点构造完成, 则非线性方程组 (24) 的解可求

$$z_0 = 5\Delta P_0, \quad z_1 = 20(P_2 - Q_0),$$

且

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{4\|Q_0 - P_1\|}{3\|\Delta P_0\|} = \frac{\|Q_1 - P_2\|}{2\|P_2 - Q_0\|}, \\ a_2 &= \frac{2\|P_3 - Q_1\|}{\|\Delta P_0\|} = \frac{\|P_4 - Q_2\|}{3\|P_2 - Q_0\|}, \\ a_3 &= \frac{4\|Q_2 - P_3\|}{\|\Delta P_0\|} = \frac{\|\Delta P_4\|}{4\|P_2 - Q_0\|}, \end{aligned}$$

显然与式 (22) 是等价的.

注意到控制多边形可能是退化的, 即有一个或多个控制顶点是重合的. 如果 $\Delta P_0 = 0$ 且 $\Delta P_1 \neq 0$, 则最多有 5 个不同的控制顶点, 于是有 $\rho(t) = 3(1-t)^2t + 3a_2(1-t)t^2 + a_3t^3$, 如图 3(b). 应用本文方法可以得到

$$z_0 = \frac{20}{3}(Q_0 - P_1), \quad z_1 = 10(Q_1 - P_2),$$

且

$$a_2 = \frac{3(P_3 - Q_1)}{2(Q_0 - P_1)} = \frac{2(P_4 - Q_2)}{3(Q_1 - P_2)}, \quad a_3 = \frac{3(Q_2 - P_3)}{Q_0 - P_1} = \frac{\Delta P_4}{2(Q_1 - P_2)},$$

因此可以同理得到条件 (22), 其中等号两边的第 2 项由于分母为 0, 可忽略.

如果 $\Delta P_0 = \Delta P_1 = 0$, 则有 $\rho(t) = 3(1-t)t^2 + a_3t^3$ 且 $\Delta P_3 \neq 0, \Delta P_4 \neq 0$, 即最多有 4 个不同的控制顶点. 图 3(c) 给出了一个这样的一条第 2 类五次间接 PH 曲线, 此时有

$$z_0 = 10(P_3 - Q_1), \quad z_1 = \frac{20}{3}(P_4 - Q_2),$$

且

$$a_3 = \frac{2(Q_2 - P_3)}{P_3 - Q_1} = \frac{3\Delta P_4}{4(P_4 - Q_2)},$$

于是条件 (22) 同理成立.

如果 $\Delta P_0 = \Delta P_1 = \Delta P_2 = 0$, 则存在 3 个不同的控制顶点且 $\rho(t) = t^3$, 图 3(d) 给出了这样的一个实例, 此时有

$$z_0 = 20\Delta P_3, \quad z_1 = 5\Delta P_4.$$

这样的 Bézier 曲线自然是五次间接 PH 曲线, 因此条件 (22) 无实际意义.

综上所述, 第 2 类五次间接 PH 曲线的几何特征可由式 (22) 给出. 因此, 第 2 类五次间接 PH 曲线的识别可总结为算法 2.

算法 2 ClassII Test($\{P_i\}_{i=0}^5$)**Input:** Control points $P_i, i = 0, \dots, 5$.**Output:** TRUE: It is a class II quintic indirect PH curve.

FALSE: It is not a class II quintic indirect PH curve.

- 1: Compute auxiliary points Q_0, Q_1, Q_2 following Eq. (21);
- 2: **if** Eq. (22) does not hold **then**
- 3: **return** FALSE;
- 4: **end if**
- 5: **return** TRUE.

4 实验结果

本文方法可有效应用于五次间接 PH 曲线的判别. 在图 4 中, 本文构造了 3 条五次 Bézier 曲线, 其中图 4(a) 中的控制顶点为

$$\begin{aligned} P_0 &= 0, & P_1 &= -0.927050983124840 + 2.85316954888546i, \\ P_2 &= 0.455638610115601 + 5.54282597058852i, & P_3 &= 3.671490662207081 + 6.54279886815448i, \\ P_4 &= 7.513906927610341 + 4.36712274571812i, & P_5 &= 7.013906927610341 - 0.32037725428188i. \end{aligned}$$

通过算法 1 计算得到辅助顶点

$$\begin{aligned} Q_0 &= -0.335616091119910 + 1.032920118450861i, & Q_1 &= -2.298661951123952 + 0.965068353317378i, \\ Q_2 &= -4.230157488519507 - 2.245154428272766i, & Q_3 &= -55.869358928435980 - 4.030039355909974i, \\ Q_4 &= 3.789279043583449 + 6.416245352260529i, & Q_5 &= 4.122366567978405 + 6.058371368256105i, \\ Q_6 &= 7.762291239329157 + 6.695725668082016i. \end{aligned}$$

通过算法 2 计算得辅助顶点

$$\begin{aligned} Q_0 &= -0.102083538617181 + 0.314180826218692i, \\ Q_1 &= 1.330738967700945 + 13.746891822951113i, \\ Q_2 &= 6.738968326483832 - 2.897926639842900i. \end{aligned}$$

由式 (20a)–(20d) 计算知该曲线不是第 1 类五次间接 PH 曲线, 由式 (22) 知该曲线不是第 2 类五次间接 PH 曲线, 具体结算结果如表 1 所示.

将控制顶点 P_4 修改为

$$P_4 = 7.013906927610341 - 0.32037725428188i,$$

得到图 4(b) 中的曲线. 通过算法 1 计算得到辅助顶点

$$\begin{aligned} Q_0 &= -1.274695101796656 + 3.923108129717510i, & Q_1 &= -0.870186604609153 + 4.217000755863766i, \\ Q_2 &= 1.781463824840358 + 6.868651185313278i, & Q_3 &= 2.185972322027856 + 7.162543811459531i, \\ Q_4 &= 2.928985225383431 + 6.921124284604109i, & Q_5 &= 5.342127895060297 + 5.691566681142814i, \\ Q_6 &= 7.013906927610341 + 5.148372745718115i. \end{aligned}$$

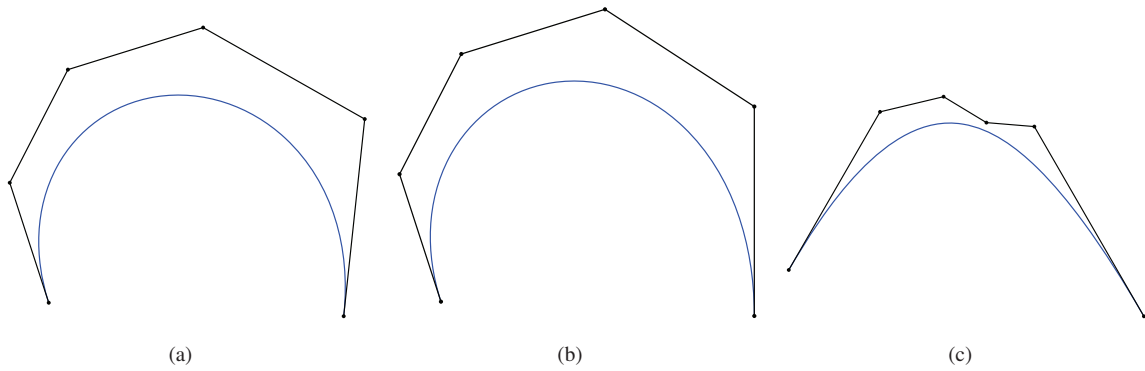


图 4 (网络版彩图) 本文方法应用于五次间接 PH 曲线的判别. (a) 非五次间接 PH 曲线; (b) 第 1 类五次间接 PH 曲线; (c) 第 2 类五次间接 PH 曲线

Figure 4 (Color online) Identification of quintic indirect PH curves with our method. (a) Not a quintic indirect PH curve; (b) a class I quintic indirect PH curve; (c) a class II quintic indirect PH curve

表 1 五次间接 PH 曲线判别计算结果

Table 1 Results of computation for identification of quintic indirect PH curves

	Class I quintic indirect PH curves				Class II quintic indirect PH curves	
	Eq. (20a)	Eq. (20b)	Eq. (20c)	Eq. (20d)	Left of Eq. (22)	Right of Eq. (22)
Figure 4(a)	-488.0127	630.3234	-73.3283	-729.8559	1:1.1865:5.0499:13.2354	1:0.7845:0.4632:0.2241
Figure 4(b)	-1.0481e-13	-3.7659e-13	-2.2116e-13	-1.7142e-13	1:1.9887:6.9378:14.4217	1:0.7845:0.3893:0.1687
Figure 4(c)	-65.2028	-149.8257	155.1456	99.0951	1:0.5279:0.3054:0.9999	1:0.5276:0.3055:0.9997

通过算法 2 计算得辅助顶点

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= 0.455638610115601 - 1.402311449254203i, \\
 Q_1 &= 0.455638610115601 + 16.440173786867707i, \\
 Q_2 &= 7.013906927610341 - 3.744100646263951i.
 \end{aligned}$$

由式 (20a)–(20d) 计算知该曲线是第 1 类五次间接 PH 曲线, 由式 (22) 知该曲线不是第 2 类五次间接 PH 曲线, 具体结算结果如表 1 所示.

图 4(c) 中的控制顶点为

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 0, & P_1 &= 3.000 + 5.196i, & P_2 &= 5.088 + 5.694i, \\
 P_3 &= 6.496 + 4.842i, & P_4 &= 8.071 + 4.712i, & P_5 &= 11.671 - 1.523i.
 \end{aligned}$$

通过算法 1 计算得到辅助顶点

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= 3.856724987007463 + 6.679847677496927i, & Q_1 &= 3.902486299144183 + 6.637191580896604i, \\
 Q_2 &= 5.990808186633660 + 4.975728182320720i, & Q_3 &= 6.076685588543091 + 4.895678144841704i, \\
 Q_4 &= 3.240394223708601 + 2.251774767362011i, & Q_5 &= 12.074317632789338 + 9.280221357556368i, \\
 Q_6 &= 7.757029881484995 + 5.255778802483628i.
 \end{aligned}$$

通过算法 2 计算得辅助顶点

$$Q_0 = 4.187749995990441 + 7.253182993055444i,$$

$$Q_1 = 6.037973665217879 + 4.048698388157367i,$$

$$Q_2 = 7.245957899632725 + 6.140927082163879i.$$

由式 (20a)–(20d) 计算知该曲线是第 2 类五次间接 PH 曲线, 由式 (22) 知该曲线不是第 1 类五次间接 PH 曲线, 具体结算结果如表 1 所示.

5 小结

本文介绍了五次间接 PH 曲线的几何特征, 从间接 PH 曲线的代数充分必要条件引出间接 PH 曲线的满足的非线性约束条件, 采用几何方法对讨论该非线性系统的解, 从而得到五次间接 PH 曲线的几何约束条件. 本文所得结论依赖于五次多项式参数曲线的 Bézier 控制多边形与辅助控制顶点, 具有旋转、平移不变性. 本文采用的主要方法是将高斯消元法和几何方法相结合, 对特定非线性系统求解进行讨论, 该方法稳定、有效, 且易于实现. 本文方法提供了一种新的间接 PH 曲线性质研究方法, 这类曲线在几何造型中的应用, 特别是过渡曲线设计、直角倒角曲线构造等将是今后进一步的研究方向.

参考文献

- 1 Farin G, Hoschek J, Kim M-S. Handbook of Comput Aided Geom Design. Amsterdam: Elsevier, 2002
- 2 Farouki R T, Neff C A. Analytic properties of plane offset curves. *Comput Aided Geometric Des*, 1990, 7: 83–99
- 3 Pham B. Offset curves and surfaces: a brief survey. *Comput-Aided Des*, 1992, 24: 223–229
- 4 Elber G, In-Kwon L, Myung-Soo K. Comparing offset curve approximation methods. *IEEE Comput Grap Appl*, 1997, 17: 62–71
- 5 Maekawa T. An overview of offset curves and surfaces. *Comput-Aided Des*, 1999, 31: 165–173
- 6 Lü W. Offset-rational parametric plane curves. *Comput Aided Geometric Des*, 1995, 12: 601–616
- 7 Farouki R T, Sakkalis T. Pythagorean hodographs. *IBM J Res Dev*, 1990, 34: 736–752
- 8 Lu X J, Zheng J M, Cai Y Y, et al. Geometric characteristics of a class of cubic curves with rational offsets. *Comput-Aided Des*, 2016, 70: 36–45
- 9 Choi H I, Lee D S, Moon H P. Clifford algebra, spin representation, and rational parameterization of curves and surfaces. *Adv Comput Math*, 2002, 17: 5–48
- 10 Farouki R T, al-Kandari M, Sakkalis T. Hermite interpolation by rotation-invariant spatial Pythagorean-hodograph curves. *Adv Comput Math*, 2002, 17: 369–383
- 11 Pottmann H. Rational curves and surfaces with rational offsets. *Comput Aided Geometric Des*, 1995, 12: 175–192
- 12 Farouki R T, Šír Z. Rational Pythagorean-hodograph space curves. *Comput Aided Geometric Des*, 2011, 28: 75–88
- 13 Moon H P. Minkowski Pythagorean hodographs. *Comput Aided Geometric Des*, 1999, 16: 739–753
- 14 Sakkalis T, Farouki R T. Pythagorean-hodograph curves in Euclidean spaces of dimension greater than 3. *J Comput Appl Math*, 2012, 236: 4375–4382
- 15 Farouki R T, Neff C A. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph quintics. *Math Comp*, 1995, 64: 1589–1589
- 16 Moon H P, Farouki R T, Choi H I. Construction and shape analysis of PH quintic Hermite interpolants. *Comput Aided Geometric Des*, 2001, 18: 93–115
- 17 Kosinka J, Jüttler B. Hermite interpolation by Minkowski Pythagorean hodograph cubics. *Comput Aided Geometric Des*, 2006, 23: 401–418
- 18 Kong J H, Jeong S P, Lee S, et al. C^1 Hermite interpolation with simple planar PH curves by speed reparametrization. *Comput Aided Geometric Des*, 2008, 25: 214–229
- 19 Byrtus M, Bastl B. G^1 Hermite interpolation by PH cubics revisited. *Comput Aided Geometric Des*, 2010, 27: 622–630

- 20 Kong J H, Lee H C, Kim G I. Hermite interpolation with PH curves by boundary data modification. *J Comput Appl Math*, 2013, 248: 47–60
- 21 Farouki R T. Construction of G^2 rounded corners with Pythagorean-hodograph curves. *Comput Aided Geometric Des*, 2014, 31: 127–139
- 22 Wang G Z, Fang L C. On control polygons of quartic Pythagorean-hodograph curves. *Comput Aided Geometric Des*, 2009, 26: 1006–1015
- 23 Fang L C, Wang G Z. Geometric characteristics of planar quintic Pythagorean-hodograph curves. *J Comput Appl Math*, 2018, 330: 117–127
- 24 Li Y J, Fang L C, Cao J, et al. Identification of two classes of planar septic Pythagorean hodograph curves. *J Comput Appl Math*, 2019, 348: 383–400
- 25 Zheng Z H, Wang G Z, Yang P. On control polygons of Pythagorean hodograph septic curves. *J Comput Appl Math*, 2016, 296: 212–227
- 26 Farouki R T, Giannelli C, Sestini A. Identification and “reverse engineering” of Pythagorean-hodograph curves. *Comput Aided Geometric Des*, 2015, 34: 21–36
- 27 Fang L C, Wang G Z. Construction of a class of quintic curves with rational offsets. *Sci Sin Inform*, 2017, 47: 1694–1708
[方林聪, 汪国昭. 一类五次 OR 曲线的构造方法. *中国科学: 信息科学*, 2017, 47: 1694–1704]
- 28 Farouki R T. The conformal map $z \rightarrow z^2$ of the hodograph plane. *Comput Aided Geometric Des*, 1994, 11: 363–390

Geometric characteristics of quintic indirect-PH curves

Yujun LI¹ & Lincong FANG^{2*}

1. *Zhejiang University of Finance and Economics Dongfang College, Haining 314408, China;*

2. *School of Information Management and Artificial Intelligence, Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou 310018, China*

* Corresponding author. E-mail: lincongfang@gmail.com

Abstract This paper studies the problem of identification of quintic indirect-PH curves. By employing Gaussian elimination and geometric approaches, we give necessary and sufficient conditions for a planar parametric curve to be an indirect-PH curve. Indirect-PH curves own rational offsets after being reparameterized by a fractional quadratic transformation. Algebraic conditions for curves to have rational offsets are constraints on their first derivatives, which are the product of polynomials. However, Bézier curves are represented as a sum of Bernstein polynomials. By considering the equivalence of the product and the sum, we derive non-linear systems and discuss the solutions. Finally, the results are applied to study the Bézier control polygon, thus we get geometric characteristics of quintic indirect-PH curves.

Keywords Bézier curves, offsets, geometric characteristic, rational parameterization



Yujun LI was born in 1992. She received a Master degree from Esc Rennes School of Business, France, in 2016. Currently, she is a lecturer at Zhejiang University of Finance & Economics Dongfang College. Her research interests include geometric design and computation, data analysis.



Lincong FANG was born in 1982. He received a Ph.D. degree in mathematics from Zhejiang University, Hangzhou, in 2009. Currently, he is an associate professor at Zhejiang University of Finance & Economics. His research interests include computer aided geometric design, geometric computation and modeling.