中国科学: 信息科学 2020 年 第 50 卷 第 11 期: 1714–1731
SCIENTIA SINICA Informationis
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

评述

复杂动态网络上的传播行为分析

献给清华大学郑大钟教授

王龙[1*], 武斌[2], 杜金铭[3], 魏钰婷[2], 周达[4]

1. 北京大学系统与控制研究中心, 北京 100871
2. 北京邮电大学理学院数学系, 北京 100876
3. 东北大学工业与系统工程研究所, 沈阳 110819
4. 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005
* 通信作者. E-mail: longwang@pku.edu.cn

收稿日期: 2020–04–09; 接受日期: 2020–05–21; 网络出版日期: 2020–10–20

国家自然科学基金 (批准号: 61751301, 61533001, 11971405, 61703082) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: 20720180005, N2004004) 资助项目

摘要 随着网络科学的兴起, 网络上的传播动力学引起了控制论、博弈论、系统科学、人工智能、社会学、经济学、生物学、心理学、物理学、数学和计算机科学等领域的共同关注. 虽然网络上的不同传播行为具有各自的传播规律, 但其传播特征总是依赖于网络结构. 在实际的复杂网络化系统中, 个体间的交互范围不断变化, 因此, 理解复杂动态网络上的传播行为需要考虑传播动力学与网络演化动力学的耦合. 针对当前动态网络上的传播动力学研究主要采用 Monte Carlo 仿真、缺乏系统理论方法的问题, 我们提出随机网络拓扑更新规则, 证明该规则为可逆 Markov 链, 并给出其稳态分布, 从理论上分析动态网络上的传播动力学. 利用该方法, 本文以合作演化、疾病传播、疫苗接种为例, 给出传播行为分析, 揭示动态网络上的演化博弈策略传播行为与疾病传播行为的共性与区别, 有望为复杂动态网络上的传播动力学分析提供统一的理论框架.

关键词 传播行为, 动态网络, 演化博弈动力学, 疾病传播动力学

1 引言

复杂系统中的信息扩散、疾病传播等传播现象的动力学规律, 是控制论、博弈论、系统科学、人工智能、社会学、经济学、生物学、心理学、物理学、数学和计算机科学等领域共同关注的前沿课题 [1~45]. 在复杂社会群体中, 信息或观点通过个体间的交流而扩散, 最终形成深刻影响群体认知的社会舆论 [21]; 流行性的传染病在个体与个体间传染, 一旦被感染个体进入到缺乏免疫保护的群体中, 就

引用格式: 王龙, 武斌, 杜金铭, 等. 复杂动态网络上的传播行为分析. 中国科学: 信息科学, 2020, 50: 1714–1731, doi: 10.1360/SSI-2020-0087
Wang L, Wu B, Du J M, et al. Spreading dynamics on complex dynamical networks (in Chinese). Sci Sin Inform, 2020, 50: 1714–1731, doi: 10.1360/SSI-2020-0087

极有可能导致传染病的大规模爆发 [35~37], 威胁人民生命安全, 严重影响社会正常秩序; 计算机病毒通过计算机硬件设备、存储设备、网络等进行传播, 危害信息系统运行、功能发挥, 以及软件数据的完整性, 严重影响人们正常的工作与生活, 甚至威胁国家安全 [46]. 自 2020 年 1 月起, 新型冠状病毒感染肺炎 (简称 "新冠肺炎") 在全球范围的社会网络上迅速蔓延, 为了遏制新型冠状病毒的传播, 从而控制疫情, 中国政府采取了诸多预防和减少传播的紧急措施, 并针对病毒的流行病学特征以及传播动力学展开攻关研究, 评估相关疾病控制措施的效果并预测病毒未来的传播情况. 研究复杂系统中的传播动力学, 针对信息、病毒等在群体中的传播路径、影响因素以及系统的动态演化过程等进行理论分析, 有助于理解传播行为并揭示传播规律. 在此基础上, 有望实现对于传播行为的有效控制. 一方面, 促进积极的、有益的、具有正能量的信息或个体行为在群体中扩散传播, 诸如利他性的合作行为、自愿免疫接种行为等 [23~25]; 另一方面, 有效控制和防范谣言传播、计算机病毒传播, 以及传染性疾病传播等 [35~37]. 因此, 对于传播动力学的分析具有重要的理论研究价值和实际应用前景.

复杂系统中的个体交互关系可以由复杂网络进行刻画 [47~57]. 网络上的节点代表系统中的个体或组织, 节点间的边代表个体或组织间所具有的交互关系 [58~63]. 网络化使得复杂系统中信息的呈现方式、传递形式、扩散模式更加复杂, 改变了信息传播的速率和扩散规律 [64~77]. 例如, 以社交网络为代表的社会网络, 其蓬勃发展正在深刻地影响着人们的思维方式和行为模式 [78~80]. 近 20 年来, 随着网络科学的研究热潮兴起, 复杂网络上的系统演化以及传播动力学研究已成为复杂性科学领域的新热点 [81~98]. 尽管不同的传播行为具有各自的传播规律, 但信息、疾病等在网络化群体中的传播特征总是依赖于网络拓扑结构的. 网络结构是复杂系统中信息传播与扩散的基础. 在网络中, 个体间的交互通过网络的边进行, 网络限定了个体交互的范围. 这使得网络上的传播动力学 —— 相比于经典传播动力学 —— 呈现出更加丰富的动力学特性. 例如, 复杂网络上的合作演化研究表明, 小世界网络可以促进经典理论下无法涌现的利他性合作行为在系统中的传播 [99]. 这激发了研究者探索复杂网络上的信息传播特性、规律以及系统演化动力学的热情, 拓展了传统传播动力学的研究范畴.

在复杂网络化系统中, 个体间的联系及交互范围时常发生变化 [100~106]. 例如, 社会网络中的人员流动频繁, 这使得人与人之间的联系随着空间迁移、地域限制等因素而改变. 随着系统越来越复杂, 表征系统中个体联结关系的网络拓扑结构的动态特征愈发显著. 真实世界中的网络拓扑结构往往不是一成不变的, 而是在持续动态演化之中 [107]. 于是, 理解复杂动态网络上的传播行为需要考虑传播动力学与网络演化动力学的耦合, 探讨传播动力学与网络拓扑的相互影响、协同演化 [108~110]. 在实际的复杂系统中, 个体往往具有智能性. 根据自身利益, 他们不仅具有调整行为、状态的能力, 同时也具有调整与其他个体的联结关系 (邻居集) 的能力. 在群体交互中, 具有合作意愿的个体不仅可以选择自身的策略, 而且可以主动断开与自私的背叛者之间的连接, 从而规避在博弈中的损失 [111,112]. 在疾病流行的背景下, 易感个体倾向于断开与已感染者的连接, 以降低被传染的概率 [113,114]; 另一方面, 在自愿免疫接种的背景下, 未接种疫苗的个体更倾向于与已经接种疫苗的个体建立联系 [115]. 因此, 动态网络拓扑上的传播动力学有两个基本特点: 一是个体具有智能性, 即个体的更新是由其趋利避害的意愿所决定的; 二是个体的更新对象除了其策略、状态 (感染与否) 之外, 还有其交互对象 —— 即邻居集. 不断更新的网络拓扑, 构成了动态复杂系统中个体的交互 "环境". 个体通过有选择地调整其邻居集, 使得动态网络上的传播动力学将个体的智能性、交互范围耦合起来. 这种耦合特性的数学表现就是传播动力学与网络拓扑动力学的耦合, 从而引发了动态网络系统新的复杂动力学行为.

当前复杂动态网络上的传播动力学研究主要是采用基于计算机仿真的 Monte Carlo 方法 [116~118]. 半张量积方法是处理复杂动态网络上传播动力学的严格理论方法之一 [119~122]. 通过半张量积方法可以得到策略传播或者演化占优的充要条件, 有着重要的理论意义. 但是这些代数条件与动态网络特性

的对应关系不易理解, 并且缺少判断大规模动态网络上策略占优的代数判据是否满足的有效算法.

针对动态网络传播动力学的复杂性和耦合性, 本文提出一种新的分析方法, 研究传播行为与网络结构协同演化的动力学. 不同于 Monte Carlo 仿真, 本方法基于平均场理论, 从理论上揭示出动态网络上的传播动力学与经典传播动力学的关系. 我们的理论分析发现, 动态网络上的传播动力学可以转化为经典的传播动力学. 更进一步, 我们发现, 个体的交互时间对于动态网络系统的演化具有重要的意义. 利用该方法, 可以从经典传播动力学的角度揭示网络动态演化对传播动力学的定量影响. 相比于半张量积方法, 我们提出的方法可以有效预测网络规模巨大的动态网络上的传播行为.

本文重点关注复杂网络上的传播动力学相关理论研究. 本文结构安排如下: 首先, 阐释两类经典的传播动力学: 演化博弈动力学和疾病传播动力学; 其次, 提出随机网络拓扑动力学, 并证明它是可逆的 Markov 链; 再次, 以合作演化、病毒传播和疫苗接种行为这 3 种传播动力学为例, 分析动态网络上的传播行为, 并探讨其与相应的经典传播行为之间的关系; 最后, 比较动态网络上的演化博弈动力学与疾病传播动力学的异同, 并指出未来发展的方向.

2 静态全连通网络上的传播动力学

典型的传播动力学研究对象包括合作演化与传染病动力学. 在合作演化研究中, 群体系统中的个体通过交互, 学习其他个体的策略; 在传染病动力学中, 未感染个体在与已感染的个体的接触过程中, 可能被传染. 上述动力学过程中的策略比例、感染者比例的演化均受到其他策略的比例、未感染者比例的影响. 因此, 利用常微分方程对相应的传播动力学建模, 得到的传播过程是非线性微分动力学. 基于微分方程的静态全连通网络上的演化博弈动力学和传染病动力学简述如下.

2.1 演化博弈动力学

策略的传播过程可由复制动力学 (replicator dynamics) 描述 [123, 124]. 复制动力学方程基于优胜劣汰的自然选择原理 (natural selection), 既适用于生物系统也适用于社会系统. 在生物群体中, "优" 是指个体的出生率比平均出生率高; 在社会群体中, "优" 是指个体相比于被模仿的个体有更高的收益. 复制动力学与理论生态学中描述捕食者 – 被捕食者动力学的 Lotka-Voltera 方程存在可逆的微分同胚映射 [124]. 由于 Lotka-Voltera 方程在此前的研究中展现出了丰富的动力学特性 [125], 因此, 复制方程也具有丰富的动力学特性.

策略的演化动力学由如下微分方程刻画 [123, 124]:

$$\dot{x_i} = x_i(\pi_i - \bar{\pi}), \tag{1}$$

其中, x_i 表示策略 i 在群体中的密度, π_i 表示该策略的适应度, $\bar{\pi}$ 表示整个种群的平均适应度. 如果某策略的适应度高于种群的平均适应度, 其密度将增加; 如果该策略的适应度低于种群的平均适应度, 相应地其密度将下降. 一般来说, π_i 与种群的组成密切相关, 也就是由其他所有策略的密度 x_j 确定. 于是, $\bar{\pi}$ 为密度 x_j 的二次函数. 因此, 该动力学是非线性的. 因为复制方程中的变量代表每种策略的密度, 满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ 的所有的点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在自然坐标系中构成一个单纯形, 即对于两策略, 是一条线; 对于三策略, 是一个等边三角形; 对于四策略, 是一个等边四面体. 于是, 当有更多的策略加入时, 该方程的解析将变得愈发复杂.

以最简单的二人标准形式博弈 (2×2 博弈) 为例 [9~13, 126~129]. 该博弈中两种策略的交互可由如

下收益矩阵描述:

$$\begin{array}{c|cc} & A & B \\ \hline A & a & b \\ B & c & d \end{array} \tag{2}$$

如果 A 策略个体与另一个 A 个体博弈, 得到 a; 与一个 B 个体博弈, 则得到 b. 类似地, B 策略个体与一个 A 个体博弈, 得到 c; 与一个 B 个体博弈, 则得到 d. 策略的平均收益由各种策略在种群中的密度所决定. 由于只考虑两种策略, 种群的状态可由 $x = x_1 = 1 - x_2$ 完全确定. 于是, 两种策略的平均收益分别为 $\pi_A = ax + b(1-x)$ 和 $\pi_B = cx + d(1-x)$. 复制方程可改写为

$$\dot{x} = x(1-x)[(a-b-c+d)x + b - d]. \tag{3}$$

除了 $x=0$ 和 $x=1$ 这两个平衡点, 复制方程在 $a>c$ 且 $d>b$, 或 $a<c$ 且 $d<b$ 时, 有第 3 个平衡点 x^*:

$$x^* = \frac{d-b}{a-b-c+d}. \tag{4}$$

基于此, 可以讨论如下 4 种情况 [130].

(1) 占优 (dominance). 在此情形下, 无论对手采取怎样的行动, 其中某一个策略总是更优的选择. 在两策略博弈中, 或者是 A 策略相对于 B 占优 ($a>c$ 且 $b>d$), 或者是 B 策略相对于 A 占优 ($a<c$ 且 $b<d$). 在前一种情况下, 平衡点 $x=1$ 是稳定的, 而平衡点 $x=0$ 是不稳定的; 后一种情况, 则恰好相反.

(2) 双稳态 (bistability). 在此情形下, $a>c$ 且 $d>b$. 平衡点 $x=0$ 和 $x=1$ 都是稳定的, 各自的吸引域由不稳定的平衡点 x^* 分隔.

(3) 共存 (coexistence). 当 $a<c$ 且 $b>d$ 时, x^* 是一个稳定的平衡点. 于是, 种群可以稳定在 A 策略和 B 策略混合的状态. 而 $x=0$ 和 $x=1$ 都是不稳定的平衡点.

(4) 中性 (neutrality). 当 $a=c$ 且 $b=d$ 时, 所有的 x 值对于复制动力学均为稳定的平衡点. 尽管这种情形在复制动力学的研究中意义有限, 但对于有限种群的随机演化动力学, 中性选择却是一个值得研究的重要基准情况.

在绝大多数情况下, 平衡点的位置和稳定性可以通过理论分析确定. 复制方程的平衡点与博弈的 Nash 均衡有密切的关系: 博弈的 Nash 均衡一定是复制动力学方程的平衡点; 如果复制动力学方程的内部平衡点是 Lyapunov 稳定的, 则它一定是博弈的 Nash 均衡; 演化稳定策略一定是复制动力学的渐近稳定平衡点. 此外, 对称特性使得动力学遵循闭合轨道. 而高维的复制动力学方程会呈现确定性的混沌 [131~133].

2.2　疾病传播动力学

流行病传播 (epidemic spreading) 动力学 [35,36,113,115] 是生物群体动力学中研究最为广泛的领域之一. 它在描述疾病传播机制、预测疾病爆发以及制定疾病控制策略等方面都具有重要的研究价值和意义.

2.2.1 SIS 模型

流行病传播模型种类繁多, 其中最基本的模型是 SIS 模型 (susceptible-infective-susceptible model). 该模型根据患病情况把个体分为两类: 一类为易感者 (S), 即未被感染个体; 另一类为感染者 (I), 即患病且具有传染性的个体. 其中, 易感者通过与感染者接触以一定的概率变成感染者; 而感染者则在休养一段时间后康复, 重新成为易感者. 在 SIS 模型中, 假设康复个体不产生抗体, 从而会被反复感染. 模型参数主要有两个: 传染率 α 和康复率 γ. 传染的过程是通过个体之间的接触完成的. 例如, 易感个体 i 与感染者 j 接触, i 以概率 α 被传染, 从而也变成感染者, 该过程可描述为 $S(i)+I(j)\xrightarrow{\alpha}I(i)+I(j)$. 被感染的个体 i, 按照康复速率 μ, 经一段时间后会重新变成易感者, 该过程可描述为 $I(i)\xrightarrow{\gamma}S(i)$. 特别地, 在群体规模充分大并充分混合 (well-mixed) 的情形下, 基于质量作用定律 (mass action principle), 上述转移机制可以用如下的常微分方程组刻画:

$$\begin{cases}\mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t=-\alpha s(t)i(t)+\gamma i(t),\\ \mathrm{d}i(t)/\mathrm{d}t=\alpha s(t)i(t)-\gamma i(t),\end{cases}\tag{5}$$

其中 $s(t)$ 和 $i(t)$ 分别表示 t 时刻易感者和感染者的密度. 考虑到 $s(t)+i(t)=1$, 因此上述方程组的自由度为 1. 不妨假定康复速率 $\mu=1$, 于是, SIS 模型可由如下方程描述:

$$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t=-\alpha i^2+(\alpha-1)i.\tag{6}$$

该方程的动力学可进行如下分类:

(1) 当 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 时, $i=0$ 是方程唯一的不动点, 而且是全局吸引子.

(2) 当 $\alpha>1$ 时, $i=0$ 和 $i=(\alpha-1)/\alpha$ 为不动点, 此时 $i=(\alpha-1)/\alpha$ 是全局吸引子.

随着参数 α 取值的变化, 模型的稳定性在 α 通过 1 的时候发生了 “质” 的变化, 这种现象称为 “相变” (phase transition). 其中, $\alpha=1$ 称为临界点 (critical point), $\alpha>1$ 称为超临界 (supercritical) 情形, $\alpha<1$ 称为次临界情形 (subcritical). 对于 SIS 模型, 这种相变现象可直观解释为: 当传染速率低于康复速率时, 系统中的疾病会最终消失; 反之, 如果传染速率大于康复速率, 系统中感染者的密度会稳定在一个大于零的值, 且该值会随着传染速率的增大而增大, 并不断趋近于 1. 这种相变现象也是经典 SIS 模型中最为重要且有意义的结果.

2.2.2 SIR 模型

SIR 模型 (susceptible-infected-recovered model) 是另一种用来刻画流行病传播的模型. 模型假设种群是混合均匀的, 群体中包含 3 类个体: 易感的个体 (susceptible)、被感染的个体 (infected) 以及康复的个体 (recovered), 康复个体从疾病状态恢复后获得了对于疾病的免疫力, 不会再被感染. 记易感者、被感染者以及康复者在种群中所占的比例分别为 S, I 和 R. SIR 模型的动力学可由如下方程刻画 [134]:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\mu\left(1-x_V\right)-\alpha SI-\mu S,\tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\alpha SI-\gamma I-\mu I,\tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\mu x_V+\gamma I-\mu R,\tag{9}$$

其中, μ 表示出生/死亡率, α 表示平均传染率, γ 表示平均恢复率, x_V 代表自然免疫个体占种群总数的比例. R_0 为基本再生比率, 在 SIR 模型中是传播率与康复率的比值, 表征疾病传播的能力. 从方程

(8), 我们可以推出 $R_0=\alpha/(\gamma+\mu)$. 如果 $R_0\leqslant 1$, 则 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ 为负, 疾病不能传播. 当群体比例 (S,I,R) 稳定时, 可以得到 $S^*=1/R_0$, $I^*=\mu[R_0(1-x_V)-1]/\alpha$, $R^*=1-I^*-S^*$. 对于 $I^*>0$, 可以发现: 当自然免疫比例 $x_V<1-1/R_0$ 时, 疾病无法消除; 反之, $x_V\geqslant 1-1/R_0$ 时, 疾病将被消除, 即最终没有人被感染.

定义每个没有自然免疫力的个体被感染的概率为 $d(x_V)$, 由于易感染者是没有自然免疫力且未被感染的个体, 结合我们已经得到的最终易感染者比例 $S^*=1/R_0$, 关系式 $S^*=(1-x_V)[1-d(x_V)]$ 成立. 由此, 可以得到

$$d(x_V)=\begin{cases}1-\frac{1}{R_0(1-x_V)}, & 若\ 0\leqslant x_V<1-\frac{1}{R_0},\\ 0, & 若\ x_V\geqslant 1-\frac{1}{R_0}.\end{cases}\tag{10}$$

3　网络拓扑的动力学

复杂系统中的个体, 通过相互之间的互动关系形成一个连通网络. 网络中的节点代表系统中的个体, 网络中的边表示个体之间具有交互或某个社会关系. 定义网络中节点的总数为 N, 边的总数为 L. 网络中节点的状态记为 i, 其中 i 的取值选自基数为 n 的离散集合 $\{1,2,\ldots,n\}$. 将具有状态 i 的节点占网络总节点的比例记为 x_i. 定义 ij 为连接 i 状态个体与 j 状态个体的边, 于是, 网络中至多有 $h=n(n+1)/2$ 个社会关系, 且构成集合

$$S_n=\{ij|1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\}.\tag{11}$$

基于上述对于复杂网络化系统的定义, 我们提出如下网络拓扑更新规则.

第 1 步: 随机地在网络中选择一条边, 不失一般性, 记这条边为 $ij\in S_n$;

第 2 步: 这条边以概率 k_{ij} 断开;

第 3 步: 若边 ij 断开, 则在其两个端点 i 和 j 中随机选取一个, 记为 $s\in\{i,j\}$, 再在网络中不是 s 当前邻居的个体中随机选择一个与 s 相连接.

上述网络拓扑动力学具有如下特点: (1) 网络中仅有边的更新, 顶点状态并不更新, 因此 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 保持不变; (2) 网络更新具有随机性; (3) 每条边在更新前后至少有一个公共节点; (4) 网络中边的总数保持不变, 于是, 网络的平均度 $2L/N$ 在网络拓扑演化过程中也保持不变.

对于所提出的网络拓扑动力学分析如下: 在 $t=0$ 时刻, 每条边被赋予一个从 1 到 L 的编号. 我们对于编号为 i 的边, 记 $i^0=i$, 由此定义初始边序列. 若边 i^0 在第 1 步网络拓扑更新后没有断开, 则定义 $i^1=i^0$; 若 i^0 边在第 1 步更新中断开, 则存在一条新的边被连接, 记这条新连接的边为 i^1. 我们可递归地定义 i^t, $t\geqslant 1$. 将边 i^t 的类型记为 $T(i^t)$, 有 $T(i^t)\in S_n$. 注意到在已知 $T(i^{t-1})$ 的条件下, $T(i^t)$ 与 $T(i^k)$, $k=0,1,2,\ldots,t-2$ 无关, 因此, $T(i^t)$ 是一条在状态空间 S_n 上的 Markov 链. 定义该 Markov 链的转移概率矩阵为 G, 该转移概率矩阵 G 为 $h\times h$ 阶方阵. 若 i^t 在时刻 t 未被选中 (概率为 $(L-1)/L$), 则边 i^t 在 t 时刻保持连接, 于是 $i^{t+1}=i^t$, 且 $T(i^{t+1})=T(i^t)$. 因此, 在边 i^t 未被选中的条件下, 转移概率矩阵为单位阵 I_h. 若 i^t 在时刻 t 被选中 (概率为 $1/L$), 记条件转移概率矩阵为 V. 于是, 可得 $G=\frac{1}{L}V+\frac{L-1}{L}I_h$.

接下来, 对于条件转移概率矩阵中的 $V_{(XY,ZW)}$ 分析如下, 其中 X,Y 分别表示更新前该边的两个节点的状态, 类似地, Z,W 分别表示更新后该边的两个节点的状态.

(1) 若 $\{X,Y\}\bigcap\{Z,W\}=\emptyset$, 则边 i^{t-1} 与边 i^t 没有公共节点, 这不符合更新规则中的相关设定, 因此, 此情形下的 $V_{(XY)(ZW)}=0$.

(2) 若 $\{X,Y\}\bigcap\{Z,W\}=\{X\}$, 不失一般性, 假设 $X=Z$.

(a) 若 $Y\neq W$ 且 $X\neq Y$, 原边 i^{t-1} 和更新后的边 i^t 有且仅有一个公共节点. 原边 i^{t-1} 以概率 k_{XY} 断开, 随后, 边 i^{t-1} 中状态为 X 的节点被选择 (以概率 1/2), 该节点所代表的 X 状态个体与系统中另一状态为 W 的个体相连 (以概率 x_W, 其中 x_W 是 W 状态个体在系统中的比例), 于是 $V_{(XY)(ZW)}=k_{XY}x_W/2$;

(b) 若 $Y\neq W$ 且 $X=Y$, 原边 i^{t-1} 和更新后的边 i^t 有且仅有一个公共节点. 原边 i^{t-1} 以概率 k_{XY} 断开, 之后无论选择哪个节点, 其状态均为 X, 因此 $V_{(XY)(ZW)}=k_{XX}x_W$;

(c) 若 $X=Y=Z=W$, 则可能是原边 i^{t-1} 没有断开 (以概率 $1-k_{XX}$), 或即使原边 i^{t-1} 断开 (以概率 k_{XX}), 之后被选中的节点又与另一个状态为 X 的个体相连接 (以概率 x_X), 因此 $V_{(XX)(XX)}=(1-k_{XX})+k_{XX}x_X$.

(3) 若 $\{X,Y\}\bigcap\{Z,W\}=\{X,Y\}$, 不失一般性, 假设 $X=Z$, $Y=W$ 且 $X\neq Y$. 由转移概率矩阵的归一性, 可知 $V_{(XY)(ZW)}=k_{XY}(x_X+x_Y)/2+(1-k_{XY})$.

注意到 $T(i^t)$ 的转移概率矩阵 G 并不依赖于时间 t, 因此, $T(i^t)$ 是时齐 Markov 链. 基于此, 可以证明, 当 $\Pi_{i=1}^{n}x_i\Pi_{XY\in S_n}k_{XY}\neq 0$ 时, G 所对应的 Markov 链是不可约非周期的, 且是可逆的 [135]. 此时, 存在唯一的 G 的稳态分布 π:

$$\pi_{ij}=a(x)(2-\delta_{ij})x_ix_j/k_{ij},\quad ij\in S_n, \tag{12}$$

其中, δ_{ij} 是 Kronecker Delta. 当 $i=j$ 时, $\delta_{ij}=1$; 否则 $\delta_{ij}=0$. $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $a(x)=[\sum_{ij\in S_n}(2-\delta_{ij})x_ix_j/k_{ij}]^{-1}>0$ 是归一化常数.

当网络化系统中的节点状态数目为 n 时, 集合 S_n 中包含 $\frac{n(1+n)}{2}$ 个元素. 计算上述 Markov 链的稳态分布, 等价于求解 $\frac{n(1+n)}{2}\times\frac{n(1+n)}{2}$ 矩阵的特征值为 1 的左特征向量. 对于较大的 n, 矩阵阶数为 n^2, 考虑到计算复杂度, 往往难以获得相应的特征向量. 此时, 可通过证明 Markov 链满足细致平衡条件 $Q_{(XY,ZW)}\pi_{XY}=Q_{(ZW,XY)}\pi_{ZW}$ [135], 进一步求解任意状态数目 n 下的稳态分布.

稳态分布 π 的每一个分量也是网络拓扑动力学达到稳定状态时各类边在总边数中所占的比例. 在稳态时, XY 边的平均数目 $E(N_{XY})=H\pi_{XY}$ 正比于 $\frac{x_ix_j}{k_{ij}}$. 特别地, 对于 $n=2$ 的情况, 网络系统中共有两种不同状态的个体, $S_2=\{11,12,22\}$, 各种边在网络拓扑动力学达到稳态时的比例 π_{ij} 是状态 1 在网络节点中的比例 x_1 的单变量函数.

4 动态网络上的传播动力学

4.1 合作演化

探索合作行为的涌现机制是 21 世纪最重要的科学问题之一 [136~145]. 在社会群体内的个体交互过程中, 合作者在损失自身收益的情况下使他人获利. 根据自然选择原理, 利他性的合作行为是无法在系统中涌现和保持的. 然而, 众所周知, 合作现象广泛存在于自然界和人类社会中. 这就促进人们去探索合作演化的机理以及促进合作涌现的机制.

接下来, 我们采用囚徒困境 (prisoners' dilemma) 描述网络上的合作演化. 这里我们给出动态网络上的合作演化动力学的主要结论, 具体过程参见文献 [111]. 在系统演化的初始时刻, 定义一个节点个数为 N、边总数为 L 的连通网络, 网络中的节点代表个体, 边表示社会关系. 假设每个由网络节点表征的个体有两个可选状态: 合作 (C) 或者背叛 (D). 当合作者 (C) 遇到合作者 (C) 时, 每个个体获得

收益 1; 当合作者 (C) 遇到背叛者 (D) 时, 合作者收益为 0 而背叛者收益为 $1+u$, 其中 $0<u<1$; 当背叛者 (D) 遇到背叛者 (D) 时, 他们各自获得收益 u. 对于集体而言, 双方合作比双方背叛的收益高 $(1+1>u+u)$. 然而, 从个体角度看, 无论对方采取何种策略, 背叛所获得的收益总是大于合作的. 因此, 理性个体会选择背叛. 这体现出集体利益与个体利益间的冲突.

网络系统的动态演化规则如下: 每一时刻, 以 w 的概率选择网络中的节点 (个体) 进行策略更新; 以 $1-w$ 的概率对网络拓扑进行更新. 在策略更新时, 首先任选一条边, 记该边的两个节点分别为 a 和 b, 个体 a 以概率 $\{1+\exp[-\beta(f_b-f_a)]\}^{-1}$ 学习 b 的策略. 其中, f_a 是个体 a 在与其所有邻居的博弈中所获得的累积收益. 定义 $\beta>0$ 为选择强度, 表征收益差异对个体决策的影响程度. 对于网络拓扑更新, 则按照第 3 节所述的规则进行. 此时, 由于网络中的节点只有两种状态 C 和 D, 因此共有 3 种边: CC, CD 和 DD.

当 $w\ll 1$ 时, 网络系统中的策略演化慢于网络拓扑的演化. 当系统中的策略演化的时候, 网络拓扑 (边的演化) 已经达到其稳态分布 $(\pi_{CC},\pi_{CD},\pi_{DD})$. 因此, 合作者 ($C$) 的平均累积收益为所有 C 个体的总收益除以 C 个体的数目:

$$f_C=L(2E(N_{CC})+0E(N_{CD}))/(Nx_C)=\tfrac{2La(x)}{N}\underbrace{\frac{x_C}{k_{CCp}}}_{\tilde{f}_C}. \tag{13}$$

同理, 可得背叛者 (D) 的平均累积收益:

$$f_D=L((1+u)E(N_{CD})+2uE(N_{DD}))/(Nx_D)=\tfrac{2La(x)}{N}\underbrace{\left(\frac{1+u}{k_{CD}}x_C+\frac{u}{k_{DD}}x_D\right)}_{\tilde{f}_D}. \tag{14}$$

在此基础上, 分析策略更新时合作水平 x_C 的变化. 当一条 CD 边以概率 $\pi_{CD}=a(x)\frac{x_Cx_D}{k_{CD}}$ 被选中, 如果该边的 C 策略节点学习 D 策略个体的策略 (以概率 $\{1+\exp[-\beta(f_D-f_C)]\}^{-1}$), 则合作水平 x_C 变为 $x_C-\frac{1}{N}$; 如果该边的 D 策略节点学习 C 策略个体的策略 (以概率 $\{1+\exp[-\beta(f_C-f_D)]\}^{-1}$), 则合作水平 x_C 变为 $x_C+\frac{1}{N}$. 于是, 合作行为的演化方程为 [146]

$$\dot{x_C}=a(x)\frac{x_Cx_D}{k_{CD}}\frac{1}{N}\tanh\left(\frac{\beta La(x)}{N}(\tilde{f}_C-\tilde{f}_D)\right). \tag{15}$$

如果我们在方程 (15) 的右边乘上一项 $\frac{Nk_{CD}(\tilde{f}_C-\tilde{f}_D)}{a(x)\tanh(\frac{\beta La(x)}{N}(\tilde{f}_C-\tilde{f}_D))}>0$, 该操作只改变方程的演化速度, 而对方程的渐近行为并没有影响, 所以合作水平的演化方程可由下式刻画:

$$\dot{x_C}=x_C(1-x_C)(\tilde{f}_C-\tilde{f}_D). \tag{16}$$

该方程恰为全连通图上, 当博弈矩阵为 $\tilde{M}$ 时的系统复制动力学方程.

$$\tilde{M}=\begin{pmatrix}\frac{1}{k_{CC}} & 0\\ \frac{1+u}{k_{CD}} & \frac{u}{k_{DD}}\end{pmatrix}. \tag{17}$$

至此, 我们将动态网络上的由囚徒困境刻画的合作演化动力学转化为全连通图上的由博弈矩阵 (17) 所刻画的合作策略的复制动力学. 于是, 当 $\tilde{M}_{11}>\tilde{M}_{21}$ 时, 即

$$u<\frac{k_{CD}}{k_{CC}}-1 \tag{18}$$

合作是演化稳定的. 该不等式表明, 当 CD 边的断边概率越大, 或 CC 边的断边概率越小时, 合作越容易成为演化稳定策略. 换言之, 可以理解为合作者与合作者的交互时间越长, 越有利于合作. 该不等式定量地刻画了使得合作行为成为演化稳定策略的网络动力学的特性.

4.2 流行病传播

经典的 SIS 模型是在群体充分混合的条件下考虑疾病如何传播. 但是在真实的世界中, 群体结构更为复杂. 同时, 群体结构往往不是静态的, 而是随时间和疾病状态而变化的. 因此, 研究网络拓扑动力学与疾病传播动力学的耦合过程就成了一个非常重要的问题. 从控制的角度来看, 可以将网络拓扑结构看成是疾病防控的干预对象. 基于我们提出的网络拓扑动力学模型, 可以定量比较不同的网络拓扑结构干预方式对于疾病传播的影响 [113].

SIS 模型的微观动力学过程被学者们称为接触过程 (contact process), 它是一种在给定网络拓扑结构下刻画疾病在个体之间传播的概率模型. 这里我们给出动态网络上的疾病传播动力学的主要结论, 具体过程参见文献 [113]. 在系统演化的初始时刻, 考虑一个包含 N 个节点的连通网络, 并且该网络的平均度为 k. 每个节点代表一个个体, 个体或者处于染病的状态, 或者处于易感状态. 我们用 N_0 表示感染者的数目, 而 $N-N_0$ 为易感者的数目, 假设他们在网络中的初始分布是随机的. 每一时刻, 系统以概率 w 进行疾病传播状态的更新. 在系统中任选一个感染者 a, 若此时 a 的度是 k_a, 则 a 以概率 $\frac{\gamma}{k_a\alpha+\gamma}$ 康复变成易感者; 疾病以概率 $\frac{\alpha}{k_a\alpha+\gamma}$, 从 a 传播到其任意一个邻居身上. 此时, 如果该邻居是易感者, 则疾病传播事件发生; 如果该邻居本身已经是感染者, 则传播事件不改变该邻居的状态. 相应的, 系统以概率 $1-w$, 依照第 3 节的规则对网络拓扑进行更新. 在 SIS 模型中, 网络节点有两种状态 S 和 I, 因此网络中共有 3 种类型的边: SS, SI 和 II.

当 $w \ll 1$ 时, 疾病传播慢于网络拓扑的演化. 当疾病传播的时候, 网络拓扑已经达到其稳态分布 $(\pi_{SS}, \pi_{SI}, \pi_{II})$. 如果记 N_{SI} 为 SI 边的个数, 则

$$N_{SI} \approx \frac{Nk}{2}\pi_{SI}, \tag{19}$$

其中 $Nk/2$ 是网络中总的边数. 因此, 引入网络拓扑动力学之后的 SIS 模型可以用如下方程进行刻画:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{k\alpha}{a(i)k_{SI}} is - \gamma i, \tag{20}$$

其中, $a(i)$ 是稳态分布的归一化常数, k_{SI} 为 S 和 I 之间的断边概率. 如果将 $\frac{k\alpha}{a(i)k_{SI}}$ 记为 $\Lambda(i)$, 那么我们可以认为, 网络拓扑动力学实质上引入了具有频率依赖性的感染速率. 相比于具有常值感染速率 α 的经典 SIS 模型, 带有 $\Lambda(i)$ 的 SIS 模型具有更加丰富的动力学特性 (例如双稳态). 需要强调的是, 这里的 $\Lambda(i)$ 并非是在宏观方程中直接设定的, 而是从微观模型推导出来的. 因此, 我们所提出的方法为具有频率依赖性的感染速率提供了一种微观上的解释.

以此为基础, 探讨不同的网络拓扑干预方式会给疾病的最终传播结果带来哪些不同的影响, 这也是相关研究者最为关心的问题. 直观上来看, 减少感染者与易感者之间接触的机会, 或者隔离, 可以有效控制疾病的传播. 因此, 增大 k_{SI}, 即易感者与感染者之间的断边概率, 是一种可行的干预策略; 另一方面, 降低易感者与易感者之间的断边概率 (k_{SS}), 从理论上来看, 同样可以减少易感者与感染者之间的接触机会. 在此前的相关研究中, 对第 1 种策略进行过比较深入的研究, 但是第 2 种策略却少有关注. 两种策略的干预方式看似殊途同归, 但由于网络中还有 II 边的存在, 因此增大 k_{SI} 并不意味着等量地减少 k_{SS}. 通过比较研究, 我们发现, 第 2 种策略比第 1 种策略更鲁棒. 具体而言, 第 1 种控制策

略的效果非常依赖疾病的感染速率以及各种断边概率 k_{XY} 的具体数值大小; 而第 2 种控制策略对不同的参数情形均有较为稳定的干预效果.

4.3　疫苗自愿接种

疫苗接种是防止传染病传播的重要措施, 然而自愿疫苗接种是一个社会困境 [114]. 一方面, 疫苗接种者 (记为 V) 需要花费时间和金钱接种疫苗, 同时, 他们还可能要承担疫苗接种所导致的副作用的影响 (如发烧引起身体不适等), 记接种疫苗的的代价为 $P>0$; 另一方面对于未接种疫苗的个体, 可能出现以下两种情况. 一部分个体受益于疫苗接种者所带来的群体免疫而同样保持健康. 在此过程中, 他们不需要付出任何代价, 我们称之为成功的搭便车者 (successful free-rider), 记为 H. 另一部分个体则可能被感染 (记为 I), 并承担治愈疾病的代价, 记为 $C>0$. 当整个种群中的个体均不接种疫苗时, 群体免疫过低, 很容易导致大多数人感染疾病; 然而, 当个体均已经接种疫苗时, 自私的个体可能在接下来的传染季选择不接种, 从而导致接种水平下降, 以至无法达到控制传染病传播的目标, 危害公共卫生安全. 因此自愿接种行为是一个社会困境. 之前关于疫苗接种的研究大多是建立在静态网络上的, 考虑到个体间的社会关系是时变的, 因此, 社会网络拓扑的动态性对自愿免疫接种水平的影响是值得研究的课题. 这里我们给出动态网络上的自愿免疫接种行为演化动力学的主要结论, 具体过程参见文献 [115].

在系统初始时刻, 考虑一个顶点个数为 N、边数为 L 的连通网络, 网络中的节点代表个体, 边表示社会关系. 网络上有 3 种状态的节点: 接种个体 (V)、未接种的健康个体 (H) 以及未接种的感染个体 (I). 于是, 网络中共有 6 种类型的边: VV, HH, II, VH, VI, HI. 每一时刻, 系统以 w 的概率更新节点的策略; 以 $1-w$ 的概率按照第 3 节的规则对网络拓扑进行更新. 策略更新规则如下: 在网络中任选一条边 ij, 在该边的两个节点中任选一个 i; 相应地, 另一个个体为 j. 个体 i 以概率 $\{1+\exp[-\beta(f_j-f_i)]\}^{-1}$ 学习 j 的策略. 其中 f_i 是个体 i 在与所有邻居博弈中所获得的累积收益, $\beta>0$ 为选择强度.

该模型中存在 3 种动力学: 流行病动力学、网络拓扑动力学以及模仿动力学. 这 3 种动力学在系统中是高度耦合的. 首先, 每个个体决定是否接种疫苗. 接下来, 流行病动力学决定哪些未接种疫苗的个体被感染. 至此, 每个个体都得到了自身的收益. 系统的网络拓扑结构决定哪些个体之间存在交互学习关系. 基于社会偏见 [113] 网络拓扑动力学, 即我们提出的网络拓扑更新规则, 将更新系统的网络结构. 最终, 每个个体根据自己所选择的策略、相应的收益以及邻居集更新自愿接种行为.

为了分析的方便, 我们提出两个假设将上述 3 个动力学进行时间尺度分离. 首先, 我们假设更新疫苗接种策略时, 疾病传播已达到稳定的状态. 这样, 利用方程 (10), 可将 3 种个体 (V, H, I) 的比例表示成接种疫苗的个体比例的函数. 其次, 我们假设个体进行策略更新的速度 $\omega \ll 1$. 这意味着, 当个体进行策略更新时, 网络拓扑的演化已经到达稳态. 这样, 可以将网络拓扑中的各种边的比例表示为接种疫苗的个体比例的函数. 系统中的疫苗接种水平 x_V 的演变, 存在以下 4 种情况: 一是接种者模仿健康的非接种者; 二是健康的非接种者模仿接种者; 三是疫苗接种者模仿感染的非疫苗接种者; 四是感染的非疫苗接种者模仿疫苗接种者. 以第 1 种情况为例: 首先, VH 边以 π_{VH} 概率被选中. 然后, VH 边节点中的 V 个体以 1/2 的概率被随机选中. 接下来, 接种个体 V 以 $\{1+\exp[-\beta(f_H-f_V)]\}^{-1}$ 的概率学习个体 H 的策略. 类似地, 我们可以得到疫苗接种水平演化的微分方程 [115]:

$$\begin{aligned}\dot{x_V} = & -\pi_{VH}\frac{1}{2}\frac{1}{1+\exp\left[\beta\left(f_V-f_H\right)\right]}+\pi_{VH}\frac{1}{2}\frac{1}{1+\exp\left[\beta\left(f_H-f_V\right)\right]} \\ & -\pi_{VI}\frac{1}{2}\frac{1}{1+\exp\left[\beta\left(f_V-f_I\right)\right]}+\pi_{VI}\frac{1}{2}\frac{1}{1+\exp\left[\beta\left(f_I-f_V\right)\right]},\end{aligned} \tag{21}$$

其中, 接种个体的收益为 $f_V = -P$, 未接种的健康个体的收益为 $f_H = 0$, 未接种的感染个体的收益为 $f_I = -C$.

分析方程 (21), 可以发现, 随着 k_{VH} 增高或 k_{VI} 降低, 系统中的疫苗接种水平升高. 而断边概率 $k_{VV}, k_{HH}, k_{II}, k_{HI}$ 并不影响疫苗接种的水平. 当感染成本 C 大于两倍的接种成本 P 时, 随着理性程度 β 的增加, 接种水平降低; 当感染成本 C 小于两倍的接种成本 V 时, 随着理性程度 β 的增加, 接种水平升高. 此外, 我们发现, 当选择强度 β 趋于正无穷时, 疫苗接种水平存在唯一的渐近稳定平衡点:

$$1 - \frac{1}{R_0\left(1 + \frac{k_{VI}}{k_{VH}}\right)^{-1}}, \tag{22}$$

其中, $\frac{k_{VI}}{k_{VH}}$ 反映了社会偏见. $\frac{k_{VI}}{k_{VH}} > 1$ 越大, 表明疫苗接种个体相比于未接种的感染个体更愿意与未接种的健康个体交互. 特别地, 当该比值为 1 时, 即不存在社会偏见时, 最终疫苗接种水平退化至 $1 - \frac{2}{R_0}$, 这与全连通图上的疫苗接种水平相等 [134]. 当该比值大于 1 时, 受社会偏见的影响, 疫苗接种水平提高, 并大于混合均匀种群中疫苗接种的最高水平. $\frac{k_{VI}}{k_{VH}}$ 增加相当于 R_0 减小, 这意味着社会偏见可以被解释为混合均匀种群中的基础再生数减少. 上述结果建立了动态网络上的自愿免疫社会困境与全连通静态网络上的自愿免疫社会困境之间的关系.

5 复杂动态网络上的传播动力学对比研究

上述 3 种动态网络上的传播动力学分析是基于如下共同假设的:

(1) 初始时刻, 系统中存在一个连通网络, 网络的节点代表个体, 边表示社会关系;

(2) 每一时刻, 系统以 w 的概率进行节点状态更新, 即网络节点状态演化, 以 $1 - w$ 的概率进行网络拓扑更新;

(3) 采用本文第 3 节所述的网络拓扑更新规则;

(4) 网络更新频繁, $w \ll 1$.

假设 (1) 和 (2) 是动态网络上的传播动力学的一般性假设. 假设 (3) 是本方法的关键假设, 我们所提出的网络拓扑更新规则涵盖了不同的传播动力学在网络拓扑更新时的动力学共性. 通过证明其为一时齐的可逆 Markov 链, 我们得到不同类型边的稳态分布, 并揭示出每种边的比例正比于相应平均交互时间这一重要结论. 假设 (4) 要求网络拓扑 (边) 的演化快于节点状态的演化, 因此节点状态演化时, 网络拓扑已达到稳态. 通过假设 (4) 得到的各种边的比例可用于建立传播行为的平均场方程, 并从理论上分析传播行为的渐近行为.

虽然合作演化、疾病传播和自愿免疫接种都属于传播动力学, 但合作与自愿免疫接种行为是基于模仿的演化博弈动力学 (evolutionary game dynamics), 而传染病模型是接触过程. 二者在完全图上的动力学就有定性差别. 对于演化博弈动力学中, 任何策略的演化都要涉及模仿双方, 即两个个体, 因此所对应的微分方程是齐次的; 而传染病传播过程除了接触传染还涉及自主恢复, 接触传染涉及两个个体, 而自主恢复并不需要交互行为, 因此其方程是非齐次的. 在数学上, 对于动态网络上的策略演化动力学, 复制动力学方程的齐次性保证了网络拓扑的归一化因子并不影响动态网络上的策略演化的极限行为. 对于动态网络上的传染病动力学, 其动力学方程的非齐次性使得归一化因子对疾病传播动力学的极限行为有定性影响.

对比合作行为和自愿免疫接种这两种传播动力学, 虽然他们都属于基于模仿的演化过程, 但二者仍存在差异. 对于合作行为, 动态网络影响了 “合作者 – 背叛者” 边出现的概率, 从而决定了策略有效

更新的社会关系比例; 同时动态网络影响了所有个体的期望收益, 特别地, 我们发现策略 i 个体通过与策略 j 个体博弈获得的期望收益正比他们的交互时间 $1/k_{ij}$. 该结论不仅对于两人两策略的博弈成立, 对一般的多人多策略矩阵博弈都成立 [147]. 对于自愿免疫接种问题, 动态网络只影响策略有效更新的社会关系的比例, 对不同策略的个体的期望收益没有影响.

我们所提出的动态网络上的传播动力学理论分析框架可以拓展到更为复杂的动力学情形, 并可以给出相应的传播渐近行为分析. 以动态网络上的合作行为的演化动力学为例, 我们更改个体策略演化部分的假设为: 首先在网络中任意选择一条边, 之后选择该边的一个节点, 该节点以 $1-\epsilon$ 的概率采用模仿更新规则学习另一节点个体的策略, 以 ϵ 的概率切换至另一策略. 这种新的更新规则, 既考虑了模仿 (imitation) 也考虑了探索 (exploration). 其中, 模仿和探索分别对应于自然选择理论中的选择与变异. 当策略更新的频率远远小于网络拓扑动力学时, 利用我们所提出的网络拓扑更新规则, 可以推导出合作的演化方程:

$$\dot{x_C} = (1-\epsilon)\frac{x_C(1-x_C)}{k_{CD}}\tanh\left[\frac{\beta La(x)}{N}(\tilde{f}_C-\tilde{f}_D)\right]+\epsilon\left[\frac{(1-x_C)^2}{k_{DD}}-\frac{x_C^2}{k_{CC}}\right]. \tag{23}$$

当 $\epsilon=0$ 时, 策略演化方程退化为基于模仿更新规则下的策略演化方程 (15), 当 $u<\frac{k_{CD}}{k_{CC}}-1$ 时, 方程存在唯一的不稳定内部平衡点, 于是, 系统最终演化到全部是合作者或全部是背叛者的状态. 当 $\epsilon=1$ 时, 策略更新完全依赖于探索 (exploration). 策略演化方程退化为 $\dot{x_C}=\frac{(1-x_C)^2}{k_{DD}}-\frac{x_C^2}{k_{CC}}$. $x_C^*=\frac{\sqrt{k_{CC}}}{\sqrt{k_{CC}}+\sqrt{k_{DD}}}\in(0,1)$ 是唯一的内部稳定平衡点, 在此情形下, 合作与背叛可以长期共存. 因此, 增加探索概率 ϵ 可能改变平衡点的位置及其稳定性. 试猜想, 存在 $\epsilon^*\in(0,1)$ 使得策略演化动力学的方程存在多个内部平衡点. 动态网络上的基于模仿和探索的合作动力学可以展现出丰富的动力学性质, 并有待进一步的分析研究. 注意到, 此时的策略演化动力学由 3 部分组成: 网络拓扑动力学、基于模仿的动力学和基于探索的动力学. 虽然上述耦合动力学特性非常复杂, 但是我们所提出的网络传播动力学分析方法可将其转化为一个一阶非线性方程, 进而可以定量地给出该动力学的渐近行为分析.

针对我们所提出的动态网络上的传播动力学分析方法, 未来可以在如下几方面做进一步的深入探讨. (1) 我们提出的网络拓扑动力学, 完全基于边的随机性, 并未充分考虑个体的适应性对网络拓扑动力学的影响, 因此, 考虑基于个体的边或者拓扑的演化规则对传播行为的影响将是一个很有意义的科学问题; (2) 利用本理论方法针对人群控制 (crowd control) 等问题进行探讨, 具有重要的现实意义; (3) 建立统一的动态网络上的传播动力学理论分析框架, 有望揭示动态网络上不同的传播动力学之间的关系. (4) 利用该理论方法, 针对具体病毒传播实例, 开展实证分析研究.

6　结束语

复杂动态网络上的传播动力学在合作行为演化、疾病防控与舆情控制等领域有着广泛的应用. 动态网络上的传播行为是网络拓扑动力学与传播动力学的耦合, 具有高度的非线性和复杂性. 我们提出网络拓扑随机动力学, 利用时间尺度分离原则, 将动态网络上的传播动力学转化为经典的传播动力学, 进而利用经典传播动力学方程定量地预测动态网络结构对传播动力学的影响. 利用该方法, 可以分析动态网络上的合作演化 [111]、协同效应 [147]、生物多样性 [135]、流行性疾病 [113] 等一系列传播行为. 该方法具有良好的可拓展性, 可以将动态网络拓展为动态多层网络 (dynamical interdependent network) [148] 和动态集合 (dynamical set) [147], 网络拓扑动力学可以拓展为基于自我推荐或者声望的更新过程 [149]. 综上所述, 我们所提出的动态网络上的传播动力学理论分析框架, 可以解析地研究动态网络上的多种传播动力学行为, 揭示经典传播动力学与动态网络上的传播动力学的关系.

参考文献

1 Qian X S, Yu J Y, Dai R W. A new discipline of science — the study of open complex giant system and its methodology. Chin J Nat, 1990, 13: 3–10 [钱学森, 于景元, 戴汝为. 一个科学新领域 —— 开放的复杂巨系统及其方法论. 自然杂志, 1990, 13: 3–10]

2 Guo L. What is systematology. J Syst Sci Math Sci, 2016, 36: 291–301 [郭雷. 系统学是什么. 系统科学与数学, 2016, 36: 291–301]

3 Mitchell M. Complexity: A Guided Tour. Oxford: Oxford University Press, 2009

4 Bar-Yam Y. Dynamics of Complex Systems. Reading: Addison-Wesley, 1997

5 Wiener N. Cybernetics. Paris: Hermann, 1948

6 Wiener N. The Human Use of Human Beings: Cybernetics and Society. Cambridge: The MIT Press, 1950

7 Guo L, Cheng D Z, Feng D X. Introduction to Control Theory: From Basic Concept to Research Frontiers. Beijing: Science Press, 2005 [郭雷, 程代展, 冯德兴. 控制理论导论: 从基本概念到研究前沿. 北京: 科学出版社, 2005]

8 Cheng D Z, Zhao Y, Xu T T. Dynamic games and optimal control of logical dynamic systems. J Syst Sci Math Sci, 2012, 32: 1226–1238 [程代展, 赵寅, 徐听听. 演化博弈与逻辑动态系统的优化控制. 系统科学与数学, 2012, 32: 1226–1238]

9 von Neumann J, Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton University Press, 1944

10 Nash J F. Equilibrium points in n-person games. Proc Natl Acad Sci USA, 1950, 36: 48–49

11 Nash J F. Non-cooperative games. Ann Math, 1951, 54: 286–295

12 Maynard Smith J. Evolution and the Theory of Games. Cambridge: Cambridge University Press, 1982

13 Weibull J W. Evolutionary Game Theory. Cambridge: The MIT Press, 1995

14 Cheng D, He F, Qi H, et al. Modeling, analysis and control of networked evolutionary games. IEEE Trans Automat Contr, 2015, 60: 2402–2415

15 Lu K, Jing G, Wang L. A distributed algorithm for solving mixed equilibrium problems. Automatica, 2019, 105: 246–253

16 Lu K, Jing G, Wang L. Distributed algorithms for searching generalized Nash equilibrium of noncooperative games. IEEE Trans Cybern, 2019, 49: 2362–2371

17 Zhang R-R, Guo L. Controllability of Nash equilibrium in game-based control systems. IEEE Trans Automat Contr, 2019, 64: 4180–4187

18 Zhang R-R, Guo L. Controllability of stochastic game-based control systems. SIAM J Control Opt, 2019, 57: 3799–3826

19 Wang L, Fu F, Chen X J, et al. Collective decision-making over complex networks. CAAI Trans Intell Syst, 2008, 3: 95–108 [王龙, 伏锋, 陈小杰, 等. 复杂网络上的群体决策. 智能系统学报, 2008, 3: 95–108]

20 Cheng D Z, Chen H F. From swarm to social behavior control. Sci Technol Rev, 2004, 22: 4–7 [程代展, 陈翰馥. 从群集到社会行为控制. 科技导报, 2004, 22: 4–7]

21 Wang L, Tian Y, Du J M. Opinion dynamics in social networks. Sci Sin Inform, 2018, 48: 3–23 [王龙, 田野, 杜金铭. 社会网络上的观念动力学. 中国科学: 信息科学, 2018, 48: 3–23]

22 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. Nature, 1998, 393: 440–442

23 Olson M. The Logic of Collective Action: Public Goods and the Theory of Groups. Cambridge: Harvard University Press, 1965

24 Skyrms B. Evolution of the Social Contract. Cambridge: Cambridge University Press, 1996

25 Skyrms B. The Stag Hunt and the Evolution of Social Structure. Cambridge: Cambridge University Press, 2004

26 Wilson E O. Sociobiology: The New Synthesis. Cambridge: Harvard University Press, 1975

27 Minsky M. The Society of Mind. New York: Simon and Schuster, 1986

28 Diani M, McAdam D. Social Movements and Networks. Oxford: Oxford University Press, 2003

29 Etesami S R, Başar T. Game-theoretic analysis of the Hegselmann-Krause model for opinion dynamics in finite dimensions. IEEE Trans Automat Contr, 2015, 60: 1886–1897

30 Tian Y, Wang L. Opinion dynamics in social networks with stubborn agents: an issue-based perspective. Automatica, 2018, 96: 213–223

31 Lin X, Jiao Q, Wang L. Opinion propagation over signed networks: models and convergence analysis. IEEE Trans

Automat Contr, 2019, 64: 3431–3438

32 Wang L, Wu T, Zhang Y L. Feedback mechanism in coevolutionary games. Control Theory Appl, 2014, 31: 823–836 [王龙, 吴特, 张艳玲. 共演化博弈中的反馈机制. 控制理论与应用, 2014, 31: 823–836]

33 Wang L, Cong R, Li K. Feedback mechanism in cooperation evolving. Sci Sin Inform, 2014, 44: 1495–1514 [王龙, 丛睿, 李昆. 合作演化中的反馈机制. 中国科学: 信息科学, 2014, 44: 1495–1514]

34 Dorogovtsev S N, Mendes J F F. Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW. Oxford: Oxford University Press, 2003

35 Anderson R M. The Population Dynamics of Infectious Diseases: Theory and Applications. London: Chapman & Hall, 1982

36 Anderson R M, May R M. Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control. London: Oxford University Press, 1991

37 van Segbroeck S, Santos F C, Pacheco J M. Adaptive contact networks change effective disease infectiousness and dynamics. PLOS Comput Biol, 2010, 6: e1000895

38 Wang L, Wang J, Wu B. Quantum games: new methodologies and strategies. CAAI Trans Intell Syst, 2008, 3: 294–304 [王龙, 王靖, 武斌. 量子博弈: 新方法与新策略. 智能系统学报, 2008, 3: 294–304]

39 Lu Q, Chen L J, Mei S W. Typical applications and prospects of game theory in power system. Proc CSEE, 2014, 34: 5009–5017 [卢强, 陈来军, 梅生伟. 博弈论在电力系统中典型应用及若干展望. 中国电机工程学报, 2014, 34: 5009–5017]

40 Bullo F, Cortés J, Martínez S. Distributed Control of Robotic Networks: A Mathematical Approach to Motion Coordination Algorithms. Princeton: Princeton University Press, 2009

41 Kennedy J, Eberhart R C. Swarm Intelligence. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001

42 Hassanien A E, Emary E. Swarm Intelligence: Principles, Advances, and Applications. Boca Raton: CRC Press, 2015

43 Eguíluz V M, Zimmermann M G. Transmission of information and herd behavior: an application to financial markets. Phys Rev Lett, 2000, 85: 5659–5662

44 Zheng D Z. Linear System Theory. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2002 [郑大钟. 线性系统理论. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2002]

45 Zheng D Z, Zhao Q C. Discrete Event Dynamic Systems. Beijing: Tsinghua University Press, 2000 [郑大钟, 赵千川. 离散事件动态系统. 北京: 清华大学出版社, 2000]

46 Yang Y X, Niu X X. Hacker Cybernetics. Beijing: Electronics Industry Press, 2019 [杨义先, 钮心欣. 博弈系统论 – 黑客行为预测与管理. 北京: 电子工业出版社, 2019]

47 Barabási A-L. Network Science. Cambridge: Cambridge University Press, 2016

48 Strogatz S H. Exploring complex networks. Nature, 2001, 410: 268–276

49 Barabási A-L. Linked: The New Science of Networks. Cambridge: Perseus, 2002

50 Barabási A-L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. Science, 1999, 286: 509–512

51 Albert R, Barabási A-L. Statistical mechanics of complex networks. Rev Mod Phys, 2002, 74: 47–97

52 Barabási A-L. Scale-free networks: a decade and beyond. Science, 2009, 325: 412–413

53 Arenas A, Díaz-Guilera A, Kurths J, et al. Synchronization in complex networks. Phys Rep, 2008, 469: 93–153

54 Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, et al. Complex networks: structure and dynamics. Phys Rep, 2006, 424: 175–308

55 Newman M E J. Networks: An Introduction. Oxford: Oxford University Press, 2010

56 Cohen R, Havlin S. Complex Networks: Structure, Robustness and Function. Cambridge: Cambridge University Press, 2010

57 Menache I, Ozdaglar A. Network Games: Theory, Models, and Dynamics. San Rafael: Morgan & Claypool Publishers, 2011

58 Bollobás B. Random Graphs. London: Academic Press, 1985

59 Godsil C, Royal G. Algebraic Graph Theory. New York: Springer, 2001

60 Szabó G, Fáth G. Evolutionary games on graphs. Phys Rep, 2007, 446: 97–216

61 Mesbahi M, Egerstedt M. Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks. Princeton: Princeton University Press, 2010

62 Shakarian P, Roos P, Johnson A. A review of evolutionary graph theory with applications to game theory. Biosystems,

2011, 107: 66–80
63 Allen B, Nowak M A. Games on graphs. EMS Surv Math Sci, 2014, 1: 113–151
64 Newman M E J. The structure and function of complex networks. SIAM Rev, 2003, 45: 167–256
65 Liu Y-Y, Slotine J-J, Barabási A-L. Controllability of complex networks. Nature, 2011, 473: 167–173
66 Li A-M, Wang L. Controlling temporal networks. J Syst Sci Math Sci, 2019, 39: 184–202 [李阿明, 王龙. 时序网络控制. 系统科学与数学, 2019, 39: 184–202]
67 Ruths J, Ruths D. Control profiles of complex networks. Science, 2014, 343: 1373–1376
68 Rohr R P, Saavedra S, Bascompte J. On the structural stability of mutualistic systems. Science, 2014, 345: 1253497
69 Onnela J-P. Flow of control in networks. Science, 2014, 343: 1325–1326
70 Duan G, Li A, Meng T, et al. Energy cost for controlling complex networks with linear dynamics. Phys Rev E, 2019, 99: 052305
71 Liu Y-Y, Barabási A-L. Control principles of complex systems. Rev Mod Phys, 2016, 88: 035006
72 Wu C W. Synchronization in Complex Networks of Nonlinear Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2007
73 Guan Y, Wang L. Controllability of multi-agent systems with directed and weighted signed networks. Syst Control Lett, 2018, 116: 47–55
74 Barrat A, Barthélemy M, Vespignani A. Dynamical Processes on Complex Networks. Cambridge: Cambridge University Press, 2008
75 Lin X, Jiao Q, Wang L. Competitive diffusion in signed social networks: a game-theoretic perspective. Automatica, 2020, 112: 108656
76 Blonder B, Dornhaus A. Time-ordered networks reveal limitations to information flow in ant colonies. PLOS ONE, 2011, 6: e20298
77 Ren J, Sun W, Manocha D, et al. Stable information transfer network facilitates the emergence of collective behavior of bird flocks. Phys Rev E, 2018, 98: 052309
78 Scott J. Social Network Analysis: A Handbook. London: Sage, 2000
79 Wasserman S, Faust K. Social Network Analysis: Methods and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1994
80 Girvan M, Newman M E J. Community structure in social and biological networks. Proc Natl Acad Sci USA, 2002, 99: 7821–7826
81 Vicsek T, Czirók A, Ben-Jacob E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. Phys Rev Lett, 1995, 75: 1226–1229
82 Reynolds C W. Flocks, herds and schools: a distributed behavioral model. SIGGRAPH Comput Graph, 1987, 21: 25–34
83 Hatano Y, Mesbahi M. Agreement over random networks. IEEE Trans Automat Contr, 2005, 50: 1867–1872
84 Wang L, Fu F, Chen X J, et al. Evolutionary games on complex networks. CAAI Trans Intell Syst, 2007, 2: 1–10 [王龙, 伏锋, 陈小杰, 等. 复杂网络上的演化博弈. 智能系统学报, 2007, 2: 1–10]
85 Wang L, Fu F, Chen X J, et al. Evolutionary games and self-organizing cooperation. J Syst Sci Math Sci, 2007, 27: 330–343 [王龙, 伏锋, 陈小杰, 等. 演化博弈与自组织合作. 系统科学与数学, 2007, 27: 330–343]
86 Tahbaz-Salehi A, Jadbabaie A. A necessary and sufficient condition for consensus over random networks. IEEE Trans Automat Contr, 2008, 53: 791–795
87 Altafini C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions. IEEE Trans Automat Contr, 2013, 58: 935–946
88 Pastor-Satorras R, Castellano C, van Mieghem P, et al. Epidemic processes in complex networks. Rev Mod Phys, 2015, 87: 925–979
89 Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents. IEEE Trans Automat Contr, 2010, 55: 950–955
90 Jing G, Zhang G, Lee H W J, et al. Angle-based shape determination theory of planar graphs with application to formation stabilization. Automatica, 2019, 105: 117–129
91 Proskurnikov A V, Matveev A S, Cao M. Opinion dynamics in social networks with hostile camps: consensus vs. polarization. IEEE Trans Automat Contr, 2016, 61: 1524–1536
92 Ma J, Zheng Y, Wang L. Nash equilibrium topology of multi-agent systems with competitive groups. IEEE Trans

Ind Electron, 2017, 64: 4956–4966
93 Etesami S R, Başar T. Price of anarchy and an approximation algorithm for the binary-preference capacitated selfish replication game. Automatica, 2017, 76: 153–163
94 Chen X, Liu J, Belabbas M A, et al. Distributed evaluation and convergence of self-appraisals in social networks. IEEE Trans Automat Contr, 2017, 62: 291–304
95 Duan G, Xiao F, Wang L. Asynchronous periodic edge-event triggered control for double-integrator networks with communication time delays. IEEE Trans Cybern, 2018, 48: 675–688
96 Wang L, Du J M. Evolutionary game theoretic approach to coordinated control of multi-agent systems. J Syst Sci Math Sci, 2016, 36: 302–318 [王龙, 杜金铭. 多智能体协调控制的演化博弈方法. 系统科学与数学, 2016, 36: 302–318]
97 Parsegov S E, Proskurnikov A V, Tempo R, et al. Novel multidimensional models of opinion dynamics in social networks. IEEE Trans Automat Contr, 2017, 62: 2270–2285
98 Jing G, Zheng Y, Wang L. Consensus of multiagent systems with distance-dependent communication networks. IEEE Trans Neural Netw Learn Syst, 2017, 28: 2712–2726
99 Ohtsuki H, Hauert C, Lieberman E, et al. A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks. Nature, 2006, 441: 502–505
100 Kerr B, Neuhauser C, Bohannan B J M, et al. Local migration promotes competitive restraint in a host-pathogen 'tragedy of the commons'. Nature, 2006, 442: 75–78
101 Reichenbach T, Mobilia M, Frey E. Mobility promotes and jeopardizes biodiversity in rock-paper-scissors games. Nature, 2007, 448: 1046–1049
102 Helbing D, Yu W. Migration as a mechanism to promote cooperation. Adv Complex Syst, 2008, 11: 641–652
103 Wu T, Fu F, Zhang Y, et al. Expectation-driven migration promotes cooperation by group interactions. Phys Rev E, 2012, 85: 066104
104 Chen X, Szolnoki A, Perc M. Risk-driven migration and the collective-risk social dilemma. Phys Rev E, 2012, 86: 036101
105 Fu F, Nowak M A. Global migration can lead to stronger spatial selection than local migration. J Stat Phys, 2013, 151: 637–653
106 Limdi A, Pérez-Escudero A, Li A, et al. Asymmetric migration decreases stability but increases resilience in a heterogeneous metapopulation. Nat Commun, 2018, 9: 2969
107 Li A, Cornelius S P, Liu Y-Y, et al. The fundamental advantages of temporal networks. Science, 2017, 358: 1042–1046
108 Wang W, Liu Q-H, Liang J, et al. Coevolution spreading in complex networks. Phys Rep, 2019, 820: 1–51
109 Gross T, Blasius B. Adaptive coevolutionary networks: a review. J R Soc Interface, 2008, 5: 259–271
110 Perc M, Szolnoki A. Coevolutionary games-a mini review. Biosystems, 2010, 99: 109–125
111 Wu B, Zhou D, Fu F, et al. Evolution of cooperation on stochastic dynamical networks. PLOS ONE, 2010, 5: e11187
112 Wu T, Fu F, Wang L. Moving away from nasty encounters enhances cooperation in ecological prisoner's dilemma game. PLOS ONE, 2011, 6: e27669
113 Wu B, Mao S, Wang J, et al. Control of epidemics via social partnership adjustment. Phys Rev E, 2016, 94: 062314
114 Feng X, Wang L, Levin S A. Dynamic analysis and decision-making in disease-behavior systems with perceptions. In: Proceedings of 2019 Chinese Control and Decision Conference (CCDC), 2019
115 Wei Y, Lin Y, Wu B. Vaccination dilemma on an evolving social network. J Theor Biol, 2019, 483: 109978
116 Fu F, Hauert C, Nowak M A, et al. Reputation-based partner choice promotes cooperation in social networks. Phys Rev E, 2008, 78: 026117
117 Santos F C, Pacheco J M, Lenaerts T. Cooperation prevails when individuals adjust their social ties. PLOS Comput Biol, 2006, 2: e140
118 van Segbroeck S, Santos F C, Nowé A, et al. The evolution of prompt reaction to adverse ties. BMC Evol Biol, 2008, 8: 287
119 Cheng D Z, Qi H S. The Semi-Tensor Product of Matrices: Theory and Applications. Beijing: Science Press, 2017 [程代展, 齐洪胜. 矩阵的半张量积 – 理论与应用. 北京: 科学出版社, 2017]
120 Cheng D Z, Xia Y Q, Ma H B, et al. Matrix Algebra, Control and Game Theory. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2016 [程代展, 夏元清, 马宏宾, 等. 矩阵代数、控制与博弈. 北京: 北京理工大学出版社, 2016]

121 Cheng D, Xu T, Qi H. Evolutionarily stable strategy of networked evolutionary games. IEEE Trans Neural Netw Learn Syst, 2014, 25: 1335–1345
122 Cheng D Z, Liu T, Wang Y H. Matrix approach to game theory. J Syst Sci Math Sci, 2014, 34: 1291–1305 [程代展, 刘挺, 王元华. 博弈论中的矩阵方法. 系统科学与数学, 2014, 34: 1291–1305]
123 Taylor P D, Jonker L B. Evolutionary stable strategies and game dynamics. Math Biosci, 1978, 40: 145–156
124 Hofbauer J, Sigmund K. Evolutionary Games and Population Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998
125 Matsuda H, Ogita N, Sasaki A, et al. Statistical mechanics of population: the lattice Lotka-Volterra model. Prog Theor Phys, 1992, 88: 1035–1049
126 Gintis H. Game Theory Evolving: A Problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Interaction. Princeton: Princeton University Press, 2000
127 Nowak M A. Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life. Cambridge: Harvard University Press, 2006
128 Webb J N. Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution. New York: Springer, 2006
129 Tadelis S. Game Theory: An Introduction. Princeton: Princeton University Press, 2013
130 Nowak M A, Sigmund K. Evolutionary dynamics of biological games. Science, 2004, 303: 793–799
131 Schuster H G. Deterministic Chaos: An Introduction. 3rd ed. Weinheim: Wiley-VCH, 1995
132 Sato Y, Akiyama E, Farmer J D. Chaos in learning a simple two-person game. Proc Natl Acad Sci USA, 2002, 99: 4748–4751
133 Sato Y, Crutchfield J P. Coupled replicator equations for the dynamics of learning in multiagent systems. Phys Rev E, 2003, 67: 015206
134 Wu B, Fu F, Wang L. Imperfect vaccine aggravates the long-standing dilemma of voluntary vaccination. PLOS ONE, 2011, 6: e20577
135 Wu B, Zhou D, Wang L. Evolutionary dynamics on stochastic evolving networks for multiple-strategy games. Phys Rev E, 2011, 84: 046111
136 Pennisi E. How did cooperative behavior evolve? Science, 2005, 309: 93
137 Axelrod R, Hamilton W D. The evolution of cooperation. Science, 1981, 211: 1390–1396
138 Axelrod R. The Evolution of Cooperation. New York: Basic Books, 1984
139 Axelrod R. The Complexity of Cooperation: Agent-Based Models of Competition and Collaboration. Princeton: Princeton University Press, 1997
140 Fehr E, Gächter S. Altruistic punishment in humans. Nature, 2002, 415: 137–140
141 Nowak M A, Sasaki A, Taylor C, et al. Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations. Nature, 2004, 428: 646–650
142 Nowak M A. Five rules for the evolution of cooperation. Science, 2006, 314: 1560–1563
143 Pennisi E. On the origin of cooperation. Science, 2009, 325: 1196–1199
144 Nowak M A. Evolving cooperation. J Theor Biol, 2012, 299: 1–8
145 Rand D G, Nowak M A. Human cooperation. Trends Cognitive Sci, 2013, 17: 413–425
146 Traulsen A, Nowak M A, Pacheco J M. Stochastic dynamics of invasion and fixation. Phys Rev E, 2006, 74: 011909
147 Wu B, Arranz J, Du J, et al. Evolving synergetic interactions. J R Soc Interface, 2016, 13: 20160282
148 Tang C-B, Wu B, Wang J-B, et al. Evolutionary origin of asymptotically stable consensus. Sci Rep, 2015, 4: 4590
149 Wu B, Park H J, Wu L, et al. Evolution of cooperation driven by self-recommendation. Phys Rev E, 2019, 100: 042303

Spreading dynamics on complex dynamical networks

Long WANG[1*], Bin WU[2], Jinming DU[3], Yuting WEI[2] & Da ZHOU[4]

1. *Center for Systems and Control, Peking University, Beijing* 100871*, China*;
2. *School of Sciences, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing* 100876*, China*;
3. *Institute of Industrial and Systems Engineering, Northeastern University, Shenyang* 110819*, China*;
4. *School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen* 361005*, China*

* Corresponding author. E-mail: longwang@pku.edu.cn

Abstract With the development of network science, spreading dynamics on networks have attracted intensive research interests in a wide variety of areas, such as control theory, game theory, system science, artificial intelligence, social science, economics, biology, psychology, physics, math, and computer science. Network structure plays a key role in spreading dynamics, although spreading dynamics differ from one another. In real networked systems, the neighborhoods of individuals evolve with time. It is thus necessary to consider the coupling between spreading dynamics and network dynamics. Nowadays the research on spreading dynamics on dynamical networks usually use Monte Carlo simulation rather than theoretical methods. So, we propose a stochastic linking dynamic in this paper. It is proved to be a reversible Markov chain, which facilitates the analytical investigation of spreading dynamics on dynamical networks. With this method, we study three spreading dynamics: the evolution of cooperation, the spread of epidemics, and the evolution of vaccination behavior. Furthermore, we show the similarities and differences between evolutionary game dynamics and epidemic spreading dynamics. Our method could provide a universal framework to study spreading dynamics on complex dynamical networks.

Keywords spreading behavior, dynamical network, evolutionary game theory, epidemic spreading dynamics

Long WANG was born in 1964. He received his Ph.D. degree in dynamics and control from Peking University in 1992. He is currently a Cheung Kong chair professor of dynamics and control, and the director of the Center for Systems and Control at Peking University. His research interests are in the fields of complex networked systems, collective intelligence, and bio-mimetic robotics.

Bin WU was born in 1983. He received his Ph.D. in dynamics and control from Peking University. He was a research fellow at the Max Planck Institute for Evolutionary Biology in Germany. He is currently an associate professor at the Beijing University of Posts and Telecommunications. His research interests include complex systems, evolutionary game theory, and epidemic spreading dynamics.

Jinming DU was born in 1987. He received his Ph.D. degree in general mechanics and foundation of mechanics from Peking University. In 2016, he joined Northeastern University, where he is currently an assistant professor in the Institute of Industrial and Systems Engineering. His research interests include evolutionary game dynamics, artificial intelligence, and complex systems modeling and control.