



基于模型降阶与链式结构的平面欠驱动机械臂位姿控制

刘东^{1,2}, 万雄波^{1,2}, 王亚午^{1,2*}, 赖旭芝^{1,2}, 吴敏^{1,2}

1. 中国地质大学(武汉)自动化学院, 武汉 430074

2. 复杂系统先进控制与智能化湖北省重点实验室, 武汉 430074

* 通信作者. E-mail: wangyawu@cug.edu.cn

收稿日期: 2019-05-09; 修回日期: 2019-08-20; 接受日期: 2019-10-08; 网络出版日期: 2020-04-23

国家自然科学基金(批准号: 61773353)、青年科学基金(批准号: 61903344)、湖北省自然科学基金创新群体(批准号: 2015CFA010)和高等学校学科创新引智计划(批准号: B17040)资助项目

摘要 针对第三关节为被动的平面四连杆(active-active-passive-active, 简称AAPA)欠驱动机械臂的位姿控制问题, 提出一种基于模型降阶与链式结构的控制策略. 整个控制过程被划分为3个阶段. 第1阶段, 通过控制第四连杆的角度至零, 将平面AAPA机械臂降阶为平面虚拟四连杆(active-active-passive, 简称AAP)欠驱动机械臂. 第2阶段, 首先将平面虚拟AAP机械臂的模型转换为标准链式结构形式. 然后, 设计相应的控制器将平面虚拟AAP机械臂的被动关节控制至其目标位置, 同时, 将被动连杆的姿态角控制至中间姿态角, 从而将平面AAPA机械臂进一步降阶为平面Acrobot. 第3阶段, 控制平面Acrobot驱动连杆的角度至其目标角度, 连带实现对被动连杆的角度控制, 最终实现平面AAPA机械臂的位姿控制目标. 考虑到平面Acrobot存在角度约束, 因此, 利用遗传算法协调与优化被动关节的目标位置、被动连杆的中间姿态角、第四连杆的目标角度与被动连杆的目标姿态角, 确保平面Acrobot对于系统目标位姿的目标角度解存在. 最后, 通过仿真验证控制策略的有效性.

关键词 平面四连杆欠驱动机械臂, 位姿控制, 模型降阶, 链式结构, 遗传算法

1 引言

欠驱动机械臂是控制输入个数少于系统自由度个数的一类欠驱动机械系统^[1~4]. 欠驱动机械臂能够利用较少的驱动装置完成复杂的任务, 具有重量轻、成本低、低能耗等优点. 当全驱动机械臂的驱动装置出现故障时, 运用欠驱动机械臂控制策略可维持其正常运行. 故研究欠驱动机械臂的控制策略, 可以极大地提高全驱动机械臂的容错能力. 此外, 随着空间技术和深海探测技术(无重力或微重力

引用格式: 刘东, 万雄波, 王亚午, 等. 基于模型降阶与链式结构的平面欠驱动机械臂位姿控制. 中国科学: 信息科学, 2020, 50: 718–733, doi: 10.1360/SSI-2019-0094

Liu D, Wan X B, Wang Y W, et al. Position and posture control for a planar underactuated manipulator based on model reduction and chained structure (in Chinese). Sci Sin Inform, 2020, 50: 718–733, doi: 10.1360/SSI-2019-0094

环境)的发展,对平面欠驱动机械臂控制问题的研究逐渐成为了一个重要的研究方向.因此,研究平面欠驱动机械臂的控制问题对航空航天工程和深海探测技术的发展具有重要的现实意义^[5,6].

针对平面欠驱动机械臂的位置控制研究, Luca 等^[7]将平面 Pendubot 机械臂的模型进行幂零近似化处理,并根据该近似模型提出一种开环迭代控制方法,实现系统末端点的位置控制目标.但该方法对机械臂的初始状态要求苛刻,而且不能从理论上证明闭环系统的稳定性.对于末关节为被动的平面 AAP 机械臂,文献^[8,9]通过将机械臂模型转换为链式标准型,从而借助链式系统的控制方法实现其位置控制目标.针对平面 APAA 机械臂,文献^[10]通过控制其第一连杆维持在初始状态,使平面 APAA 机械臂退化成平面虚拟 PAA 机械臂,从而实现其位置控制目标.然而,该控制方法在控制过程中需要始终维持第一连杆在其初始状态不变,这限制了系统末端点的可达范围.

针对第三关节为被动的平面 AAPA 机械臂,由于连杆数目的增加或欠驱动关节位置的改变,上述控制策略都不能直接应用于该机械臂的控制.因此,对于平面 AAPA 机械臂的位置控制,目前还没有一种行之有效的控制策略.此外,在实际应用中,常需要控制机械臂的末端执行器以特定的姿态在所需位置完成某些特定的作业任务(如焊接、钻孔等).因此,除了机械臂的位置控制,研究机械臂的姿态控制具有重要的实际意义^[11~13].文献^[14]针对全驱动机械臂提出了有效的位姿控制策略,但这种控制策略不能应用于欠驱动机械臂.文献^[15]提出一种 3 阶段控制策略实现了具有一阶非完整约束^[16]的平面 PAAA 机械臂的位姿控制目标,然而这种控制策略不能直接应用于具有二阶非完整约束^[16]的机械臂.

鉴于此,本文针对第三关节为被动的平面 AAPA 机械臂的位姿控制问题,提出一种基于模型降阶与链式结构的控制策略.首先,基于平面 AAPA 机械臂的结构特性,将其划分为两个部分:平面虚拟 AAP 机械臂与平面 Acrobot.然后,将位姿控制划分为 3 个阶段.第 1 阶段,维持第一连杆角度与第二连杆角度在初始角度不变,控制第四连杆角度至零,将平面 AAPA 机械臂降为平面虚拟 AAP 机械臂.第 2 阶段,保持第四连杆角度不变,以维持系统是一个平面虚拟 AAP 机械臂.其次,将平面虚拟 AAP 机械臂的模型转换为标准链式结构形式,从而设计相应的控制器控制平面虚拟 AAP 机械臂的被动关节至其目标位置.同时,将被动连杆的姿态角控制至其中间姿态角,将平面 AAPA 机械臂进一步降阶为平面 Acrobot.第 3 阶段,维持第一连杆的角度与第二连杆的角度在第 2 阶段结束时的角度不变,确保系统是平面 Acrobot.接着,控制第四连杆的角度至其目标角度,连带控制被动连杆的角度至其目标角度,从而最终实现平面 AAPA 机械臂的位姿控制目标.考虑到平面 Acrobot 存在角度约束,利用遗传算法协调与优化被动关节目标位置、被动连杆中间姿态角、第四连杆目标角度以及被动连杆目标姿态角,确保降阶后平面 Acrobot 目标角度解的存在.最后,通过仿真结果验证所提位姿控制策略的有效性.

2 平面 AAPA 机械臂模型

平面 AAPA 机械臂模型如图 1 所示.其中 m_i 为第 i 连杆的质量, L_i 为第 i 连杆的长度, J_i 为第 i 连杆相对于质心的转动惯量, q_i 为第 i 连杆的角度, τ_i 为第 i 连杆的质心至前一关节的长度, τ_i 为作用在第 i 关节的驱动力矩.此外, (x, y) 为末端点的坐标, (x_p, y_p) 为被动关节的坐标, θ_p 为被动连杆的姿态角, θ 为第四连杆的姿态角, $i = 1, 2, 3, 4$.

由欧拉 (Euler) – 拉格朗日 (Lagrange) 方程可得平面 AAPA 机械臂的动力学方程为

$$M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) = \tau, \quad (1)$$

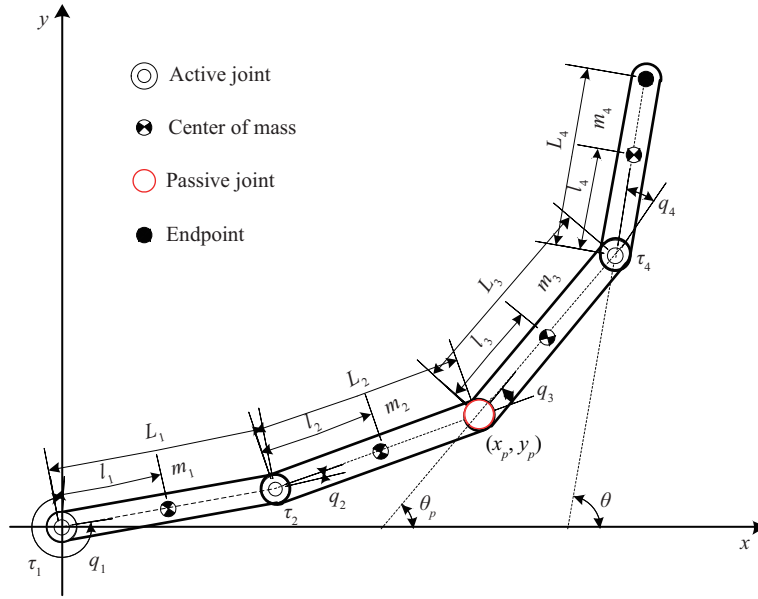


图 1 (网络版彩图) 平面 AAPA 机械臂模型

Figure 1 (Color online) The model of the planar AAPA manipulator

其中 $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$ 为平面 AAPA 机械臂的角度向量, $\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ 0 \ \tau_4]^T$ 为驱动力矩向量, $M(q)$ 与 $H(q, \dot{q}) = \dot{M}(q)\dot{q} - 0.5\partial(\dot{q}^T M(q)\dot{q})/\partial q$ 分别为具有对称正定性的惯性矩阵, 以及科里奥利 (Coriolis) 力和离心力的结合向量. 它们的具体形式可参见文献 [10].

根据图 1 所示的系统模型, 可得系统的几何约束关系如下:

$$\begin{cases} (x_p, y_p) = \left(\sum_{i=1}^2 L_i \sin \beta_i, \sum_{i=1}^2 L_i \cos \beta_i \right), \\ \theta_p = \text{rem} \left(\sum_{i=1}^3 q_i, 2\pi \right), \theta = \text{rem} \left(\sum_{i=1}^4 q_i, 2\pi \right), \\ x = x_p + L_3 \sin \theta_p + L_4 \sin (\theta_p + q_4), \\ y = y_p + L_3 \cos \theta_p + L_4 \cos (\theta_p + q_4), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\beta_1 = q_1, \beta_2 = q_1 + q_2, \text{rem}(a, b)$ 为 a 除以 b 的余数, 符号与 b 相同.

3 系统控制策略

3.1 第 1 阶段控制策略

第 1 阶段, 维持第一连杆角度与第二连杆角度在初始角度不变, 控制第四连杆的角度至零, 将第四连杆与被动连杆转换成一根虚拟杆, 从而将平面 AAPA 机械臂降阶为平面虚拟 AAP 机械臂 (如图 2 所示).

平面虚拟 AAP 机械臂的动力学方程如下:

$$\widehat{M}(\widehat{q})\ddot{\widehat{q}} + \widehat{H}(\widehat{q}, \dot{\widehat{q}}) = \widehat{\tau}, \quad (3)$$

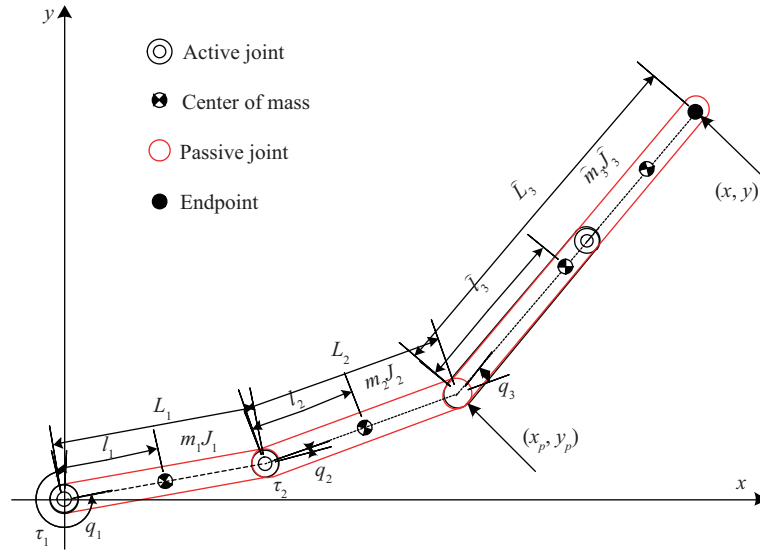


图 2 (网络版彩图) 平面虚拟 AAP 机械臂模型

Figure 2 (Color online) The model of the planar virtual AAP manipulator

其中 $\hat{q} = [\hat{q}_1 \hat{q}_2 \hat{q}_3]^T = [q_1, q_2, q_3]^T$ 为平面虚拟 AAP 机械臂的角度向量, $\hat{\tau} = [\tau_1 \tau_2 0]^T$ 为驱动力矩向量, $\hat{M}(\hat{q})$ 与 $\hat{H}(\hat{q}, \dot{\hat{q}})$ 的具体表达式可参见文献 [17].

根据文献 [8], 可将式 (3) 转换为如下标准链式结构形式:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = u_1, \\ \ddot{y}_2 = u_2, \\ \ddot{y}_3 = y_2 u_1, \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\begin{cases} y_1 = \left(x_p - x_{pd} + \frac{\cos \theta_p}{\gamma} - \frac{\cos \theta_{pd}}{\gamma}\right) \cos \theta_{pd} + \left(y_p - y_{pd} + \frac{\sin \theta_p}{\gamma} - \frac{\sin \theta_{pd}}{\gamma}\right) \sin \theta_{pd}, \\ y_2 = \tan(\theta_p - \theta_{pd}), \\ y_3 = -\left(x_p - x_{pd} + \frac{\cos \theta_p}{\gamma} - \frac{\cos \theta_{pd}}{\gamma}\right) \sin \theta_{pd} + \left(y_p - y_{pd} + \frac{\sin \theta_p}{\gamma} - \frac{\sin \theta_{pd}}{\gamma}\right) \cos \theta_{pd}, \end{cases}$$

u_1 与 u_2 为链式结构的虚拟控制输入, (x_{pd}, y_{pd}) 为被动关节的目标位置, θ_{pd} 为虚拟被动连杆的中间姿态角, $\gamma = \hat{l}_3 + \hat{J}_3 / (\hat{m}_3 \hat{l})$, \hat{m}_3 , \hat{l}_3 与 \hat{J}_3 为虚拟连杆参数. 此外, τ_1 , τ_2 , u_1 与 u_2 之间的数学关系详见附录 A.

3.2 第 2 阶段控制策略

第 2 阶段, 保持第四连杆的角度不变, 以维持系统是平面虚拟 AAP 机械臂. 然后, 设计相应的控制器将其欠驱动关节控制至目标位置, 同时将被动连杆的姿态角控制至中间姿态角, 进而将平面 AAPA 机械臂降阶为平面 Acrobot (如图 3 所示).

平面 Acrobot 的动力学方程如下:

$$\tilde{M}(\tilde{q}) \ddot{\tilde{q}} + \tilde{H}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \tilde{\tau}, \quad (5)$$

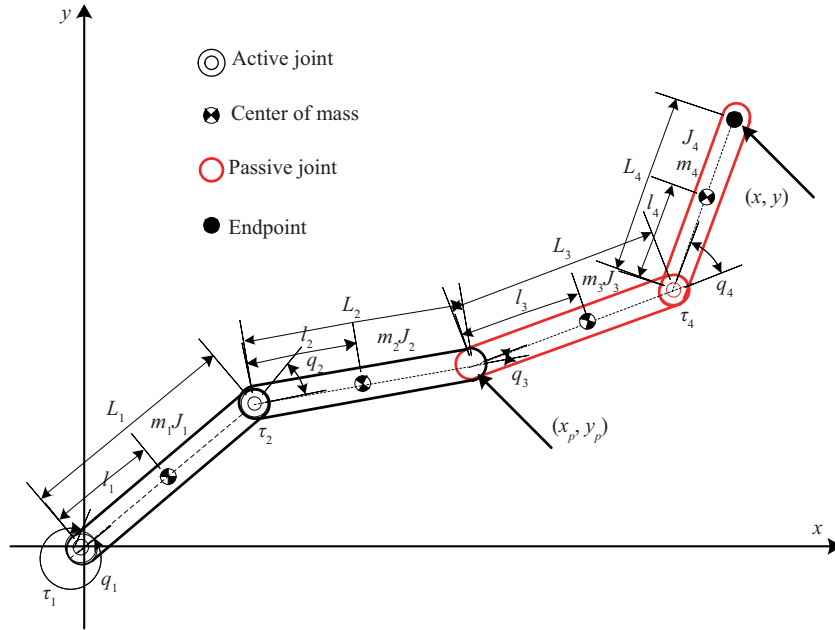


图 3 (网络版彩图) 平面 Acrobot 模型
Figure 3 (Color online) The model of the planar Acrobot

其中 $\tilde{q} = [\tilde{q}_1, \tilde{q}_2]^T = [\theta_{pd}, q_4]^T$ 为平面 Acrobot 的角度向量, $\tilde{\tau} = [0, \tau_4]^T$ 为驱动力矩向量, $\tilde{M}(\tilde{q})$ 与 $\tilde{H}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ 的具体表达式可参见文献 [6].

平面 Acrobot 具有角度约束, 其角度约束方程为

$$\tilde{q}_1(t) = f(\tilde{q}_2(t), \tilde{q}_{20}, \delta) - \tilde{q}_{10}, \quad (6)$$

其中 \tilde{q}_{10} 与 \tilde{q}_{20} 为平面 Acrobot 的初始角度, δ 为模型参数集合; $f(\cdot)$ 为非线性函数, 其具体表达式可参见文献 [6].

3.3 第 3 阶段控制策略

第 3 阶段, 维持第一连杆的角度与第二连杆的角度在第 2 阶段结束时的角度不变, 以确保系统是平面 Acrobot. 基于角度约束方程 (6), 控制平面 Acrobot 驱动连杆的角度至其目标角度, 从而连带实现对被动连杆的角度控制, 最终实现平面 AAPA 机械臂的位姿控制目标.

4 连杆角度优化

由于平面 Acrobot 存在角度约束, 使得平面 AAPA 机械臂针对于目标位姿的任意的解不一定能满足平面 Acrobot 角度约束关系, 从而会导致系统降阶后平面 AAPA 机械臂原本可控的目标位姿成为不可控.

为解决上述问题, 利用遗传算法 (GA) [18, 19] 优化与协调被动关节的目标位置、被动连杆的中间姿态角 (平面 Acrobot 被动连杆的初始角度)、第四连杆的目标角度以及被动连杆的目标姿态角 (平面 Acrobot 被动连杆的目标角度).

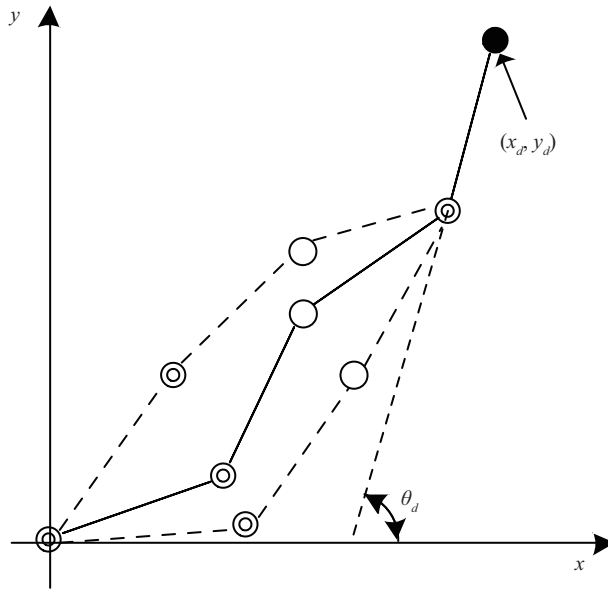


图 4 同一目标位姿对应多个目标角度

Figure 4 Multiple target angles corresponding to a target position-posture

根据系统的位姿控制目标, 将遗传算法的评价函数定义如下:

$$h = |x - x_d| + |y - y_d| + |\theta - \theta_d|, \tag{7}$$

其中 (x_d, y_d) 与 θ_d 分别为机械臂的目标位置坐标与目标姿态角.

遗传算法如算法 1 所示.

Algorithm 1 Optimization of each target value of the system

- 1: Set up the parameters of GA: $p_s, p_c, p_m, N, G, N_{\text{var}} = 4, \Omega \in \{-2\pi, 2\pi\}$;
- 2: Randomly initialize: $P_k(g) = \{x_{pc}, y_{pc}, \theta_{pc}, q_{4c}\} \in \Omega, (k = 1, 2, 3, \dots, N)$;
- 3: **for** $g = 1 : G+1$ **do**
- 4: Substituting q_{4c} and θ_{pc} into (6), the posture angle θ_{pcd} of the passive link is obtained;
- 5: Substitute (2), (6) and θ_{pcd} into (7), and calculate h ;
- 6: **if** $h < \varepsilon$ **then**
- 7: $x_{pd} = x_{pc}^k, y_{pd} = y_{pc}^k, \theta_{pd} = \theta_{pc}^k, \theta_{pdd} = \theta_{pcd}^k, q_{4d} = q_{4c}^k$;
- 8: **break**;
- 9: **end if**
- 10: Update $x_{pc}, y_{pc}, \theta_{pc}, \theta_{pcd}$ and q_{4c} through crossover, mutation, selection operations;
- 11: **end for**

Output: $x_{pc}, y_{pc}, \theta_{pc}, \theta_{pcd}$ and q_{4c} .

评论. 针对平面 AAPA 机械臂, 与目标位姿相对应的各杆目标角度具有多解性 (见图 4). 此外, 遗传算法具有高效、快速的全局搜索能力. 因此, 使用遗传算法不难找到与目标位姿相对应的目标角度解.

5 控制器设计

5.1 第 1 阶段控制器设计

定义 $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T = [q^T, \dot{q}^T]^T$, 则式 (1) 可用如下状态空间形式表示:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\tau, \quad (8)$$

其中

$$\begin{cases} f(x) = [x_5, x_6, x_7, x_8, F_1, F_2, F_3, F_4]^T, & g(x) = [g_1(x), g_2(x)]^T, \\ [F_1, F_2, F_3, F_4]^T = -M(q)^{-1}H(q, \dot{q}), & g_1 = \mathbf{0}_{4 \times 4}, \quad g_2 = (g_{ij})_{4 \times 4} = M(q)^{-1}. \end{cases} \quad (9)$$

根据第 1 阶段的控制目标, 构造 Lyapunov 函数如下:

$$V_0(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1,2} ((x_i - x_{i0})^2 + x_{i+4}^2) + x_4^2 + x_8^2 \right), \quad (10)$$

其中 $x_{10} = q_{10}, x_{20} = q_{20}$ 分别为第一连杆与第二连杆的初始角度.

对 $V_0(x)$ 求导可得

$$\dot{V}_0(x) = \sum_{i=1,2} \left(x_{i+4} \left(x_i - x_{i0} + F_i + \sum_{j=1,2,4} g_{ij}\tau_j \right) \right) + x_8 \left(x_4 + F_4 + \sum_{j=1,2,4} g_{4j}\tau_j \right). \quad (11)$$

为了保证 $V_0(x) \leq 0$, 设计第一阶段控制力矩为

$$\begin{cases} \tau_1 = -(x_1 + x_{10} + F_1 + g_{21}\tau_2 + g_{41}\tau_4 + C_1x_5)g_{11}^{-1}, \\ \tau_2 = -(x_2 + x_{20} + F_2 + g_{11}\tau_1 + g_{41}\tau_4 + C_2x_6)g_{21}^{-1}, \\ \tau_4 = -(x_4 + F_4 + g_{21}\tau_2 + g_{11}\tau_1 + C_3x_8)g_{41}^{-1}, \end{cases} \quad (12)$$

其中 C_1, C_2, C_3 为正常数.

将控制器 (12) 代入式 (11), 可得

$$\dot{V}_0(x) = -C_1x_5^2 - C_2x_6^2 - C_3x_8^2 \leq 0. \quad (13)$$

当式 (13) 中的 $\dot{V}_0(x) = 0$ 时, 可得 $x_5 = x_6 = x_8 = 0$, 再基于平面 Acrobot 的完整特性^[6]可知 $x_7 = 0$, 设 $\Phi = \{x \in \mathbb{R}^8 | \dot{V}_0(x) = 0\}$ 为闭环系统 (8) 的不变集. 此外, 由式 (8) 与 (9) 可得

$$g_2\tau = M(q)^{-1}\tau = 0. \quad (14)$$

根据式 (14), 有 $\tau = [\tau_1, \tau_2, 0, \tau_4] = 0$, 将其代入式 (12), 可得系统的最大不变集为

$$W = \{x \in \Phi | x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, x_4 = 0, x_5 = x_6 = x_8 = 0\}. \quad (15)$$

根据 LaSalle^[20] 不变集原理, 可知系统 (8) 的状态随着 $t \rightarrow \infty$ 渐进稳定到最大不变集. 即采用控制器 (12), 可实现系统第 1 阶段控制目标.

系统从第 1 阶段切换到第 2 阶段的条件如下:

$$\begin{cases} |x_1 - x_{10}| < e_1, & |x_5| < e_2, \\ |x_2 - x_{20}| < e_1, & |x_6| < e_2, \\ |x_4| < e_1, & |x_8| < e_2, \end{cases} \quad (16)$$

其中 e_1, e_2 为很小的正数.

5.2 第 2 阶段控制器设计

定义 $\xi = (y_1, \dot{y}_1, y_3, \dot{y}_3, y_2, \dot{y}_2)$, 则链式结构 (4) 可改写为如下形式:

$$\sum 1: \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = u_1, \end{cases} \quad \sum 2: \begin{cases} \dot{\xi}_3 = \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 = \xi_5 u_1, \\ \dot{\xi}_5 = \xi_6, \\ \dot{\xi}_6 = u_2. \end{cases} \quad (17)$$

对于线性子系统 $\sum 1$, 设计控制输入如下:

$$u_1 = -k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2, \quad (18)$$

其中 $k_1, k_2 > 0$. 则 ξ_1, ξ_2 随着 $t \rightarrow \infty$ 收敛于零.

证明 对于二阶闭环系统 $\ddot{\xi}_1 + k_1 \dot{\xi}_1 + k_2 \xi_1 = 0$, 由于 $k_1 > 0$ 与 $k_2 > 0$, 显然 ξ_1, ξ_2 随着 $t \rightarrow \infty$ 收敛于零.

对于子系统 $\sum 2$ 的控制输入的设计, 应用反步法求得控制输入 u_2 步骤如下.

定义误差变量:

$$\begin{cases} z_1 = \xi_4 - \varphi_1, \\ z_2 = \xi_5 - \varphi_2, \\ z_3 = \xi_6 - \varphi_3. \end{cases} \quad (19)$$

Step 1. 定义 Lyapunov 函数:

$$V_1 = \frac{1}{2} \xi_3^2. \quad (20)$$

取 $\varphi_1 = \xi_4 = -k_3 \xi_3, k_3 > 0$, 则有

$$\dot{V}_1 = -k_3 \xi_3^2 = -2k_3 V_1 \leq 0. \quad (21)$$

Step 2. 定义 Lyapunov 函数:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_1^2. \quad (22)$$

由式 (19) 可知 $\xi_4 = z_1 + \varphi_1$, 对式 (22) 求导可得

$$\dot{V}_2 = \xi_3 \xi_4 + z_1 \dot{z}_1 = \xi_3 \varphi_1 + z_1 (\dot{\xi}_4 - \dot{\varphi}_1 + \xi_3). \quad (23)$$

取 $\varphi_2 = \xi_5 = \frac{\dot{z}_1}{u_1} - \frac{\xi_3}{u_1} - k_4 \frac{z_1}{u_1}$ 与 $k_4 \geq k_3$, 则有

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 - k_4 z_1^2 = -2k_3 \left(V_1 + \frac{k_4}{2k_3} z_1^2 \right) \leq -2k_3 V_2 = -k_3 \xi_3^2 - k_3 z_1^2 \leq 0. \quad (24)$$

由式 (24) 可知, ξ_3, z_1 随着 $t \rightarrow \infty$ 趋向于零, 即 $\xi_4 \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$.

Step 3. 定义 Lyapunov 函数:

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2}z_2^2. \quad (25)$$

对式 (25) 求导可得

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_2 + z_2 (\dot{\xi}_5 - \dot{\varphi}_2 + u_1 z_1). \quad (26)$$

取 $\varphi_3 = \xi_6 = \dot{\varphi}_2 - u_1 z_1 - k_5 z_2$ 与 $k_5 > k_3$, 则有

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_2 - k_5 z_2^2 \leq -2k_3 V_3 = -k_3 \xi_3^2 - k_3 (z_1^2 + z_2^2) \leq 0. \quad (27)$$

由式 (27) 可知, ξ_3, z_1, z_2 随着 $t \rightarrow \infty$ 趋向于零, 即 $\xi_5 \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$.

Step 4. 定义 Lyapunov 函数:

$$V_4 = V_3 + \frac{1}{2}z_3^2. \quad (28)$$

对式 (28) 求导可得

$$\dot{V}_4 = \dot{V}_3 + z_3 (\dot{\xi}_6 - \dot{\varphi}_3 + z_2). \quad (29)$$

由式 (17) 可知 $\dot{\xi}_6 = u_2$, 从而设计虚拟控制输入为 $u_2 = \dot{\varphi}_3 - z_2 - k_6 z_3$, 且 $k_6 \geq k_3$, 则有

$$\dot{V}_4 = \dot{V}_3 - k_6 z_3^2 \leq -2k_3 V_4 = -k_3 \xi_3^2 - k_3 (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \leq 0. \quad (30)$$

由式 (30) 可知, ξ_3, z_1, z_2, z_3 随着 $t \rightarrow \infty$ 趋向于零, 即 $\xi_6 \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$.

因此, 可得链式结构 (4) 的虚拟控制输入如下:

$$\begin{cases} u_1 = -k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2, \\ u_2 = \dot{\varphi}_3 - z_2 - k_6 z_3. \end{cases} \quad (31)$$

综上所述, $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6]$ 随着 $t \rightarrow \infty$ 都收敛于零, 即链式结构 (4) 的状态在虚拟控制输入 (31) 的作用下渐近稳定.

结合附录 A 与式 (31), 可得到第 2 阶段的第一连杆与第二连杆的控制力矩. 此外, 为维持第四连杆的角度不变, 第四连杆的控制力矩设计如下.

构造 Lyapunov 函数为

$$V_5(x) = \frac{1}{2}x_4^2 + \frac{1}{2}x_8^2. \quad (32)$$

对其求导可得

$$\dot{V}_5(x) = x_8 (x_4 + F_4 + g_{41}\tau_1 + g_{42}\tau_2 + g_{44}\tau_4). \quad (33)$$

为了保证 $\dot{V}_5(x) \leq 0$, 设计控制力矩如下:

$$\tau_4 = (-x_4 - F_4 - g_{41}\tau_1 - g_{42}\tau_2 - C_3 x_8) g_{44}^{-1}. \quad (34)$$

采用虚拟控制输入 (31) 与控制器 (34), 可维持第四连杆的角度不变, 同时, 被动关节被控制至其目标位置、被动连杆的姿态角被控制至其中间姿态角, 从而进一步将平面 AAPA 机械臂降阶为平面 Acrobot.

系统从第 2 阶段切换到第 3 阶段的条件为

$$\begin{cases} |x_p - x_{pd}| < e_1, |y_p - y_{pd}| < e_1, |\theta_p - \theta_{pd}| < e_1, \\ |x_5| < e_2, |x_6| < e_2, |x_7| < e_2, |x_8| < e_2. \end{cases} \quad (35)$$

表 1 平面 AAPA 机械臂模型参数

Table 1 The model parameters of the planar AAPA manipulator

Segment i	m_i (kg)	l_i (m)	l_{ci} (m)	J_i (kg/m ²)
1	1.2	1.2	0.144	0.144
2	1.2	1.2	0.144	0.144
3	0.6	0.3	0.144	0.0022
4	0.6	0.7	0.144	0.0285

5.3 第 3 阶段控制器设计

根据第 3 阶段的控制目标, 构造 Lyapunov 函数如下:

$$V_6(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1, i \neq 3}^4 \left((x_i - x_{ic})^2 + x_{i+4}^2 \right), \quad (36)$$

其中 x_{1c}, x_{2c} 分别为第一连杆与第二连杆在第 2 阶段结束时的角度, $x_{4c} = q_{4d}$ 为第四连杆的目标角度.

对 $V_6(x)$ 求导可得

$$\dot{V}_6(x) = \sum_{i=1, i \neq 3}^4 \left(x_{i+4} \left(x_i - x_{ic} + F_i + \sum_{j=1, j \neq 3}^4 g_{ij} \tau_j \right) \right). \quad (37)$$

为了保证 $\dot{V}_6(x) \leq 0$, 设计第 3 阶段控制力矩为

$$\tau_i = \frac{-x_i + x_{ic} - (F_i + C_1 x_5 + C_2 x_6 + C_3 x_8 + \sum_{j=1, j \neq i}^4 g_{ij} \tau_j)}{g_{ii}}. \quad (38)$$

将控制器 (38) 代入式 (37), 可得

$$\dot{V}_6(x) = -C_1 x_5^2 - C_2 x_6^2 - C_3 x_8^2 \leq 0. \quad (39)$$

与第 1 阶段分析过程类似, 利用 LaSalle 不变集原理, 可知当 $t \rightarrow \infty$ 时, 第 3 阶段的最大不变集为 $[x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_8]^T = [x_{1c}, x_{2c}, x_{4c}, 0, 0, 0]^T$. 即采用控制器 (38), 可维持第一连杆的角度与第二连杆的角度在第 2 阶段结束时的角度不变, 确保系统是平面 Acrobot. 同时, 控制第四连杆的角度至其目标角度, 连带实现对系统被动连杆的角度控制, 从而最终实现平面 AAPA 机械臂的位姿控制目标.

6 仿真结果

为了验证所提控制策略的有效性, 本节进行两组仿真研究. 平面 AAPA 机械臂的模型参数如表 1 所示.

设定仿真步长为 0.001 s. 同时, 设定控制器 (12), (34) 与 (38) 中的参数: $C_1 = C_2 = C_3 = 1.8$, 虚拟控制输入式 (31) 中的参数: $k_1 = 1, k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 3$, 切换条件 (16) 与 (35) 中的参数: $e_1 = 0.005, e_2 = 0.001$, 遗传算法中的参数: $p_c = 0.7, p_m = 0.1, p_s = 0.8$, 初始种群数目 $N = 30$, 最大迭代次数 $G = 100, \varepsilon = 0.001$.

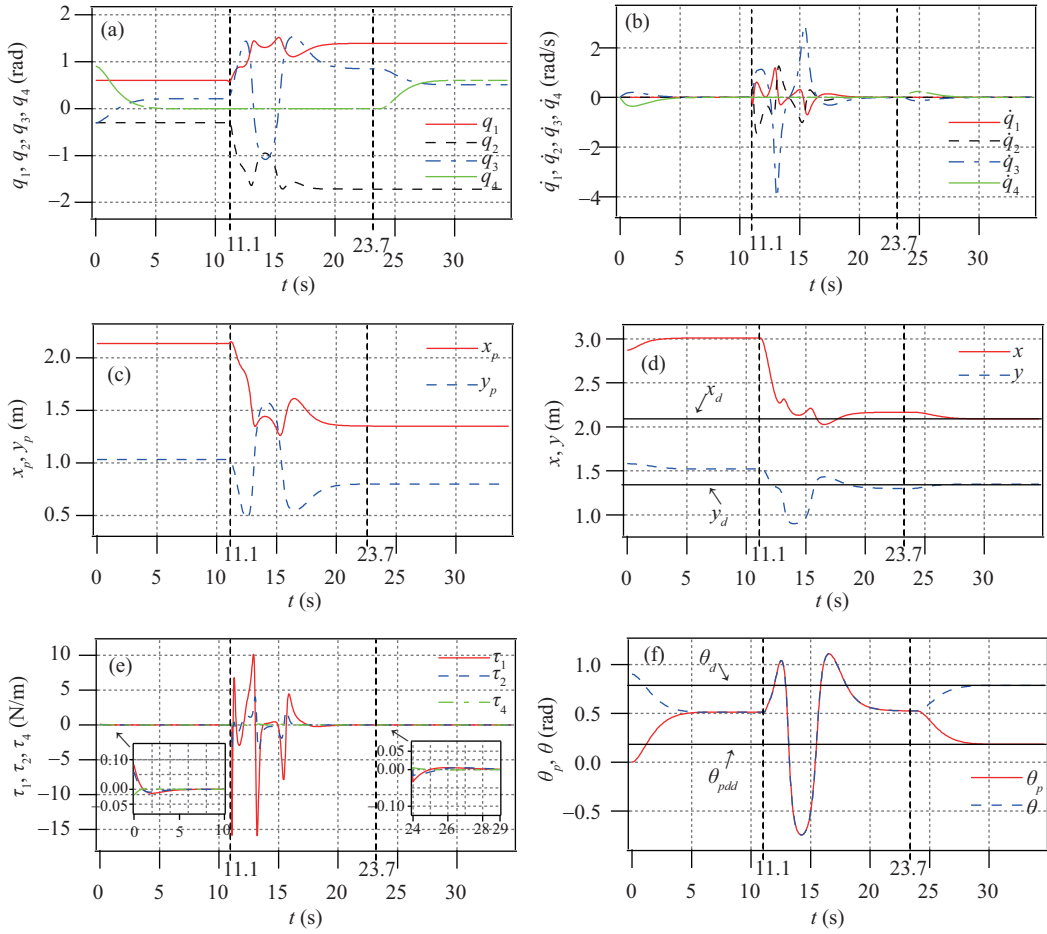


图 5 (网络版彩图) 实例 1 的仿真结果. (a) 各杆角度; (b) 各杆角速度; (c) 被动关节坐标; (d) 系统末端点坐标; (e) 控制力矩; (f) 被动连杆姿态角与第四连杆姿态角

Figure 5 (Color online) Simulation results for case 1. (a) Angles of links; (b) angles velocities of links; (c) coordinate of the passive joint; (d) coordinate of the system endpoint; (e) control torques; (f) posture angles of the passive link and the fourth link

实例 1. 选取各杆的初始状态、系统目标位置与目标姿态角为

$$\begin{cases} [q_{10}, q_{20}, q_{30}, q_{40}] = [0.6, -0.3, -0.3, 0.9] \text{ rad}, \\ [\dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}, \dot{q}_{30}, \dot{q}_{40}] = [0, 0, 0, 0] \text{ rad/s}, \\ (x_d, y_d) = (2.2, 1.4) \text{ m}, \theta_d = \pi/4 \text{ rad}. \end{cases} \quad (40)$$

利用遗传算法, 可计算出与系统目标位姿相对应的被动关节目标位置、被动连杆中间姿态角、第四连杆目标角度与被动连杆目标姿态角为

$$\begin{cases} (x_{pd}, y_{pd}) = (1.349, 0.799) \text{ m}, \theta_{pd} = 0.5033 \text{ rad}, \\ q_{4d} = 0.6023 \text{ rad}, \theta_{pdd} = 0.1837 \text{ rad}. \end{cases} \quad (41)$$

仿真结果如图 5(a)~(f) 所示. 由图 5(a)~(f) 仿真结果可知: 在系统控制的第 1 阶段, 第一连杆的角度与第二连杆的角度被维持在各自的初始角度不变, 第四连杆的角度被控制至零. 在 $t=$

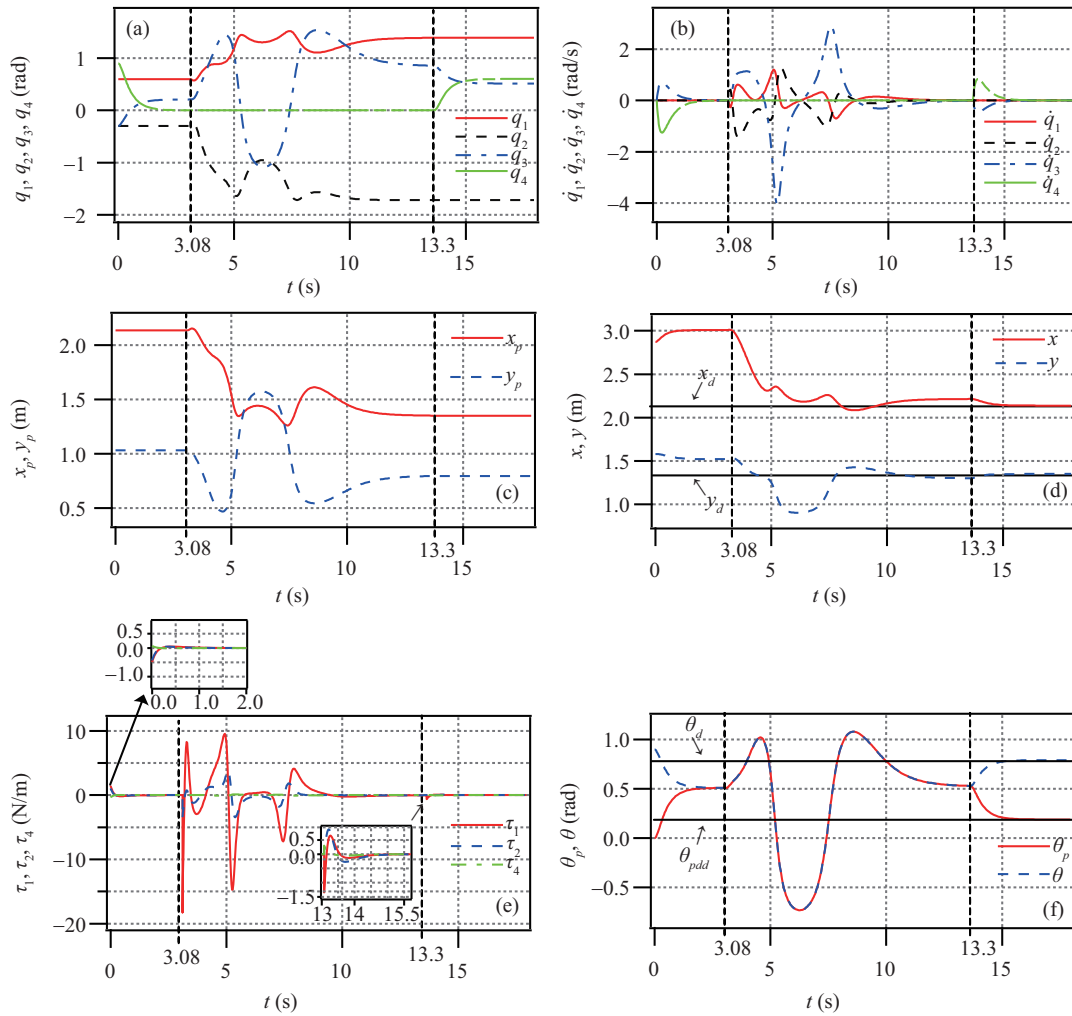


图 6 (网络版彩图) 实例 2 的仿真结果. (a) 各杆角度; (b) 各杆角速度; (c) 被动关节坐标; (d) 系统末端点坐标; (e) 控制力矩; (f) 被动连杆姿态角与第四连杆姿态角

Figure 6 (Color online) Simulation results for case 2. (a) Angles of links; (b) angles velocities of links; (c) coordinate of the passive joint; (d) coordinate of the system endpoint; (e) control torques; (f) posture angles of the passive link and the fourth link

11.1 s, 第 1 阶段目标被实现, 即平面 AAPA 机械臂被降阶为平面虚拟 AAP 机械臂. 在系统控制的第 2 阶段, 第四连杆角度保持不变, 以确保系统是平面虚拟 AAP 机械臂. 同时, 被动关节被控制至其目标位置 $(x_{pd}, y_{pd}) = (1.35, 0.8)$ m, 被动连杆的姿态角被控制至中间姿态角 $\theta_{pd} = 0.5114$ rad, 在 $t = 23.7$ s, 第 2 阶段目标被实现, 即平面 AAPA 机械臂被进一步降阶为平面 Acrobot. 在系统控制的第 3 阶段, 第一连杆的角度与第二连杆的角度保持在第 2 阶段结束时的角度不变, 以维持被动关节稳定在其目标位置, 从而确保系统是平面 Acrobot. 同时, 平面 Acrobot 驱动连杆的角度被控制至其目标角度 $q_{4d} = 0.6025$ rad, 连带控制被动连杆的姿态角至其目标姿态角 $\theta_{pdd} = 0.1837$ rad. 在 $t = 30.2$ s, 平面 AAPA 机械臂的末端点稳定到其目标位置 $(x_d, y_d) = (2.179, 1.378)$ m, 机械臂的末端连杆姿态角稳定到其目标姿态角 $\theta_d = \pi/4$ rad. 通过以上仿真结果及分析论述可知, 本文所提控制策略可行且有效.

实例 2. 在实例 2 中, 所选的所有仿真参数与实例 1 相同. 唯一不同的是控制器 (12), (34) 与 (38) 中的参数被选取为 $C_1 = C_2 = C_3 = 10$.

仿真结果如图 6(a)~(f) 所示, 由仿真结果可知: 在 $t = 3.08$ s, 系统控制从第 1 阶段切换到第 2 阶段. 在 $t = 13.3$ s, 系统控制从第 2 阶段切换到第 3 阶段. 在 $t = 17.1$ s, 平面 AAPA 机械臂的末端点稳定至其目标位置 $(x_d, y_d) = (2.191, 1.383)$ m, 机械臂的末连杆稳定至其目标姿态角 $\theta_d = \pi/4$ rad. 与实例 1 相比, 在实例 2 中实现控制目标所需的时间减少了近一半, 这说明实现控制目标所需时间可以通过调节控制器参数而调节.

7 结论

本文针对第三关节为被动的平面 AAPA 机械臂的位姿控制, 提出了一种基于模型降阶与链式结构的控制策略. 该控制策略将机械臂依次降阶为平面虚拟 AAP 机械臂与平面 Acrobot. 基于平面虚拟 AAP 机械臂的非线性特性与平面 Acrobot 的完整特性, 分别设计每个降阶系统的控制器, 通过依次实现每个降阶系统的控制目标, 最终实现平面 AAPA 机械臂的位姿控制目标. 此外, 考虑到平面 Acrobot 存在角度约束关系, 利用遗传算法优化被动关节目标位置、被动连杆中间姿态角、第四连杆目标角度以及被动连杆目标姿态角, 以确保降阶后平面 Acrobot 针对于目标位姿的目标角度解存在. 最后, 通过仿真结果验证了所提位姿控制策略的有效性与可行性.

本文利用平面 AAPA 机械臂的结构特点, 将平面 AAPA 机械臂的位姿控制分为 3 个控制阶段, 通过依次实现每个阶段的控制目标, 从而实现平面 AAPA 机械臂的位姿控制目标. 然而, 采用 3 个控制阶段使得整个系统的控制时间较长. 因此, 如何减少控制阶段及控制器切换次数, 从而快速地实现平面 AAPA 机械臂的位姿稳定控制目标将是今后需要研究的重点.

参考文献

- Lai X Z, Zhang Z, Wu M, et al. Hybrid control strategy for an underactuated three-link manipulator. *Sci Sin Inform*, 2013, 43: 287–302 [赖旭芝, 张镇, 吴敏, 等. 欠驱动三连杆机器人的混杂控制方法. *中国科学: 信息科学*, 2013, 43: 287–302]
- Liang D K, Sun N, Wu Y M, et al. Trajectory planning-based control of underactuated wheeled inverted pendulum robots. *Sci China Inf Sci*, 2019, 62: 050207
- Wang H L, Zhang H, Wang Z P, et al. Exponentially stable periodic walking of under-actuated biped robot. *Sci Sin Tech*, 2019, 49: 288–300 [王鹤霖, 张皓, 王祝萍, 等. 欠驱动双足机器人的指数稳定周期行走. *中国科学: 技术科学*, 2019, 49: 288–300]
- Sun N, Fang Y C. A review for the control of a class of underactuated systems. *CAAI Trans Intell Syst*, 2011, 6: 200–207 [孙宁, 方勇纯. 一类欠驱动系统的控制方法综述. *智能系统学报*, 2011, 6: 200–207]
- Zheng Z W, Wei H. Planar path following control for stratospheric airship. *IET Control Theor Appl*, 2013, 7: 185–201
- Lai X Z, She J H, Cao W H, et al. Stabilization of underactuated planar acrobot based on motion-state constraints. *Int J Nonlin Mech*, 2015, 77: 342–347
- Luca A D, Mattone R, Oriolo G. Stabilization of an underactuated planar 2R manipulator. *Int J Robust Nonlin Control*, 2000, 10: 181–198
- Arai H, Tanie K, Shiroma N. Nonholonomic control of a three-DOF planar underactuated manipulator. *IEEE Trans Robot Automat*, 1998, 14: 681–695
- Mahindrakar A D, Banavar R N, Reyhanoglu M. Controllability and point-to-point control of 3-DOF planar horizontal underactuated manipulators. *Int J Control*, 2005, 78: 1–13
- Xiong P Y, Lai X Z, Wu M. Position control for planar four-link underactuated mechanical system based on model degeneration. *Control Decis*, 2015, 30: 1277–1283 [熊培银, 赖旭芝, 吴敏. 基于模型退化的平面四连杆欠驱动机械

- 系统位置控制. 控制与决策, 2015, 30: 1277–1283]
- 11 Chen G, Zhang L, Jia Q X, et al. Repetitive motion planning for space manipulator based on null space of primary task. *J Astronaut*, 2013, 34: 1063–1071 [陈钢, 张龙, 贾庆轩, 等. 基于主任务零空间的空间机械臂重复运动规划. 宇航学报, 2013, 34: 1063–1071]
 - 12 Li Y F, Gao C H, Shen L. Study of vision-based space target capturing strategy for manipulators. *Sci Sin Tech*, 2015, 45: 31–35 [李宇飞, 高朝辉, 申麟. 基于视觉的机械臂空间目标抓取策略研究. 中国科学: 技术科学, 2015, 45: 31–35]
 - 13 Fu D W, Wang J H, Lin M, et al. An intellectual robotic arm device controlled by the head posture. *J Nantong Univ (Nat Sci Ed)*, 2018, 17: 17–21 [符栋伟, 王继恒, 林敏, 等. 一种头部姿态控制型智能机械臂装置. 南通大学学报 (自然科学版), 2018, 17: 17–21]
 - 14 Wang X Y, Ding Y M. Adaptive real-time predictive compensation control for 6-DOF serial arc welding manipulator. *Chin J Mech Eng*, 2010, 23: 361–366
 - 15 Lai X Z, Zhang P, Wang Y W, et al. Position-posture control of a planar four-link underactuated manipulator based on genetic algorithm. *IEEE Trans Ind Electron*, 2017, 64: 4781–4791
 - 16 Oriolo G, Nakamura Y. Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints: underactuated manipulators. In: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Brighton, 1991. 2398–2403
 - 17 Lai X Z, Wang Y W, Wu M, et al. Stable control strategy for planar three-link underactuated mechanical system. *IEEE/ASME Trans Mechatron*, 2016, 21: 1345–1356
 - 18 Lin Y, Zhao H, Ding H. Solution of inverse kinematics for general robot manipulators based on multiple population genetic algorithm. *J Mech Eng*, 2017, 53: 1–8 [林阳, 赵欢, 丁汉. 基于多种群遗传算法的一般机器人逆运动学求解. 机械工程学报, 2017, 53: 1–8]
 - 19 Gao J L, Tang Y C, Wang J X, et al. A concurrent trace debugging method for multi-core chip based on generic algorithm. *Sci Sin Inform*, 2014, 44: 1253–1263 [高建良, 唐逸晨, 王建新, 等. 基于遗传算法的多核芯片并发追踪调试方法. 中国科学: 信息科学, 2014, 44: 1253–1263]
 - 20 Khalil H. *Nonlinear Systems*. 3rd ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 2002

附录 A

定义

$$\widehat{M}(q) = \begin{bmatrix} \widehat{M}_{11} & \widehat{M}_{12} & \widehat{M}_{13} \\ \widehat{M}_{12} & \widehat{M}_{22} & \widehat{M}_{23} \\ \widehat{M}_{13} & \widehat{M}_{23} & \widehat{M}_{33} \end{bmatrix}, \quad \widehat{H}(\widehat{q}, \dot{\widehat{q}}) = \begin{bmatrix} \widehat{H}_1 \\ \widehat{H}_2 \\ \widehat{H}_3 \end{bmatrix}^T. \quad (\text{A1})$$

结合式 (A1), 由式 (3) 可得 \ddot{q}_1, \ddot{q}_2 与 τ_1, τ_2 之间的数学关系为

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A2})$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta &= \widehat{M}_{13}^2 \widehat{M}_{22} - 2\widehat{M}_{12} \widehat{M}_{13} \widehat{M}_{23} + \widehat{M}_{12}^2 \widehat{M}_{33} + \widehat{M}_{11} (\widehat{M}_{23}^2 - \widehat{M}_{22} \widehat{M}_{33}), \\ A_{11} &= \frac{\widehat{M}_{23}^2 - \widehat{M}_{22} \widehat{M}_{23}}{\Delta}, \quad A_{12} = \frac{\widehat{M}_{12} \widehat{M}_{33} - \widehat{M}_{13} \widehat{M}_{23}}{\Delta}, \quad A_{22} = \frac{\widehat{M}_{13}^2 - \widehat{M}_{11} \widehat{M}_{33}}{\Delta}, \\ B_1 &= \frac{\widehat{H}_3 (\widehat{M}_{12} \widehat{M}_{23} - \widehat{M}_{13} \widehat{M}_{23})}{\Delta} + \frac{\widehat{H}_2 (\widehat{M}_{13} \widehat{M}_{23} - \widehat{M}_{12} \widehat{M}_{33})}{\Delta} + \frac{\widehat{H}_1 (\widehat{M}_{22} \widehat{M}_{33} - \widehat{M}_{23}^2)}{\Delta}, \\ B_2 &= \frac{\widehat{H}_3 (\widehat{M}_{12} \widehat{M}_{13} - \widehat{M}_{11} \widehat{M}_{23})}{\Delta} + \frac{\widehat{H}_2 (\widehat{M}_{11} \widehat{M}_{33} - \widehat{M}_{13}^2)}{\Delta} + \frac{\widehat{H}_1 (\widehat{M}_{13} \widehat{M}_{23} - \widehat{M}_{12} \widehat{M}_{33})}{\Delta}. \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

根据平面虚拟 AAP 机械臂的几何约束关系可得

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = -\dot{q}_1^2 L_1 \cos q_1 - L_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ \quad - \dot{q}_1 L_1 \sin q_1 - L_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \\ \ddot{y}_p = -\dot{q}_1^2 L_1 \sin q_1 - L_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ \quad + \dot{q}_1 L_1 \cos q_1 + L_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2). \end{cases} \quad (\text{A4})$$

根据文献 [8], 可得 \ddot{x}_p, \ddot{y}_p 与 u_1, u_2 数学关系为

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = \cos(q_1 + q_2)v_1 + \gamma\theta_p^2 + \sin(q_1 + q_2)\gamma v_2, \\ \ddot{y}_p = \sin(q_1 + q_2)v_1 + \gamma\theta_p^2 - \cos(q_1 + q_2)\gamma v_2, \end{cases} \quad (\text{A5})$$

其中

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1/\cos\theta_p \\ u_2\cos^2\theta_p - 2\dot{\theta}_p^2 \tan\theta_p \end{bmatrix}. \quad (\text{A6})$$

Position and posture control for a planar underactuated manipulator based on model reduction and chained structure

Dong LIU^{1,2}, Xiongbo WAN^{1,2}, Yawu WANG^{1,2*}, Xuzhi LAI^{1,2} & Min WU^{1,2}

1. School of Automation, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China;

2. Hubei Key Laboratory of Advanced Control and Intelligent Automation for Complex Systems, Wuhan 430074, China

* Corresponding author. E-mail: wangyawu@cug.edu.cn

Abstract A control strategy is proposed based on the model reduction and the chained structure for a planar four-link (Active-Active-Passive-Active, AAPA) underactuated manipulator to achieve its position-posture control objective. The whole control process is divided into three stages. In the first stage, the planar AAPA manipulator is reduced to the planar virtual three-link (Active-Active-Passive, AAP) manipulator by controlling the angle of the fourth link and rotating it to zero. In the second stage, the model of a planar virtual AAP manipulator is transformed into the standard chain structure form. Then, the corresponding controllers are designed to control the passive joint of the planar virtual AAP manipulator to its target position, and the posture angle of the passive link is controlled to its middle posture angle at the same time. At the end of this stage, the planar AAPA manipulator is reduced to the planar Acrobot. In the third stage, the angle of the active link of the planar Acrobot is controlled to its target angle. Also, the angle control of the passive link of the system is realized. Consequently, the position-posture control objective of the planar AAPA manipulator is recognized. Considering the angle constraint of the planar Acrobot, the genetic algorithm is used to coordinate and optimize the target angle of the passive joint, the middle posture angle of the passive link, the target angle of the fourth link, and the target posture angle of the passive link. These ensure the target angles of the planar Acrobot corresponding to the target position-posture of the system can be found. Finally, simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed control strategy.

Keywords planar four-link underactuated manipulator, position-posture control, model reduction, chained structure, genetic algorithm



Dong LIU was born in 1994. He received his B.S. degree in engineering from Huaihua University in 2017. Currently, he is pursuing his M.S. degree in control engineering in the School of Automation at China University of Geosciences, Wuhan, China. His research interests focus on nonlinear systems control and robotics control.



Xiongbo WAN was born in 1982. He received his B.S. degree in information and computing science, from Huazhong Agricultural University, Wuhan, China, in 2006. He obtained his M.S. degree in probability theory and mathematical statistics in 2008 and his Ph.D. degree in control theory and engineering in 2011, both from Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, China. Since 2015, he has been an associate professor in the School of Automation at China University of Geosciences, Wuhan, China. His research interests include complex networks and networked control systems.



Yawu WANG was born in 1990. He received his B.S. and M.S. degrees in engineering from Hubei University of Technology, Wuhan, China, in 2011 and 2015, respectively, and his Ph.D. degree in engineering from China University of Geosciences, Wuhan, China, in 2018. He was a joint doctoral student in the Faculty of Engineering and Computer Science at Concordia University, Montreal, Canada, from 2017 to 2018. His research interests majorly include robot control and nonlinear system control.



Xuzhi LAI was born in 1966. She obtained her B.S., M.S., and Ph.D. degrees in engineering from Central South University, Changsha, China, in 1988, 1991, and 2001, respectively. She is currently a professor in the School of Automation at China University of Geosciences, Wuhan, China. Her research interests focus on intelligent control, nonlinear systems control, and robotics control.