



一种大时间带宽积 PSWF 的显式渐近表达式

赛雷^{1,2}, 王红星^{1,2*}, 陆发平^{1,2}, 刘传辉^{1,2}

1. 海军航空大学航空通信教研室, 烟台 264001

2. 海军航空大学信号与信息处理山东省重点实验室, 烟台 264001

* 通信作者. E-mail: 13371368601@189.cn

收稿日期: 2019-05-05; 修回日期: 2019-07-09; 接受日期: 2019-08-07; 网络出版日期: 2020-10-14

国家自然科学基金 (批准号: 61701518) 和山东省“泰山学者”建设工程专项经费基金 (批准号: 20081130) 项目资助

摘要 针对当前求解大时间带宽积椭圆球面波函数 (PSWF) 无统一表达式的问题, 通过对基于 Hermite 函数和 Legendre 多项式的显式渐近表达式求解误差的理论和数值分析, 提出一种大时间带宽积 PSWF 及其微分算子特征值的显式渐近表达式, 明确了大时间带宽积 ($c > 10\pi$) PSWF 及其微分算子特征值基于 Hermite 函数和 Legendre 多项式的精确高效求解的适用条件和计算方法. 性能对比分析结果表明, 本文提出的表达式可保证各阶 PSWF 及其微分算子特征值始终满足误差要求, 且正交性与能量聚集性具有显著优势.

关键词 椭圆球面波函数, 大时间带宽积, 显式渐近表达式, Hermite 函数, Legendre 多项式

1 引言

椭圆球面波函数 (prolate spheroidal wave functions, PSWF) 是 Slepian 等^[1]于 1961 年提出的一种非正弦类完备正交函数系, 具有时间带宽可控性、高频能量聚集性等优良特性. 自提出以来, 作为解决时限与带限之间矛盾的最佳信号形式, PSWF 在非正弦波通信^[2]、数字信号处理^[3]、卫星通信^[4]、超宽带通信^[5]、光纤通信^[6]等领域已经取得了一系列研究成果, 具有极大的发展潜力.

归纳起来, 随着时间带宽积的增大, PSWF 至少能够为通信系统带来如下优势: 第一, 与时间带宽积固定的正弦波调制信号相比, PSWF 调制信号的时间带宽积是灵活可控的, 在双选择性衰落信道中, 通过增加信号时宽以增加时间带宽积能够提升通信系统的抗多径性能, 通过增加信号带宽以增加时间带宽积能够提升通信系统的抗 Doppler 性能. 第二, 在基于 PSWF 的非正弦时域正交调制方法中^[7~9], 时间带宽积的增大能够增加单频带中可用的正交信号数量, 以避免多频带信号之间的正交化过程, 从而可以避免正交化对 PSWF 能量聚集度的破坏, 实现通信系统能量效率的提升; 同时, 在频谱交叠度和子频带数目不变的情况下, 时间带宽积的增加能够提升通信系统的频带利用率. 第三, 在基于 PSWF

引用格式: 赛雷, 王红星, 陆发平, 等. 一种大时间带宽积 PSWF 的显式渐近表达式. 中国科学: 信息科学, 2020, 50: 1574–1587, doi: 10.1360/SSI-2019-0092
Sai L, Wang H X, Lu F P, et al. An explicit asymptotic expression of large time-bandwidth product PSWF (in Chinese). Sci Sin Inform, 2020, 50: 1574–1587, doi: 10.1360/SSI-2019-0092

窗的数字滤波器设计中,增加时间带宽积能够降低 FIR (finite impulse response) 数字滤波器的阻带衰减.

然而,由于 PSWF 无闭式解析解,其求解问题一直是限制其推广与应用的主要障碍之一.从函数求解的角度讲,PSWF 的求解方法大致可分为 3 类:多项式逼近法^[10~12]、重构算法^[13~16]、Toeplitz 矩阵数值法^[17~20].这些求解方法在实际应用中均表现出不同程度的局限性,尤其在求解大时间带宽积 PSWF 时,局限性会更为显著.具体而言:(1)多项式逼近法,虽然在理论上可以求解任意精度和任意时间带宽积的 PSWF,但随着时间带宽积的增大,该方法构建的实对称矩阵的维数会成倍增加,导致计算量的急剧上升,信号实时产生困难.(2)重构算法,精度较高但低于多项式逼近法,由于构建矩阵时需进行大量的数值积分计算,且随着时间带宽积的增大计算量急剧增加,同样难以在实际硬件中大规模应用.(3)Toeplitz 矩阵数值法,算法步骤相对简便,物理意义清晰,但随着时间带宽积的增大($> 10\pi$),由于特征值的排序和计算机的舍入误差等问题,该方法所得信号的波形会发生较为严重的失真,不再具备 PSWF 的优良特性.

针对上述局限,为降低大时间带宽积 PSWF 的求解复杂度,Xiao 和 Rokhlin 在多项式逼近法的基础上,在文献 [12] 中提出了基于 Hermite 函数的显式渐近表达式,在文献 [21] 中提出了基于 Legendre 多项式的显式渐近表达式.采用这两种表达式求解大时间带宽积 PSWF 信号,只需给定 PSWF 阶数 m 和时间带宽积 c 两参数,代入求值即可,无需进行矩阵特征值和特征向量的求解计算,计算复杂度大幅下降,从 $O(N^3)$ 下降至 $O(N^2)$.对于大时间带宽积信号而言,文献 [12, 21] 提出的显式渐近表达式是目前整体性能最优的求解方案.遗憾的是,文献 [12, 21] 未明确给出上述两种表达式的适用范围.本文在实际使用和研究过程中发现,这两种表达式的适用条件存在一定的互补特性,即文献 [12] 提出的表达式的求解精度与 c 成正比,与 m 成反比,而文献 [21] 提出的表达式的求解精度与 c 成反比,与 m 成正比.由此导致的问题是,在时间带宽积给定时,无法以一个统一的表达式求解各阶 PSWF.如基于无线电的 UWB (ultra wideband) 系统设计时^[5],需要 $c = 100\pi$ 的 PSWF,采用重构算法和 Toeplitz 矩阵数值法不能求解如此大时间带宽积的 PSWF,而采用文献 [12, 21] 的两种显式渐近表达式也无法统一求解.

本文从这一疑问出发,于文献 [12, 21] 提出的两种表达式中,分别选取了精度最高的表达式(详见附录 A),对它们的求解误差进行了理论分析和数值实验分析,发现当时间带宽积大于 10π 以后,基于 Hermite 函数的显式渐近表达式和基于 Legendre 多项式的显式渐近表达式的求解误差曲线,对于 PSWF 阶数而言将存在一个交叉点,在交叉点之前基于 Hermite 函数的表达式求解误差始终小于基于 Legendre 多项式的表达式求解误差,交叉点之后则相反;随着时间带宽积的增大,出现交叉点时所对应的 PSWF 阶数和求解误差也都在有规律的增大.在此基础上,通过数值实验确定了上述交叉点的取值,依据数值实验结果,提出一种大时间带宽积 PSWF 及其微分算子特征值的显式渐近表达式,明确了大时间带宽积 ($c > 10\pi$) PSWF 及其微分算子特征值基于 Hermite 函数和 Legendre 多项式的精确高效求解的适用条件和计算方法.通过与文献 [12, 21] 性能对比分析表明,本文提出的表达式继承了低计算复杂度,对于大时间带宽积 PSWF 及其微分算子特征值,所有阶数的计算结果可以始终满足误差要求,同时,PSWF 信号的正交性与能量聚集性也具有显著优势.

2 基于 Hermite 函数与 Legendre 多项式的两种显式渐近表达式的求解误差分析

本节内容首先介绍 PSWF 定义和两种显式渐近表达式,而后对两种显式渐近表达式的求解误差

进行理论分析. 依据文献 [1], PSWF 可定义为如下微分方程的解:

$$(1-x^2)\psi''_m(x) - 2x\psi'_m(x) + (\chi_m^c - c^2x^2)\psi_m(x) = 0, \quad (1)$$

其中整数 m 为 PSWF 阶数, 取值范围为 $0 \leq m \leq \lfloor c/\pi \rfloor - 1$, $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下取整, 正实数 $c = \pi TB$ (rad·s) 为 PSWF 时间带宽积, T 为 PSWF 信号持续时间, B 为 PSWF 信号带宽.

该方程在某固定时域区间上的连续解 $\psi_m^c(x)$ 即为 PSWF, χ_m^c 是 PSWF 的微分算子特征值. 为与后面显式渐近表达式相统一, 本文将该时域区间固定为 $x \in [-1, 1]$, $T = 2$ s, 信号带宽的单位是 Hz.

2.1 基于 Hermite 函数的显式渐近表达式

依据 Hermite 函数系 $\{\phi_n^c(x)\}$ 的标准完备正交性, 文献 [12] 首先提出了 Hermite 函数逼近法, 给出了基于 Hermite 函数的 PSWF 及其微分算子特征值的显式渐近表达式. 当截断长度为 n 时, PSWF 及其微分算子特征值的误差函数分别为:

$$\|\psi_{m,\text{hermite}}^{c,n} - \psi_{m,\text{hermite}}^c\|_{[-\infty,\infty]} = \begin{cases} O(m^{2n-1}/c^n), & n \text{ 为奇数,} \\ O(m^{2n}/c^n), & n \text{ 为偶数,} \end{cases} \quad (2)$$

$$|\chi_{m,\text{hermite}}^{c,n} - \chi_{m,\text{hermite}}^c| = O(m^{n+2}/c^n). \quad (3)$$

因此, 随着时间带宽积 c 的增大或 PSWF 阶数 m 的减小, 截断函数 $\psi_{m,\text{hermite}}^{c,n}(x)$ 就越接近未经截断的函数 $\psi_{m,\text{hermite}}^c(x)$, 同样地, 截断函数 $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,n}$ 也就越接近未经截断的函数 $\chi_{m,\text{hermite}}^c$. 误差函数 $O(c, m, n)$ 是无穷项之和, 不存在闭式解析解.

以此为依据, Xiao 和 Rokhlin [12] 通过“逆幂”方法推导得出了不同截断长度的用于求解 PSWF 及其微分算子特征值的显式渐近表达式, 最后得到了截断长度为 5 的表达式 $\psi_{m,\text{hermite}}^{c,5}(x)$ [12] 用于求解 PSWF, 截断长度分别为 14 和 6 的表达式 $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,14}(m=0)$ [12] 和 $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,6}$ [12] 用于求解 PSWF 的微分算子特征值. 经过数值实验对比发现, 对于低阶数 PSWF 而言, 这是目前精度最为理想的表达式. 这 3 个表达式的具体形式详见附录 A.

$\psi_{m,\text{hermite}}^{c,5}(x)$ [12] 是以尺度变换因子为 \sqrt{c} 的第 k 阶 Hermite 函数 $\phi_k^{\sqrt{c}}(x)$ 为基底进行展开的, 且该式各单项式的分母和分子中大都分别是时间带宽积 c 和阶数 m 的正整数次幂的形式. 同样, 对于 $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,14}(m=0)$ [12] 和 $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,6}$ [12] 而言, 各单项式的分母和分子中也大都分别是 c 和 m 的正整数次幂的形式.

2.2 基于 Legendre 多项式的显式渐近表达式

文献 [21] 依据经典的 Legendre 多项式逼近法 [11], 给出了基于 Legendre 多项式的 PSWF 及其微分算子特征值的显式渐近表达式. 当截断长度为 n 时, PSWF 及其微分算子特征值的误差函数采用余项的形式可分别表示为:

$$\sqrt{m}O(c^{2n+2}/\sqrt{m^{2n+2}}), \quad (4)$$

$$c^2O(c^{n+1}/m^{n+1}). \quad (5)$$

因此, 随着 PSWF 阶数 m 的增大或时间带宽积 c 的减小, 基于 Legendre 多项式的显式渐近表达式的求解精度会逐渐提高. 此处, 误差函数 $O(c, m, n)$ 同样是无穷项之和, 不存在闭式解析解.

以此为依据, Xiao 和 Rokhlin [21] 通过“逆幂”方法推导得出了表达式 $\psi_{m,\text{legendre}}^c(x)$ [21] 用于求解 PSWF, 表达式 $\chi_{m,\text{legendre}}^c$ [21] 用于求解 PSWF 的微分算子特征值. $\psi_{m,\text{legendre}}^c(x)$ [21] 是按 c^2/m 的正

整数次升幂进行展开的, $\chi_{m,\text{legendre}}^c$ [21] 是按 c/m 的正整数次升幂进行展开的. 此外, 当 $x=0$ 和 $x=1$ 时, 文献 [21] 还给出了精度更高的显式渐近表达式, 但其只能用于求解信号的中点值和端点值. 经过数值实验对比发现, 对于高阶数 PSWF 而言, 这是目前精度最为理想的表达式. 这两个表达式的具体形式见附录 A.

2.3 求解误差分析

(1) PSWF 显式渐近表达式求解误差分析. 由式 (2) 和 (4) 可知: 基于 Hermite 函数的显式渐近表达式 $\psi_{m,\text{hermite}}^{c,5}(x)$ 的误差函数是 $O(m^9/c^5)$, 其求解精度与 c 成正比, 与 m 成反比; 基于 Legendre 多项式的显式渐近表达式 $\psi_{m,\text{legendre}}^c(x)$ 的误差函数是 $\sqrt{m}O(c^{16}/m^8)$, 其求解精度与 c 成反比, 与 m 成正比.

当 m 固定为较小的值时, $\psi_{m,\text{hermite}}^{c,5}(x)$ 的误差较小, 而 $\psi_{m,\text{legendre}}^c(x)$ 的误差较大; 此时, 若 c 减小, 则 $\psi_{m,\text{hermite}}^{c,5}(x)$ 的误差会呈现由小变大的规律, $\psi_{m,\text{legendre}}^c(x)$ 的误差会呈现由大变小的规律, 即两者的求解误差会越来越接近; 反之, 两者的求解误差的差距会逐渐增大.

由此可以得到推论: 当时间带宽积 c 大于某常数 c_1 时, 由于在 m 的起始处两种表达式的求解误差的差距较大, 因此随着 m 的增加, 情况会由 “ $\psi_{m,\text{hermite}}^{c,5}(x)$ 的求解精度优于 $\psi_{m,\text{legendre}}^c(x)$ ” 逐渐变化为 “ $\psi_{m,\text{legendre}}^c(x)$ 的求解精度优于 $\psi_{m,\text{hermite}}^{c,5}(x)$ ”. 即对于 m 而言, 必然存在一交叉点 m_1 (m_1 不一定是常数, 有可能是关于 c 的函数), 使得两者的求解误差曲线在 m_1 附近处相交. 因此, 为始终能够获得较小的 PSWF 求解误差, 在 $0 \leq m \leq m_1$ 的条件下应当选用 $\psi_{m,\text{hermite}}^{c,5}(x)$, 在 $m > m_1$ 的条件下应当选用 $\psi_{m,\text{legendre}}^c(x)$.

(2) PSWF 微分算子特征值的显式渐近表达式求解误差分析. 由式 (3) 和 (5) 可知: 基于 Hermite 函数的显式渐近表达式 $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,14}(m=0)$ 和 $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,6}$ 的误差函数分别是 $O(m^{16}/c^{14})$ 和 $O(m^8/c^6)$, 其求解精度与 c 成正比, 与 m 成反比; 基于 Legendre 多项式的显式渐近表达式 $\chi_{m,\text{legendre}}^c$ 的误差函数是 $c^2O(c^8/m^8)$, 其求解精度与 c 成反比, 与 m 成正比.

当 m 固定为较小的值时, $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,14}(m=0)$ 和 $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,6}$ 的误差较小, 而 $\chi_{m,\text{legendre}}^c$ 的误差较大; 此时, 若 c 减小, 则 $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,14}(m=0)$ 和 $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,6}$ 的误差会呈现由小变大的规律, $\chi_{m,\text{legendre}}^c$ 的误差会呈现由大变小的规律, 即两者的求解误差会越来越接近; 反之, 两者的求解误差的差距会逐渐增大.

由此可以得到推论: 当时间带宽积 c 大于某常数 c_2 时, 由于在 m 的起始处两种表达式的求解误差的差距较大, 因此随着 m 的增加, 情况会由 “ $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,14}(m=0)$ 和 $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,6}$ 的求解精度优于 $\chi_{m,\text{legendre}}^c$ ” 逐渐变化为 “ $\chi_{m,\text{legendre}}^c$ 的求解精度优于 $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,14}(m=0)$ 和 $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,6}$ ”. 即对于 m 而言, 必然存在一交叉点 m_2 (m_2 不一定是常数, 有可能是关于 c 的函数), 使得两者的求解误差曲线在 m_2 附近处相交. 因此, 为始终能够获得较小的 PSWF 微分算子特征值求解误差, 在 $m=0$ 的条件下应当选用 $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,14}$, 在 $0 < m \leq m_2$ 的条件下应当选用 $\chi_{m,\text{hermite}}^{c,6}$, 在 $m > m_2$ 的条件下应当选用 $\chi_{m,\text{legendre}}^c$.

3 一种大时间带宽积 PSWF 的显式渐近表达式

由第 2 节的分析可知: 当时间带宽积较大时, 即 $c > c_1$ 或 $c > c_2$, PSWF 及其微分算子特征值的显式渐近表达式应当有如下形式:

$$\psi_{m,\text{general}}^c(x) = \begin{cases} \psi_{m,\text{hermite}}^{c,5}(x)^{[12]}, & (c > c_1, 0 \leq m \leq m_1), \\ \psi_{m,\text{legendre}}^c(x)^{[21]}, & (c > c_1, m > m_1), \end{cases} \quad (6)$$

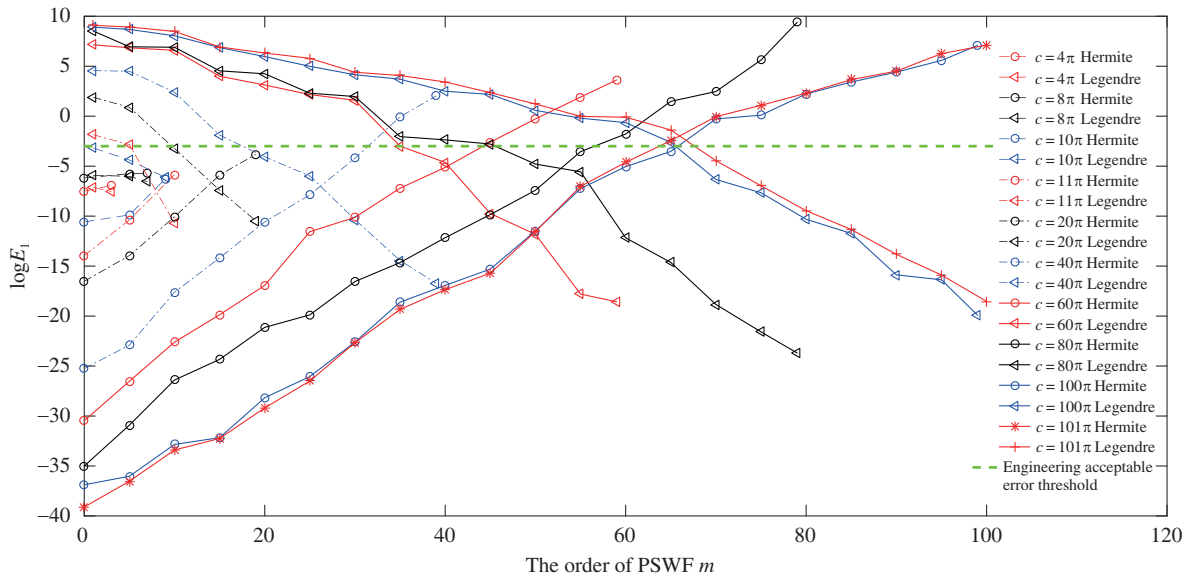


图 1 (网络版彩图) PSWF 的求解误差 $\log E_1$

Figure 1 (Color online) Solution errors of PSWF $\log E_1$

$$\chi_{m,\text{general}}^c = \begin{cases} \chi_{m,\text{hermite}}^{c,14} [12], & (c > c_2, m = 0), \\ \chi_{m,\text{hermite}}^{c,6} [12], & (c > c_2, 0 < m \leq m_2), \\ \chi_{m,\text{legendre}}^c [21], & (c > c_2, m > m_2). \end{cases} \quad (7)$$

需指出, 由于 PSWF 理论上无闭式解析解, 且两种表达式的误差函数 $O(c, m, n)$ 是无穷项之和的形式, 同样不存在闭式解析解, 因此, 式 (6) 和 (7) 中参数 c_1, c_2, m_1, m_2 的取值是无法直接导出的, 必须要通过数值实验来确定.

由于 Legendre 多项式逼近法^[11] 在不考虑计算量的情况下可实现任意精度 PSWF 的求解, 因此在数值实验中采用 Legendre 多项式逼近法作为计算求解误差的标准.

PSWF 的幅值归一化时域波形和特征值的求解误差分别可定义为:

$$E_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\psi_{m,\text{general}}^c(x_i) - \varphi_m^c(x_i)}{\varphi_m^c(x_i)} \right|, \quad (8)$$

$$E_2 = \left| \frac{\chi_{m,\text{general}}^c - \xi_m^c}{\xi_m^c} \right|, \quad (9)$$

其中, $\varphi_m^c(x)$ 和 ξ_m^c 分别为 Legendre 多项式逼近法^[11] 求解的 PSWF 及其微分算子特征值, 二者是在相同采样率下得到的, N 为采样点数量, $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 为各采样时刻.

通过对引言中基于无线电的 UWB 系统设计^[5] 所需时间带宽积 $c = 100\pi$ 的 PSWF 信号进行数值实验表明: 以采样点数量 $N = 1001$ 时 Legendre 多项式逼近法^[11] 的计算结果为参照, 当采样点数量 $N = 2001$ 时, 相对误差为 7.2667×10^{-38} , 当采样点数量 $N = 4001$ 时, 相对误差为 9.8942×10^{-38} ; 因此, 采样点数量 $N = 1001$ 时, Legendre 多项式逼近法^[11] 的计算结果可以满足实验要求. 本文计算 PSWF 的幅值归一化时域波形和特征值的求解误差的采样点数量为 1001.

图 1 和 2 分别给出了 $c = 4\pi, 8\pi, 10\pi, 11\pi, 20\pi, 40\pi, 60\pi, 80\pi, 100\pi, 101\pi$ 时, 由 $\psi_{m,\text{hermite}}^{c,5}(x)$ ^[12] 和 $\psi_{m,\text{legendre}}^c(x)$ ^[21] 得到的 PSWF 相比于 Legendre 多项式逼近法^[11] 的幅值归一化时域波形求解误差

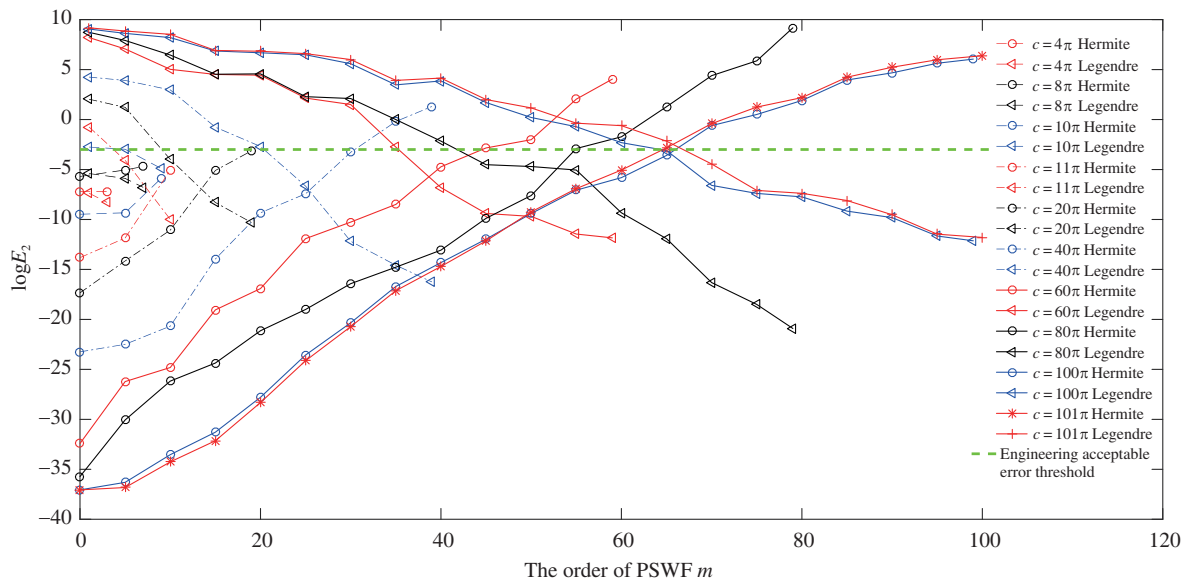


图 2 (网络版彩图) PSWF 微分算子特征值的求解误差 $\log E_2$
 Figure 2 (Color online) Solution errors of eigenvalues of differential operators of PSWF $\log E_2$

表 1 图 1 中出现交叉点时所对应的横坐标值

Table 1 The values of the abscissas corresponding to the intersections in Figure 1

c (rad-s)	11π	20π	40π	60π	80π	100π	101π
The values of the abscissas	7.40	13.75	26.41	40.08	53.33	66.06	66.92

E_1 , 由 $\chi_{m,hermite}^{c,14}$, $\chi_{m,hermite}^{c,6}$ [12] 和 $\chi_{m,legendre}^c$ [21] 得到的 PSWF 微分算子特征值相比于 Legendre 多项式逼近法 [11] 的特征值求解误差 E_2 . 为更好地展现误差变化趋势, 误差值 E_1 和 E_2 已取对数.

由图 1 可知: (1) 当时间带宽积一定时, 随着 PSWF 阶数的增加, 基于 Hermite 函数的显式渐近表达式的求解误差呈上升趋势, 而基于 Legendre 多项式的显式渐近表达式的求解误差呈下降趋势, 这与 2.3 小节求解误差分析结果相一致.

(2) 当 $c > 10\pi$ 以后, 时间带宽积相同的两条误差曲线会出现交叉点, 在交叉点之前, 基于 Hermite 函数的显式渐近表达式的求解误差较小, 在交叉点之后, 基于 Legendre 多项式的显式渐近表达式的求解误差较小. 因此, 式 (6) 中参数 c_1 应取 10π . 有意思的是, 研究发现 Toeplitz 矩阵数值法中的 ParrB 法 [17], 当 $c \leq 10\pi$ 时, 所得信号性能较好, 但当 $c > 10\pi$ 以后, 性能急剧恶化.

(3) 当 $c > 10\pi$ 以后, 随着时间带宽积的增大, 出现交叉点时所对应的 PSWF 阶数也在增大, 且能够看出在交叉点处 PSWF 阶数与时间带宽积的关系呈现出一定的规律. 为了明确在交叉点处 PSWF 阶数与时间带宽积的关系具体呈现何种规律, 表 1 给出了在 $c = 11\pi, 20\pi, 40\pi, 60\pi, 80\pi, 100\pi, 101\pi$ 的条件下, 图 1 中出现交叉点时所对应的横坐标值.

由表 1 可知, 各交叉点所对应的横坐标值分别为 7.40, 13.75, 26.41, 40.08, 53.33, 66.06, 66.92. 通过数据统计发现, 随着时间带宽积 c 的增大, 这些横坐标值也在成比例的增大. 进一步计算发现, 二者之间的正比例系数近似为 $2/(3\pi)$. 由于 PSWF 阶数 m 只能取整数, 因此, 式 (6) 中的参数 m_1 应取 $\lfloor 2c/(3\pi) \rfloor$.

(4) 当 $c > 10\pi$ 以后, 随着时间带宽积的增大, 出现交叉点时所对应的幅值归一化时域波形求

表 2 图 2 中出现交叉点时所对应的横坐标值

Table 2 The values of the abscissas corresponding to the intersections in Figure 2

c (rad·s)	11π	20π	40π	60π	80π	100π	101π
The values of the abscissas	7.32	13.17	26.02	39.54	53.31	65.98	66.15

解误差也在逐渐增大; 由于工程实践中对 PSWF 的求解误差通常有一定的要求, 即 E_1 应当小于等于某误差阈值 E_0 , 因此, 为保证所有阶数的 PSWF 始终能够满足误差要求, 式 (6) 应当补充条件 $E_1|_{m=\lfloor 2c/(3\pi) \rfloor} \leq E_0$.

由于不同的实践场景对求解误差的要求不同, 因此 E_0 的设定值也应当随之调整. 例如, 在 $E_0 = 10^{-3}$ 的条件下 (10^{-3} 量级是工程实践中通常可接受的误差阈值), 时间带宽积 $c \leq 100\pi$ 才能够保证所有阶数 PSWF 的计算结果始终满足误差要求; 若取 $c = 101\pi$, 则所有阶数的 PSWF 中, 第 65, 66, 67 阶 PSWF 无法满足误差要求.

同样, 由图 2 可知: (1) 当时间带宽积一定时, 随着 PSWF 阶数的增加, 两种表达式求解误差的变化趋势与图 1 是一致的.

(2) 同样是当 $c > 10\pi$ 以后, 时间带宽积相同的两条误差曲线会出现交叉点, 且在交叉点前后, 两种表达式求解误差的大小关系与图 1 也是一致的, 因此, 式 (7) 中参数 c_2 也应该是 10π .

(3) 当 $c > 10\pi$ 以后, 与分析图 1 的方法类似, 为了明确在交叉点处 PSWF 微分算子特征值的阶数与时间带宽积的关系具体呈现何种规律, 表 2 给出了在 $c = 11\pi, 20\pi, 40\pi, 60\pi, 80\pi, 100\pi, 101\pi$ 的条件下, 图 2 中出现交叉点时所对应的横坐标值.

由表 2 可知, 各交叉点所对应的横坐标值分别为 7.32, 13.17, 26.02, 39.54, 53.31, 65.98, 66.15. 对比表 1 发现, 在时间带宽积相同时, 它们所对应的横坐标值虽然不是完全一致的, 但相差细微. 表 2 中的横坐标值与时间带宽积 c 之间也呈现近似的正比例关系, 正比例系数同样可近似为 $2/(3\pi)$. 考虑到 PSWF 微分算子特征值的阶数也只能取整数, 因此, 式 (7) 中的参数 m_2 应取 $\lfloor 2c/(3\pi) \rfloor$.

(4) 当 $c > 10\pi$ 以后, 随着时间带宽积的增大, 出现交叉点时所对应的特征值求解误差也在逐渐增大; 参照分析图 1 时所得结论, 为保证所有阶数的 PSWF 微分算子特征值始终能够满足误差要求, 式 (7) 也应当补充条件 $E_2|_{m=\lfloor 2c/(3\pi) \rfloor} \leq E_0$, 其中, E_0 为误差阈值.

综上所述, 可以给出一种大时间带宽积 PSWF 及其微分算子特征值的显式渐近表达式, 以确保所有阶数的 PSWF 及其微分算子特征值的计算结果可以始终满足误差要求.

$$\psi_{m,\text{general}}^c(x) = \begin{cases} \psi_{m,\text{hermite}}^{c,5}(x)^{[12]}, & (c > 10\pi, 0 \leq m \leq \lfloor 2c/(3\pi) \rfloor, E_1|_{m=\lfloor 2c/(3\pi) \rfloor} \leq E_0), \\ \psi_{m,\text{legendre}}^c(x)^{[21]}, & (c > 10\pi, m > \lfloor 2c/(3\pi) \rfloor, E_1|_{m=\lfloor 2c/(3\pi) \rfloor} \leq E_0), \end{cases} \quad (10)$$

$$\chi_{m,\text{general}}^c = \begin{cases} \chi_{m,\text{hermite}}^{c,14} [12], & (c > 10\pi, m = 0, E_2|_{m=\lfloor 2c/(3\pi) \rfloor} \leq E_0), \\ \chi_{m,\text{hermite}}^{c,6} [12], & (c > 10\pi, 0 < m \leq \lfloor 2c/(3\pi) \rfloor, E_2|_{m=\lfloor 2c/(3\pi) \rfloor} \leq E_0), \\ \chi_{m,\text{legendre}}^c [21], & (c > 10\pi, m > \lfloor 2c/(3\pi) \rfloor, E_2|_{m=\lfloor 2c/(3\pi) \rfloor} \leq E_0), \end{cases} \quad (11)$$

式 (10) 和 (11) 即为本文提出的一种大时间带宽积 PSWF 及其微分算子特征值的显式渐近表达式.

需要强调的是, 式 (10) 和 (11) 分别应当在满足 $E_1|_{m=\lfloor 2c/(3\pi) \rfloor} \leq E_0$ 和 $E_2|_{m=\lfloor 2c/(3\pi) \rfloor} \leq E_0$ 的情况下使用, 因为只有这样才能保证所有阶数的 PSWF 及其微分算子特征值的计算结果始终满足误差要求.

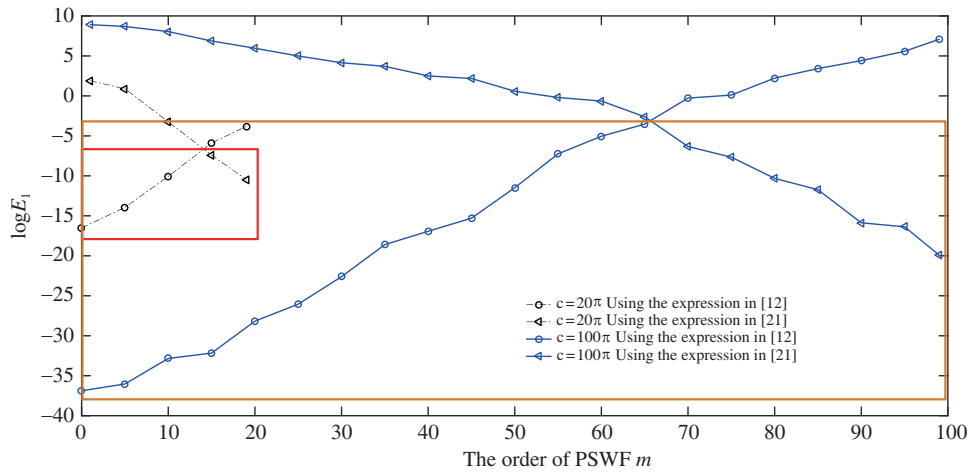


图 3 (网络版彩图) PSWF 的求解误差 (红色框线和黄色框线内分别为 $c = 20\pi$ 和 $c = 100\pi$ 时采用本文表达式所得信号的求解误差)

Figure 3 (Color online) The solution errors of PSWF

表 3 $c = 20\pi$ 时 PSWF 之间互相关值的分布范围

Table 3 The distribution range of the cross-correlation values between PSWFs when $c = 20\pi$

Method	Order	The 0th~13th PSWF	The 14th~19th PSWF
This paper		$2.56 \times 10^{-32} \sim 7.44 \times 10^{-15}$	$5.14 \times 10^{-9} \sim 8.08 \times 10^{-3}$
Ref. [12]	The 0th~13th PSWF	$2.56 \times 10^{-32} \sim 7.44 \times 10^{-15}$	$1.39 \times 10^{-3} \sim 4.62 \times 10^{+2}$
Ref. [21]		$6.35 \times 10^{-2} \sim 2.83 \times 10^{+2}$	$3.76 \times 10^{-2} \sim 4.90 \times 10^{+1}$
This paper			$1.74 \times 10^{-34} \sim 9.29 \times 10^{-19}$
Ref. [12]	The 14th~19th PSWF	Symmetry	$7.52 \times 10^{-2} \sim 5.07 \times 10^{+2}$
Ref. [21]			$1.74 \times 10^{-34} \sim 9.29 \times 10^{-19}$

4 性能对比分析

本节将给出 $c = 20\pi$ 和 $c = 100\pi$ 时, 由本文提出的表达式得到的 PSWF 信号在求解误差、正交性与能量聚集性等方面, 与文献 [12, 21] 的对比分析结果。

为了说明本文提出的表达式可以使得各阶 PSWF 的计算结果始终满足误差要求, 图 3 给出了 $c = 20\pi$ 和 $c = 100\pi$ 时, PSWF 的求解误差的数值实验对比结果。

由图 3 可知: 当 $c = 20\pi$, $E_0 = 10^{-7}$ 时, 若仅采用文献 [12] 中的表达式实施计算, 则第 14~19 阶 PSWF 不能满足误差要求; 若仅采用文献 [21] 中的表达式实施计算, 则第 0~13 阶 PSWF 不能满足误差要求; 若采用本文提出的表达式实施计算, 则各阶 PSWF 的计算结果可以始终满足误差要求。

类似地, 当 $c = 100\pi$, $E_0 = 10^{-3}$ 时, 若仅采用文献 [12] 中的表达式实施计算, 则第 67~99 阶 PSWF 不能满足误差要求; 若仅采用文献 [21] 中的表达式实施计算, 则第 0~66 阶 PSWF 不能满足误差要求; 由本文提出的表达式得到的各阶 PSWF 始终满足误差要求。

为了验证由本文提出的表达式得到的 PSWF 信号正交性的优劣, 考虑到信号正交性的优劣可以由信号间的互相关值来表征, 表 3 和 4 分别给出了 $c = 20\pi$ 和 $c = 100\pi$ 时, 以矩阵形式表征的不同阶 PSWF 之间互相关值的数值实验对比结果。

表 4 $c = 100\pi$ 时 PSWF 之间互相关值的分布范围

Table 4 The distribution range of the cross-correlation values between PSWFs when $c = 100\pi$

Method	Order	The 0th~66th PSWF	The 67th~99th PSWF
This paper		$1.07 \times 10^{-30} \sim 7.66 \times 10^{-14}$	$7.51 \times 10^{-7} \sim 2.33 \times 10^{-2}$
Ref. [12]	The 0th~66th PSWF	$1.07 \times 10^{-30} \sim 7.66 \times 10^{-14}$	$3.54 \times 10^{-2} \sim 9.85 \times 10^{+1}$
Ref. [21]		$5.43 \times 10^{-2} \sim 1.24 \times 10^{+3}$	$6.30 \times 10^{-1} \sim 7.12 \times 10^{+2}$
This paper			$4.35 \times 10^{-33} \sim 5.48 \times 10^{-17}$
Ref. [12]	The 67th~99th PSWF	Symmetry	$6.94 \times 10^{-2} \sim 3.07 \times 10^{+2}$
Ref. [21]			$4.35 \times 10^{-33} \sim 5.48 \times 10^{-17}$

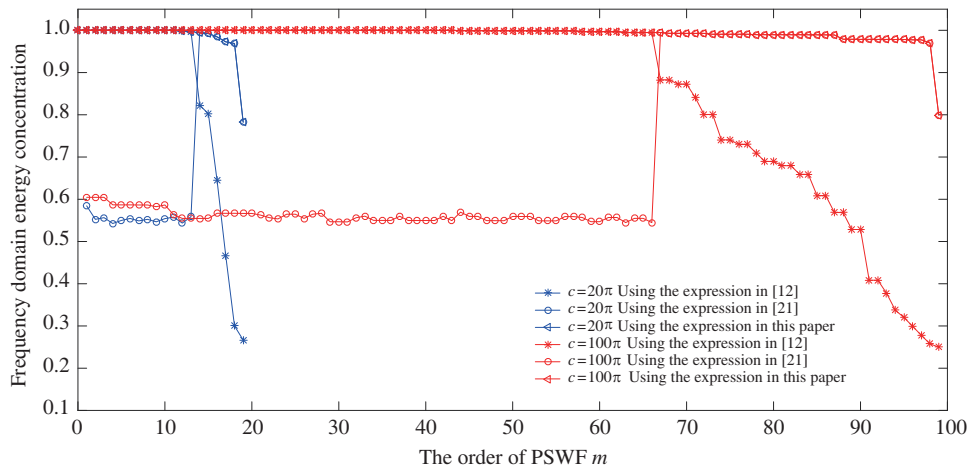


图 4 (网络版彩图) PSWF 的频域能量聚集度

Figure 4 (Color online) The frequency domain energy concentration of PSWF

由表 3 和 4 可知: 当 $c = 20\pi$ 时, 采用本文提出的表达式实施计算, PSWF 信号之间的最大互相关值为 8.08×10^{-3} , 而采用文献 [12,21] 的表达式实施计算, PSWF 信号之间的最大互相关值分别已经达到 5.07×10^2 和 2.83×10^2 ; 当 $c = 100\pi$ 时, 采用本文提出的表达式实施计算, PSWF 信号之间的最大互相关值为 2.33×10^{-2} , 而采用文献 [12,21] 的表达式实施计算, PSWF 信号之间的最大互相关值分别已经达到 3.07×10^2 和 1.24×10^3 . 由此可以看出, 在信号的正交性方面, 本文提出的表达式与文献 [12,21] 的表达式相比具有显著的优势.

为了验证由本文提出的表达式得到的 PSWF 信号能量聚集性的优劣, 考虑到信号能量聚集性的优劣可以由频域能量聚集度来表征, 图 4 给出了 $c = 20\pi$ 和 $c = 100\pi$ 时, PSWF 的频域能量聚集度的数值实验对比结果.

由图 4 可知: 采用本文提出的表达式实施计算, 当 $c = 20\pi$ 时, 第 0~17 阶 PSWF, 频域能量聚集度一直保持在 97% 以上, 当 $c = 100\pi$ 时, 第 0~97 阶 PSWF, 频域能量聚集度仍能一直保持在 97% 以上. 采用文献 [12] 的表达式实施计算, 当 $c = 20\pi$ 时, 频域能量聚集度保持在 97% 以上的只有第 0~13 阶 PSWF, 当 $c = 100\pi$ 时, 频域能量聚集度保持在 97% 以上的只有第 0~66 阶 PSWF. 采用文献 [21] 的表达式实施计算, 当 $c = 20\pi$ 时, 频域能量聚集度保持在 97% 以上的只有第 14~17 阶 PSWF, 当 $c = 100\pi$ 时, 频域能量聚集度保持在 97% 以上的只有第 67~97 阶 PSWF. 由此可以看出, 在信号的能量聚集性方面, 本文提出的表达式与文献 [12,21] 的表达式相比同样具有显著的优势.

5 结束语

一方面,当前求解大时间带宽积 PSWF 面临诸多困难,如:多项式逼近法中,基于 Hermite 函数和 Legendre 多项式的显式渐近表达式没有明确的适用条件,无法以一个统一的表达式实现对大时间带宽积 PSWF 的求解;重构算法和 Toeplitz 矩阵数值法不能求解大时间带宽积 PSWF. 另一方面,采用大时间带宽积信号能够为通信系统带来诸多优势.

本文基于上述两方面的考虑,对基于 Hermite 函数和 Legendre 多项式的显式渐近表达式的求解误差进行了理论分析和数值实验分析,提出了一种大时间带宽积 PSWF 及其微分算子特征值的显式渐近表达式,明确了大时间带宽积 ($c > 10\pi$) PSWF 及其微分算子特征值基于 Hermite 函数和 Legendre 多项式的精确高效求解的适用条件和计算方法. 这一方法为基于 PSWF 的通信系统中大时间带宽积信号的实时产生提供了理论依据.

参考文献

- 1 Slepian D, Pollak H O. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty-I. *Bell Syst Technical J*, 1961, 40: 43–63
- 2 Zhao Z Y, Wang H X, Li H L, et al. Designing method of orthogonal pulse in time domain based on prolate spheroidal wave functions for nonsinusoidal wave communication. *J Electron Inform Technol*, 2009, 31: 2912–2916 [赵志勇, 王红星, 李洪烈, 等. 非正弦波通信时域正交椭圆球面波脉冲组设计方法. *电子与信息学报*, 2009, 31: 2912–2916]
- 3 Gosse L. Compressed sensing with preconditioning for sparse recovery with subsampled matrices of Slepian prolate functions. *Ann Univ Ferrara*, 2013, 59: 81–116
- 4 de Sanctis M, Cianca E, Rossi T, et al. Waveform design solutions for EHF broadband satellite communications. *IEEE Commun Mag*, 2015, 53: 18–23
- 5 Majhi S, Richardson P. Capacity analysis of orthogonal pulse-based TH-UWB signals. *Wirel Pers Commun*, 2012, 64: 255–272
- 6 Djordjevic I B. On the irregular nonbinary QC-LDPC-coded hybrid multidimensional OSCD-modulation enabling beyond 100 Tb/s optical transport. *J Lightwave Technol*, 2013, 31: 2669–2675
- 7 Wang H X, Zhao Z Y, Liu X G, et al. China Patent, ZL200810159238.3, 2011-02-02 [王红星, 赵志勇, 刘锡国, 等. 中国专利, ZL200810159238.3, 2011-02-02]
- 8 Wang H X, Chen Z N, Liu C H, et al. The design of orthogonal prolate spheroidal wave function pulse waveform based on Karhunen-Loeve transform. *J Electron Inform Technol*, 2012, 34: 2415–2420 [王红星, 陈昭男, 刘传辉, 等. 基于 Karhunen-Loeve 变换的正交椭圆球面波脉冲波形设计. *电子与信息学报*, 2012, 34: 2415–2420]
- 9 Shu G C, Wang H X. Nonsinusoidal demodulation method based on prolate spheroidal wave functions and its performance analysis. *J Circ Syst*, 2011, 16: 90–93 [舒根春, 王红星. 基于椭圆球面波的非正弦解调方法及性能分析. *电路与系统学报*, 2011, 16: 90–93]
- 10 Bouwkamp C J. On spheroidal wave functions of order zero. *J Math Phys*, 1947, 26: 79–92
- 11 Hodge D B. Eigenvalues and eigenfunctions of the spheroidal wave equation. *J Math Phys*, 1970, 11: 2308–2312
- 12 Xiao H, Rokhlin V. High-frequency asymptotic expansions for certain prolate spheroidal wave functions. *J Fourier Anal Appl*, 2003, 9: 575–596
- 13 Khare K, George N. Sampling theory approach to prolate spheroidal wavefunctions. *J Phys A-Math Gen*, 2003, 36: 10011–10021
- 14 Khare K. Bandpass sampling and bandpass analogues of prolate spheroidal functions. *Signal Process*, 2006, 86: 1550–1558
- 15 Liu C H, Wang H X, Zhang L, et al. Fast convergent algorithm of reconstructing bandpass prolate spheroidal wave function. *J Jilin Univ (Eng Technol Edition)*, 2013, 43: 1091–1097 [刘传辉, 王红星, 张磊, 等. 快收敛带通椭圆球面波函数重构求解算法. *吉林大学学报(工学版)*, 2013, 43: 1091–1097]
- 16 Mu J, Wang H X. A reconstructing method of PSWF pulse waveform using Walsh functions. *J China Acad of Electron Inform Technol*, 2012, 7: 623–626 [牟健, 王红星. 基于 Walsh 函数系的椭圆球面波脉冲波形重构方法. *中国电子科*

- 学研究院学报, 2012, 7: 623–626]
- 17 Parr B, Cho B, Wallace K, et al. A novel ultra-wideband pulse design algorithm. IEEE Commun Lett, 2003, 7: 219–221
 - 18 Shu G C, Wang H X, Zhao Z Y, et al. Numerical solution of prolate spheroidal wave functions based on bandpass sampling. J Circ Syst, 2011, 16: 132–136 [舒根春, 王红星, 赵志勇, 等. 基于带通采样的椭圆球面波函数数值解法. 电路与系统学报, 2011, 16: 132–136]
 - 19 Zhong P L, Wang H X, Zhao Z Y. Resolution and simulation of differential system for prolate spherical wave functions. J Jilin Univ (Eng Technol Edition), 2013, 43: 1675–1679 [钟佩琳, 王红星, 赵志勇, 等. 椭圆球面波函数微分系统求解及仿真. 吉林大学学报 (工学版), 2013, 43: 1675–1679]
 - 20 Liu C H, Wang H X, Zhang L, et al. Design of PSWF pulse generator based on difference quantitation. J Appl Sci, 2013, 31: 375–380 [刘传辉, 王红星, 张磊, 等. 差值量化椭圆球面波脉冲产生系统设计. 应用科学学报, 2013, 31: 375–380]
 - 21 Rokhlin V, Xiao H. Approximate formulae for certain prolate spheroidal wave functions valid for large values of both order and band-limit. Appl Comput Harmonic Anal, 2007, 22: 105–123

附录 A 显式渐近表达式的具体形式 [12, 21]

$$\psi_{m,\text{hermite}}^{c,5}(x) = \sum_{i=0}^5 \alpha_i^5 \phi_{m+4i}^{\sqrt{c}}(x) + \sum_{j=1}^{\min\{[m/4], 5\}} \beta_j^5 \phi_{m-4j}^{\sqrt{c}}(x). \quad (\text{A1})$$

式 (A1)^[12] 中, PSWF 阶数 $m \geq 0$, c 为时间带宽积, $x \in [-1, 1]$, $\phi_n^a(x)$ 为 Hermite 函数; 式中其他参数见式 (A2)~(A12):

$$\begin{aligned} \alpha_0^5 = & 1 - \frac{12 + 22m + 23m^2 + 2m^3 + m^4}{2^{10}c^2} \\ & - \frac{60 + 158m + 115m^2 + 80m^3 + 5m^4 + 2m^5}{2^{11}c^3} \\ & - \frac{328032 + 891024m + 1127140m^2 + 476156m^3}{2^{22}c^4} \\ & - \frac{247887m^4 + 11768m^5 + 3918m^6 - 4m^7 - m^8}{2^{22}c^4} \\ & - \frac{993120 + 3161552m + 3698884m^2 + 3044356m^3}{2^{22}c^5} \\ & - \frac{874439m^4 + 363350m^5 + 13566m^6 + 3864m^7 - 9m^8 - 2m^9}{2^{22}c^5}, \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

$$\begin{aligned} \alpha_1^5 = & -\frac{1}{2^5c} \left(\sqrt{\frac{(m+4)!}{m!}} \right) \left(1 + \frac{5+2m}{4c} + \frac{4808 + 3470m + 669m^2 - 10m^3 - m^4}{2^{11}c^2} \right. \\ & + \frac{46840 + 46762m + 16499m^2 + 1920m^3 - 71m^4 - 6m^5}{2^{13}c^3} \\ & + \frac{212454624 + 263405280m + 128877012m^2 + 29276108m^3}{3 \times 2^{22}c^4} \\ & \left. + \frac{2118049m^4 - 151072m^5 - 1030m^6 + 20m^7 + m^8}{3 \times 2^{22}c^4} \right), \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

$$\begin{aligned} \alpha_2^5 = & \frac{1}{2^{11}c^2} \left(\sqrt{\frac{(m+8)!}{m!}} \right) \left(1 + \frac{7+2m}{2c} + \frac{37308 + 19698m + 2833m^2 - 18m^3 - m^4}{3 \times 2^{10}c^2} \right. \\ & \left. + \frac{70716 + 52218m + 13869m^2 + 1291m^3 - 21m^4 - m^5}{3 \times 2^9c^3} \right), \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

$$\alpha_3^5 = \frac{-1}{3 \times 2^{16}c^3} \left(\sqrt{\frac{(m+12)!}{m!}} \right) \left(1 + \frac{3(9+2m)}{4c} + \frac{154128 + 64022m + 7237m^2 - 26m^3 - m^4}{2^{12}c^2} \right), \quad (\text{A5})$$

$$\alpha_4^5 = \frac{1}{3 \times 2^{23}c^4} \left(\sqrt{\frac{(m+16)!}{m!}} \right) \left(1 + \frac{11+2m}{c} \right), \quad (\text{A6})$$

$$\alpha_5^5 = -\frac{1}{15 \times 2^{28} c^5} \left(\sqrt{\frac{(m+20)!}{m!}} \right), \tag{A7}$$

$$\begin{aligned} \beta_1^5 = & \frac{1}{2^5 c} \left(\sqrt{\frac{m!}{(m-4)!}} \right) \left(1 - \frac{3-2m}{4c} + \frac{2016 - 2106m + 693m^2 + 6m^3 - m^4}{2^{11} c^2} \right. \\ & - \frac{14592 - 19778m + 10373m^2 - 2144m^3 - 41m^4 + 6m^5}{2^{13} c^3} \\ & + \frac{50908320 - 84318336m + 55101860m^2 - 19514436m^3}{3 \times 2^{22} c^4} \\ & \left. + \frac{2707329m^4 + 84528m^5 - 11142m^6 - 12m^7 + m^8}{3 \times 2^{22} c^4} \right), \end{aligned} \tag{A8}$$

$$\beta_2^5 = \frac{1}{2^{11} c^2} \left(\sqrt{\frac{m!}{(m-8)!}} \right) \left(1 - \frac{5-2m}{2c} + \frac{20460 - 13982m + 2881m^2 + 14m^3 - m^4}{3 \times 2^{10} c^2} \right. \\ \left. - \frac{31056 - 28432m + 9880m^2 - 1365m^3 - 16m^4 + m^5}{3 \times 2^9 c^3} \right), \tag{A9}$$

$$\beta_3^5 = \frac{1}{3 \times 2^{16} c^3} \left(\sqrt{\frac{m!}{(m-12)!}} \right) \left(1 - \frac{3(7-2m)}{4c} + \frac{97368 - 49474m + 7309m^2 + 22m^3 - m^4}{2^{12} c^2} \right), \tag{A10}$$

$$\beta_4^5 = \frac{1}{3 \times 2^{23} c^4} \left(\sqrt{\frac{m!}{(m-16)!}} \right) \left(1 - \frac{9-2m}{c} \right), \tag{A11}$$

$$\beta_5^5 = \frac{1}{15 \times 2^{28} c^5} \left(\sqrt{\frac{m!}{(m-20)!}} \right). \tag{A12}$$

$$\begin{aligned} \psi_{m,\text{legendre}}^c(x) = & \left(\frac{c^{14}}{1352914698240m^7} \right) \bar{P}_{m-14}(x) \\ & + \left(\frac{c^{12}}{671088640m^7} + \frac{c^{12}}{12079595520m^6} \right) \bar{P}_{m-12}(x) \\ & + \left(\frac{c^{10}(153600 - c^4)}{193273528320m^7} + \frac{5c^{10}}{50331648m^6} + \frac{c^{10}}{125829120m^5} \right) \bar{P}_{m-10}(x) \\ & + \left(\frac{c^8(262400 - 11c^4)}{2013265920m^7} + \frac{c^8(55680 - c^4)}{2013265920m^6} \right) \bar{P}_{m-8}(x) \\ & + \left(\frac{c^8}{196608m^5} + \frac{1572864m^4}{1572864m^4} \right) \bar{P}_{m-6}(x) \\ & + \left(\frac{c^6(417955840 + 983040c^2 - 46080c^4 + c^8)}{64424509440m^7} \right. \\ & \left. + \frac{c^6(99072 - 13c^4)}{50331648m^6} + \frac{c^6(15616 - c^4)}{25165824m^5} + \frac{3c^6}{16384m^4} + \frac{c^6}{24576m^3} \right) \bar{P}_{m-4}(x) \\ & + \left(\frac{c^4(19169280 + 589824c^2 + 8064c^4 + c^8)}{201326592m^7} \right. \\ & \left. + \frac{c^4(27721728 + 393216c^2 - 10240c^4 + c^8)}{805306368m^6} \right. \\ & \left. + \frac{c^4(1920 - c^4)}{131072m^5} + \frac{c^4(2880 - c^4)}{393216m^4} + \frac{c^4}{256m^3} + \frac{c^4}{512m^2} \right) \bar{P}_{m-2}(x) \\ & + \left(\frac{c^2(3397386240 + 2415919104c^2)}{38654705664m^7} \right. \\ & \left. + \frac{c^2(21528576c^4 - 1769472c^6 - 43008c^8 - c^{12})}{38654705664m^7} \right. \\ & \left. + \frac{c^2(1523712 + 491520c^2 + 29568c^4 + c^8)}{25165824m^6} \right. \\ & \left. + \frac{c^2(540672 + 98304c^2 - 4992c^4 + c^8)}{12582912m^5} \right. \\ & \left. + \frac{c^2(512 - c^4)}{16384m^4} + \frac{c^2(256 - c^4)}{8192m^3} + \frac{c^2}{32m^2} + \frac{c^2}{16m} \right) \bar{P}_{m-2}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\begin{aligned} & 1 + \frac{31948800c^4 + 589824c^6 + 2688c^8 + c^{12}}{201326592m^7} \\ & - \frac{46301184c^4 + 589824c^6 - 1152c^8 + c^{12}}{603979776m^6} \\ & + \frac{3840c^4 - c^8}{131072m^5} - \frac{4352c^4 - c^8}{262144m^4} + \frac{c^4}{256m^3} - \frac{c^4}{256m^2} \end{aligned} \right) \bar{P}_m(x) \\
 & + \left(\begin{aligned} & \frac{c^2(-94296342528 - 11475615744c^2)}{38654705664m^7} \\ & + \frac{c^2(53968896c^4 + 1769472c^6 - 12288c^8 + c^{12})}{38654705664m^7} \\ & + \frac{c^2(28164096 + 1474560c^2 - 66432c^4 + 11c^8)}{25165824m^6} \\ & - \frac{c^2(6832128 + 98304c^2 - 17280c^4 + c^8)}{12582912m^5} \\ & - \frac{c^2(-4608 + 7c^4)}{16384m^4} + \frac{c^2(-1280 + c^4)}{8192m^3} + \frac{3c^2}{32m^2} - \frac{c^2}{16m} \end{aligned} \right) \bar{P}_{m+2}(x) \\
 & + \left(\begin{aligned} & -\frac{c^4(297271296 + 2359296c^2 - 81152c^4 + 5c^8)}{402653184m^7} \\ & + \frac{c^4(185008128 + 393216c^2 - 61440c^4 + c^8)}{805306368m^6} \\ & - \frac{7c^4(4224 - c^4)}{393216m^5} + \frac{c^4(9792 - c^4)}{393216m^4} - \frac{c^4}{128m^3} + \frac{c^4}{512m^2} \end{aligned} \right) \bar{P}_{m+4}(x) \\
 & + \left(\begin{aligned} & -\frac{c^6(2053734400 + 983040c^2 - 184320c^4 + c^8)}{64424509440m^7} \\ & + \frac{c^6(367872 - 23c^4)}{50331648m^6} - \frac{c^6(40192 - c^4)}{25165824m^5} + \frac{5c^6}{16384m^4} - \frac{c^6}{24576m^3} \end{aligned} \right) \bar{P}_{m+6}(x) \\
 & + \left(\begin{aligned} & \frac{c^8(-775680 + 17c^4)}{2013265920m^7} + \frac{c^8(119680 - c^4)}{2013265920m^6} \\ & - \frac{c^8}{131072m^5} + \frac{c^8}{1572864m^4} \end{aligned} \right) \bar{P}_{m+8}(x) \\
 & + \left(\frac{c^{10}(-291840 + c^4)}{193273528320m^7} + \frac{7c^{10}}{50331648m^6} - \frac{c^{10}}{125829120m^5} \right) \bar{P}_{m+10}(x) \\
 & + \left(\frac{-c^{12}}{503316480m^7} + \frac{c^{12}}{12079595520m^6} \right) \bar{P}_{m+12}(x) \\
 & + \left(\frac{-c^{14}}{1352914698240m^7} \right) \bar{P}_{m+14}(x) + \sqrt{m}O\left(\frac{c^{16}}{m^8}\right). \tag{A13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{m,\text{hermite}}^{c,14} = & c - \frac{3}{4} - \frac{3}{16c} - \frac{15}{64c^2} - \frac{453}{1024c^3} - \frac{4425}{2^{12}c^4} - \frac{104613}{2^{15}c^5} - \frac{1442595}{2^{17}c^6} \\
 & - \frac{181431165}{2^{22}c^7} - \frac{3200304885}{2^{24}c^8} - \frac{125185972551}{2^{27}c^9} \\
 & - \frac{2689647087045}{2^{29}c^{10}} - \frac{251987915369193}{2^{33}c^{11}} - \frac{6392700476893245}{2^{35}c^{12}} \\
 & - \frac{349366400286979629}{2^{38}c^{13}} - \frac{40950465047128293315}{2^{42}c^{14}}. \tag{A14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{m,\text{hermite}}^{c,6} = & c(1 + 2m) - \frac{3 + 2m + 2m^2}{4} - \frac{3 + 7m + 3m^2 + 2m^3}{2^4c} \\
 & - \frac{15 + 35m + 40m^2 + 10m^3 + 5m^4}{2^6c^2} \\
 & - \frac{453 + 1321m + 1278m^2 + 962m^3 + 165m^4 + 66m^5}{2^{10}c^3} \\
 & - \frac{4425 + 13349m + 18478m^2 + 10510m^3}{2^{12}c^4} \\
 & - \frac{5885m^4 + 756m^5 + 252m^6}{2^{12}c^4} \\
 & - \frac{104613 + 355301m + 469780m^2 + 419424m^3}{2^{15}c^5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{163045m^4 + 72596m^5 + 7378m^6 + 2108m^7}{2^{15}c^5} \\
& - \frac{1442595 + 5046979m + 8070552m^2 + 6440672m^3}{2^{17}c^6} \\
& - \frac{4213538m^4 + 1218126m^5 + 449848m^6 + 37548m^7 + 9387m^8}{2^{17}c^6}. \tag{A15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{m,\text{legendre}}^c = & m(m+1) + \frac{c^2}{2} + \frac{c^2(4+c^2)}{32m^2} - \frac{c^2(4+c^2)}{32m^3} + \frac{c^2(28+13c^2)}{128m^4} \\
& - \frac{c^2(20+11c^2)}{64m^5} + \frac{c^2(3904+3936c^2+160c^4+5c^6)}{8192m^6} \\
& - \frac{c^2(5824+8416c^2+480c^4+15c^6)}{8192m^7} + c^2 O\left(\frac{c^8}{m^8}\right). \tag{A16}
\end{aligned}$$

式 (A13)^[21] 中, PSWF 阶数 $m > 0$, c 为时间带宽积, $x \in [-1, 1]$, $\bar{P}_n(x)$ 表示归一化 Legendre 多项式; 式 (A14)^[12] 中, PSWF 阶数 $m = 0$, c 为时间带宽积; 式 (A15)^[12] 和 (A16)^[21] 中, PSWF 的阶数 $m > 0$, c 为时间带宽积.

An explicit asymptotic expression of large time-bandwidth product PSWF

Lei SAI^{1,2}, Hongxing WANG^{1,2*}, Faping LU^{1,2} & Chuanhui LIU^{1,2}

1. *Teaching and Research Office of Aviation Communication, Naval Aviation University, Yantai 264001, China;*
 2. *Key Laboratory on Signal & Information Processing of Shandong Province, Naval Aviation University, Yantai 264001, China*

* Corresponding author. E-mail: 13371368601@189.cn

Abstract To address the problems that currently solve large time-bandwidth product prolate spheroidal wave functions (PSWF) with no uniform expression, an explicit asymptotic expression of the large time-bandwidth product PSWF and its differential operator eigenvalues is proposed. The expression is proposed using the theoretical and numerical analyses of the solution errors of the explicit asymptotic expressions based on the Hermite function and Legendre polynomial. The applicable conditions and calculation methods of the large time-bandwidth product ($c > 10\pi$) PSWF and its differential operator eigenvalues are accurately and efficiently solved using the Hermite function and Legendre polynomial. Results of the performance comparison analysis indicate that the proposed expression can ensure PSWF and its differential operator eigenvalues of all orders always meet the error requirements. Moreover, the orthogonality and energy concentration of PSWF signals have significant advantages.

Keywords PSWF, large time-bandwidth product, explicit asymptotic expressions, Hermite function, Legendre polynomial



Lei SAI was born in 1994. He received his bachelor's degree in information and communication engineering from Liaocheng University, Liaocheng, in 2017. Currently, he is pursuing his master's degree at the Naval Aviation University. His research interests include modern communication theory and application, nonsinusoidal communication, and wireless communication.



Hongxing WANG was born in 1962. He received his Ph.D. degree in information and communication engineering from Beihang University, Beijing, in 2007. Currently, he is a professor and doctoral tutor at the Naval Aviation University. He is also the director of the Key Laboratory on Signal & Information Processing of Shandong Province. His research interests include modern communication theory and application, nonsinusoidal communication, and wireless optical communication.