



一种求解双目标最小生成树的警示传播算法

王辛¹, 王晓峰^{1,2*}, 许道云², 杨德仁³

1. 北方民族大学计算机科学与工程学院, 银川 750021

2. 贵州大学计算机系, 贵阳 550025

3. 宁夏医科大学理学院, 银川 750004

* 通信作者. E-mail: xfwang@nun.edu.cn

收稿日期: 2019-01-16; 修回日期: 2019-04-19; 接受日期: 2019-08-13; 网络出版日期: 2020-10-12

国家重点研发计划 (批准号: 2017YFE0117500)、国家自然科学基金 (批准号: 61462001, 61762019, 61862051)、北方民族大学重点科研项目 (批准号: 2017KJ24, 2017KJ25)、北方民族大学重大专项 (批准号: ZDZX201901)、计算机应用技术自治区重点学科项目、自治区优势特色学科项目、2018 宁夏回族自治区重点研发计划项目 (批准号: 2018BEE03019)、宁夏高等学校一流学科建设 (电子科学与技术学科) (批准号: NXYLXK2017A07) 和宁夏自然科学基金项目 (批准号: 2019AAC03120) 资助

摘要 双目标最小生成树问题是一个 NP- 难问题, 在光缆通信、智能控制等领域有其重要的应用价值. 警示传播 (warning propagation, WP) 算法是一种基于因子图的消息传递算法, 可用于求解组合优化问题. 借助于 Boltzmann 机模型使一个无向图转换为因子图, 将求解无向图上的双目标最小生成树问题映射为求解因子图上的对应问题, 进而设计一种求解双目标最小生成树问题的警示传播算法. 选取由随机数种子产生的若干随机数构造邻接矩阵, 生成对应的无向图实例, 数值实验结果表明, 该算法优于同类算法.

关键词 双目标优化, 组合优化, 警示传播算法, 最小生成树, 因子图

1 引言

最小生成树 (minimum spanning tree, MST) 描述为加权随机图求最小代价生成树, 其在光缆通信、组合优化、超大规模集成电路设计等领域有着极高的应用价值. 目前, 针对单个目标的 MST 问题, 已有许多经典算法可对其进行快速、有效地求解, 如 Kruskal 算法、Prim 算法等^[1]. 但当 MST 的目标数量增加至两个及以上时, 该问题演化为多目标最小生成树问题 (multi-criteria MST, mc-MST), 属于多目标优化问题 (multi-objective optimization problem, MOP), 同时也是 NP- 难问题^[2], 在实际应用中, mc-MST 问题不可避免地存在.

近年来, 学者们对 mc-MST 问题做了大量研究, 并取得了诸多研究成果. 其中, Zhou 和 Gen^[2] 提出一种计数算法, 可找出部分非劣最优解. Chen 等^[3] 对 Zhou 和 Gen 的算法做出了改进, 使得算法

引用格式: 王辛, 王晓峰, 许道云, 等. 一种求解双目标最小生成树的警示传播算法. 中国科学: 信息科学, 2020, 50: 1501–1510, doi: 10.1360/N112018-00260
Wang X, Wang X F, Xu D Y, et al. A warning propagation algorithm to solve the double-objective minimum spanning tree (in Chinese). Sci Sin Inform, 2020, 50: 1501–1510, doi: 10.1360/N112018-00260

可找出几乎所有非劣最优解. Guo 等^[4]提出一种离散粒子群优化算法, 随着问题规模的扩大, 该算法能获得较为优良的 Pareto 前沿面. mc-MST 的多个目标间往往存在求解冲突, 现有算法多为求解 mc-MST 的近似解. 总体来说, 学者们的研究主要集中在如何提高 mc-MST 的求解准确度, 并未考虑如何提升求解速度等问题. 注意到, mc-MST 一点多值的特性, 与特殊结构的约束可满足问题 (constraint satisfaction problem, CSP) 有诸多相似. 因此, 可借助 CSP 问题研究 mc-MST 的求解机制.

CSP 是人工智能的重要研究领域, 同时也是一个 NP 完全问题^[5,6]. CSP 问题由 N 个变量和 M 个约束组成, 每个变量从其定义域 D 中取值, 每个约束包含从变量集合中随机挑选 k 个不同的变量, 并有一个相应的不协调集来限制这些变量的某些赋值为不可满足赋值. SAT 问题是典型的 CSP 问题, SAT 问题是计算机科学的核心问题, 也是计算机科学家和数理逻辑学者共同关注的问题. SAT 问题即给定任意合取范式 (conjunctive normal form, CNF) F , 判断是否存在一组指派使 F 的值为真. 子句长度为 k 的 SAT 问题称为 kSAT 问题, 当 $k \geq 3$ 时, kSAT 问题是著名的 NP- 完全问题. 其中研究较为成熟的是随机 3-SAT 问题. 为研究随机 3-SAT 问题, 需引入随机 3-SAT 实例产生模型 $G(n, k, p)$, 其中, n 为变元个数, k 为子句大小, p 为每个子句出现在公式中的概率^[7]. 实验研究表明, 上述模型中子句数 m 与变元数 n 的比值 $\alpha = m/n$ 是一个重要参数, 它不仅对公式的可满足性产生影响, 还对公式可满足判定的难易程度产生影响. 当 $\alpha < \alpha_d$ 时, 随机 3-SAT 实例高概率可满足; 当 $\alpha > \alpha_d$ 时, 随机 3-SAT 实例高概率不可满足. 尽管人们不知道 α_d 的确切值, 但现有研究表明 α_d 至少为 3.52^[8], 至多为 4.506^[9], 利用统计物理学的腔域方法^[10,11] 给出了可满足相变点的近似解 $\alpha_d \approx 4.267$. 现有研究表明, 3-SAT 问题还存在第二相变点 $\alpha_c \approx 3.912$, 当 $\alpha < \alpha_c$ 时, 随机 3-SAT 实例处于易解区域, 当 $\alpha_c < \alpha < \alpha_d$ 时, 随机 3-SAT 实例处于难解区域^[12,13]. 基于腔域的方法所设计的信息传播算法, 求解接近相变点的随机 3-SAT 实例时体现出惊人效果^[14,15]. 信息传播算法是目前求解随机 3-SAT 问题最为有效的方法, 如信念传播 (belief propagation, BP) 算法可有效求解 $\alpha < 3.95$ 的随机 3-SAT 实例, 调查传播 (survey propagation, SP) 算法能够求解 $\alpha < 4.26$ 的随机 3-SAT 实例^[16,17]. 警示传播 (warning propagation, WP) 算法是最基础的信息传播算法, 近年来, 人们对 WP 算法收敛性做了深入研究并取得了诸多研究成果^[18~23]. Feige 等^[17] 分析了 WP 的收敛性, 但主要受限于植入指派的随机可满足实例产生模型 $\mathbb{P}_{n,p}^{\text{plant}}$, 即给定一个指派, 以概率 p 随机选取满足指派的子句之集构成实例. 具体地讲, 在 $\mathbb{P}_{n,p}^{\text{plant}}$ 模型中取概率充分大, 其本质是最多只有一个赋值高概率满足该实例. 文献^[7] 虽证明了 WP 在 CNF 公式上的收敛性, 但只证明了 p 取值很小的那一部分实例.

基于上述研究现状, 本文主要利用改进的 WP 算法求解双目标最小生成树问题, 提高了求解速度并缩小了求解范围. 具体来说, 利用随机无向图的 Markov 性, 结合受限 Boltzmann 机和二部图的特性, 将任意无向图映射为因子图, 在因子图上利用改进的信息迭代方程执行迭代操作, 通过调整参数 α 的值, 改变迭代次数等方法, 使 WP 算法收敛, 并取收敛的点作为双目标最小生成树的节点. 实验证明, 此方法有效.

2 基本知识

2.1 双目标最小生成树

无向带权图 $G = \{V, E, W_1, W_2\}$, 其中 V 表示图中节点数目, E 表示图中边的数目, $W_i = \sum_{e \in E} \omega_e^{ie}$ 表示图中所有边 ω_e 的权重之和. 若树 T 包含了图 G 的所有顶点, 则称树 T 为图 G 的一棵生成树, 图 G 的所有生成树中, 权值最小的生成树称为图 G 的最小生成树.

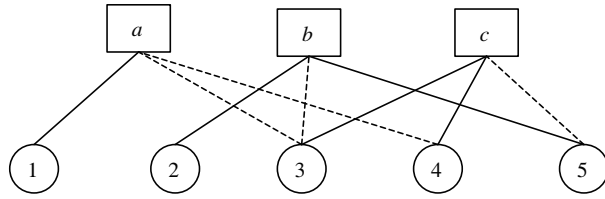


图 1 因子图实例

Figure 1 An instance of factor graph

设有一个无向连通图 $G = \{V, E\}$, 其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是一个有限集合, 代表图 G 的顶点集. $E = \{e_{1,2}, e_{1,3}, \dots, e_{i,j}\}$, 其中

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1, & v_i, v_j \in E, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

代表图 G 的边集. 无向图的每条边上存在 m 个彼此互异的权重, 可用 $w_{i,j}^k$ 表示, 实际问题中 $w_{i,j}^k$ 可表示距离、代价等可度量目标.

令

$$x = (x_{1,2}, x_{2,3}, \dots, x_{i,j}, \dots, x_{n-1,n}) x_{i,j} = \begin{cases} 1, & e_{i,j} \text{ chosen}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

表示图 G 的一棵生成树. X 为所有 x 的集合.

$$\text{mc-MST} : \begin{cases} \min f_k(x) = \omega_{i,j}^k x_{i,j}, \\ F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)), \\ \text{s.t. } x \in X, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $f_i(x)$ 为第 i 个需要优化的目标.

上述对 mc-MST 的描述及 (1) 式表明, 多个目标的最优解之间彼此互斥, 甚至互不相容. 因此找不到一个解在所有待优化目标上均取得最优值, 故我们只能求得 mc-MST 的一些近似最优解, 即所求解是某个或某些目标的近似最优值, 这些近似最优解形成的曲面被称作 Pareto 前沿面.

特别地, 有两个待优化目标的多目标最小生成树问题称双目标最小生成树问题.

2.2 因子图

设 F 是一个 CNF 公式, 公式中含有 n 个变元 $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 和 m 个子句 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$. 公式 F 可表示为一个二部图 $G = (C \cup X, E)$, 图 G 的点分为两类, 一类是变元节点, 一类是子句节点. X 表示变元节点构成的集合, C 表示子句节点构成的集合. 图 G 的边亦可分为两类, 实边与虚边. 实边: $(C_i, j) \in E \Leftrightarrow$ 子句 C_i 含正文字 x_j . 虚边: $(C_i, j) \in E \Leftrightarrow$ 子句 C_i 含负文字 $\neg x_j$.

CNF 公式 $F = (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5)$ 的因子图如图 1 所示. 因子图本质是一个二部图, 具体参数及含义可如下定义.

$V(a)$: 子句 a 中出现的所有变元集合, 可分为两类: $V(a) = V_+(a) \cup V_-(a)$. 其中 $V_+(a)$ 表示子句 a 中正文字对应的变元集合. $V_-(a)$ 表示子句 a 中负文字对应的变元集合.

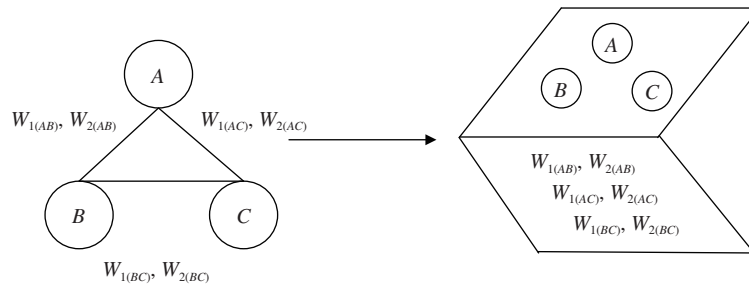


图 2 限制 Boltzmann 机模型转换示意
Figure 2 A model transformation instance of RBM

$V(j)$: 含变元 j 的子句集合, 同样可分为两类: $V(j) = V_+(j) \cup V_-(j)$. 其中 $V_+(j)$ 表示变元 j 正出现的子句集合. $V_-(j)$ 表示变元 j 负出现的子句集合.

3 求解双目标最小生成树的警示传播算法

3.1 基于无向图的限制 Boltzmann 机

Markov 链的 Markov 性表明: 事件未来状态的概率分布仅依赖于现在状态, 而与到达现在状态的具体过程及过去状态无关. 基于双目标最小生成树的特征及无向图中节点有限可列, 选取离散时间的 Markov 链的一种变体模型, 限制 Boltzmann 机 (restricted Boltzmann machine, RBM) 对任意无向图建模, 得二部图, 研究无向图中各节点间的依赖关系. RBM 的三元组表示 $\theta = \{W, A, B\}$, W 表示权重矩阵, A 表示可视层偏置, B 表示隐层偏置, 可视层偏置与隐层偏置的概率分布均符合伯努利 (Bernoulli) 分布. RBM 结构上是一种对称耦合的二值机器. RBM 中的点分为两层, 一层是可视层, 另一层是隐藏层, 同层节点之间没有连接, 不同层节点之间相互连接彼此耦合. 基于此特点, 利用 RBM 对无向图建模, 将无向图映射为二部图, 映射方法如图 2 所示. 映射过程选取随机生成的无向图, 利用 RBM 的双层结构特点, 将无向图中所有节点映射为 RBM 的可视层节点, 将无向图每条边的两个目标值均映射为 RBM 的隐层节点, 每条边的标记位单独设立全局变量, 也将其映射为 RBM 的隐层节点. 利用 RBM 节点间显隐互连的特性, 两个隐藏层节点可连接至相同可视层节点, 即 RBM 可描述无向图中同一节点所属的两组不同目标值. 通过上述方法, 便将无向图构建为分离面, 形成二部图.

3.2 因子图转换技术

RBM 映射后得到的二部图, 可视层节点映射为因子图的子句节点, 两个隐层节点依次映射为因子图子句节点对应的变元节点, 二部图的每条边增加辅助标识位 γ , 也将其映射为因子图的变元节点. 该标识位取值范围为集合 $\{0, 1\}$, 表示该边依概率收敛方向上的节点是否纳入双目标最小生成树的节点集. 若标识位取 1, 则将该边依概率收敛方向上的节点纳入到双目标最小生成树的节点集中, 若标识位取 0, 则不将该边依概率收敛方向上的节点纳入到双目标最小生成树的节点集中, 即

$$\gamma = \begin{cases} 1, & v \in \text{MST}, \\ 0, & v \notin \text{MST}. \end{cases}$$

因子图转化如算法 1 所示, 转换过程如图 3 所示.

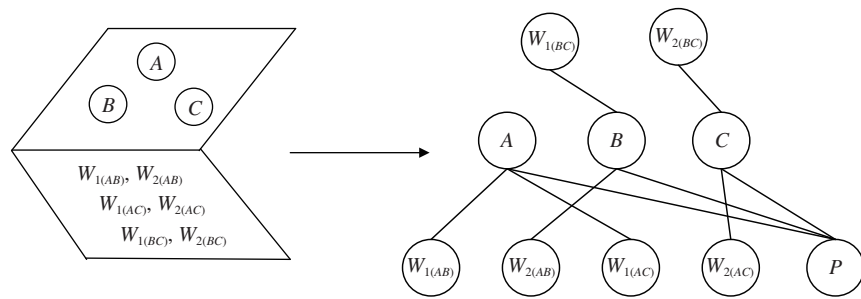


图 3 转化原理示意图

Figure 3 Schematic diagram of transformation principle

Algorithm 1 Factor graph transformation algorithm**Input:** Random bigraph instance G ;**Output:** Factor graph F ;

- 1: A random bigraph instance is selected;
- 2: Select the initial point randomly $v \in V$ as the starting point of transformation;
- 3: **while** $v \leq V$ **do**
- 4: **if** v is not the isolated point **then**
- 5: The bigraph edge $e \in E$ is mapped to a clause node of the factor graph;
- 6: Two sets of weights on the edge of a bigraph are mapped to two nodes of a factor graph;
- 7: **else**
- 8: Draw auxiliary edges to connect outliers;
- 9: $v = v + 1$;
- 10: **end if**
- 11: **end while**
- 12: Add a binary tag bit to each edge and map it to the third argument node;

特别地, 对含若干连通分量的随机无向图转化为相应因子图时的处理方式, 将随机选取每个连通分量的一个节点, 并以这些节点为行列建立一个邻接矩阵 CC , 并将这些随机选取的节点视为孤立点, 随机将 CC 中两个孤立点的交叉位置设置为 1, 从而将含若干连通分量的问题转换为单个连通分量的问题进行处理。

二部图转换为因子图时需对二部图中的两类特殊点做不同处理, 以确保 WP 在任意因子图上沿权重较小的方向高概率收敛, 获取较为精准的双目标最小生成树中的节点。这两类节点分别是孤立点和叶子节点, 孤立点是与图中的所有边均无关联的节点, 即度为 0 的节点。孤立点的出现缘于无向图邻接矩阵的随机生成机制, 即邻接矩阵可能随机生成数值全为 0 的行。若选取孤立点为 WP 算法的初始迭代节点, 需对其做如下处理, 处理过程如图 4 所示。

(1) 随机选择原二部连通图中的任意节点, 在邻接矩阵中表示此节点的行与孤立点的列的交叉位置设为 1, 并对此边上两个目标按随机种子赋随机值。

(2) 将此边作为一个子句节点, 随机生成的两个权值映射为两个变元节点, 添加一个标识位作为第 3 个变元节点, 并与其他节点同步生成因子图。

(3) 二部图映射为因子图。

3.3 求解双目标最小生成树的警示传播算法

采用 WP 的信息迭代方程式对因子图中的节点进行收敛性分析, 在由 RBM 转换后得到的因子

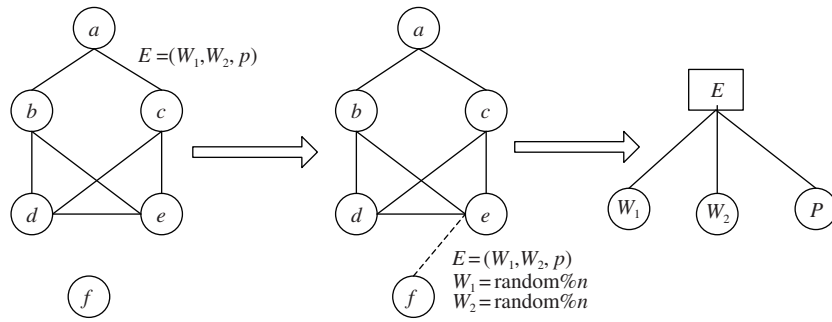


图 4 孤立点处理示意图

Figure 4 A schematic of handling isolated points

图的每一条边上, 定义 WP 算法的警示信息 $\mu_{a \rightarrow i}$ 用来描述双目标最小生成树中的边对其原生无向图边上每组权值的依附概率, 即对于每一条边, 都有对两个互不相容的目标值之间的概率评价. 若对两组权值评判所得的概率越高, 则这两组权值对应边所关联的节点被纳入双目标最小生成树中的概率越大. 若某条边上第 $t - 1$ 次得到的警示信息值 $\eta_{a \rightarrow i}(t - 1)$, 与 $\eta_{a \rightarrow i}(t)$ 一致或二者差值小于精度 ϵ , 则将该节点纳入双目标最小生成树节点集.

定义 J_i^a 是一个标识参数, 若子句节点代表的边和其关联的节点被纳入双目标最小生成树中, 则 $J_i^a = -1$; 若子句节点代表的边和其关联的节点未纳入双目标最小生成树的节点集中, 则 $J_i^a = 1$. 针对多目标最小生成树问题的特性, 需沿目标值较小的边方向收敛, 定制警示传播算法的信息迭代方程如下:

$$\eta_{a \rightarrow i}(t) = \prod_{j \in V(j)/a}^j \theta \left(-J_j^a \left(\sum w_j J_j^b \eta_{b \rightarrow i}(t - 1) \right) \right), \quad (2)$$

其中 t 表示迭代次数,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

表示截尾函数.

求解双目标最小生成树的 WP 算法可根据信息因子传递方向的不同定义两类消息, 一类是目标值传递给边的消息 $x_i \rightarrow C_j$, 一类是边传递给目标值的消息 $C_i \rightarrow x_j$. 两类消息所表示的含义分别是 $x_i \rightarrow C_j$ 表示在没有 C_j 的作用下, 其他边对 x_i 的取舍倾向, $C_i \rightarrow x_j$ 表示 C_i 的可满足性对目标值 x_j 的容纳概率.

若子句 a 中仅包含变元 x_i , 则可置 $\eta_{a \rightarrow i} = 1$. 求解过程如算法 2 所示.

基于此, 双目标最小生成树问题使用上述定制的信息迭代方程, 利用信息因子在因子图不同类型节点间相互传递特性, 当改进后的信息迭代方程在因子图上产生的警示信息 $\eta_{a \rightarrow i}(t - 1)$, 与 $\eta_{a \rightarrow i}(t)$ 一致或二者差值小于精度 ϵ 时, 便可依概率固定部分变元的赋值, 即得到部分指派 Ψ , 产生因子图实例所对应的随机无向图中属于双目标最小生成树的节点.

表 1 6 组不同节点数目随机无向图参数
 Table 1 Parameters of 6 groups of random undirected graphs with different numbers of nodes

n	m	α	d
100	4950	49.5	3.475
150	11175	74.5	3.475
200	19900	99.5	3.475
300	44850	149.5	3.475
350	61075	174.5	3.475
400	79800	199.5	3.475

Algorithm 2 Warning propagation algorithm for solving double objective minimum spanning tree

Input: Factor graph F ; Maximum number of iterations t_{\max} ; a requested precision ε ;
Output: The number of nodes in the minimum spanning tree $\eta_{a \rightarrow i}^*$;
 1: Get the factor graph by Algorithm 1;
 2: A node is randomly selected as the initial iteration node $n_i \in V$;
 3: At time $t \leftarrow 0$, for every edge of the factor graph init the warning messages $W_{a \rightarrow i} \in \{0, 1\}$;
 4: Let us do a random permutation of the edges in G ;
 5: Using 2 to update the warning information until the algorithm converges;
 6: **while** $t \leq t_{\max}$ **do**
 7: Sweep the set of edges in the factor graph and update the warning information;
 8: **if** $|\eta_{a \rightarrow i}(t) - \eta_{a \rightarrow i}(t - 1)| < \varepsilon$ **then**
 9: Takes the convergent nodes to form the nodes of the double-objective minimum spanning tree;
 10: **else**
 11: Continue;
 12: **end if**
 13: Break;
 14: **end while**
 15: The sum of the weights of two variable nodes representing weights in the factor graph is calculated respectively;
 16: Get part of the assignment;

4 数值实验及分析

实验随机图节点数 $n = \{100, 150, 200, 300, 350, 400\}$, 参数 $t_{\max} = 10^3, \varepsilon = 1000, \alpha = m/n, d = 3.475$, 可参见表 1. m 表示双目标值及标识位数值, d 表示约束紧度. 本实验运行的软、硬件环境为 Inter-Core i5-7th Gen CPU, 内存 4 GB, 主频 3.60 GHz, 操作系统 WIN10, 编译环境 code blocks, 使用 C 语言和 matlab 工具编程.

实验数据收敛性如图 5 和 6 所示, 收敛区间明显变窄. 因此, 改进后的 WP 算法在 $100 < n < 400$ 的随机无向图上体现出较优良的收敛性, 收敛概率较 $n < 100$ 的随机图实例有较明显提升. 由此说明, WP 算法在节点规模较大时可提高双目标问题的求解性能.

分析 WP 算法在因子图上的收敛速度, 选取 WP 算法收敛区间较窄的实例, 即 10 至 45 的随机无向图实例进行收敛性分析. 每个节点数目的随机图选取 100 个不同的实例进行运行时间测试, 运行时间取其平均值. 实验结果参见图 7, 横轴代表随机图节点数, 纵轴代表 WP 执行时间, 每个数据点取 100 个实例的平均值. 随着节点规模的不断增长, 算法的运行时间与节点数目大致呈正比增加, 且增长速度趋于稳定, 求解时间稳定在常数阶.

在图 8 中, 横轴代表目标 1 的值, 纵轴代表目标 2 的值. 取相同实例分别在两种算法上运行, 每个数据点代表一个因子图实例, 分析实验结果, 在目标 1 的 $n > 4$ 之后, 本文提出的算法实验结果较优,

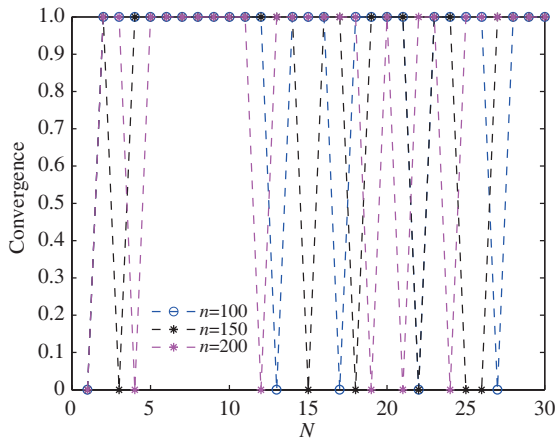


图 5 (网络版彩图) 第 1 组无向图收敛情况

Figure 5 (Color online) The first set of convergence chart

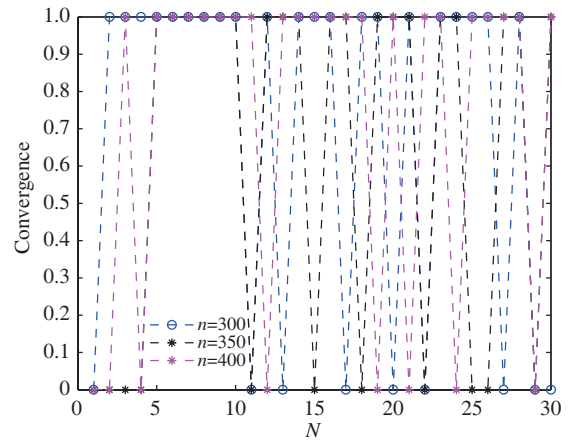


图 6 (网络版彩图) 第 2 组无向图收敛情况

Figure 6 (Color online) The second set of convergence chart

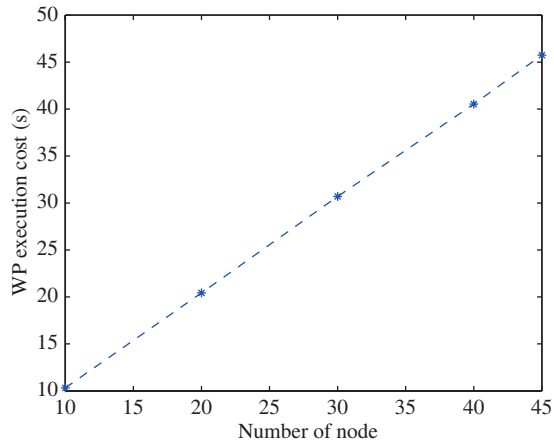


图 7 (网络版彩图) 算法运行时间情况

Figure 7 (Color online) Algorithm running time

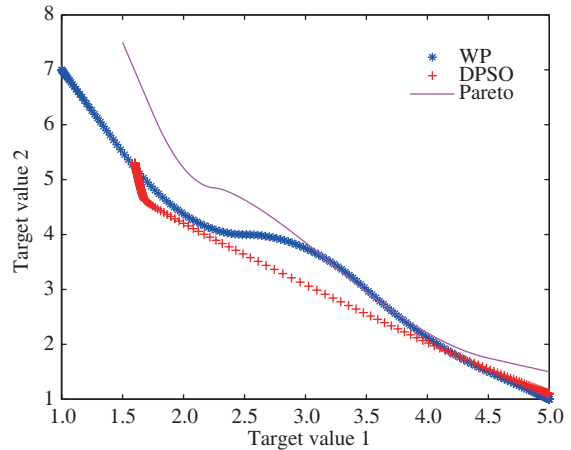


图 8 (网络版彩图) 对比 DPSO 算法与 WP 算法

Figure 8 (Color online) Comparison of the data of DPSO algorithm and WP algorithm

解的覆盖范围较为宽泛. 从图 8 实验数据分析可知, 目标 1 数值 $n < 5$ 时, 本文提出的算法较 DPSO 算法所获取的两个目标值的数值总和较小. 同样地, 目标 2 也符合以上描述. 综上所述, 本文提出的算法在求解精度与范围方面均优于 DPSO.

探讨求解多目标最小生成树的 WP 算法的求解速度, WP 算法与 MACS 算法运行时间的对比数据如表 2 所示. 数据表明, WP 算法求解多目标最小生成树问题比 MACS 和枚举法在求解速度上有显著提升, 求解时间有常数阶缩小.

5 结语

提出一种求解双目标最小生成树的警示传播算法, 利用限制 Boltzmann 机, 将任意无向图映射为因子图, 两组数值互异的目标值和一个标识位联合映射为三个变元节点, 无向图的边映射为子句节点,

表 2 对比 MACS 算法与 WP 算法运行时间 (s)
 Table 2 Comparison of the running time of MACS algorithm and WP algorithm (s)

The number of node	Enumeration	MACS	WP
20	3360	552. 6	20. 423
30	8700	681	30. 697
40	20580	847. 2	40. 537
50	45900	1095. 6	51. 018

利用改进信息迭代方程的 WP 算法, 通过调整算法参数及迭代次数在因子图上进行收敛性分析, 取使得 WP 收敛的节点为双目标最小生成树中的节点, 实验结果表明, 此方法有效.

参考文献

- 1 Yan W M, Wu W M. Data Structure. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 1992. 168–174
- 2 Zhou G G, Gen M. Genetic algorithm approach on multi-criteria minimum spanning tree problem. *Eur J Oper Res*, 1999, 114: 141–152
- 3 Chen G L, Guo W Z, Tu X Z, et al. An improved algorithm to solve the multi-criteria minimum spanning tree problem. *J Softw*, 2006, 17: 364–370
- 4 Guo W Z, Chen G L. An effective discrete particle swarm optimization algorithm for solving multi-objective minimum spanning tree problem. *Pattern Recogn Artif Intell*, 2009, 22: 597–604
- 5 Dyer M, Frieze A, Molloy M. A probabilistic analysis of randomly generated binary constraint satisfaction problems. *Theor Comput Sci*, 2003, 290: 1815–1828
- 6 Martin O C, Monasson R, Zecchina R. Statistical mechanics methods and phase transitions in optimization. *Theor Comput Sci*, 2001, 265: 3–67
- 7 Friedgut E, Bourgain J. Sharp thresholds of graph properties and the k -SAT problem. *J Amer Math Soc*, 1999, 12: 1017–1055
- 8 Kaporis A C, Kirousis L M, Lalas E G. The probabilistic analysis of a greedy satisfiability algorithm. *Random Struct Alg*, 2006, 28: 444–480
- 9 Dubois O, Boufkhad Y, Mandler J. Typical random 3-SAT formulae and the satisfiability threshold. In: *Proceedings of Electronic Colloquium on Computational Complexity*, 2003. 10: 1–2
- 10 Mézard M, Parisi G. The cavity method at zero temperature. *J Stat Phys*, 2003, 111: 1–34
- 11 Mézard M, Zecchina R. Random K -satisfiability problem: from an analytic solution to an efficient algorithm. *Phys Rev E*, 2002, 66: 056126
- 12 Maneva E, Mossel E, Wainwright M J. A new look at survey propagation and its generalizations. *J ACM*, 2007, 54: 17
- 13 Braunstein A, Mézard M, Zecchina R. Survey propagation: an algorithm for satisfiability. *Random Struct Alg*, 2005, 27: 201–226
- 14 Yedidia J S, Freeman W T, Weiss Y. Understanding belief propagation and its generalizations. *Artif Intell*, 2003, 8: 239–269
- 15 Aurell E, Gordon U, Kirkpatrick S. Comparing beliefs, surveys, and random walks. In: *Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems*, 2004. 17: 1–8
- 16 Kroc L, Sabharwal A, Selman B. Survey propagation revisited. In: *Proceedings of the 23rd Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, Corvallis, 2007. 217–226
- 17 Feige U, Mossel E, Vilenchik D. Complete convergence of message passing algorithms for some satisfiability problems. *Theor Comput*, 2013, 9: 617–651
- 18 Creignou N, Daudé H. The SAT-UNSAT transition for random constraint satisfaction problems. *Discrete Math*, 2009, 309: 2085–2099
- 19 Xu K, Li W. Exact phase transitions in random constraint satisfaction problems. *J Artif Intell Res*, 2000, 12: 93–103
- 20 Braunstein A, Zecchina R. Survey and belief propagation on random k -SAT. In: *Proceedings of International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing*, 2004. 2919: 519–528

- 21 Kschischang F R, Frey B J, Loeliger H A. Factor graphs and the sum-product algorithm. *IEEE Trans Inform Theor*, 2001, 47: 498–519
- 22 Weiss Y. Correctness of local probability propagation in graphical models with loops. *Neural Comput*, 2000, 12: 1–41
- 23 Weiss Y, Freeman W T. Correctness of belief propagation in Gaussian graphical models of arbitrary topology. *Neural Comput*, 2001, 13: 2173–2200

A warning propagation algorithm to solve the double-objective minimum spanning tree

Xin WANG¹, Xiaofeng WANG^{1,2*}, Daoyun XU² & Deren YANG³

1. *College of Computer Science and Engineering, North Minzu University, Yinchuan 750021, China;*

2. *Department of Computer Science, Guizhou University, Guiyang 550025, China;*

3. *Faculty of Science, Ningxia Medical University, Yinchuan 750004, China*

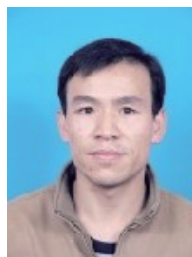
* Corresponding author. E-mail: xfwang@nun.edu.cn

Abstract The double-objective minimum spanning tree problem is an NP-hard problem with important application values in numerous fields such as optical cable communication and intelligent control. An undirected graph is transformed into a factor graph using the restricted Boltzmann machine, and the double-objective minimum spanning tree problem in the undirected graph is mapped into the corresponding problem in the factor graph. To construct the adjacency matrix, several random numbers generated from random number seeds are selected. Moreover, a corresponding undirected graph example is generated. Numerical experimental results indicate that the proposed algorithm is better than other similar algorithms.

Keywords double-objective optimization, combinatorial optimization, warning propagation algorithm, minimum spanning tree, factor graph



Xin WANG was born in 1995. He is a graduate student in North Minzu University. His main research interests include algorithm analysis and design and machine learning.



Xiaofeng WANG was born in 1980. He is an associate professor and master tutor at North Minzu University. His main research involves algorithm analysis and design and machine learning.



Daoyun XU was born in 1959. He received his Ph.D. degree from Nanjing University in 2002. His main research field is computational complex heterogeneity and computability analysis.



Deren YANG was born in 1964. He is a professor and master tutor at Ningxia Medical University. His main research interest involves software theory and software engineering.