



# 基于多无人机协作的多目标无源定位算法

屈小媚<sup>1,2</sup>, 刘韬<sup>1,2\*</sup>, 谈文蓉<sup>1,2</sup>

1. 西南民族大学计算机系统国家民委重点实验室, 成都 610041

2. 西南民族大学计算机科学与技术学院, 成都 610041

\* 通信作者. E-mail: swun\_liu@hotmail.com

收稿日期: 2018-12-30; 接受日期: 2019-03-10; 网络出版日期: 2019-05-08

国家自然科学基金 (批准号: 61873217) 和西南民族大学中央高校基本科研业务费 (批准号: 2019NQ28) 资助项目

**摘要** 基于多无人机协作的无源目标定位是无人机在军事侦察等领域应用的关键技术. 现有研究大部分针对单目标的无源定位, 本文研究利用到达时间差观测对多目标进行无源定位的高效算法. 将已有的两步加权最小二乘方法中辅助变量与目标位置的非线性关系作为约束, 建立约束加权最小二乘多目标定位模型, 并简化为含多个二次不定等式约束的二次规划问题. 这是一个 NP-hard 的非凸优化问题. 本文提出一种 CWLS (constrained weighted least squares) 近似迭代算法, 在迭代过程中用线性等式约束近似二次不定等式约束, 使其近似优化问题有解析解. 理论分析表明, 该算法收敛的极限一定是原问题的全局最优解. Monte Carlo 实验表明, 该算法在绝大部分情况下能快速收敛, 且对多目标定位的精度优于两步加权最小二乘方法.

**关键词** 无人机, 无源定位, 多目标, 到达时间差, 约束加权最小二乘

## 1 引言

无人驾驶飞机 (unmanned aerial vehicle, UAV) 简称无人机, 是一种无需飞行员控制, 可远距离操纵的自主飞行器, 在 21 世纪被越来越多地应用在军事侦查、目标追踪、地形勘察等领域<sup>[1]</sup>. 无人机平台的自定位和无人机对未知目标的定位问题成为近年来国内外研究的热点问题<sup>[2~4]</sup>. 全球定位系统 (GPS) 具有全天候工作和精确定位导航的能力, 且设备简单易携带, 成本相对低廉, 已成为无人机首选的定位导航系统<sup>[5]</sup>. 目标定位与自定位是一个正相关的关系, 当自定位达到了一定的精度, 如何利用平台精确地对目标定位跟踪也是至关重要的.

在无人机目标定位系统中, 基于激光测距仪的测距定位方法是近年来广泛使用的一种方法. 该方法简单易行, 精度也能满足要求, 然而这类有源定位方法要向外界辐射电磁波, 往往容易暴露无人机自身位置, 在军事任务中极易受到敌方打击<sup>[6]</sup>, 因此无源目标定位技术受到了国内外学者的高度重

**引用格式:** 屈小媚, 刘韬, 谈文蓉. 基于多无人机协作的多目标无源定位算法. 中国科学: 信息科学, 2019, 49: 570-584, doi: 10.1360/N112018-00341  
Qu X-M, Liu T, Tan W-R. Multi-source passive localization via multiple unmanned aerial vehicles (in Chinese). Sci Sin Inform, 2019, 49: 570-584, doi: 10.1360/N112018-00341

视. 所谓无源定位, 是指观测平台不向被侦察的目标发射信号, 通过获得目标的到达时间差<sup>[7]</sup>、到达角度<sup>[8]</sup>、Doppler 变化率<sup>[9]</sup> 等信息确定目标辐射源的三维位置.

对于静态目标, 常见的无源定位机制是通过测量目标发射的信号到各观测平台的到达时间差 (time difference of arrival, TDOA)<sup>[10~12]</sup> 来进行定位. 基于 TDOA 的无源目标定位已成为近年来国内外研究的热点问题<sup>[13~20]</sup>. 通常, 基于 TDOA 观测的目标定位需要多个观测平台协作完成<sup>[12]</sup>. 如果 TDOA 能被准确测量, 可通过计算到达时间差双曲线的交点估计目标位置<sup>[11]</sup>. 然而在实际应用中, TDOA 观测往往含有随机噪声, 这种情况下基于 TDOA 观测的目标定位方法可大致分为两类: 极大似然法<sup>[7, 14, 15]</sup> 和伪最小二乘法<sup>[13, 18~20]</sup>. 其中, 基于极大似然法的目标定位问题是一个非凸优化问题, 现有研究通过 SDR (semidefinite relaxation) 松弛方法近似求解. 伪最小二乘法中最典型的是两步加权最小二乘法<sup>[13]</sup>. 该方法通过引入辅助变量将非线性 TDOA 测量方程转化为伪线性测量方程, 首先忽略辅助变量和目标位置之间的非线性关系, 通过加权最小二乘 (weighted least squares, WLS) 方法得到目标位置和辅助变量的初步估计, 然后利用目标位置与辅助变量之间的非线性关系进行第 2 步的修正. 约束加权最小二乘 (constrained weighted least squares, CWLS) 法<sup>[17, 18]</sup> 直接将目标位置与辅助变量之间的关系作为非线性约束引入到 WLS 的优化问题中, 能有效改进目标定位的精度. 然而, CWLS 目标定位的数学模型是含有一个二次不定等式约束的二次规划问题, 这是一个非凸优化问题. 最近, Qu 等<sup>[19, 20]</sup> 发现该非凸优化问题在基于 TDOA 的单目标定位中存在隐凸性, 并提出每步可解析求解的内点算法高效求解原问题的全局最优解.

然而, 在现代日益复杂的战场环境下, 单目标无源定位技术已很难满足实际需要. 随着无线通信技术的发展, 多目标无源定位问题已经引起国内外学者的广泛关注<sup>[21~25]</sup>. 为有效解决多目标无源定位中的数据关联问题, Xiu 等<sup>[24]</sup> 提出一种双向互选最近邻多目标数据关联算法. 2018 年, Sundar 等<sup>[25]</sup> 提出一种基于反向延迟间隔区域 (inverse delay interval region, IDIR) 的方法对多目标的 TDOA 观测进行数据关联. 在观测数据已正确关联的假设下, 文献<sup>[22, 23]</sup> 将两步加权最小二乘法分别推广到基于 TDOA 和基于 TDOA/FDOA 联合的多目标定位问题中.

针对基于多无人机观测平台协作的多目标无源定位问题, 本文在 TDOA 观测已完成数据关联的情况下, 研究利用无人机观测平台的位置信息和 TDOA 观测信息对各目标位置进行精确估计的高效算法. 首先通过引入多个辅助变量将非线性 TDOA 测量方程转化为伪线性方程, 然后将各辅助变量与其对应的目标位置的非线性关系作为非线性约束引入到多目标定位的 WLS 优化问题中. 得到的 CWLS 多目标定位数学模型是含有多个二次不定等式约束的二次规划问题. 理论上, 该问题已被证明是具有 NP-hard 复杂度的非凸优化问题<sup>[26]</sup>. 文献<sup>[19, 20]</sup> 中的隐凸性仅适用于含有一个二次不定等式约束的二次规划问题.

本文通过分析 CWLS 多目标定位问题的数学模型结构, 发现其目标函数是一个凸函数, 难点集中在多个二次不定等式约束中, 因此提出一种近似迭代算法. 该算法以 WLS 多目标定位的最优解作为迭代初值. 在每步迭代中, 根据上一步的近似解将二次不定等式约束近似为线性约束, 从而将原问题近似为带线性等式约束的二次规划问题. 该近似问题具有解析解, 能快速求解, 从而利用其最优解构造迭代算法. 理论分析表明, 该算法如果收敛, 则必然收敛到原问题的全局最优解. 在 Monte Carlo 数值模拟实验中, 该算法在 10 步迭代以内收敛的概率高达 99.9%. 数值模拟实验的结果表明, 本文提出的 CWLS 近似迭代算法能有效且精确地解决多目标 TDOA 无源定位问题, 特别是在病态定位场景下和观测噪声水平较高的情况下, 目标定位的均方误差仍然接近其 Cramér-Rao lower bound (CRLB) 下界.

本文后续部分的组织如下: 第 2 节对基于多无人机协作的多目标定位系统模型与问题进行描述; 第 3 节提出 CWLS 多目标定位近似迭代算法; 第 4 节对该算法的收敛性进行理论分析; 第 5 节通过

Monte Carlo 数值模拟验证本文所提算法的有效性; 最后总结全文, 并对未来的研究方向进行展望.

## 2 多目标定位系统模型与问题描述

### 2.1 系统模型

基于 TDOA 观测的多目标定位系统由  $n$  个无人机组成, 无人机的真实位置记为  $\mathbf{s}_i^0 = [x_i^0, y_i^0, z_i^0]'$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 其中, 符号 “ $'$ ” 表示转置. 然而, 即使是高精度的 GPS 也无法准确地获取无人机的真实位置信息  $\mathbf{s}^0 = [\mathbf{s}_1^0, \dots, \mathbf{s}_n^0]'$ . 实际应用中, 只能得到无人机位置的观测信息  $\mathbf{s} = [\mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2, \dots, \mathbf{s}'_n]'$ , 其中  $\mathbf{s}_i = [x_i, y_i, z_i]'$ . 无人机位置的观测模型为

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i^0 + \Delta \mathbf{s}_i, \quad (1)$$

其中假设  $\Delta \mathbf{s}_i$  是零均值正态分布的观测误差, 观测误差向量  $\Delta \mathbf{s} = [\Delta \mathbf{s}'_1, \Delta \mathbf{s}'_2, \dots, \Delta \mathbf{s}'_n]'$  的协方差矩阵记为  $\mathbf{Q}_s$ . 文献 [20] 中指出, 基于 TDOA 的三维目标定位需要至少 5 个观测平台, 因此本文假设无人机的数量  $n \geq 5$ .

考虑  $n$  个无人机观测平台互相协作, 通过测量未知目标发射的信号到达各观测平台的到达时间差对  $m$  个静态目标  $\mathbf{u}_j = [x_{uj}, y_{uj}, z_{uj}]'$  ( $j = 1, \dots, m$ ) 进行定位. 假设各个目标的 TDOA 观测均在相当短的时间间隔下得到, 因此, 所对应的各无人机位置状态是一致的.

不失一般性地, 假设第 1 个无人机作为主站, 其余无人机作为辅站. 记第  $j$  个目标辐射的信号到达第  $i$  个无人机辅站与到达主站的到达时间差 (TDOA) 为  $t_{j,i1}^0$ , 其数学模型为

$$t_{j,i1}^0 = \frac{r_{ji}^0}{c} - \frac{r_{j1}^0}{c}, \quad (j = 1, \dots, m, i = 2, \dots, n), \quad (2)$$

其中,  $c$  为信号在空气中的传播速率.  $r_{ji}^0$  为第  $j$  个目标到第  $i$  个无人机观测平台的距离, 即

$$r_{ji}^0 = \|\mathbf{u}_j - \mathbf{s}_i^0\|, \quad (j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

无人机获得的 TDOA 观测  $t_{j,i1}$  通常含有观测噪声, 即

$$t_{j,i1} = t_{j,i1}^0 + \Delta t_{j,i1}. \quad (4)$$

假设每个无人机观测平台都安装有多个信号接收器, 可获取每个目标辐射信号的到达时间, 且能根据其他无源信息 (如到达角度、视觉图像等) 进行数据关联, 即无人机主站可获取所有的 TDOA 观测  $t_{j,i1}$  ( $j = 1, \dots, m, i = 2, \dots, n$ ). 记  $\Delta \mathbf{t}_j = [\Delta t_{j,21}, \dots, \Delta t_{j,n1}]'$  为第  $j$  个目标的 TDOA 观测噪声向量, 假设  $\Delta \mathbf{t}_j$  服从零均值正态分布, 其协方差矩阵为  $\mathbf{Q}_j$ . 由于 TDOA 观测噪声  $\Delta \mathbf{t}_j$  与无人机的位置误差  $\Delta \mathbf{s}$  是来自不同的观测方式, 因此假设二者之间相互独立. 本文主要研究如何根据无人机主站获取的 TDOA 观测信息  $t_{j,i1}$  ( $j = 1, \dots, m, i = 2, \dots, n$ ) 和无人机观测平台自身的位置信息  $\mathbf{s}$ , 精确地估计多个未知辐射源目标的位置  $\mathbf{u} = [\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_m]'$ .

### 2.2 问题描述

为便于后续推导, 首先将 TDOA 观测模型转化为到达距离差 (range difference of arrival, RDOA) 观测模型, 即

$$r_{j,i1} = r_{j,i1}^0 + \Delta r_{j,i1}, \quad (j = 1, \dots, m, i = 2, \dots, n), \quad (5)$$

其中,  $r_{j,i1} = ct_{j,i1}$ ,  $\Delta r_{j,i1} = c\Delta t_{j,i1}$ ,

$$r_{j,i1}^0 = ct_{j,i1}^0 = r_{ji}^0 - r_{j1}^0. \quad (6)$$

式 (6) 可被等价地表示为如下关于  $\mathbf{u}_j$  和  $r_{j1}^0$  的线性模型:

$$r_{j,i1}^{02} - R_i^{02} + R_1^{02} = -2(\mathbf{s}_i^0 - \mathbf{s}_1^0)' \mathbf{u}_j - 2r_{j,i1}^0 r_{j1}^0, \quad (7)$$

其中  $R_i^0 = \sqrt{x_i^{02} + y_i^{02} + z_i^{02}}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). 根据文献 [10] 的推导, RDOA 观测模型 (5) 可被表示为下面的线性矩阵形式:

$$\mathbf{h}_j = \mathbf{G}_j \tilde{\mathbf{u}}_j + \boldsymbol{\epsilon}_j, \quad (8)$$

其中,

$$\mathbf{h}_j = \begin{pmatrix} r_{j,21}^2 - R_2^2 + R_1^2 \\ \vdots \\ r_{j,n1}^2 - R_n^2 + R_1^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_j = -2 \begin{pmatrix} (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)' & r_{j,21} \\ \vdots & \vdots \\ (\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_1)' & r_{j,n1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_j = [\mathbf{u}'_j, r_{j1}]', \quad r_{j1} = \|\mathbf{u}_j - \mathbf{s}_1\|, \quad R_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}.$$

忽略误差向量  $\boldsymbol{\epsilon}_j$  中关于 RDOA 噪声向量  $\Delta \mathbf{r}_j = [\Delta r_{j,21}, \dots, \Delta r_{j,n1}]'$  和无人机位置误差向量  $\Delta \mathbf{s}$  的二次项, 误差向量  $\boldsymbol{\epsilon}_j$  可近似表示为

$$\boldsymbol{\epsilon}_j \approx \mathbf{B}_j \Delta \mathbf{r}_j + \mathbf{D}_j \Delta \mathbf{s}, \quad (9)$$

其中,

$$\mathbf{B}_j = 2 \begin{pmatrix} r_{j2}^0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{j3}^0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{jn}^0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{D}_j = 2 \times \begin{pmatrix} -r_{j,21}^0 \mathbf{g}'_{\mathbf{u}_j, \mathbf{s}_1} - (\mathbf{u}_j - \mathbf{s}_1)' (\mathbf{u}_j - \mathbf{s}_2)' & \mathbf{0}' & \cdots & \mathbf{0}' \\ -r_{j,31}^0 \mathbf{g}'_{\mathbf{u}_j, \mathbf{s}_1} - (\mathbf{u}_j - \mathbf{s}_1)' & \mathbf{0}' & (\mathbf{u}_j - \mathbf{s}_3)' & \cdots & \mathbf{0}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_{j,n1}^0 \mathbf{g}'_{\mathbf{u}_j, \mathbf{s}_1} - (\mathbf{u}_j - \mathbf{s}_1)' & \mathbf{0}' & \mathbf{0}' & \cdots & (\mathbf{u}_j - \mathbf{s}_n)' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_{\mathbf{u}_j, \mathbf{s}_1} = \frac{\mathbf{u}_j - \mathbf{s}_1}{\|\mathbf{u}_j - \mathbf{s}_1\|}. \quad (11)$$

注意到虽然通过引入辅助变量  $r_{j1}$ , 将未知目标  $\mathbf{u}_j$  的非线性 RDOA 观测模型 (5) 转化为关于  $\tilde{\mathbf{u}}_j$  的线性观测模型 (8), 然而  $\tilde{\mathbf{u}}_j$  中各元素存在非线性关系

$$r_{j1} = \|\mathbf{u}_j - \mathbf{s}_1\|. \quad (12)$$

将多个辐射源目标  $\mathbf{u}_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) 对应的伪线性观测模型 (8) 组合到一起, 得到关于复合向量  $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{\mathbf{u}}'_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}'_m]'$  的线性观测模型:

$$\mathbf{h} = \mathbf{G} \tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (13)$$

其中  $\mathbf{h} = [\mathbf{h}'_1, \dots, \mathbf{h}'_m]'$ ,  $\mathbf{G}$  为一个分块对角矩阵  $\mathbf{G} = \text{diag}(\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_m)$ . 复合误差向量  $\boldsymbol{\epsilon}$  可近似地表示为:

$$\boldsymbol{\epsilon} \approx \mathbf{B}\Delta\mathbf{r} + \mathbf{D}\Delta\mathbf{s}, \quad (14)$$

其中,

$$\mathbf{B} = \text{diag}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m), \quad \Delta\mathbf{r} = [\Delta\mathbf{r}'_1, \dots, \Delta\mathbf{r}'_m]', \quad \mathbf{D} = [\mathbf{D}'_1, \dots, \mathbf{D}'_m]'. \quad (15)$$

由于误差向量  $\boldsymbol{\epsilon}$  可近似为 Gauss 噪声  $\Delta\mathbf{r}$  和  $\Delta\mathbf{s}$  的线性组合, 因此如果未知向量  $\tilde{\mathbf{u}}$  的分量之间没有约束关系, 那么线性模型 (13) 中  $\tilde{\mathbf{u}}$  的极大似然估计就是最小方差无偏估计, 并且与加权最小二乘估计等价. 然而,  $\tilde{\mathbf{u}}$  中的每个  $\tilde{\mathbf{u}}_j$  都存在非线性关系 (12), 已有的两步加权最小二乘目标定位方法 [22, 23] 通过两步松弛技术去估计目标位置. 本文将该非线性关系作为非线性约束, 直接引入到  $\tilde{\mathbf{u}}$  的加权最小二乘参数估计问题中, 得到下面的优化问题:

$$\min_{\tilde{\mathbf{u}}} (\mathbf{h} - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{u}})' \mathbf{W} (\mathbf{h} - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{u}}) \quad \text{s.t.} \quad (\tilde{\mathbf{u}}_j - \tilde{\mathbf{s}}_1)' \mathbf{C} (\tilde{\mathbf{u}}_j - \tilde{\mathbf{s}}_1) = 0 \quad (j = 1, \dots, m), \quad (16)$$

其中,

$$\mathbf{C} = \text{diag}([1, 1, 1, -1]), \quad \tilde{\mathbf{s}}_1 = [x_1, y_1, z_1, 0]', \quad \mathbf{W} = E[\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}']^{-1}. \quad (17)$$

将这种把未知参数间的非线性关系作为约束的加权最小二乘定位方法称为约束加权最小二乘 (CWLS) 目标定位方法. 解决基于多无人机协作的 TDOA 多目标无源定位问题的关键在于优化问题 (16) 的求解. 注意到通过忽略误差向量  $\boldsymbol{\epsilon}$  的二次项, 权矩阵  $\mathbf{W}$  可近似为:

$$\mathbf{W}(\mathbf{u}) = (c^2 \mathbf{B}\mathbf{Q}_t \mathbf{B}' + \mathbf{D}\mathbf{Q}_s \mathbf{D}')^{-1}, \quad (18)$$

其中  $\mathbf{Q}_t = \text{diag}(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m)$ , 矩阵  $\mathbf{B}$  (10) 和  $\mathbf{D}$  (11) 均与未知的目标位置  $\mathbf{u}$  有关. 为便于后续推导, 将  $\mathbf{W}(\mathbf{u})$  简记为  $\mathbf{W}$ . 本文将设计迭代算法求解 CWLS 多目标无源定位问题 (16), 并在每次迭代过程中更新权矩阵  $\mathbf{W}$ .

### 3 CWLS 多目标定位近似迭代算法

基于多无人机协作的 CWLS 多目标定位问题 (16), 其数学模型是带  $m$  个二次不定等式约束的二次规划问题, 该问题理论上是一个 NP-hard 的非凸优化问题 [26]. 在 CWLS 单目标定位问题中, 由于其仅含有一个二次不定等式约束, 文献 [20] 证明了在目标函数和约束中的二次矩阵能同时对角化的情况下存在隐凸性. 然而, 该隐凸性在含有多个二次不定等式约束的情况下不再成立, 因此本文提出一种近似迭代 CWLS 多目标定位算法.

首先, 将 CWLS 多目标定位问题 (16) 等价转化为具有齐次等式约束的二次规划问题:

$$\min_{\tilde{\mathbf{u}}} \tilde{\mathbf{u}}' \bar{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{u}} - 2\bar{\mathbf{h}}' \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{s.t.} \quad \tilde{\mathbf{u}}' \mathbf{C}_j \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (j = 1, \dots, m), \quad (19)$$

其中,

$$\tilde{\mathbf{u}}_j = \tilde{\mathbf{u}}_j - \tilde{\mathbf{s}}_1, \quad \tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{\mathbf{u}}'_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}'_m]', \quad \bar{\mathbf{W}} = \mathbf{G}' \mathbf{W} \mathbf{G}, \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{G}' \mathbf{W} (\mathbf{h} - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{s}}_1), \quad \tilde{\mathbf{s}}_1 = [\tilde{\mathbf{s}}'_1, \dots, \tilde{\mathbf{s}}'_1]', \quad (21)$$

$C_j \in \mathbb{R}^{4m \times 4m}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) 是一个对角矩阵, 第  $4j - 3$  到  $4j - 1$  个对角元素为 1, 第  $4j$  个对角元素为  $-1$ , 其余对角元素均为 0.

注意到优化问题 (19) 中的  $\bar{W}$  和  $\bar{h}$  也都与未知的目标位置  $\mathbf{u}$  有关, 应该表示为  $\bar{W}(\mathbf{u})$  和  $\bar{h}(\mathbf{u})$ . 本文将它们简记为  $\bar{W}$  和  $\bar{h}$ , 将在迭代算法的每次迭代过程中更新.

通过分析发现, 优化问题 (19) 中目标函数的 Hessian 矩阵  $\bar{W}$  是一个半正定矩阵, 约束中的 Hessian 矩阵  $C_j$  均为不定矩阵, 因此, 优化问题 (19) 的目标函数是凸函数, 其主要难点在于含有  $m$  个二次不定等式约束. 假设优化变量  $\bar{\mathbf{u}}$  有一个初始估计  $\hat{\mathbf{u}}$ , 如果将优化问题 (19) 中的二次不定等式约束中的一个变量  $\bar{\mathbf{u}}$  替换为它的估计值  $\hat{\mathbf{u}}$ , 那么该非凸约束就可被近似为一个线性等式约束, 进而得到一个近似 CWLS 多目标定位问题:

$$\min_{\bar{\mathbf{u}}} \bar{\mathbf{u}}' \bar{W} \bar{\mathbf{u}} - 2\bar{\mathbf{h}}' \bar{\mathbf{u}} \quad \text{s.t.} \quad \hat{\mathbf{u}}' C_j \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (j = 1, \dots, m). \quad (22)$$

问题 (22) 是一个带线性等式约束的加权最小二乘问题, 除了具有凸性, 还有解析解.

**定理 1** 近似 CWLS 多目标定位问题 (22) 的最优解为

$$\bar{\mathbf{u}}^* = (P\bar{W}P)^\dagger \bar{\mathbf{h}}, \quad (23)$$

其中, 符号 “ $\dagger$ ” 表示矩阵的伪逆,

$$P = I - A'(AA')^{-1}A, \quad (24)$$

$$A = [\hat{\mathbf{u}}' C_1; \dots; \hat{\mathbf{u}}' C_m] \in \mathbb{R}^{m \times 4m}. \quad (25)$$

证明见附录 A.

虽然优化问题 (22) 的最优解  $\bar{\mathbf{u}}^*$  只是 CWLS 多目标定位问题 (19) 的近似解, 但是它在初始估计  $\hat{\mathbf{u}}$  的基础上, 通过融合优化变量之间近似的线性约束来提高目标定位的精度. 因此, 本文考虑在得到的近似解  $\bar{\mathbf{u}}^*$  基础上构造一个新的初始估计, 再进行下一步的迭代, 直到收敛. 选用 CWLS 多目标定位问题 (19) 中忽略  $m$  个二次不定等式约束的最优解作为 CWLS 多目标定位迭代算法的初始值, 即

$$\hat{\mathbf{u}}^0 = \arg \min_{\bar{\mathbf{u}}} \bar{\mathbf{u}}' \bar{W} \bar{\mathbf{u}} - 2\bar{\mathbf{h}}' \bar{\mathbf{u}}. \quad (26)$$

通过选取初始权矩阵  $W^0 = I$ , 得到 CWLS 多目标定位迭代算法的初值:

$$\hat{\mathbf{u}}^0 = (G'G)^{-1}G'(\mathbf{h} - G\bar{\mathbf{s}}_1). \quad (27)$$

基于多无人机协作的 CWLS 多目标无源定位近似迭代算法如算法 1 所示.

在算法 1 的第 5 步和第 10 步中, 采用近似 CWLS 多目标定位问题的最优解  $\bar{\mathbf{u}}^{k-1}$  与上一步迭代的近似解  $\hat{\mathbf{u}}^{k-1}$  的算术平均值来更新当前步的 CWLS 多目标定位问题近似解. 这是因为通过大量 Monte Carlo 数值模拟实验发现, 如果直接采用近似问题的最优解  $\bar{\mathbf{u}}^{k-1}$  来进行更新将导致迭代算法很容易在两个值之间来回震荡而不收敛. 采用本文提出的迭代更新策略, 能有效避免震荡不收敛的情况, 并能从理论上分析整个迭代算法的收敛性质.

从算法 1 的迭代步骤可看出其每步计算都是解析的, 主要计算量在于求矩阵  $P^k \bar{W}^k P^k$  的伪逆. 由于  $P^k \in \mathbb{R}^{4m \times 4m}$ , 算法 1 的计算复杂度近似为  $O(m^3)$ . 而文献 [22] 中的两步 WLS 方法仍然需要求解  $4m \times 4m$  矩阵的逆矩阵, 因此本文提出的 CWLS 迭代算法的计算复杂度不高于已有的两步 WLS 方法.

---

**Algorithm 1** Recursive CWLS multi-source localization algorithm
 

---

**Input:**  $\mathbf{s}, r_{j,i1}$  ( $j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n$ ),  $\mathbf{Q}_s, \mathbf{Q}_t$ ;

**Algorithm process:**

- 1: Initialize:  $k = 0, \hat{\mathbf{u}}^k = (\mathbf{G}'\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}'(\mathbf{h} - \mathbf{G}\bar{\mathbf{s}}_1)$ ;
  - 2: Update: update  $\bar{\mathbf{W}}^k = \bar{\mathbf{W}}(\hat{\mathbf{u}}^k)$  and  $\bar{\mathbf{h}}^k = \bar{\mathbf{h}}(\hat{\mathbf{u}}^k)$  following (20) and (21), and then update  $\mathbf{P}^k = \mathbf{P}(\hat{\mathbf{u}}^k)$  following (24) and (25);
  - 3: Calculate:  $\bar{\mathbf{u}}^k = (\mathbf{P}^k\bar{\mathbf{W}}^k\mathbf{P}^k)^\dagger\bar{\mathbf{h}}^k$ ;
  - 4:  $k = k + 1$ ;
  - 5: Update:  $\hat{\mathbf{u}}^k = (\hat{\mathbf{u}}^{k-1} + \bar{\mathbf{u}}^{k-1})/2$ ;
  - 6: **while**  $\frac{\|\hat{\mathbf{u}}^k - \hat{\mathbf{u}}^{k-1}\|}{\|\hat{\mathbf{u}}^k\|} \leq \delta$  **do**
  - 7:     Update:  $\bar{\mathbf{W}}^k = \bar{\mathbf{W}}(\hat{\mathbf{u}}^k), \bar{\mathbf{h}}^k = \bar{\mathbf{h}}(\hat{\mathbf{u}}^k), \mathbf{P}^k = \mathbf{P}(\hat{\mathbf{u}}^k)$ ;
  - 8:     Calculate:  $\bar{\mathbf{u}}^k = (\mathbf{P}^k\bar{\mathbf{W}}^k\mathbf{P}^k)^\dagger\bar{\mathbf{h}}^k$ ;
  - 9:      $k = k + 1$ ;
  - 10:    Update:  $\hat{\mathbf{u}}^k = (\hat{\mathbf{u}}^{k-1} + \bar{\mathbf{u}}^{k-1})/2$ ;
  - 11: **end while**
- Output:**
- $\hat{\mathbf{u}}^k, k$
- .
- 

## 4 性能分析

算法 1 给出求解基于多无人机协作的多目标无源定位问题的一个近似迭代算法, 一个很自然的问题是该算法能否收敛到原问题 (19) 的全局最优解. 下面将分析 CWLS 多目标定位近似迭代算法的收敛性. 由于原问题 (19) 是一个 NP-hard 的非凸优化问题, 据作者所知, 尚无其全局最优解的充分必要条件, 下面的定理给出该问题全局最优解的一个充分条件.

**定理2** 如果存在  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{4m}$  和  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) 使得下面的方程组:

$$\left( \hat{\mathbf{W}} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{C}_j \right) \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{h}}, \quad (28)$$

$$\hat{\mathbf{W}} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{C}_j \succeq \mathbf{0}, \quad (29)$$

$$\hat{\mathbf{u}}' \mathbf{C}_j \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (30)$$

成立, 其中  $\hat{\mathbf{W}} = \bar{\mathbf{W}}(\hat{\mathbf{u}})$  和  $\hat{\mathbf{h}} = \bar{\mathbf{h}}(\hat{\mathbf{u}})$  根据式 (20) 和 (21) 更新, 那么  $\hat{\mathbf{u}}$  是优化问题 (19) 的全局最优解.

证明见附录 B.

下面将证明如果算法 1 给出的原问题 (19) 的近似解序列收敛, 那么其极限一定是原问题 (19) 的全局最优解.

**定理3** 记  $\{\hat{\mathbf{u}}^k, k = 0, 1, \dots\}$  为由 CWLS 多目标定位近似迭代算法 1 得到的近似解序列. 假设该序列收敛, 即存在极限:

$$\hat{\mathbf{u}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{u}}^k, \quad (31)$$

那么该极限  $\hat{\mathbf{u}}$  一定满足原问题 (19) 全局最优解的充分性条件 (28)~(30).

证明见附录 C.

值得注意的是, 定理 3 的结论仅在算法 1 得到的近似解序列收敛的假设下成立. 然而, 本文无法证明算法 1 的近似解序列的收敛性. 这是因为如果能保证其收敛性, 就相当于找到了一个求解 NP-hard 问题的有效求解算法, 但事实上这是不可能的. Monte Carlo 数值模拟试验的结果也表明, 确实存在算

表 1 场景一中各无人机的真实位置 (单位: m)  
Table 1 True positions of UAVs in scenario 1 (m)

UAV number $i$	$x_i^0$	$y_i^0$	$z_i^0$
1	300	100	150
2	400	150	100
3	300	500	200
4	350	200	100
5	-100	-100	-100
6	200	-300	-200

法 1 的近似解序列不收敛的情况, 但其概率非常低, 因此本文提出的 CWLS 多目标定位近似迭代算法可在大部分情况下精确求解.

## 5 数值模拟实验

下面通过 Monte Carlo 数值模拟实验来验证本文提出的 CWLS 多目标定位迭代算法的性能, 并与已有的两步 WLS 方法 [22] 和 CRLB 下界作比较.

### 5.1 模拟实验一

考虑一个正常 (非病态) 的多目标定位场景, 定位系统中的无人机数量  $n = 6$ , 它们的真实位置见表 1. 无人机位置的观测误差协方差矩阵为  $\mathbf{Q}_s = \sigma_s^2 \mathbf{I}$ . 假设在该模拟场景中两个辐射源目标需要定位, 其真实位置分别为  $\mathbf{u}_1 = [100, 80, 250]'$  m 和  $\mathbf{u}_2 = [314, 483, 209]'$  m. 各目标 TDOA 观测噪声的协方差为  $\mathbf{Q}_j = \sigma_j^2 \mathbf{T}$  ( $j = 1, 2$ ), 其中  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ , 其对角线元素为 1, 其余元素为 0.5. 目标定位的精度通过对各目标位置估计的均方误差 (mean squared error, MSE) 来衡量, 即  $\text{MSE}_j = \sum_{l=1}^L \|\hat{\mathbf{u}}_j^l - \mathbf{u}_j\|^2 / L$  其中  $\hat{\mathbf{u}}_j^l$  表示第  $l$  次模拟对第  $j$  个目标位置的估计,  $L = 5000$  是 Monte Carlo 数值模拟次数. 在模拟实验中, 迭代算法 1 的终止参数  $\delta$  设定为  $\delta = 0.00001$ .

首先考察 TDOA 观测噪声水平对多目标定位精度的影响. 固定无人机位置误差水平  $\sigma_s = 1/\sqrt{3}$  m, 令 TDOA 观测噪声水平  $\sigma_j = 0.5p/c$  s, 通过变化  $p$  的取值来调节 TDOA 观测噪声的强弱. 图 1 展示了该情况下  $p$  从 0.5 增加到 5 时各目标定位的均方误差, 其中两步 WLS 方法采用文献 [22] 中的算法, CWLS 方法采用本文提出的近似迭代算法 1. 在  $L = 5000$  次 Monte Carlo 实验中, 本文提出的迭代算法 1 在 10 步以内收敛的概率达到 99.9%, 平均迭代次数仅为 2.893 次. 从图 1 的结果可以看出, 当 TDOA 观测噪声水平较低 ( $p < 2$ ) 时, CWLS 和两步 WLS 方法对每个目标定位的 MSE 都能达到相应的 CRLB. 但是, 随着 TDOA 观测噪声水平  $p$  的增加, 本文提出的 CWLS 方法对每个目标定位的 MSE 均明显小于两步 WLS 方法对应的 MSE, 且很接近相应的 CRLB 下界.

然后考察无人机位置误差水平对多目标定位精度的影响. 固定 TDOA 观测噪声水平  $\sigma_j = 1/c$  s, 令无人机位置误差水平  $\sigma_s = 0.5p/\sqrt{3}$  m. 图 2 展示了该情况下  $p$  从 0.5 增加到 5 时各目标定位的均方误差. 在  $L = 5000$  次 Monte Carlo 实验中, 本文提出的迭代算法 1 在 10 步以内收敛的概率达到 100%, 平均迭代次数仅为 2.696 次. 图 2 的结果与图 1 类似, 当无人机位置误差水平较低 ( $p < 2$ ) 时, CWLS 和两步 WLS 方法对每个目标定位的 MSE 都能达到相应的 CRLB. 但随着  $p$  的增加, 本文提出的 CWLS 方法对每个目标定位的 MSE 均明显小于两步 WLS 方法对应的 MSE, 且很接近相应的

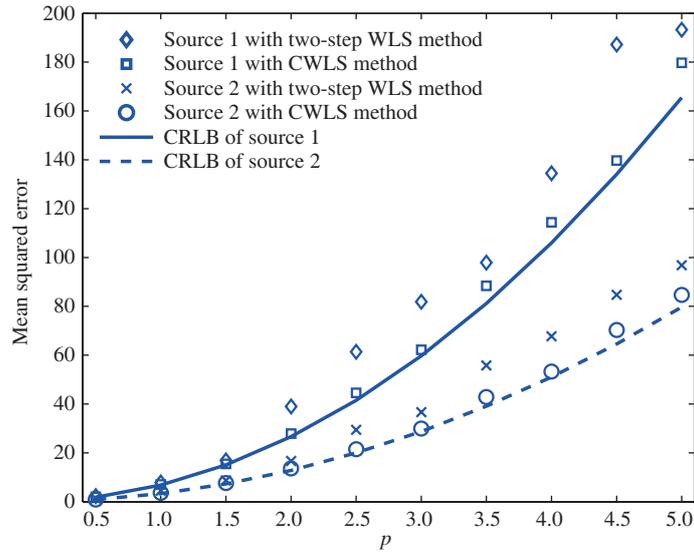


图 1 (网络版彩图) 场景一中固定  $\sigma_s$  变化  $\sigma_j$  时定位精度的比较

Figure 1 (Color online) Comparison of the localization accuracy in scenario 1 when fixing  $\sigma_s$  and varying  $\sigma_j$

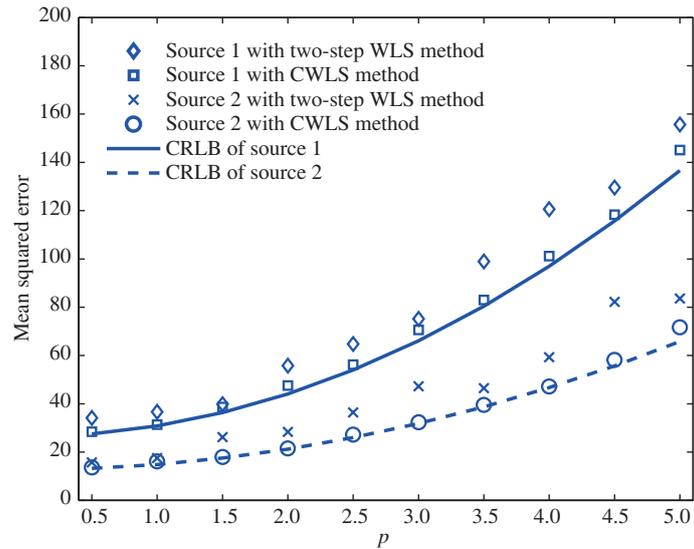


图 2 (网络版彩图) 场景一中固定  $\sigma_j$  变化  $\sigma_s$  时定位精度的比较

Figure 2 (Color online) Comparison of the localization accuracy in scenario 1 when fixing  $\sigma_j$  and varying  $\sigma_s$

CRLB. 图 1 和 2 的结果说明本文提出的 CWLS 定位迭代算法能有效且精确地解决正常场景下多无人机协作的多目标定位问题.

## 5.2 模拟实验二

考虑一个病态的多目标定位场景, 即无人机的位置构成一个均匀圆阵 (uniform circular array, UCA) 的几何结构<sup>[18]</sup>. 文献 [20] 分析了两步 WLS 方法在 UCA 结构中目标定位发散的主要原因在于需求解一些病态矩阵的逆矩阵. 下面通过 Monte Carlo 数值模拟实验来考察本文提出的 CWLS

表 2 场景二中各无人机的真实位置 (单位: m)  
Table 2 The true positions of UAVs in scenario 2 (m)

UAV number $i$	$x_i^0$	$y_i^0$	$z_i^0$
1	510	-480	30
2	510	520	30
3	-490	-480	30
4	-490	520	30
5	10	20	$30 + 500\sqrt{2}$

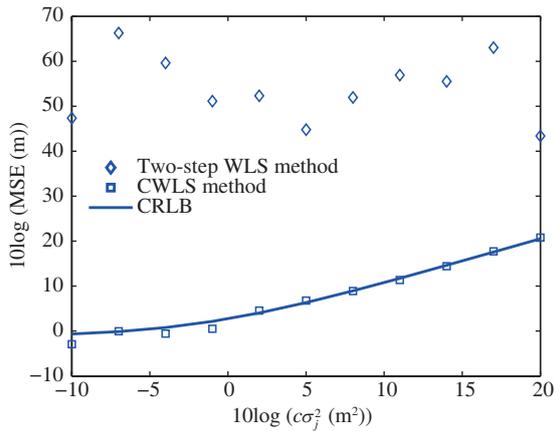


图 3 (网络版彩图) 场景二中目标  $u_1$  定位精度的比较  
Figure 3 (Color online) Comparison of the localization accuracy of source 1 in scenario 2

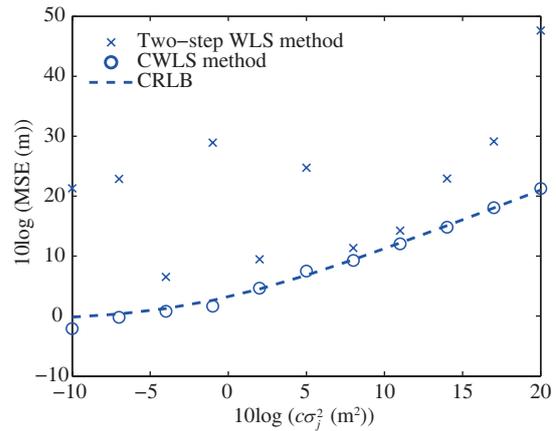


图 4 (网络版彩图) 场景二中目标  $u_2$  定位精度的比较  
Figure 4 (Color online) Comparison of the localization accuracy of source 2 in scenario 2

近似迭代算法在UCA结构中目标定位的性能. 定位场景中的无人机数量  $n = 5$ , 它们的真实位置见表 2. 两个辐射源目标的真实位置分别为  $u_1 = [10, 20, 30]^T$  m 和  $u_2 = [100, 200, 0]^T$  m, 其中第 1 个目标位于各无人机的中间位置. 无人机位置误差和 TDOA 观测噪声的构成与模拟实验一类似, 固定无人机位置误差水平  $\sigma_s = 1/\sqrt{3}$  m, 通过变化 TDOA 观测噪声水平来进行数值实验.

图 3 展示了 TDOA 观测噪声水平  $c^2\sigma_j^2$  从 -10 dB 增加到 20 dB 时 CWLS 和两步 WLS 方法对第 1 个辐射源目标的定位情况. 在  $L = 5000$  次 Monte Carlo 实验中, 本文提出的迭代算法 1 在 10 步以内收敛的概率达到 99.9%, 平均迭代次数为 7.534 次. 从图 3 可以看出两步 WLS 方法对目标  $u_1$  定位的 MSE 严重偏离其 CRLB, 而本文提出的 CWLS 定位迭代算法的 MSE 一直接近 CRLB, 尤其是在 TDOA 观测噪声水平较高的情况下, 依然能达到 CRLB 的定位精度. 图 4 展示了第 2 个辐射源目标的定位结果, 与图 3 类似, 两步 WLS 方法的 MSE 在大部分情况下严重超过 CRLB, 而 CWLS 定位迭代算法一直能实现接近 CRLB 的定位精度. 图 3 和 4 的结果说明本文提出的 CWLS 定位迭代算法在病态场景下, 也能有效且精确地解决多无人机协作的多目标定位问题.

## 6 总结

本文提出了一种基于多无人机协作的 CWLS 近似迭代多目标无源定位算法. 该算法在每次迭代

中将二次不定等式约束近似为线性等式约束, 得到的近似 CWLS 多目标定位问题具有解析最优解, 因此可高效求解. 理论分析表明, 该算法收敛的极限一定是原问题的全局最优解, 从而保证了算法的有效性.

未来的工作将侧重于研究融合 TDOA, FDOA 和 DOA 等多种观测信息的多目标无源定位算法, 以进一步提高多目标定位的精度和效率. 同时, 未来的工作还包括所研究算法在无人机硬件设备上的具体实现和应用测试.

## 参考文献

- 1 Zeng Y, Zhang R, Lim T J. Wireless communications with unmanned aerial vehicles: opportunities and challenges. *IEEE Commun Mag*, 2016, 54: 36–42
- 2 Zhu S Q, Wang D W, Low C B. Cooperative control of multiple UAVs for moving source seeking. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Unmanned Aircraft Systems*, New York, 2013. 193–202
- 3 Kwon H, Pack D J. A robust mobile target localization method for cooperative unmanned aerial vehicles using sensor fusion quality. *J Intell Robot Syst*, 2012, 65: 479–493
- 4 Khelifi F, Bradai A, Singh K, et al. Localization and energy-efficient data routing for unmanned aerial vehicles: fuzzy-logic-based approach. *IEEE Commun Mag*, 2018, 56: 129–133
- 5 Zhang J J, Yuan H. Analysis of unmanned aerial vehicle navigation and height control system based on GPS. *J Syst Eng Electron*, 2010, 21: 643–649
- 6 Seifeldin M, Saeed A, Kosba A E, et al. Nuzzer: a large-scale device-free passive localization system for wireless environments. *IEEE Trans Mobile Comput*, 2013, 12: 1321–1334
- 7 Yang K H, Wang G, Luo Z Q. Efficient convex relaxation methods for robust target localization by a sensor network using time differences of arrivals. *IEEE Trans Signal Process*, 2009, 57: 2775–2784
- 8 Lu L, Wu H C, Chang S Y. New direction-of-arrival-based source localization algorithm for wideband signals. *IEEE Trans Wirel Commun*, 2012, 11: 3850–3859
- 9 Yeredor A, Angel E. Joint TDOA and FDOA estimation: a conditional bound and its use for optimally weighted localization. *IEEE Trans Signal Process*, 2011, 59: 1612–1623
- 10 Smith J, Abel J. Closed-form least-squares source location estimation from range-difference measurements. *IEEE Trans Acoust Speech Signal Process*, 1987, 35: 1661–1669
- 11 Chan Y T, Ho K C. A simple and efficient estimator for hyperbolic location. *IEEE Trans Signal Process*, 1994, 42: 1905–1915
- 12 Stoica P, Li J. Lecture notes-source localization from range-difference measurements. *IEEE Signal Process Mag*, 2006, 23: 63–66
- 13 Ho K C, Lu X, Kovavisaruch L. Source localization using TDOA and FDOA measurements in the presence of receiver location errors: analysis and solution. *IEEE Trans Signal Process*, 2007, 55: 684–696
- 14 Beck A, Stoica P, Li J. Exact and approximate solutions of source localization problems. *IEEE Trans Signal Process*, 2008, 56: 1770–1778
- 15 Lui K, Chan F, So H C. Semidefinite programming approach for range-difference based source localization. *IEEE Trans Signal Process*, 2009, 57: 1630–1633
- 16 Picard J S, Weiss A J. Time difference localization in the presence of outliers. *Signal Process*, 2012, 92: 2432–2443
- 17 Yu H G, Huang G M, Gao J, et al. An efficient constrained weighted least squares algorithm for moving source location using TDOA and FDOA measurements. *IEEE Trans Wireless Commun*, 2012, 11: 44–47
- 18 Lin L, So H C, Chan F K W, et al. A new constrained weighted least squares algorithm for TDOA-based localization. *Signal Process*, 2013, 93: 2872–2878
- 19 Qu X M, Xie L H. Source localization by TDOA with random sensor position errors – part I: static sensors. In: *Proceedings of the 15th IEEE International Conference on Information Fusion*, Singapore, 2012. 48–53
- 20 Qu X M, Xie L H. An efficient convex constrained weighted least squares source localization algorithm based on TDOA measurements. *Signal Process*, 2016, 119: 142–152
- 21 Liu M, Quan T F, Yao T B, et al. Multi-sensor multi-target passive locating and tracking. *Acta Electron Sin*, 2006,

- 34: 991–997 [刘梅, 权太范, 姚天宾, 等. 多传感器多目标无源定位跟踪算法研究. 电子学报, 2006, 34: 991–997]
- 22 Yang L, Ho K C. An approximately efficient TDOA localization algorithm in closed-form for locating multiple disjoint sources with erroneous sensor positions. *IEEE Trans Signal Process*, 2009, 57: 4598–4615
- 23 Sun M, Ho K C. An asymptotically efficient estimator for TDOA and FDOA positioning of multiple disjoint sources in the presence of sensor location uncertainties. *IEEE Trans Signal Process*, 2011, 59: 3434–3440
- 24 Xiu J J, Wang W S, Sun P. Multiple target passive location of TDOA based on bidirectional elect and nearest neighbor method. *J Astronautics*, 2015, 36: 483–488 [修建娟, 汪望松, 孙鹏. 双向互选最近邻准则下的多目标 TDOA 无源定位. 宇航学报, 2015, 36: 483–488]
- 25 Sundar H, Sreenivas T V, Seelamantula C S. TDOA-based multiple acoustic source localization without association ambiguity. *IEEE/ACM Trans Audio Speech Lang Process*, 2018, 26: 1976–1990
- 26 Luo Z Q, Ma W K, So A M, et al. Semidefinite relaxation of quadratic optimization problems. *IEEE Signal Process Mag*, 2010, 27: 20–34

## 附录 A 定理 1 的证明

将优化问题 (22) 中的  $m$  个线性等式约束写成矩阵形式:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad (\text{A1})$$

根据矩阵广义逆理论<sup>1)</sup>, 线性方程 (A1) 的通解可以表示为

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{0} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})\boldsymbol{\xi},$$

其中  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{4m}$  可以为任意向量. 显然  $\mathbf{A}$  是一个行满秩的矩阵, 有

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{A}')^{-1},$$

因此, 线性方程 (A1) 的通解也可表示为

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{P}\boldsymbol{\xi}. \quad (\text{A2})$$

将通解 (A2) 代入优化问题 (22) 的目标函数, 得到

$$\bar{\mathbf{u}}' \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{u}} - 2\bar{\mathbf{h}}' \bar{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\xi}' \mathbf{P}' \bar{\mathbf{W}} \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} - 2\bar{\mathbf{h}}' \mathbf{P} \boldsymbol{\xi},$$

其中  $\mathbf{P}$  是一个对称矩阵. 根据矩阵伪逆的基本性质, 有

$$\mathbf{P} \bar{\mathbf{W}} \mathbf{P} (\mathbf{P} \bar{\mathbf{W}} \mathbf{P})^\dagger \mathbf{P} \bar{\mathbf{h}} = \mathbf{P} \bar{\mathbf{h}},$$

因此,

$$\bar{\mathbf{u}}' \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{u}} - 2\bar{\mathbf{h}}' \bar{\mathbf{u}} = (\boldsymbol{\xi} - (\mathbf{P} \bar{\mathbf{W}} \mathbf{P})^\dagger \mathbf{P} \bar{\mathbf{h}})' \mathbf{P} \bar{\mathbf{W}} \mathbf{P} (\boldsymbol{\xi} - (\mathbf{P} \bar{\mathbf{W}} \mathbf{P})^\dagger \mathbf{P} \bar{\mathbf{h}}) - \bar{\mathbf{h}}' (\mathbf{P} \bar{\mathbf{W}} \mathbf{P})^\dagger \mathbf{P} \bar{\mathbf{h}}. \quad (\text{A3})$$

显然, 最小化二次目标函数等价于取  $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{P} \bar{\mathbf{W}} \mathbf{P})^\dagger \mathbf{P} \bar{\mathbf{h}}$ . 由于  $\mathbf{P} (\mathbf{P} \bar{\mathbf{W}} \mathbf{P})^\dagger = (\mathbf{P} \bar{\mathbf{W}} \mathbf{P})^\dagger$  且  $(\mathbf{P} \bar{\mathbf{W}} \mathbf{P})^\dagger$  是一个对称矩阵, 有

$$\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{P} \bar{\mathbf{W}} \mathbf{P})^\dagger \mathbf{P} \bar{\mathbf{h}}. \quad (\text{A4})$$

将式 (A4) 代入通解 (A2) 中, 可得式 (23) 是优化问题 (22) 的最优解.

## 附录 B 定理 2 的证明

从方程 (28) 和 (29) 的条件可知,  $\hat{\mathbf{u}}$  一定是优化问题:

$$\min_{\bar{\mathbf{u}}} \bar{\mathbf{u}}' \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{u}} - 2\bar{\mathbf{h}}' \bar{\mathbf{u}} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{\mathbf{u}}' \mathbf{C}_j \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{B1})$$

的最优解, 那么, 对原问题 (19) 的任意可行解  $\bar{\mathbf{u}}$  都有

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}' \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{u}} - 2\bar{\mathbf{h}}' \bar{\mathbf{u}} &= \bar{\mathbf{u}}' \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{u}} - 2\bar{\mathbf{h}}' \bar{\mathbf{u}} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{\mathbf{u}}' \mathbf{C}_j \bar{\mathbf{u}} \\ &\geq \hat{\mathbf{u}}' \bar{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{u}} - 2\bar{\mathbf{h}}' \hat{\mathbf{u}} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \hat{\mathbf{u}}' \mathbf{C}_j \hat{\mathbf{u}} \\ &= \hat{\mathbf{u}}' \bar{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{u}} - 2\bar{\mathbf{h}}' \hat{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

其中第 1 个等式成立是由于  $\bar{\mathbf{u}}$  是原问题 (19) 的可行解, 最后一个等式成立是由于方程 (30) 的条件. 因此,  $\hat{\mathbf{u}}$  一定是优化问题 (19) 的全局最优解.

1) Ben-Israel A, Greville T N E. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. 2nd ed. Hoboken: Wiley, 2002.

### 附录 C 定理 3 的证明

首先证明如果序列  $\{\hat{\mathbf{u}}^k, k = 0, 1, \dots\}$  收敛到  $\hat{\mathbf{u}}$ , 那么算法 1 涉及的变量序列  $\{\bar{\mathbf{u}}^k\}, \{\bar{\mathbf{W}}^k\}, \{\bar{\mathbf{h}}^k\}$  和  $\{\mathbf{P}^k\}$  也是收敛的. 由算法 1 的第 5 步和第 10 步更新策略可得

$$\bar{\mathbf{u}}^k = 2\hat{\mathbf{u}}^k - \hat{\mathbf{u}}^{k-1},$$

因此,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{u}}^k = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{u}}^k - \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{u}}^{k-1} = 2\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}$ . 根据式 (10), (11), (15) 和 (18) 可知, 权矩阵  $\mathbf{W}$  是关于目标位置  $\mathbf{u}$  的连续函数, 因此如果序列  $\{\hat{\mathbf{u}}^k, k = 0, 1, \dots\}$  收敛到  $\hat{\mathbf{u}}$ , 那么其更新的权矩阵序列  $\{\mathbf{W}(\hat{\mathbf{u}}^k), k = 0, 1, \dots\}$  也将收敛, 记其极限为  $\bar{\mathbf{W}}(\hat{\mathbf{u}})$ . 由于式 (20) 和 (21) 可知  $\bar{\mathbf{W}}$  和  $\bar{\mathbf{h}}$  均是关于  $\mathbf{W}$  的连续函数, 所以算法 1 更新的序列  $\{\bar{\mathbf{W}}^k\}$  和  $\{\bar{\mathbf{h}}^k\}$  均收敛, 记其极限分别为  $\bar{\mathbf{W}}(\hat{\mathbf{u}})$  和  $\bar{\mathbf{h}}(\hat{\mathbf{u}})$ , 即

$$\bar{\mathbf{W}}(\hat{\mathbf{u}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{W}}^k, \quad \bar{\mathbf{h}}(\hat{\mathbf{u}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{h}}^k. \quad (\text{C1})$$

同理, 由式 (24) 更新的序列  $\{\mathbf{P}^k\}$  也是收敛的, 记其极限为  $\mathbf{P}(\hat{\mathbf{u}})$ .

根据定理 1, 算法 1 中的  $\bar{\mathbf{u}}^k$  是近似 CWLS 多目标定位问题:

$$\min_{\bar{\mathbf{u}}} \bar{\mathbf{u}}' \bar{\mathbf{W}}^k \bar{\mathbf{u}} - 2(\bar{\mathbf{h}}^k)' \bar{\mathbf{u}} \quad \text{s.t.} \quad (\hat{\mathbf{u}}^k)' \mathbf{C}_j \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (\text{C2})$$

的最优解. 由于问题 (C2) 是一个凸优化问题, 因此其最优解  $\bar{\mathbf{u}}^k$  必定满足该问题的 Karush-Kuhn-Tucher (KKT) 条件<sup>2)</sup>, 即存在  $\bar{\lambda}_j^k \in \mathbb{R} (j = 1, \dots, m)$ , 使得下面的方程组:

$$\bar{\mathbf{W}}^k \bar{\mathbf{u}}^k + \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_j^k \mathbf{C}_j \hat{\mathbf{u}}^k = \bar{\mathbf{h}}^k, \quad (\text{C3})$$

$$(\hat{\mathbf{u}}^k)' \mathbf{C}_j \bar{\mathbf{u}}^k = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (\text{C4})$$

成立. 根据权矩阵的构造式 (10), (11), (15) 和 (20) 可知, 算法 1 中的矩阵  $\bar{\mathbf{W}}^k$  在每次迭代中都是正定矩阵, 因此由 (C3) 式可得

$$\bar{\mathbf{u}}^k = (\bar{\mathbf{W}}^k)^{-1} \left( \bar{\mathbf{h}}^k - \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_j^k \mathbf{C}_j \hat{\mathbf{u}}^k \right). \quad (\text{C5})$$

将 (C5) 式代入 (C4) 中, 有

$$\mathbf{a}_j^k \bar{\mathbf{h}}^k = \sum_{j=1}^m \mathbf{a}_j^k \mathbf{C}_j' \hat{\mathbf{u}}^k \bar{\lambda}_j^k \quad (j = 1, \dots, m), \quad (\text{C6})$$

其中  $\mathbf{a}_j^k = (\hat{\mathbf{u}}^k)' \mathbf{C}_j (\bar{\mathbf{W}}^k)^{-1}$ . 根据 (31) 和 (C1), 可得

$$\mathbf{a}_j \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_j^k = \hat{\mathbf{u}}' \mathbf{C}_j (\bar{\mathbf{W}}(\hat{\mathbf{u}}))^{-1} \quad (j = 1, \dots, m), \quad (\text{C7})$$

因此, 方程组 (C6) 的解  $(\bar{\lambda}_1^k, \dots, \bar{\lambda}_m^k)$  也是收敛的, 记其极限为  $(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m)$ .

现在对方程 (C3) 两边取极限, 可得

$$\bar{\mathbf{W}}(\hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}} + \sum_{j=1}^m \hat{\lambda}_j \mathbf{C}_j \hat{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{h}}(\hat{\mathbf{u}}). \quad (\text{C8})$$

此外, 对 (C4) 式取极限, 有对  $\forall j = 1, \dots, m$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{u}}^k)' \mathbf{C}_j \bar{\mathbf{u}}^k = \hat{\mathbf{u}}' \mathbf{C}_j \hat{\mathbf{u}} = 0. \quad (\text{C9})$$

对比原问题 (19) 全局最优解的充分性条件 (28)~(30), 还需验证  $\bar{\mathbf{W}}(\hat{\mathbf{u}}) + \sum_{j=1}^m \hat{\lambda}_j \mathbf{C}_j \geq \mathbf{0}$ . 根据定理 1, 算法 1 中的  $\bar{\mathbf{u}}^k$  需要满足

$$(\mathbf{P}^k \bar{\mathbf{W}}^k \mathbf{P}^k) \bar{\mathbf{u}}^k = \bar{\mathbf{h}}^k, \quad (\text{C10})$$

其中  $\mathbf{P}^k = \mathbf{I} - \mathbf{A}^{k\dagger} \mathbf{A}^k$ ,  $\mathbf{A}^k = [(\hat{\mathbf{u}}^k)' \mathbf{C}_1; \dots; (\hat{\mathbf{u}}^k)' \mathbf{C}_m]$ . 显然矩阵  $\mathbf{A}^k$  是行满秩的, 因此

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^{k\dagger} = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{u}})^\dagger, \quad (\text{C11})$$

其中  $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{u}}) = [\hat{\mathbf{u}}' \mathbf{C}_1; \dots; \hat{\mathbf{u}}' \mathbf{C}_m]$ . 对方程 (C10) 两边取极限, 可得

$$(\mathbf{P}(\hat{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{W}}(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{P}(\hat{\mathbf{u}})) \hat{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{h}}(\hat{\mathbf{u}}), \quad (\text{C12})$$

2) Boyd S, Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

其中  $\mathbf{P}(\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{u}})^\dagger \mathbf{A}(\hat{\mathbf{u}})$ . 对比 (C8) 和 (C12) 式, 最终可得

$$\bar{\mathbf{W}}(\hat{\mathbf{u}}) + \sum_{j=1}^m \hat{\lambda}_j \mathbf{C}_j = \mathbf{P}(\hat{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{W}}(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{P}(\hat{\mathbf{u}}) \succeq \mathbf{0}. \quad (\text{C13})$$

最终, 从式 (C8), (C9) 和 (C13) 可以看出,  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m)$  满足优化问题 (19) 全局最优解的充分性条件 (28)~(30). 因此, 由算法 1 得到的近似解序列的极限一定是原问题 (19) 的全局最优解.

## Multi-source passive localization via multiple unmanned aerial vehicles

Xiao-Mei QU<sup>1,2</sup>, Tao LIU<sup>1,2\*</sup> & Wen-Rong TAN<sup>1,2</sup>

1. *The Key Laboratory for Computer Systems of State Ethnic Affairs Commission, Southwest Minzu University, Chengdu 610041, China;*

2. *School of Computer Science and Technology, Southwest Minzu University, Chengdu 610041, China*

\* Corresponding author. E-mail: swun.liu@hotmail.com

**Abstract** Passive source localization via multiple unmanned aerial vehicles (UAVs) is a key technology for the practical application of military reconnaissance. Previous studies primarily focused on the localization of a single source. This study explores the multi-source passive localization problem using time difference of arrival (TDOA) measurements. We formulate the localization problem as a constrained weighted least squares problem. The formulation is an indefinite quadratically constrained quadratic programming problem, which is non-convex and NP-hard. To obtain approximate programming with linear constraints, an iterative constrained weighted least squares (CWLS) algorithm is proposed to perform a linearization procedure on the quadratic equality constraints. Theoretical analysis reveals that the proposed algorithm, if converges, can lead to a global optimal solution of the formulated problem. The results of the Monte Carlo experiment indicate that the proposed algorithm quickly converges in most situations and offers better localization accuracy compared with the previous two-step weighted least squares method.

**Keywords** unmanned aerial vehicle, passive localization, multi-source, time difference of arrival, constrained weighted least squares



**Xiao-Mei QU** was born in 1983. She received her B.S. degree in applied mathematics, in 2005, and her Ph.D. degree in probability and statistics, in 2010, all from Sichuan University, Chengdu, China. She is currently a Professor at College of Computer Science and Technology, Southwest Minzu University, Chengdu, China. She was a research fellow at School of Electrical and Electronic Engineering, Nanyang Technological University, Singapore, from May 2011 to February 2013. Her research interests include information fusion, source localization, target tracking, and robust estimation in wireless sensor networks.



**Wen-Rong TAN** was born in 1968. She received her B.S. degree in computer science from Sichuan University, Chengdu, China, in 1988, and M.S. degree in computer science from Chongqing University, Chongqing, China, in 1991. Since 1991, she has been in College of Computer Science and Technology, Southwest Minzu University, Chengdu, China, where she is currently a Professor and Dean of the faculty. Her research interests include the Internet of Things, wireless sensor networks, and distributed algorithms.



**Tao LIU** was born in 1978. He received his B.S. degree from Nanjing University of Posts and Telecommunications, in 2000; his M.S. degree from the University of Electronic Science and Technology of China, in 2004; and his Ph.D. degree from Sichuan University, in 2012; all degrees were in computer science. He was a visiting scholar at Columbia University, New York, NY, USA, from 2015 to 2016. He is currently an Associate Professor at School of Computer Science and Technology, Southwest Minzu University, Chengdu, China. His current research interests include ad-hoc networks and wireless sensor networks.