

多平衡点二维切换线性时不变系统的极点配置

朱礼营^{1,2*}, 邱剑彬²

1. 山东工商学院管理科学与工程学院, 烟台 264005

2. 哈尔滨工业大学航天学院智能控制与系统研究所, 哈尔滨 150080

* 通信作者. E-mail: lyzhu@sdtbu.edu.cn

收稿日期: 2018-04-19; 修回日期: 2018-08-10; 接受日期: 2018-08-22; 网络出版日期: 2019-08-09

山东省自然科学基金资助项目 (批准号: ZR2017MF071, ZR2017MA018)、国家自然科学基金资助项目 (批准号: 61873311)、哈尔滨工业大学机器人技术与系统国家重点实验室项目 (批准号: SKLRS201801A03) 和山东工商学院博士启动基金资助项目 (批准号: BS201617) 资助

摘要 本文研究多平衡点二维切换线性时不变 (LTI) 系统极点配置问题. 对每一子系统都含有唯一平衡点情形, 首先给出了该类多平衡点切换系统可任意切换路径极点配置的一个充要条件. 然后, 用一个数值算例表明: 即使将二维闭环切换 LTI 系统的所有子系统的全部极点都配置到左复半平面内的两个相同位置, 也不能保证该类切换系统在任意切换路径下都稳定. 其次, 对所有子系统具有单 (唯一共同) 平衡点和多平衡点情形, 分别给出该类切换系统可任意切换路径和任意拟周期/周期切换路径镇定极点配置的若干充分性判据, 并据此设计了相应算法. 所得结果揭示: 用极点配置法来镇定切换 LTI 系统, 可以将部分或全部子系统的全部或部分极点配置到右复半平面内的合适位置. 最后, 一个数值仿真算例表明所得新结果的有效性和可操作性.

关键词 切换系统, 线性子系统, 状态反馈, 镇定控制, 多平衡点, 极点配置, 算法

1 引言

极点 (特征值) 配置是非切换线性时不变 (linear time-invariant, LTI) 系统综合的基本方法^[1], 与该类系统的稳定性和镇定性密切相关. 而系统稳定性是动态系统最基本性能, 也是可控系统控制设计基础. 众所周知, 非切换 LTI 系统稳定与否, 取决于其极点实部符号. 如, 该类系统渐近稳定等价于其全部极点皆有负实部^[2]. 这也是系统状态反馈控制设计的最主要目标. 系统状态反馈与其极点配置密切相关: 用极点配置法可实现系统众多优良性能, 如稳定性、鲁棒性^[3]及跟踪等. 非切换 LTI 系统的极点配置研究始于 1960 年, 学者们对其做了开拓性研究, 并取得了许多结果^[4,5]. 其中, 标志性结论是非切换 LTI 系统可任意极点配置与其可控性等价^[5]. 自此, 用极点配置法对系统控制设计, 成为控制理论和工程界研究热点, 获得了众多研究结果^[3,6,7]. 事实上, 由于对系统极点配置目的是为了获取其更好性能, 故当用极点配置法使系统达到某预设性能时, 非切换闭环 LTI 系统的极点不能被配置到

引用格式: 朱礼营, 邱剑彬. 多平衡点二维切换线性时不变系统的极点配置. 中国科学: 信息科学, 2019, 49: 1031–1049, doi: 10.1360/N112018-00095

Zhu L Y, Qiu J B. Pole assignment of two-dimensional switched linear time-invariant systems with multiple equilibria (in Chinese). Sci Sin Inform, 2019, 49: 1031–1049, doi: 10.1360/N112018-00095

复平面内的任意位置. 如, 设计状态反馈控制器来渐近镇定某非切换 LTI 系统时, 其全部极点必须都被配置到左复半平面内.

显然, 极点配置在非切换 LTI 系统综合中至关重要. 类似地, 极点配置在切换 LTI 系统^[8~12]综合中也起关键作用: 将是切换系统理论联系实际的纽带. 因此, 研究切换 LTI 系统极点配置问题具有极其重要的理论和实际意义. 然而, 研究切换 LTI 系统极点配置问题要比非切换 LTI 系统困难和复杂得多. 原因是, 切换 LTI 系统动态并非唯一取决于其子系统极点. 这已被文献 [13] 中例 2.1 和 2.4 所证实: 含全部渐近稳定子系统的切换 LTI 系统在某些切换路径下不稳定; 而含不稳定子系统的切换 LTI 系统在合适切换路径下却渐近稳定. 如, 单鞍点/不稳定焦点切换 LTI 系统当满足合适条件时全局渐近稳定^[14~16]. 因此, 用极点配置法获取切换 LTI 系统某预设性能的常规思路是, 不仅将所有子系统全部极点都配置到左复半平面内, 而且还需要添加其他限制条件才能保证该类系统具有期望性能. 于是, 学者们用线性矩阵不等式 (linear matrix inequalities, LMIs) 法^[17] 和多李亚普诺夫函数 (multiple Lyapunov functions, MLFs) 法^[13] 等方法, 给出了切换 LTI 系统极点配置的相关结果^[18~20]. 但问题是, 是否必须将所有子系统全部极点都配置到左复半平面内?

本文将表明, 通过极点配置法来镇定多平衡点切换 LTI 系统时, 可以将部分/全部子系统的全部/部分极点配置到右复半平面内的合适位置. 多平衡点切换 LTI 系统极点配置问题与其稳定性研究密切相关. 而学者们自 1990 年以来所研究的切换系统, 绝大部分都是单平衡点切换系统^[13, 21, 22], 可视其为一类平凡多平衡点 (全部相同) 切换系统. 因神经网络^[23]、混合电路^[24]、电力系统^[25], 及宏观经济^[26] 等众多实际切换系统中存在多平衡点, 故对多平衡点切换系统研究具有极其重要的理论意义和实际应用价值. 然而, 文献 [26] 中的反例却证实: 共同李亚普诺夫函数法 (common Lyapunov function, CLF)^[27] 在研究多平衡点切换系统任意切换下区域稳定时失效. 这表明, 用以分析单平衡点切换系统稳定性的诸如 CLF, MLFs, LMIs 以及多储能函数法 (multiple storage functions, MSFs)^[22] 等许多常用方法, 都不能直接用来研究多平衡点切换系统. 因此, 多平衡点切换系统的研究显得极其困难和复杂. 尽管已取得了带有稳定子系统的多平衡点切换系统分析和综合的若干结果^[28~34], 但研究含不稳定子系统的多平衡点切换系统仍是一巨大挑战.

众所周知, 包括切换非线性系统^[13, 21, 22, 35, 36] 在内的大多数动力系统^[37, 38] 的稳定性判据与其 Lyapunov 函数密切相关. 若某个动力系统不稳定, 则其 Lyapunov 函数必不存在. 为克服这一局限性, 文献 [39] 提出了一种适用于含不稳定子系统的切换非线性系统稳定分析的新方法——最大能量函数法 (maximum energy function, MEF), 并由此给出了该类切换系统稳定/渐近稳定的若干充要条件. 特别是, MEF 法还能用来分析含稳定子系统的多平衡点切换非线性系统的区域稳定性^[25, 40]. 特别地, 在没有借助任何 (类) Lyapunov 函数或其他函数或矩阵下, 文献 [14, 15] 给出了单鞍点切换 LTI 系统的若干稳定性和镇定性判据. 另外, 平均逗留时间法被用来分析含部分不稳定子系统的单平衡点切换系统的稳定性^[41]. 而对于多平衡点切换系统, 利用解析法和极坐标变换等方法, 我们相继在文献 [42~44] 中研究并得到了含不稳定子系统的多焦点/中心二维切换 LTI 系统在切换线和周期/拟周期切换路径下区域稳定/镇定的若干判据.

基于文献 [16, 44] 所得二维切换 LTI 系统稳定、区域稳定或镇定的相关结果, 本文将研究该类切换系统的极点配置问题. 与现有文献 [18~20] 相比较, 本文的主要贡献和创新点在于, 给出了系统可任意切换路径极点配置和任意周期/拟周期切换路径镇定极点配置的若干新理论结果; 设计了镇定极点配置的相应算法; 尤其是, 理论证明并明确指出了当用极点配置法来镇定切换 LTI 系统时, 可以将部分/全部子系统的全部/部分极点都配置到右半复平面内的合适位置. 详细而言, 本文首先给出了多平衡点二维切换 LTI 系统可任意极点配置的一个充要条件. 然后, 用一数值算例表明: 当用极点配置法

来渐近镇定切换 LTI 系统时,即使将所有子系统的全部极点都配置到左复半平面内的两个相同位置,也不足以保证该系统在任意切换路径下都渐近稳定.这说明切换 LTI 系统镇定极点配置不能太“任意”,必须给出其他限制条件.随后,我们给出了系统在任意切换路径和任意周期/拟周期切换下可镇定极点配置的几个充分条件,并据此设计了相应算法.最后,数值仿真算例表明所得新结论的有效性和可操作性.这些极点配置结果与文献 [18~20] 中的结果比较,主要区别在于如下 4 个方面:仅依赖于系统矩阵和切换周期/拟周期;适用于多平衡点切换 LTI 系统且简单和易于验证;给出了求解分布式状态反馈矩阵算法;允许将子系统的极点配置到右复半平面内.

记号: \mathbb{N}/\mathbb{N}_+ 表示自然数集/正整数集; \mathbb{R}/\mathbb{R}_+ 表示实数域/正实数域; \mathbb{C} 表示复数域; \mathbb{R}^n 表示 n 维欧几里得空间; $\|\cdot\|$ 表示 \mathbb{R}^n 内的欧几里得范数; $\mathbb{R}^{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 矩阵空间; 上标“ T ”表示矩阵转置; $d(x, y) = \|x - y\|$ 表示 \mathbb{R}^n 内两点 x 和 y 的距离; $\mathbb{P}(N)$ 表示 1 到 N 的 N 个自然数的全排列集合.

2 预备知识

考虑单输入多平衡点二维闭环切换 LTI 控制系统如下:

$$\dot{x} = A_\sigma(x - x_\sigma^e) + B_\sigma u, \quad x(t_0) = x_0, \quad \forall t \in [t_0, +\infty), \quad (1)$$

其中, $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{D}$ 表示系统状态, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ 是系统定义域. 映射 $\sigma: [t_0, +\infty) \rightarrow [N] := \{1, 2, \dots, N\}$, $N \in \mathbb{N}_+$, 是一分段右连续阶梯状函数, 称之为切换路径或切换律; 当 $i = \sigma(t)$ 表示子系统 i 在时刻 t 时起作用. 系统矩阵 $A_i = (a_{kl}^i)_{2 \times 2}$ 和 $B_i = [b_1^i, b_2^i]^T$, 其中, $a_{kl}^i, b_k^i \in \mathbb{R}$, $k, l = 1, 2$ 和 $i \in [N]$. 系统静止状态 $x_i^e = [x_1^{ei}, x_2^{ei}]^T \in \mathbb{R}^2$ 是子系统 i 唯一平衡点. 所有平衡点 $x_i^e, \forall i \in [N]$, 有两种情形: 完全相同, 即单一共同平衡点; 不尽相同, 即多平衡点. 与之对应的系统 (1) 分别称为单平衡点切换系统和多平衡点切换系统. 输入 $u = u_\sigma \in \mathbb{R}$ 是无系统外部信号 (或参考输入) 的状态反馈控制, 其形式如下:

$$u = u_\sigma = -F_\sigma(x - x_\sigma^e), \quad (2)$$

其中, $F_\sigma \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ 是状态反馈增益矩阵. 当 (2) 式中 $\sigma = i$ 时, 输入 u 即为子系统 i 的状态反馈控制器:

$$u_i = -F_i(x - x_i^e), \quad i \in [N], \quad (3)$$

其中, $F_i = [f_1^i, f_2^i] \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ 表示子系统 i 的分布式状态反馈增益矩阵.

我们用 $x(t) := x(t; t_0, x_0, \sigma(t))$ 表示系统 (1) 的轨迹/状态. 切换路径仅涉及如下两类. (i) 任意切换路径: 是指切换时刻任意且任意时刻起作用的子系统的选取也任意的切换路径. 据此, 非切换系统可视为一平凡切换系统——仅有唯一子系统自始至终起作用的切换系统. (ii) 周期/拟周期切换路径 (periodic/quasi-periodic switching path, PSP/QSP)¹⁾: 是由文献 [15] 所定义. 若切换路径 σ 是一 PSP/QSP, 则可表示为

$$\sigma(t) = i_v \in [N], \quad \forall t \in [t_{kN+(v-1)}, t_{kN+v}), \quad (4)$$

其中, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall v \in [N]$, 且 $t_{Nk+v} - t_{Nk+v-1} =: T_{i_v} > 0$ 是子系统 i_v 的拟切换周期 (quasi-periodical switching cycle, QSC), 而 $T_i = T_j =: T, \forall i, j \in [N]$, 则是所有子系统的共同切换周期 (common

1) 在文献 [15] 中, 称系统 (1) 的切换路径 $\sigma(t) = i_{m+1} \in [N], \forall t \in [t_m, t_{m+1}), m \in \mathbb{N}$, 为一周期切换路径 (PSP) 或拟周期切换路径 (QSP), 若切换指标序列 $\{i_m\}_{m=1}^{+\infty}$ 和切换时间序列 $\{t_m\}_{m=0}^{+\infty}$ 满足 $i_{Nk+v} = i_v \in [N], t_{Nk+v} - t_{Nk+v-1} = T > 0, i_v \neq i_{v+1}$ or $i_{Nk+v} = i_v \in [N], t_{Nk+v} - t_{Nk+v-1} = T_{i_v} > 0, T_{i_v} \neq T_{i_{v+1}}$, 其中, $i_v \neq i_{v+1}, T$ 和 T_{i_v} 是正常数, $\forall v \in [N], \forall k \in \mathbb{N}$.

periodical switching cycle, CPSC). 用 $\{i_v\}_{v=1}^N$ 和 $\{T_{i_v}\}_{v=0}^N$ 分别表示切换路径 σ 的切换指标序列和子系统的切换拟周期序列. 而 $i_1 i_2 \cdots i_N \in \mathbb{P}(N)$ 表示与路径 σ 相对应的相继子系统的切换指标序列 $\{i_v\}_{v=1}^N$ 的一个全排列. 这里, i_v 表示该排列的第 v 个数. 此处的切换指标序列 $\{i_v\}_{v=1}^N$ 和全排列 $i_1 i_2 \cdots i_N \in \mathbb{P}(N)$ 等价. 注意, 任意 PSP/QSP 是指切换指标序列 $\{i_v\}_{v=1}^N$ 可在 $\mathbb{P}(N)$ 中任意取值, 并且 QSC 序列 $\{T_{i_v}\}_{v=1}^N$ 和 CPSC T 可分别在 \mathbb{R}_+^N 和 \mathbb{R}_+ 中任意选取的 PSP/QSP.

本文的主要目的是通过极点配置方法来镇定系统 (1). 与极点配置有关的多平衡点切换系统区域稳定/镇定的概念参见文献 [26, 39, 40, 42]. 下面, 给出几类多平衡点切换 LTI 系统极点配置概念.

定义1 考虑系统 (1) 和满足如下性质的区域 $\Omega_e \subseteq \mathbb{D}$:

$$x_i^e \in \Omega_e, \forall i \in [N], \text{ 以及 } \Omega_e = \{x^e\}, \text{ 若 } x_i^e = x^e, \forall i \in [N]. \quad (5)$$

对给定的 $A_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 和 $B_i \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, \forall i \in [N]$, 称系统 (1) 关于区域 Ω_e 在切换路径 σ 下可有如下极点配置:

- 任意极点配置, 若存在 N 个增益矩阵 $F_i \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, 使得 $A_i - B_i F_i$ 的全部 $2N$ 个特征值可配置到复平面 \mathbb{C} 内的任意实数或共轭复数位置;
- 共同极点配置, 若存在 N 个增益矩阵 $F_i \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ 使得 $A_i - B_i F_i$ 的全部 N 组特征值 (每组含相应矩阵的两个特征值) 都可配置到复平面 \mathbb{C} 内的任意相同组的两个实数或一对共轭复数位置;
- 不同极点配置, 若存在 N 个增益矩阵 $F_i \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, 使得 $A_i - B_i F_i$ 的全部 N 组特征值 (每组含相应矩阵的两个特征值) 都可配置到复平面 \mathbb{C} 内的任意不同组的两个实数或一对共轭复数位置;
- 镇定极点配置, 若存在 N 个增益矩阵 $F_i \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ 使得 $A_i - B_i F_i$ 的全部 $2N$ 个特征值配置到复平面 \mathbb{C} 内合适的实数或共轭复数位置, 并且使得闭环系统 (1) 在切换路径 σ 下关于 Ω_e 区域渐近稳定.

进一步地, 称系统 (1) 可任意切换路径或任意 PSPs/QSPs 共同/不同/镇定极点配置, 若它们在任意切换路径或任意 PSPs/QSPs 下关于区域 Ω_e 都可任意/共同/不同/镇定极点配置. 在不引起混淆的情形下, 称任意切换路径极点配置为任意极点配置.

注释1 若所有平衡点 x_i^e 都相同, 则定义 1 所给出的几类极点配置定义, 同样适用于单平衡点切换 LTI 系统. 并且, 由定义 1 可知, 任意极点配置概念包含共同、不同和镇定极点配置.

3 主要结论

本节给出系统 (1) 的几个极点配置结果. 3.1 小节将给出任意切换路径极点配置的一个充要条件. 3.2 小节给出可镇定极点配置的 3 个判据. 据此, 3.3 小节中设计了两个可镇定极点配置算法.

3.1 任意极点配置

引理1 切换控制系统 (1) 关于满足 (5) 式的区域 Ω_e 一致完全可控的充要条件是

$$\text{rank}(B_i \dot{A}_i B_i) = 2, \forall i \in [N]. \quad (6)$$

证明 该结论可由文献 [10] 中定理 1 的证明过程类似可证.

引理2 (非切换 LTI 系统的任意极点配置 [2]) 对给定矩阵 $A_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 和 $B_i \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, i \in [N]$, 存在状态增益矩阵 $F_i \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ 使得 $A_i - B_i F_i$ 的两个特征值可配置到复平面 \mathbb{C} 内任意两个实数或一对共轭复数位置的充要条件是, (A_i, B_i) 是可控或可达的 (从子系统 i 的平衡点 x_i^e 出发).

定理1 (任意极点配置) 考虑系统 (1) 和满足定义 1 中 (5) 式的区域 Ω_e . 给定 $A_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 和 $B_i \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, \forall i \in [N]$, 系统 (1) 关于区域 Ω_e 可任意切换路径极点配置的充要条件是, 引理 1 中 (6) 式成立.

证明 必要性. 反证法. 假设系统 (1) 虽然可任意切换路径极点配置, 但存在一指标 $l \in [N]$ 使得 (6) 式不成立. 故由引理 1 知, 系统 (1) 关于区域 Ω_e 并非一致完全能控. 即, 存在一平凡切换路径 $\bar{\sigma}(t) \equiv l, \forall t \in [t_0, +\infty)$, 使得系统 (1) (即子系统 l) 在路径 $\bar{\sigma}$ 下不可控. 于是, 由引理 2 可知, 必存某个 $p_i \in \mathbb{C}$ 使得子系统 l 的一极点不能配置到 p_i 位置. 由定义 1 知, 这与系统 (1) 可任意配置极点相矛盾.

充分性. 由引理 1 中 (6) 式知 $(A_i, B_i), \forall i \in [N]$, 完全可控. 据引理 2 及定义 1 中所引入的任意切换路径极点配置的概念, 可知充分性成立.

注释2 与非切换 LTI 系统的极点配置类似, 单输入情形的系统 (1) 的每一子系统 $i (i \in [N])$ 的状态反馈增益矩阵 F_i 都是唯一的.

注释3 因切换 LTI 系统一致完全可控并非是其可镇定极点配置的充要条件, 故对切换 LTI 系统而言, 任意极点配置可能难以保证其在任意切换路径下具有某期望性能, 尽管其极点可“任意”配置.

类似文献 [1] 中所给极点配置算法, 我们基于定理 1 设计系统 (1) 的任意极点配置伪代码算法 (见算法 1).

算法 1 系统 (1) 的任意极点配置的伪代码算法

输入: $A_1, B_1, \lambda_{11}^*, \lambda_{12}^*, \dots, A_N, B_N, \lambda_{N1}^*, \lambda_{N2}^*$;

主程序计算: F_i ;

```

1: for  $i = 1$  to  $N$  do
2:    $M_i \leftarrow [A_i B_i, B_i]$ ;
3:    $s^2 + a_{i1}s + a_{i0} \leftarrow \det(sI - A_i)$ ;
4:    $s^2 + a_{i1}^*s + a_{i0}^* \leftarrow (s - \lambda_{i1}^*)(s - \lambda_{i2}^*)$ ;
5:   if  $\text{rank}(M_i) = 2$  then
6:      $\bar{F}_i \leftarrow [a_{i0}^* - a_{i0}, a_{i1}^* - a_{i1}]$ ;
7:      $P_i \leftarrow M_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{i1} & 1 \end{bmatrix}$ ;
8:      $Q_i \leftarrow P_i^{-1}$ ;
9:      $F_i \leftarrow \bar{F}_i Q_i$ ;
10:  else
11:     $F_i \leftarrow [0, 0]$ ;
12:  end if
13:   $i = i + 1$ ;
14: end for

```

输出: F_1, \dots, F_N .

注释4 由算法 1 的第 10 和 11 步可知, 输出 $F_i = 0$ 表示子系统 i 不能完全可控.

3.2 镇定极点配置

例1 考虑含两个子系统的切换 LTI 系统 (1) 以及平衡点 $x_1^e = x_2^e = 0$. 其中, 矩阵 A_i 和 B_i 分别为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 40 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -40 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

给定两个闭环子系统的极点都为如下的一对共轭虚数: $\{-1 \pm 31.6228j\}$, 其中 j 为虚数单位. 由 3.1 小节中所设计的算法 1, 可得 $F_1 = [140, -1]$ 和 $F_2 = [-1, -140]$. 进而得系统 (1) 的闭环子系统矩阵如下:

$$A_1^f := A_1 - B_1 F_1 = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -100 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad A_2^f := A_2 - B_2 F_2 = \begin{bmatrix} -1 & 100 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

此即为文献 [13] 中例 2.1 的子系统矩阵. 故由文献 [13] 中例 2.1 和文献 [24] 中例 2 知, 系统 (1) 在切换路径

$$\sigma_1(t) = \begin{cases} 2, & \text{as } x(t) \in \text{II}, \\ 1, & \text{as } x(t) \in \text{I, III, IV} \end{cases} \quad (8)$$

和

$$\sigma_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{as } x(t) \in \Omega_2, \\ 2, & \text{as } x(t) \in \Omega_1 \end{cases} \quad (9)$$

下均全局不稳定. 这里, σ_1 和 σ_2 分别取自文献 [13, 24]; (8) 式中的 I~IV 分别表示 \mathbb{R}^2 内直角坐标系的第一至第四象限; (9) 式中的区域 $\Omega_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : (|x_1| - |k_1 x_2|)(|x_1| - |k_2 x_2|) < 0\}$ 和 $\Omega_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : (|x_1| - |k_1 x_2|)(|x_1| - |k_2 x_2|) \geq 0\}$, 其中, $k_1 = 45 + \sqrt{2024}$ 和 $k_2 = 45 - \sqrt{2024}$.

这表明共同极点配置法对镇定任意切换下的系统 (1) 失效. 下面, 考虑不同极点配置法能否有效. 为此, 分别取子系统 1 和 2 的两组极点 $\{-1 \pm 31.6228j\}$ 和 $\{-1 \pm 3.1623j\}$. 由 3.1 小节所设计的算法 1, 可得子系统状态反馈增益矩阵分别为 $F_1 = [140, -1]$ 和 $\bar{F}_2 = [-1, -41]$. 简单计算可知, 子系统 1 的状态矩阵 $A_1^f := A_1 - B_1 F_1$ 与 (7) 式中的相同, 而子系统 2 的状态矩阵:

$$\bar{A}_2^f := A_2 - B_2 \bar{F}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

此时, 系统 (1) 在路径 σ_1 和 σ_2 下全局渐近稳定. 数值仿真见图 1 和 2, 它们分别表示系统 (1) 在路径 σ_1 和 σ_2 下从同一初始状态 $x_0 = [100, 100]^T$ 出发的轨线. 事实上, 系统 (1) 在某些合适条件下可任意 PSPs/QSPs 镇定极点配置. 该论断将于第 4 节中的例 2 给出验证.

该算例表明, 为获得单平衡点或多平衡点切换 LTI 系统的诸如渐近稳定性的某些系统性能, 仅依靠任意极点配置 (即使是共同极点配置) 法不足以达成目的, 还必须添加其他限制条件.

引理 3 ([16]) 考虑零输入 (即 $u \equiv 0$) 的开环系统 (1). 假设坐标原点 $x = 0$ 是所有子系统的共同唯一稳定焦点, 即对 $\forall i \in [N]$ 满足

$$a_{11}^i + a_{22}^i < 0, \quad (a_{11}^i - a_{22}^i)^2 - 4(a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^i a_{21}^i) < 0, \quad (11)$$

并且存在 N 个常数 $C_i > 0$ 使得

$$P_i = C_i P_1, \quad \forall i \in [N], \quad (12)$$

其中, $C_1 = 1$ 以及 P_i 为

$$P_i = \begin{bmatrix} (a_{21}^i)^2 & 0.5a_{21}^i(a_{22}^i - a_{11}^i) \\ 0.5a_{21}^i(a_{22}^i - a_{11}^i) & -a_{12}^i a_{21}^i \end{bmatrix}. \quad (13)$$

那么, 系统 (1) 在任意切换路径 σ 下全局渐近稳定.

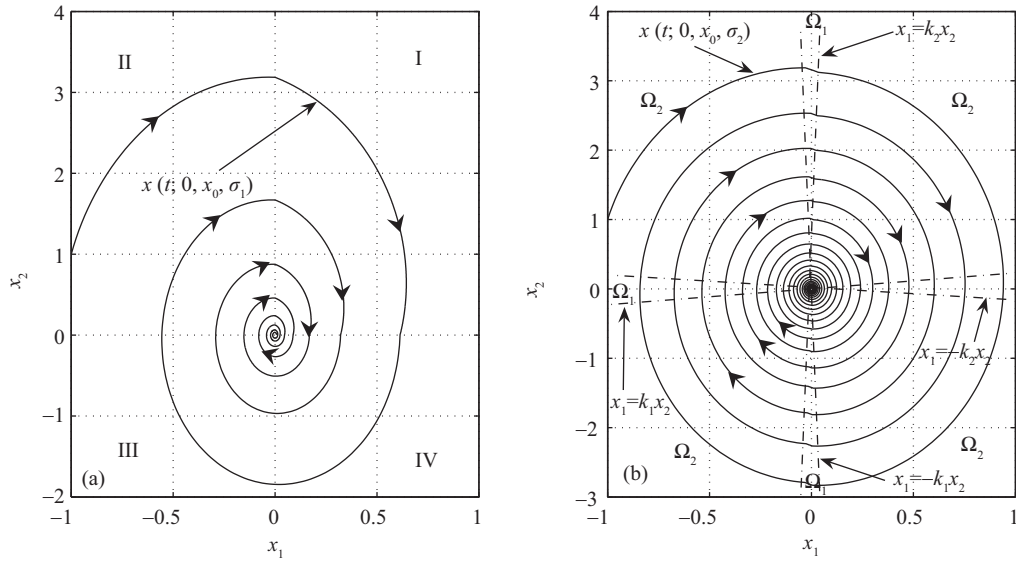


图 1 (a) 和 (b) 分别表示系统 (1) 在路径 σ_1 和 σ_2 下的轨线

Figure 1 (a) and (b) denote the trajectories of system (1) under the switching paths σ_1 and σ_2 , respectively

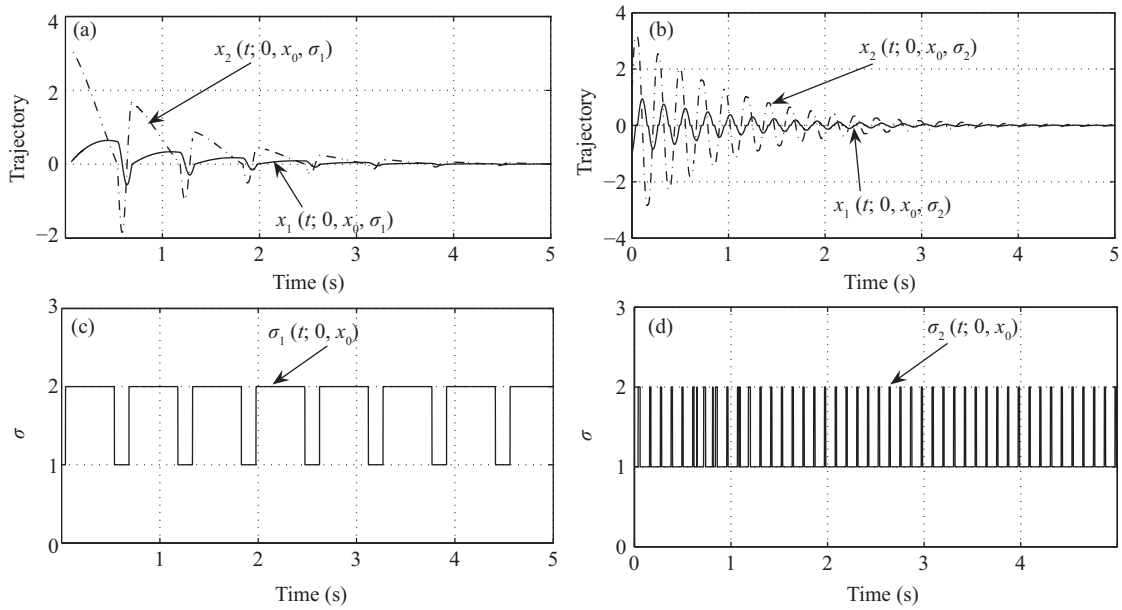


图 2 (a)~(d) 分别表示系统 (1) 在路径 σ_1 和 σ_2 下轨线及两路径关于时间 t 的信号响应

Figure 2 (a)~(d) respectively denote the signals of trajectories of system (1) under paths σ_1 and σ_2 , and two paths with respect to (abbreviated by w.r.t., the same below) time t

引理4 考虑带有形如 (2) 式输入 u 的单平衡点切换闭环 LTI 系统 (1), 其子系统矩阵为

$$A_i^f := A_i - B_i F_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i - b_1^i f_1^i & a_{12}^i - b_1^i f_2^i \\ a_{21}^i - b_2^i f_1^i & a_{22}^i - b_2^i f_2^i \end{bmatrix}, \forall i \in [N]. \quad (14)$$

假设平衡点 x^e 是所有子系统的单一共同渐近稳定焦点, 即对 $\forall i \in [N]$ 满足

$$\begin{cases} a_{11}^i + a_{22}^i - (b_1^i f_1^i + b_2^i f_2^i) < 0, \\ (a_{11}^i - a_{22}^i + b_2^i f_2^i - b_1^i f_1^i)^2 - 4[(a_{11}^i - b_1^i f_1^i)(a_{22}^i - b_2^i f_2^i) - (a_{12}^i - b_1^i f_2^i)(a_{21}^i - b_2^i f_1^i)] < 0, \end{cases} \quad (15)$$

并且存在 N 个常数 $C_i > 0$ 使得

$$P_i = C_i P_1, \quad \forall i \in [N], \quad (16)$$

其中, $C_1 = 1$, P_i 为

$$P_i = \begin{bmatrix} (a_{21}^i - b_2^i f_1^i)^2 & 0.5(a_{21}^i - b_2^i f_1^i)(a_{22}^i - a_{11}^i + b_1^i f_1^i - b_2^i f_2^i) \\ 0.5(a_{21}^i - b_2^i f_1^i)(a_{22}^i - a_{11}^i + b_1^i f_1^i - b_2^i f_2^i) & -(a_{12}^i - b_1^i f_2^i)(a_{21}^i - b_2^i f_1^i) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

那么, 零输入开环系统 (1) 在任意切换路径 σ 下可被 (2) 式所示的状态反馈控制器 u 全局渐近镇定.

证明 将引理 3 的 (11)~(13) 式中的 $a_{11}^i, a_{12}^i, a_{21}^i$ 和 a_{22}^i 分别替换为 $a_{11}^i - b_1^i f_1^i, a_{12}^i - b_1^i f_2^i, a_{21}^i - b_2^i f_1^i$ 和 $a_{22}^i - b_2^i f_2^i$, 可得引理 4 的 (15)~(17) 式. 故由引理 3 和全局渐近镇定性定义可知引理 4 成立.

定理 2 (单平衡点镇定极点配置) 考虑单平衡点 x^e 切换 LTI 系统 (1). 给定满足引理 1 中 (6) 式的矩阵 $A_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 和 $B_i \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 以及极点对 $\{\lambda_{i1}^*, \lambda_{i2}^*\} = \{\alpha_i^* \pm \beta_i^* j\}, \forall i \in [N]$. 若 A_i 和 B_i 及经由任意极点配置法所得 F_i 满足引理 4 的 (15) 和 (16) 式, 则系统 (1) 关于单平衡点 x^e 可任意切换路径全局渐近镇定极点配置.

证明 因矩阵 A_i 和 B_i 满足引理 1 中 (6) 式, 故由定理 1 可知系统 (1) 可任意切换路径极点配置. 从而, 由极点配置可得状态反馈矩阵 F_i . 又由命题条件可知, 所得矩阵 F_i 和系统矩阵 A_i 和 B_i 满足引理 4 的 (15) 和 (16) 式. 故由引理 4 及定义 1 中所定义的可任意切换路径镇定极点配置的概念推知该定理结论成立.

注释 5 定理 2 仅适用于单平衡点切换系统 (1). 对于多平衡点情形, 定理 2 可能会对某些切换路径下的切换系统关于某些区域失效. 此论断可基于文献 [26] 中反例, 构造类似例 1 的相应算例来验证.

引理 5 (区域镇定性 [44]) 考虑带有形如 (2) 式输入 u 的多平衡点切换 LTI 系统 (1). 若

(i) 对 N 个子系统状态矩阵 $A_i - B_i F_i$, 存在非奇异矩阵 P 使得

$$P^{-1}(A_i - B_i F_i)P = \begin{bmatrix} \alpha_i^* & \beta_i^* \\ -\beta_i^* & \alpha_i^* \end{bmatrix} =: D_i, \quad \forall i \in [N], \quad (18)$$

其中, α_i^* 和 $\beta_i^* \neq 0$ 都是实常数, 并且

(ii) 存在 N 个正实常数 T_i 使得

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^* T_i < 0, \quad (19)$$

则系统 (1) 可被控制输入 (2) 和带有满足 (19) 式 QSCs T_i 的任意 QSP σ 全局渐近区域镇定, 其中

$$\Omega_e := \bigcup_{i \in [N]} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : d(x, x_i^e) \leq d e^{\alpha_M^* \mathcal{T} N} \left[(N-1) e^{2\alpha_M^* \mathcal{T} N} (1 - e^{-\alpha_m^* \tau})^{-1} + 2(N-1) e^{\alpha_M^* \mathcal{T}} + N + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (20)$$

其中 $d := \max_{i,j \in [N]} \{d(x_i^e, x_j^e)\}$, $\alpha_m^* := \min_{i \in [N]} \{\alpha_i^*\}$, $\alpha_M^* := \max_{i \in [N]^+} \{\alpha_i^*\}$, $\tau := \min_{i \in [N]^+} \{T_i\}$, $\mathcal{T} := \max_{j \in [N]^+} \{T_j\}$, $[N]^- := \{i \in [N] : \alpha_i^* \leq 0\}$, $[N]^+ := \{i \in [N] : \alpha_i^* > 0\}$, 以及所有 α_i^* 与 (18) 式相同.

引理6 考虑 $A_i = (a_{jk}^i) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 和 $B_i = [b_1^i, b_2^i]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 以及 $F_i = [f_1^i, f_2^i] \in \mathbb{R}^{1 \times 2}, \forall i \in [N]$. 令

$$a_i := a_{11}^i - b_1^i f_1^i, \quad b_i := a_{12}^i - b_1^i f_2^i, \quad c_i := a_{21}^i - b_2^i f_1^i, \quad d_i := a_{22}^i - b_2^i f_2^i, \quad \forall i \in [N], \quad (21)$$

则矩阵 $A_i^f := A_i - B_i F_i, \forall i \in [N]$, 两两可交换的充要条件是, 如下 3 个条件同时成立:

$$\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} = \dots = \frac{b_N}{c_N}, \quad (22)$$

$$\frac{b_1 - c_1}{a_1 - d_1} = \frac{b_2 - c_2}{a_2 - d_2} = \dots = \frac{b_N - c_N}{a_N - d_N}, \quad (23)$$

和

$$\frac{b_1 + c_1}{a_1 - d_1} = \frac{b_2 + c_2}{a_2 - d_2} = \dots = \frac{b_N + c_N}{a_N - d_N}. \quad (24)$$

证明 根据 $A_i^f := A_i - B_i F_i, \forall i \in [N]$, 和 (21) 式, 经直接计算可得

$$A_i^f A_j^f = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i a_j + b_i c_j & a_i b_j + b_i d_j \\ c_i a_j + d_i c_j & c_i b_j + d_i d_j \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$A_j^f A_i^f = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i a_j + c_i b_j & b_i a_j + d_i b_j \\ a_i c_j + c_i d_j & b_i c_j + d_i d_j \end{bmatrix}, \quad \forall i, j \in [N]. \quad (26)$$

由 (25) 和 (26) 式以及 $(A_i - B_i F_i)(A_j - B_j F_j) = (A_j - B_j F_j)(A_i - B_i F_i), \forall i, j \in [N]$, 可得

$$A_i^f A_j^f = A_j^f A_i^f \iff \begin{cases} a_i a_j + b_i c_j = a_i a_j + c_i b_j, \\ a_i b_j + b_i d_j = b_i a_j + d_i b_j, \\ a_i c_j + c_i d_j = c_i a_j + d_i c_j, \\ c_i b_j + d_i d_j = b_i c_j + d_i d_j, \end{cases} \quad (27)$$

$$\implies \begin{cases} b_i c_j = c_i b_j, \\ (b_i + c_i)(a_j - d_j) = (b_j + c_j)(a_i - d_i), \\ (b_i - c_i)(a_j - d_j) = (b_j - c_j)(a_i - d_i), \end{cases} \quad (28)$$

$$\iff \begin{cases} \frac{b_i}{b_j} = \frac{c_i}{c_j}, \\ \frac{b_i + c_i}{a_i - d_i} = \frac{b_j + c_j}{a_j - d_j}, \\ \frac{b_i - c_i}{a_i - d_i} = \frac{b_j - c_j}{a_j - d_j}, \end{cases} \quad \forall i, j \in [N]. \quad (29)$$

要证明充要性, 只需证明

$$(29) \implies (27). \quad (30)$$

由 (29) 式, 得

$$\begin{aligned} \frac{b_i - c_i}{a_i - d_i} = \frac{b_j - c_j}{a_j - d_j} &\implies a_i(b_j - c_j) - d_i(b_j - c_j) = b_i(a_j - d_j) - c_i(a_j - d_j) \\ &\implies a_i b_j + b_i d_j = (b_i a_j + d_i b_j) + (a_i c_j + c_i d_j) - (c_i a_j + d_i c_j), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}\frac{b_i + c_i}{a_i - d_i} = \frac{b_j + c_j}{a_j - d_j} &\Rightarrow a_i(b_j + c_j) - d_i(b_j + c_j) = b_i(a_j - d_j) + c_i(a_j - d_j) \\ &\Rightarrow a_i b_j + b_i d_j = (b_i a_j + d_i b_j) - (a_i c_j + c_i d_j) + (c_i a_j + d_i c_j).\end{aligned}\quad (32)$$

再由 (31) 和 (32) 式, 得

$$a_i b_j + b_i d_j = b_i a_j + d_i b_j \quad \text{和} \quad a_i c_j + c_i d_j = c_i a_j + d_i c_j. \quad (33)$$

根据 $\frac{b_i}{b_j} = \frac{c_i}{c_j} \Rightarrow b_i c_j = c_i b_j$, 可知 (30) 式成立.

因此, 引理 6 的充分性和必要性可由 (22)~(24) 式以及 (27)~(30) 式得到.

注释6 若所有或部分状态反馈矩阵 $F_k = 0$, 则 (22)~(24) 式仍可能成立.

注释7 对于引理 6 及其证明过程中相关等式中的分数, 若某分数的分母为零, 则在与之相应等式中的另一分数的分母亦为零. 此时, 相应分数等式中分数的分子皆可为任意有限实数.

定理3 (多平衡点镇定极点配置 1) 考虑多平衡点切换 LTI 系统 (1) 和如 (20) 式所示的区域 Ω_e . 给定满足引理 1 中 (6) 式的 $A_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 和 $B_i \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 以及满足引理 5 中 (19) 式的任意 $T_i > 0$ 和任意极点对 $\{\lambda_{i1}^*, \lambda_{i2}^*\} = \{\alpha_i^* \pm \beta_i^* j\}$, $\forall i \in [N]$. 若 A_i 和 B_i 以及经由极点配置法所得 F_i 满足引理 6 中的 (22)~(24) 式, 则系统 (1) 关于区域 Ω_e 可任意 QSPs 全局渐近镇定极点配置. 其中, QSPs 中 QSCs T_i 满足 (19) 式.

证明 对所有 $i, j \in [N]$, 下式成立

$$D_i D_j = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i \alpha_j - \beta_i \beta_j & \alpha_j \beta_i + \alpha_i \beta_j \\ -\alpha_j \beta_i - \alpha_i \beta_j & \alpha_i \alpha_j - \beta_i \beta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} = D_j D_i. \quad (34)$$

由 (34) 式可知, 存在一个非奇异矩阵 P_1 使得

$$P_1 D_k P_1^{-1} = \text{diag}\{\lambda_{k1}^*, \lambda_{k2}^*\}, \quad \forall k \in [N]. \quad (35)$$

由 (35) 式和引理 5 中的 (18) 式, 得

$$P_1 P^{-1} A_k^f P P_1^{-1} = P_1 P^{-1} (A_k - B_k F_k) P P_1^{-1} = P_1 D_k P_1^{-1} = \text{diag}\{\lambda_{k1}^*, \lambda_{k2}^*\}, \quad \forall k \in [N]. \quad (36)$$

易见, $\bar{P} := P_1 P^{-1}$ 非奇异. 故由 (36) 式, 知所有矩阵 A_k^f 可同时对角化. 据此易证满足 (18) 式的所有矩阵 A_k^f 两两可交换. 因此, 根据定义 1 以及引理 5 和 6, 可推知定理 3 成立.

注释8 由定理 2 和 3 知, 切换 LTI 系统可镇定极点配置实际上已失去了极点配置的任意性. 其本质是必须满足某些合适条件的极点配置.

注释9 定理 2 和 3 中系统 (1) 的全部极点必须都是具有负实部/正实部的共轭复数. 为克服这种局限性, 下面将给出一个放宽条件的系统 (1) 可镇定极点配置的结论.

引理7 考虑多平衡点切换 LTI 系统 (1) 和如 (20) 式所示的区域 Ω_e . 假设矩阵 $A_i^f := A_i - B_i F_i$, $\forall i \in [N]$, 满足引理 6 中的 (22)~(24) 式以及

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^N \text{Re}(\lambda_{i1}^*) T_i, \sum_{i=1}^N \text{Re}(\lambda_{i2}^*) T_i \right\} < 0, \quad (37)$$

其中, λ_{i1}^* 和 λ_{i2}^* 是矩阵 $A_i^f = A_i - B_i F_i, \forall i \in [N]$, 的特征值. 则系统 (1) 关于区域 Ω_e 可被状态反馈增益矩阵 F_i 以及满足 (37) 式的 QSCs $T_i \in \mathbb{R}_+$ 的任意 QSPs σ 全局区域渐近镇定.

证明 由引理 6, 知矩阵 $A_i^f, \forall i \in [N]$, 两两可交换. 故由文献 [26] 中的定理 1, 知引理 7 成立.

定理 4 (多平衡点镇定极点配置 2) 考虑多平衡点切换 LTI 系统 (1) 和如 (20) 式所示的区域 Ω_e . 给定满足引理 1 中 (6) 式的 $A_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 和 $B_i \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ 以及满足引理 7 中 (37) 式的任意 $T_i > 0$ 和任意极点对 $\{\lambda_{i1}^*, \lambda_{i2}^*\}, \forall i \in [N]$. 若 A_i 和 B_i 以及经由极点配置法所得 F_i 满足引理 6 中的 (22)~(24) 式, 则系统 (1) 关于区域 Ω_e 可任意 QSPs 全局区域渐近镇定极点配置. 其中, QSPs σ 中的 QSCs T_i 满足 (37) 式.

证明 该结论可由引理 7 和定义 1 直接得到.

注释 10 由注释 6 和定理 2~4 可知, 当经由极点配置法镇定切换 LTI 系统时, 我们不必要求所有子系统都完全可控.

注释 11 定理 4 与定理 2 和 3 的主要区别在于, 前者允许配置子系统 i 的某些或全部极点为实数, 而后者只允许配置子系统 i 的极点为共轭复数. 即定理 4 的条件适用范围比定理 2 和 3 较宽松.

注释 12 由引理 7 中 (37) 式和引理 5 中 (19) 式可知, 用定理 3 和 4 所述极点配置法镇定切换 LTI 系统时, 不必将所有闭环子系统的全部极点都配置到复左半平面. 相反地, 可以将某些或全部矩阵 $A_i - B_i F_i$ 的全部或部分极点配置到右复半平面内的合适位置. 见 4 节的例 2.

注释 13 对于不能通过状态反馈控制来改变子系统平衡点类型 (如鞍点) 的某些切换 LTI 可控系统, 为了获取其诸如渐近镇定性等更好的系统性能, 我们必须将部分或全部子系统的极点配置到右复半平面内的合适位置. 此即为切换 LTI 系统极点配置到右复半平面内的理论意义. 另一方面, 若将复平面原坐标系由合适的非奇异线性坐标变换后, 将直线 $\sum_{i=1}^N \alpha^* T_i = 0$ 或直线 $\max\{\sum_{i=1}^N \text{Re}(\lambda_{i1}^*) T_i, \sum_{i=1}^N \text{Re}(\lambda_{i2}^*) T_i\} = 0$ 转化为复平面的虚轴, 则由引理 5 中 (19) 式和引理 7 中 (37) 式可知, 将部分或全部子系统的极点配置到旧坐标系下的右复半平面内, 其本质是将全部子系统极点都配置到新坐标系下的左复半平面内. 该意义下的切换 LTI 系统极点配置的含义与非切换 LTI 系统极点配置的含义相吻合. 此亦即为切换 LTI 系统极点配置到右复半平面内的几何意义.

3.3 算法

基于 3.2 小节所得定理 2 和 4, 本小节将分别给出切换系统 (1) 的单平衡点任意切换路径镇定极点配置伪代码算法 2 和多平衡点任意 QSPs 镇定极点配置伪代码算法 3.

注释 14 若算法 2 和 3 的输出 $F = 0$, 则表示系统 (1) 不能任意 QSPs 全局渐近镇定极点配置; 若输出 $F \neq 0$, 则表示系统 (1) 可任意 QSPs 全局渐近镇定极点配置.

4 数值例子

本节通过一个数值仿真算例来验证所得镇定极点配置结论的有效性和可操作性.

例 2 考虑含 3 个子系统的切换系统 (1), 其子系统平衡点分别为 $x_1^e = [10, 10]$, $x_2^e = [0, 0]$ 及 $x_3^e = [-10, -10]$. 其中, A_i 和 $B_i, i = 1, 2$, 与 3.2 小节中例 1 的相同, 而 A_3 和 B_3 为

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

算法 2 单平衡点切换 LTI 系统 (1) 的任意切换路径镇定极点配置的伪代码算法**输入:** $A_1, B_1, \lambda_{11}^*, \lambda_{12}^*, \dots, A_N, B_N, \lambda_{N1}^*, \lambda_{N2}^*$;**主程序计算:** F, F_i ;

```

1: for  $i = 1$  to  $N$  do
2:    $M_i \leftarrow [A_i B_i, B_i]$ ;
3:    $s^2 + a_{i1}s + a_{i0} \leftarrow \det(sI - A_i)$ ;
4:    $s^2 + a_{i1}^*s + a_{i0}^* \leftarrow (s - \lambda_{i1}^*)(s - \lambda_{i2}^*)$ ;
5:   if  $\text{rank}(M_i) = 2$  then
6:      $\bar{F}_i \leftarrow [a_{i0}^* - a_{i0}, a_{i1}^* - a_{i1}]$ ;
7:      $N_i \leftarrow M_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{i1} & 1 \end{bmatrix}$ ;
8:      $Q_i \leftarrow N_i^{-1}$ ;
9:      $F_i \leftarrow \bar{F}_i Q_i$ ;
10:  else
11:     $F_i \leftarrow [0, 0]$ ;
12:  end if
13:   $A_i^f \leftarrow A_i - B_i F_i$ ;
14:   $a_i \leftarrow A_i^f(1, 1)$ ;
15:   $b_i \leftarrow A_i^f(1, 2)$ ;
16:   $c_i \leftarrow A_i^f(2, 1)$ ;
17:   $d_i \leftarrow A_i^f(2, 2)$ ;
18:   $P_i \leftarrow \begin{bmatrix} c_i^2 & 0.5(d_i - a_i)c_i \\ 0.5(d_i - a_i)c_i & -b_i c_i \end{bmatrix}$ ;
19:   $k_i \leftarrow \frac{c_i^2}{c_i^1}$ ;
20:   $D_i \leftarrow a_i + d_i$ ;
21:   $E_i \leftarrow (a_i - d_i)^2 - 4(a_i d_i - b_i c_i)$ ;
22:   $i = i + 1$ ;
23: end for
24:  $F \leftarrow 2 \times 2$  空矩阵;
25: for  $i = 1$  to  $N$  do
26:   if  $P_i = k_i P_1$  且  $D_i < 0$  且  $E_i < 0$  then
27:      $F \leftarrow [F; F_i]$ ;
28:   else
29:      $F_i' = [0, 0]$ ;
30:      $F \leftarrow [F; F_i']$ ;
31:   end if
32:    $i = i + 1$ ;
33: end for
输出:  $F, F_1, \dots, F_N$ .

```

取子系统 1~3 的 3 组极点分别为 $\{-1 \pm 31.6228j\}$, $\{-1 \pm 3.1623j\}$ 和 $\{1 \pm 6.3246j\}$. 易验证引理 5 中 (19) 式对任意 CPSC $T > 0$ 都成立. 根据 3.3 小节所设计的算法 2, 可得子系统分布式状态反馈增益矩阵 F_i 分别为 $F_1 = [140, -1]$, $\bar{F}_2 = [-1, -41]$ 和 $F_3 = [18, 4]$. 于是, $A_1^f := A_1 - B_1 F_1$ 和 $\bar{A}_2^f := A_2 - B_2 F_2$ 分别与例 1 中的 (7) 和 (10) 式相同, 而 $A_3^f := A_3 - B_3 F_3$ 为

$$A_3^f := A_3 - B_3 F_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 20 & 1 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

算法 3 多平衡点切换 LTI 系统 (1) 的任意 QSPs/PSPs 镇定极点配置的伪代码算法

输入: $A_1, B_1, \lambda_{11}^*, \lambda_{12}^*, T_1 > 0, \dots, A_N, B_N, \lambda_{N1}^*, \lambda_{N2}^*, T_N > 0$;

主程序计算: F, F_i ;

```

1:  $S1 \leftarrow 0$ ;
2:  $S2 \leftarrow 0$ ;
3: for  $i = 1$  to  $N$  do
4:   while  $i \leq N$  do
5:      $S1 \leftarrow S1 + \text{Re}(\lambda_{i1}^*)T_i$ ;
6:      $S2 \leftarrow S2 + \text{Re}(\lambda_{i2}^*)T_i$ ;
7:   end while
8: end for
9:  $S \leftarrow \max\{S1, S2\}$ ;
10: for  $i = 1$  to  $N$  do
11:    $M_i \leftarrow [A_i B_i, B_i]$ ;
12:    $s^2 + a_{i1}s + a_{i0} \leftarrow \det(sI - A_i)$ ;
13:    $s^2 + a_{i1}^*s + a_{i0}^* \leftarrow (s - \lambda_{i1}^*)(s - \lambda_{i2}^*)$ ;
14:   if  $\text{rank}(M_i) = 2$  then
15:      $\bar{F}_i \leftarrow [a_{i0}^* - a_{i0}, a_{i1}^* - a_{i1}]$ ;
16:      $P_i \leftarrow M_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{i1} & 1 \end{bmatrix}$ ;
17:      $Q_i \leftarrow P_i^{-1}$ ;
18:      $F_i \leftarrow \bar{F}_i Q_i$ ;
19:   else
20:      $F_i \leftarrow [0, 0]$ ;
21:   end if
22:    $A_i^f \leftarrow A_i - B_i F_i$ ;
23:    $a_i \leftarrow A_i^f(1, 1)$ ;
24:    $b_i \leftarrow A_i^f(1, 2)$ ;
25:    $c_i \leftarrow A_i^f(2, 1)$ ;
26:    $d_i \leftarrow A_i^f(2, 2)$ ;
27:    $k_i^1 \leftarrow \frac{b_i}{c_i}$ ;
28:    $k_i^2 \leftarrow \frac{b_i - c_i}{a_i - d_i}$ ;
29:    $k_i^3 \leftarrow \frac{b_i + c_i}{a_i - d_i}$ ;
30:    $i = i + 1$ ;
31: end for
32:  $F \leftarrow F_1$ ;
33: for  $i = 1$  to  $N - 1$  do
34:   if  $S < 0$  且  $k_i^1 = k_{i+1}^1$  且  $k_i^2 = k_{i+1}^2$  且  $k_i^3 = k_{i+1}^3$  then
35:      $F \leftarrow [F; F_{i+1}]$ ;
36:   else
37:      $F \leftarrow [0, 0]$ ;
38:      $F'_{i+1} \leftarrow [0, 0]$ ;
39:      $F \leftarrow [F; F'_{i+1}]$ ;
40:   end if
41:    $i = i + 1$ ;
42: end for
输出:  $F, F_1, \dots, F_N$ .

```

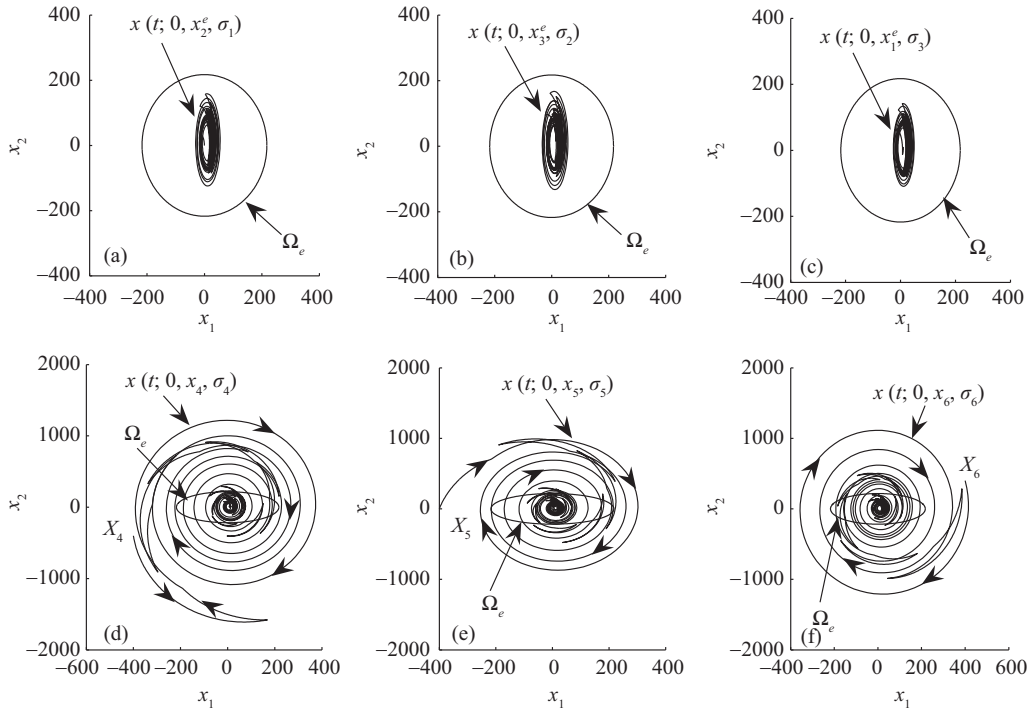


图 3 (a)~(f) 分别表示系统 (1) 在路径 $\sigma_1 \sim \sigma_6$ 下从 (IS1) 组相应初始状态出发的轨线

Figure 3 (a)~(f) respectively denote the trajectories of system (1) under the paths $\sigma_1 \sim \sigma_6$ starting from the corresponding initial states in the set (IS1)

根据 (7), (10) 和 (38) 式, 容易验证引理 6 中的 (22)~(24) 式对 A_1^f, \bar{A}_2^f 和 A_3^f 成立. 因此, 定理 3 的所有条件都满足. 由定理 3 可知, 系统 (1) 关于区域

$$\Omega_e = \bigcup_{i \in [3]} \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, x_i^e) \leq 197.45\} \quad (39)$$

可任意 PSPs/QSPs 全局区域渐近镇定极点配置.

为验证上述论段, 分别取 6 个 PSPs/QSPs $\sigma_1 \sim \sigma_6$ 为 $\{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 2, 1\}, \{2, 1, 3\}$ 和 $\{1, 3, 2\}$, 以及 CPSCs $T = 0.2356$ 和 QSCs: $T_1 = 0.2 + 0.08 \times \text{rand}$, $T_1 = 0.2 + 0.1 \times \text{rand}$ 和 $T_1 = 0.2 + 0.12 \times \text{rand}$, 其中, rand 是介于 0 和 1 之间的随机数. 取两组初始状态如下: (IS1) $X_1 = x_2^e, X_2 = x_3^e, X_3 = x_1^e, X_4 = [-500, 0], X_5 = -X_6 = [500, 500]$; (IS2) $X_1 = x_1^e, X_2 = x_2^e, X_3 = x_3^e, X_7 = [0, 300], X_8 = -X_9 = [300, -300]$. 数值仿真结果见图 3~7. 其中, 图 3 和 4 分别表示系统 (1) 在 $\sigma_1 \sim \sigma_6$ 下从两组初始状态 (IS1) 和 (IS2) 出发的轨线. 图 5~7 表示系统 (1) 关于时间 t 的状态以及切换路径 $\sigma_1 \sim \sigma_6$ 的信号响应. 图 3~7 易见, 当时间趋于无穷大时, 系统 (1) 在路径 σ_i 下的轨线很快收敛于区域 Ω_e . 这表明定理 3 和算法 3 的有效性和可操作性.

5 结论

本文研究了多平衡点二维切换 LTI 系统的极点配置问题. 给出了若干极点配置结论, 并设计了相应算法. 尽管我们仅考虑了二维切换 LTI 系统的极点配置, 但是本文所得新结论表明: 经由极点配置

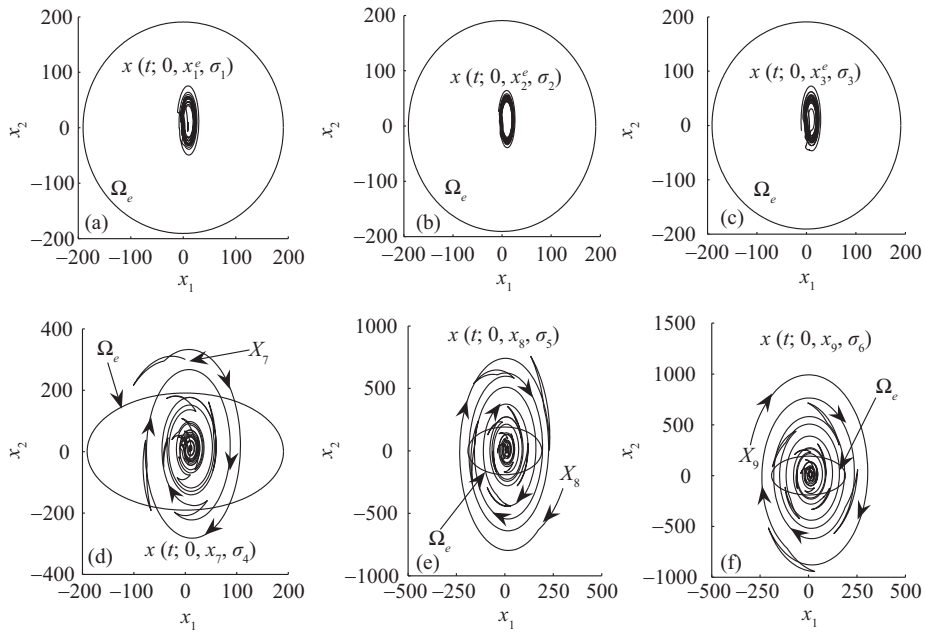


图 4 (a)~(f) 分别表示系统 (1) 在路径 $\sigma_1 \sim \sigma_6$ 下从 (IS2) 中相应初始状态出发轨线

Figure 4 (a)~(f) respectively denote the trajectories of system (1) under the paths $\sigma_1 \sim \sigma_6$ starting from the corresponding initial states in the set (IS2)

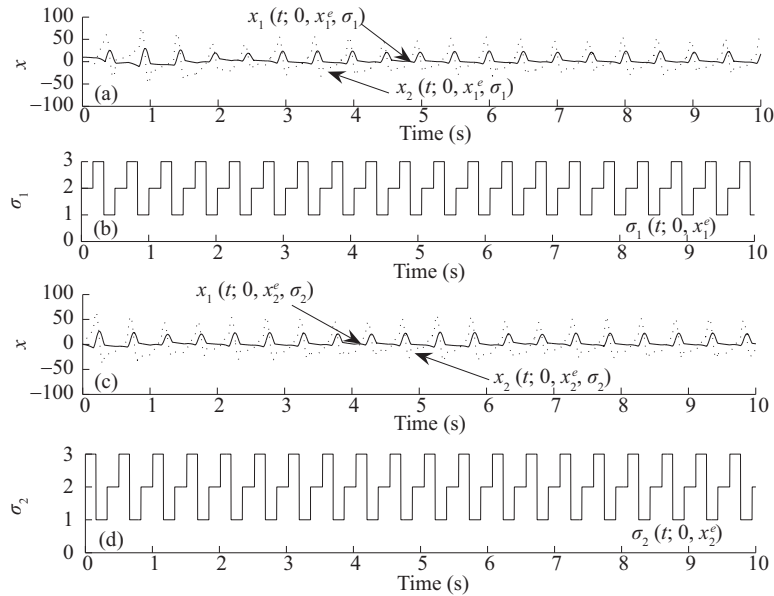


图 5 (a)~(d) 分别表示系统 (1) 在路径 σ_1 和 σ_2 下从初始状态 x_1^e 和 x_2^e 出发关于时间 t 的轨线以及路径 σ_1 和 σ_2 关于时间 t , 初始状态 x_1^e 和 x_2^e 的信号响应

Figure 5 (a)~(d) respectively denote the trajectories of system (1) under the paths σ_1 and σ_2 starting from the initial states x_1^e and x_2^e , and the responses of the paths σ_1 and σ_2 w.r.t. the time t , x_1^e and x_2^e

法来镇定切换 LTI 系统时, 不必将所有闭环子系统的全部极点都配置到左复半平面内. 事实上, 可以把部分或全部子系统的全部或部分极点配置到右复半平面的合适位置. 所得这些结论, 虽然仅适用于

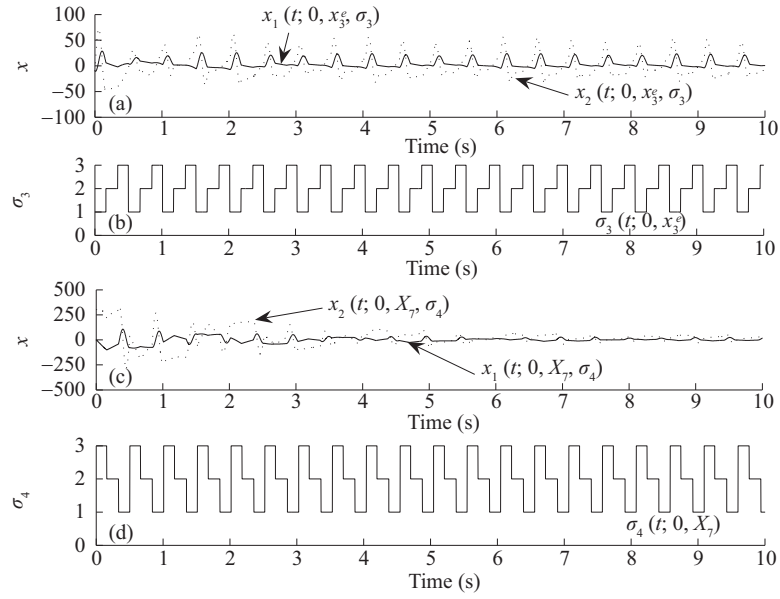


图 6 (a)~(d) 分别表示系统 (1) 在路径 σ_3 和 σ_4 下从初始状态 x_3^e 和 X_7 出发关于时间 t 的轨线以及路径 σ_3 和 σ_4 关于时间 t , 初始状态 x_3^e 和 X_7 的响应

Figure 6 (a)~(d) respectively denote the trajectories of system (1) under the paths σ_3 and σ_4 starting from the initial states x_3^e and X_7 , and the responses of the paths σ_3 and σ_4 w.r.t. the time t , x_3^e and X_7

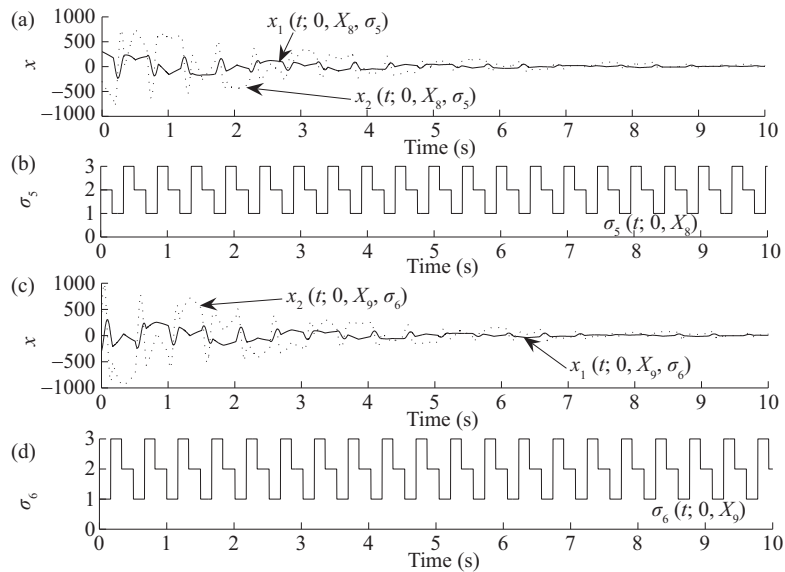


图 7 (a)~(d) 分别表示系统 (1) 在路径 σ_5 和 σ_6 下从初始状态 X_8 和 X_9 出发关于时间 t 的轨线以及路径 σ_5 和 σ_6 关于时间 t , 初始状态 X_8 和 X_9 的信号响应

Figure 7 (a)~(d) respectively denote the trajectories of system (1) under the paths σ_5 and σ_6 starting from the initial states X_8 and X_9 , and the responses of the paths σ_5 and σ_6 w.r.t. the time t , X_8 and X_9

单输入情形, 但是我们可以类似得到该类切换系统的多输入极点配置结论; 都基于如下假设: 所有子系统状态必须完全信息. 若系统状态不完全信息, 则需要设计相应观测器才能达到系统镇定极点配置

目的. 而与极点配置密切相关的该类切换 LTI 系统的状态观测器、跟踪、鲁棒性、二次线性最优控制等问题, 以及高维多平衡点切换系统的极点配置, 将是我们以后的研究工作.

参考文献

- 1 Zheng D Z. Linear System Theory. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2002 [郑大钟. 线性系统理论. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2002]
- 2 Antsaklis P J, Michel A N. Linear Systems. Englewood Cliffs: McGraw-Hill, 1997
- 3 Kautsky J, Nichols N K, van Dooren P. Robust pole assignment in linear state feedback. *Int J Control*, 1985, 41: 1129–1155
- 4 Rissanen J. Control system synthesis by analogue computer based on the generalized linear feedback concept. In: *Proceedings of Symposium on Analog Comput Applied to the Study of Chemistry Processes*, Brussels, 1960. 1–13
- 5 Wonham W M. On pole assignment in multi-input controllable linear systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 1967, 12: 660–665
- 6 Morse A S, Wonham W M. Decoupling and pole assignment by dynamic compensation. *SIAM J Control*, 1970, 8: 317–337
- 7 Feng G, Zhang C, Palaniswami M. Stability of input amplitude constrained adaptive pole placement control systems. *Automatica*, 1994, 30: 1065–1070
- 8 Cheng D Z, Guo L, Lin Y D, et al. Stabilization of switched linear systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2005, 50: 661–666
- 9 Sun Z, Ge S S. Analysis and synthesis of switched linear control systems. *Automatica*, 2005, 41: 181–195
- 10 Zhu L Y, Wang Y Z. Necessary and sufficient conditions for uniform controllability and observability of switched linear systems. *J Shandong Univ (Eng Sci)*, 2007, 37: 43–46 [朱礼营, 王玉振. 线性切换系统一致能控性和能观性的充要条件. *山东大学学报 (工学版)*, 2007, 37: 43–46]
- 11 Lin H, Antsaklis P J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results. *IEEE Trans Automat Contr*, 2009, 54: 308–322
- 12 Li Q K, Lin H. Effects of mixed-modes on the stability analysis of switched time-varying delay systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2016, 61: 3038–3044
- 13 Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 1998, 43: 475–482
- 14 Zhu L Y, Xiang Z R. Aggregation analysis for competitive multiagent systems with saddle points via switching strategies. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2018, 29: 2931–2943
- 15 Zhu L Y. Stability and stabilization of switched linear time-invariant systems with saddle points and switching delays. *Inf Sci*, 2016, 326: 146–159
- 16 Zhu L Y. Stability and stabilization of two-dimensional lti switched systems with potentially unstable focus. *Asian J Control*, 2015, 17: 892–907
- 17 Sun X M, Zhao J, Hill D J. Stability and L_2 -gain analysis for switched delay systems: a delay-dependent method. *Automatica*, 2006, 42: 1769–1774
- 18 Li Z G, Wen C Y, Soh Y C. Observer-based stabilization of switching linear systems. *Automatica*, 2003, 39: 517–524
- 19 Sun Y G, Wang L, Xie G, et al. Improved overshoot estimation in pole placements and its application in observer-based stabilization for switched systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2006, 51: 1962–1966
- 20 Mansouri B, Manamanni N, Guelton K, et al. Robust pole placement controller design in LMI region for uncertain and disturbed switched systems. *Nonlin Anal-Hybrid Syst*, 2008, 2: 1136–1143
- 21 Zhu L Y, Wang Y Z. Stability analysis of switched dissipative Hamiltonian systems. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2006, 36: 617–630 [朱礼营, 王玉振. 切换耗散 Hamilton 系统的稳定性研究. *中国科学 E 辑: 信息科学*, 2006, 36: 617–630]
- 22 Zhao J, Hill D J. Passivity and stability of switched systems: a multiple storage function method. *Syst Control Lett*, 2008, 57: 158–164
- 23 Bao G, Zeng Z. Region stability analysis for switched discrete-time recurrent neural network with multiple equilibria. *Neurocomputing*, 2017, 249: 182–190
- 24 Zhu L Y. Dynamics of switching van der pol circuits. *Nonlin Dyn*, 2017, 87: 1217–1234

- 25 Zhu L Y, Qiu J B, Chadli M. Modelling and stability analysis of switching impulsive power systems with multiple equilibria. *Int J Syst Sci*, 2017, 48: 3470–3490
- 26 Zhu L Y, Qiu J B. Region stability and stabilisation of switched linear systems with multiple equilibria. *Int J Control*, 2019, 92: 1061–1083
- 27 Narendra K S, Balakrishnan J. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices. *IEEE Trans Automat Contr*, 1994, 39: 2469–2471
- 28 Alpcan T, Basar T. A stability result for switched systems with multiple equilibria. *Dyn Contin Discret Impuls Syst Ser A Math Anal*, 2010, 17: 949–958
- 29 Guo R W, Wang Y Z. Estimation of stability region for a class of switched linear systems with multiple equilibrium points. *Control Theor Appl*, 2012, 29: 409–414 [郭荣伟, 王玉振. 一类多平衡点线性切换系统稳定区域的估计. *控制理论与应用*, 2012, 29: 409–414]
- 30 Navarro-Lopez E M, Laila D S. Group and total dissipativity and stability of multi-equilibria hybrid automata. *IEEE Trans Automat Contr*, 2013, 58: 3196–3202
- 31 Wu W, Duan G, Tan F. Switching signal design for asymptotic stability of uncertain multiple equilibrium switched systems with actuator saturation. *Int J Robust Nonlin Control*, 2016, 26: 1705–1717
- 32 Guo R W, Wang Y Z. Region stability analysis for switched nonlinear systems with multiple equilibria. *Int J Control Autom Syst*, 2017, 15: 567–574
- 33 Liu Z, Zhang X F, Wang Y Z. Stability and stabilization for discrete-time positive switched multiple equilibria systems on finite time intervals. *Control Theor Appl*, 2017, 34: 433–440 [刘志, 张宪福, 王玉振. 离散多平衡点正切换系统有限区间稳定与镇定. *控制理论与应用*, 2017, 34: 433–440]
- 34 Liu Z, Wang Y Z. Regional stability of positive switched linear systems with multi-equilibrium points. *Int J Autom Comput*, 2017, 14: 213–220
- 35 Li Y M, Tong S C, Liu L, et al. Adaptive output-feedback control design with prescribed performance for switched nonlinear systems. *Automatica*, 2017, 80: 225–231
- 36 Li Y M, Tong S C. Adaptive neural networks prescribed performance control design for switched interconnected uncertain nonlinear systems. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2018, 29: 3059–3068
- 37 Chen M, Ren B B, Wu Q X, et al. Anti-disturbance control of hypersonic flight vehicles with input saturation using disturbance observer. *Sci China Inf Sci*, 2015, 58: 070202
- 38 Chen M, Tao G. Adaptive fault-tolerant control of uncertain nonlinear large-scale systems with unknown dead zone. *IEEE Trans Cybern*, 2016, 46: 1851–1862
- 39 Zhu L Y, Feng G. Necessary and sufficient conditions for stability of switched nonlinear systems. *J Franklin Inst*, 2015, 352: 117–137
- 40 Zhu L Y. Region aggregation analysis for multi-agent networks with multi-equilibria in multi-dimensional coordinate systems via switching strategies. *Neurocomputing*, 2016, 171: 991–1002
- 41 Zhai G, Hu B, Yasuda K, et al. Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems: an average dwell time approach. *Int J Syst Sci*, 2001, 32: 1055–1061
- 42 Zhu L Y. Stability analysis of two-dimensional LTI switched systems with multiple equilibria. In: *Proceedings of the 33rd Chinese Conference (CCC)*, Nanjing, 2014. 4131–4136
- 43 Zhu L Y, Fang Y Y. Stability and stabilization of two-dimensional linear time-invariant switched systems with multi-equilibria. *Control Decis*, 2015, 30: 599–604 [朱礼营, 方盈盈. 多平衡点二维线性时不变切换系统的稳定性及镇定性. *控制与决策*, 2015, 30: 599–604]
- 44 Zhu L Y. A condition for boundedness of solutions of bidimensional switched affine systems with multiple foci and centers. *Asian J Control*, 2018, 20: 585–594

Pole assignment of two-dimensional switched linear time-invariant systems with multiple equilibria

Liying ZHU^{1,2*} & Jianbin QIU²

1. School of Management Science and Engineering, Shandong Technology and Business University, Yantai 264005, China;

2. Research Institute of Intelligent Control and Systems, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China

* Corresponding author. E-mail: lyzhu@sdtbu.edu.cn

Abstract This paper discusses the pole assignment issues of two-dimensional switched linear time-invariant (LTI) systems with multiple equilibria. For the case in which each subsystem has a unique equilibrium point, a necessary and sufficient condition of arbitrary pole assignments for such switched LTI systems with multiple equilibria is proposed. A numerical example shows that even when all the poles of all the closed-loop subsystems are assigned to only two locations on the left-half side of the complex plane, the overall switched LTI systems may not be stable under arbitrary switching. For switched systems in which all the subsystems have a common single equilibrium point or different multiple equilibria, several sufficient criteria of stabilizing pole assignments and corresponding algorithms are proposed. The results imply that to stabilize switched LTI systems via the pole assignment method, all or some of the poles of some or all the subsystems can be assigned to suitable locations on the right-half side of the complex plane. An illustrative example shows that our new results are very effective and practical.

Keywords switching systems, linear subsystems, state feedback, stabilization control, multiple equilibria, pole assignment, algorithms



Liying ZHU received his B.S. degree in mathematics from Ludong University, Yantai, China, in 1995; his M.S. degree in applied mathematics from Xi'an Jiaotong University, Xi'an, China, in 2000; and his Ph.D. degree in control theory and engineering from Shandong University, Jinan, China, in 2007. He is currently an associate professor at Shandong Technology and Business University, Yantai, China. He was a visiting scholar at the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin, China, from September 2017 to August 2018. His current research interests include switched and hybrid control systems, multiagent systems, and neural networks.

ing scholar at the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin, China, from September 2017 to August 2018. His current research interests include switched and hybrid control systems, multiagent systems, and neural networks.



Jianbin QIU received his B.E. and Ph.D. degrees in mechanical and electrical engineering from the University of Science and Technology of China, Hefei, China, in 2004 and 2009, respectively. He also received his Ph.D. degree in Mechatronics Engineering from the City University of Hong Kong, Kowloon, Hong Kong, in 2009. He is currently a full-time professor at the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology.

ogy. He was an Alexander von Humboldt research fellow at the Institute for Automatic Control and Complex Systems, University of Duisburg-Essen, Duisburg, Germany. His current research interests include intelligent and hybrid control systems, signal processing, and robotics.