



基于矩阵半张量积方法的带有敌对输入的异步时序机控制

陈增强^{1,2,3*}, 王晶晶^{1,2}, 韩晓光^{1,2}, 张青³

1. 南开大学计算机与控制工程学院, 天津 300350

2. 南开大学天津市智能机器人技术重点实验室, 天津 300350

3. 中国民航大学理学院, 天津 300300

* 通信作者. E-mail: chenzq@nankai.edu.cn

收稿日期: 2018-03-09; 修回日期: 2018-09-23; 接受日期: 2018-12-27; 网络出版日期: 2019-11-14

国家自然科学基金(批准号: 61573199)和天津市自然科学基金(批准号: 14JCYBJC18700)资助项目

摘要 本文基于矩阵半张量积方法研究了带有敌对输入的异步时序机的控制问题. 首先, 利用矩阵半张量积, 给出了带有敌对输入的异步时序机动态行为的代数表示. 接着, 通过分析具体的控制过程设计了具有最小状态集的控制器的赋值算法. 其次, 基于带有敌对输入的异步时序机的代数表示和控制器的赋值算法给出了整个闭环系统的动态行为的代数表示, 从而验证本文理论结果的正确性. 最后, 利用具体实例说明了本文所提方法的可行性和有效性.

关键词 敌对输入, 异步时序机, 矩阵半张量积, 控制器, 转移结构矩阵, 输出结构矩阵

1 引言

异步时序机又称为无时钟逻辑电路^[1]. 由于无时钟性, 异步时序机的状态转移能够快速发生, 在高速计算系统^[2], 并行计算系统^[3,4]以及分子生物学^[5]等领域都有着重要的应用.

近年来, 异步时序机的控制问题得到了广泛的研究. 在众多的理论成果中, 模型匹配是应用最为广泛和成功的方法. 21世纪初, Murphy^[6]首先利用模型匹配方法解决了带有临界竞争的输入/状态型(即异步时序机的输出与状态相同)异步时序机控制问题, 2005年, Geng等^[7]利用模型匹配问题解决了输入/输出型异步时序机的控制问题. 所谓模型匹配, 就是利用异步时序机的无时钟性, 依据基本操作模式的规则来设计控制器使得控制器与所控异步时序机所组成的闭环系统与另一满足要求的异步时序机在稳定转移状态下的输入/输出行为一致.

引用格式: 陈增强, 王晶晶, 韩晓光, 等. 基于矩阵半张量积方法的带有敌对输入的异步时序机控制. 中国科学: 信息科学, 2019, 49: 1488–1501, doi: 10.1360/N112018-00048
Chen Z Q, Wang J J, Han X G, et al. Control of asynchronous sequential machine with adversarial input based on the semi-tensor product of matrices (in Chinese). Sci Sin Inform, 2019, 49: 1488–1501, doi: 10.1360/N112018-00048

在现代控制系统中,一个不容忽视的问题就是不受控制的敌对输入的干扰.所谓敌对输入,就是指一个模型不确定或者未知的干扰动作作为输入进入异步时序机并使其发生状态转移.目前,对带有敌对输入的异步时序机的控制主要是基于模型匹配思想实现.例如,对于带有敌对输入的输出型异步时序机的矫正控制^[8],关于带有敌对输入的异步时序机的状态反馈控制^[9],对于出现敌对输入的异步时序机的矫正控制^[10],抵消异步时序机敌对输入的影响^[11]等.这些文献给出了控制器存在的充分必要条件并以状态转移规则的形式给出了控制问题的解.但是这些文献所给出的结果存在一定的缺陷:一方面,所设计控制器的状态变量过多,需要进一步的操作来减少状态集中元素的个数;另一方面,通过状态转移规则的形式给出控制问题的解,操作过程比较繁琐且不利于利用计算机等工具来实现.

矩阵为解决离散动态事件系统问题提供了一种便捷的方法.近年来,中国科学院的程代展等^[12,13]提出了一种新的矩阵乘法——矩阵半张量积(semi-tensor product, STP).矩阵半张量积突破了传统矩阵乘法的维数限制,被成功应用到布尔网络^[14~17], petri 网^[18~20]以及有限自动机^[21~23]等领域.文献^[24,25]分别利用矩阵半张量积方法解决了输入/状态型异步时序机和输入/输出型异步时序机的控制问题.特别地,文献^[26]给出了异步时序机模型匹配过程中骨架矩阵的求解方法,而文献^[27,28]则利用矩阵半张量积方法解决了开关异步时序机和复合异步时序机的模型匹配问题.通过查阅文献发现,目前仍没有一种简洁的方法来解决带有敌对输入的异步时序机的控制问题.本文将利用矩阵半张量积来解决带有敌对输入的异步时序机的控制问题.本文的主要创新点如下:

(1) 利用矩阵半张量积,给出了带有敌对输入的异步时序机和闭环系统的代数表示.

(2) 利用最小状态集来设计控制器,大大降低了计算复杂度.

(3) 提出了控制器的转移结构矩阵和输出结构矩阵的赋值算法,赋值算法只涉及矩阵运算,操作简单方便易于实现.

本文的结构为:第 2 节介绍了关于矩阵半张量积和带有敌对输入的异步时序机的基础知识.第 3 节首先给出了带有敌对输入的异步时序机的代数表示方法,接着分析了带有敌对输入的异步时序机的控制问题并设计了控制器结构矩阵的赋值算法,最后给出了闭环系统的代数表示.第 4 节用具体实例阐释本文所给的理论结果的有效性和可行性.第 5 节对本文进行了总结.

2 基础知识

2.1 符号说明

- $\mathcal{M}_{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 维实矩阵所构成的集合.
- \mathbb{R}^n 表示实数域 n 维列向量所构成的集合.
- $\text{Col}_j(M)$ 表示矩阵 M 的第 j 列, $\text{Col}(M)$ 表示矩阵 M 所有列所构成的集合.
- $\delta_n^j := \text{Col}_j(I_n)$, 其中 I_n 为单位矩阵. 令 $\delta_n^0 := \underbrace{[0, 0, \dots, 0]}_n^T$.
- $\Delta_n := \{\delta_n^1, \dots, \delta_n^n\}$; $\tilde{\Delta}_n := \{\delta_n^0, \delta_n^1, \dots, \delta_n^n\}$.
- $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$ 表示元素全为 1 的行向量.
- 若 $\text{Col}(M) \subseteq \Delta_m$ (相应地, $\text{Col}(M) \subseteq \tilde{\Delta}_m$), 则称 $M \in \mathcal{M}_{m \times n}$ 为逻辑矩阵 (相应地, 广义逻辑矩阵). 用 $\mathcal{L}_{m \times n}$ (相应地, $\tilde{\mathcal{L}}_{m \times n}$) 表示 $m \times n$ 维逻辑矩阵 (相应地, 广义逻辑矩阵) 所构成的集合.
- 如果 $M \in \mathcal{L}_{m \times n}$ (相应地, $\tilde{\mathcal{L}}_{m \times n}$), 则将其表示为 $M = [\delta_m^{i_1}, \dots, \delta_m^{i_n}]$, 简记为 $M = \delta_m[i_1, i_2, \dots, i_n]$, 其中 $i_k \in \{0, 1, \dots, m\}, k = 1, 2, \dots, n$.

2.2 矩阵半张量积

本小节介绍本文中将会用到的一些关于矩阵半张量积的预备知识. 有关矩阵半张量积的详细知识见文献 [12].

定义1 ([12]) 令 $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $B \in \mathcal{M}_{p \times q}$, 则矩阵 A 与 B 的半张量积定义如下:

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{t/n})(B \otimes I_{t/p}), \quad (1)$$

其中 $t = \text{lcm}(n, p)$ 表示 n 和 p 的最小公倍数. \otimes 表示矩阵的 Kronecker 积.

当 $n = p$ 时, 有 $A \ltimes B = AB$, 即矩阵半张量积为普通矩阵乘积的推广. 本文中, 在不引起混淆的情况下省略符号 “ \ltimes ”.

定义2 ([12]) 交换矩阵 $W_{[m,n]}$ 为 $mn \times mn$ 矩阵, 其定义如下:

$$W_{[m,n]} = \delta_{mn} [1, m+1, \dots, (n-1)m+1, 2, m+2, \dots, (n-1)m+2, m, 2m, \dots, nm]. \quad (2)$$

当 $m = n$ 时, 记 $W_{[m,n]} = W_{[n]}$.

引理1 ([12]) 设 $X \in \mathbb{R}^n$, $Y \in \mathbb{R}^m$, 则 $W_{[m,n]}XY = YX$, $W_{[n,m]}YX = XY$.

引理2 ([12]) 设 $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$,

(1) 令 $X \in \mathbb{R}^t$, 则 $AX = X(I_t \otimes A)$;

(2) 令 $X \in \mathbb{R}^t$, 则 $XA = (I_t \otimes A)X$.

引理3 ([12]) 设 $\Phi_n = \text{diag}[\delta_n^1, \delta_n^2, \dots, \delta_n^n]$ 为降幂矩阵. 则

$$X^2 = \Phi_n X, \quad (3)$$

其中 $X \in \tilde{\Delta}_n$.

引理4 ([25]) 设 $\delta_{m_1}^{j_1} \ltimes \delta_{m_2}^{j_2} \ltimes \dots \ltimes \delta_{m_t}^{j_t} = \delta_{m_1 \times m_2 \times \dots \times m_t}^l$ 为 t 个逻辑列向量的半张量积. 则 $\delta_{m_i}^{j_i} = S_i \ltimes \delta_{m_1 \times m_2 \times \dots \times m_t}^l, i = 1, 2, \dots, t$, 其中 S_i 的定义如下:

$$S_i = \mathbf{1}_{m_1 \times \dots \times m_{i-1}} \otimes I_{m_i} \otimes \mathbf{1}_{m_{i+1} \times \dots \times m_t}. \quad (4)$$

2.3 带有敌对输入的异步时序机

本小节介绍本文将要用到的关于带有敌对输入的异步时序机的一些概念和性质.

因为带有敌对输入, 所以带有敌对输入的异步时序机的输入变量分为两种: 一种为正常输入, 正常输入既可观又可控; 另一种就是敌对输入, 敌对输入只可观不可控. 用六元组 $\Sigma = (A \times B, Y, X, x_0, f, h)$ 来表示带有敌对输入的异步时序机, 其中 A 为正常输入集, B 为敌对输入集, Y 为输出集, X 为状态集; x_0 为初始状态, $f: X \times A \times B \rightarrow X$ 和 $h: X \times A \times B \rightarrow Y$ 分别为状态转移函数和输出函数且定义如下:

$$x_{k+1} = f(x_k, (u_k, \omega_k)), \quad y_k = h(x_k, (u_k, \omega_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

其中 u_k 为正常输入变量, ω_k 为敌对输入变量, y_k 为状态 x_k 所对应的输出. 本文主要研究带有敌对输入的正常输入/状态型异步时序机, 即 $Y = X$ 且 $y_k = x_k, k = 0, 1, 2, \dots$.

若函数 $f(x, (u, \omega))$ 有定义, 则称三元组 $(x, (u, \omega))$ 为有效对. 若 $f(x, (u, \omega)) = x$, 则称有效对 $(x, (u, \omega))$ 为稳定组合, 否则称其为转移组合. 当输入 (u, ω) 保持不变时, 稳定组合将保持不变, 而转

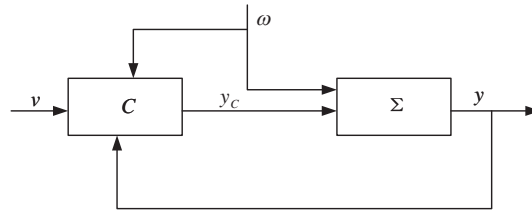


图 1 带有敌对输入的闭环系统 $\Sigma|_C$
 Figure 1 The closed-loop system $\Sigma|_C$ with an adversarial input

移组合将发生一系列的状态转移 $x_1 = f(x, (u, \omega)), x_2 = f(x_1, (u, \omega)), \dots$. 当存在状态 x' 使得 $x' = f(x', (u, \omega))$ 时, 状态转移 $x_1 = f(x, (u, \omega)), x_2 = f(x_1, (u, \omega)), \dots$ 将停止, 称 x' 为 x 关于 (u, ω) 的下一稳定状态; 当不存在这样的状态 x' 时, 状态转移将一直进行下去, 此时称三元组 $(x, (u, \omega))$ 为一个无限环. 本文中所考虑的异步时序机不包含无限环.

定义异步时序机 Σ 的稳定状态转移函数为 $s(x, (u, \omega)) = x'$, 其中 x' 称为 x 关于 (u, ω) 的下一稳定状态. 以稳定状态转移函数代替 Σ 的状态转移函数将可以得到对应的稳定异步时序机, 即 $\Sigma|_s = (A \times B, Y, X, x_0, s, h)$.

当异步时序机与其他一个或多个异步时序机相连接时, 它们就构成了一个闭环系统. 用 $\Sigma|_C$ 表示图 1 中控制器 C 与被控的带有敌对输入的异步时序机 Σ 相连接所构成的闭环系统. 由于异步时序机的无时钟性, 不包含无限环的异步时序机的动态行为需按照基本操作模式进行, 即异步时序机或异步时序机系统在运行时应满足: 当输入变量保持不变时, 状态变量才能发生转移; 而当状态变量稳定时, 输入变量才能被改变. 所以在设计控制器时, 只有当被控异步时序机处于稳定组合时, 控制器才能发生状态改变.

3 带有敌对输入的异步时序机的矩阵控制方法

3.1 带有敌对输入的异步时序机的代数表示方法

本小节将给出带有敌对输入的输出/状态型异步时序机的代数表示.

考虑带有敌对输入的异步时序机 Σ , 其正常输入集为 $A = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, 敌对输入集为 $B = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q\}$, 状态集为 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. 分别定义 u_k, ω_g 与 x_i 的向量形式为 $\delta_m^k (1 \leq k \leq m)$, $\delta_q^g (1 \leq g \leq q)$ 和 $\delta_n^i (1 \leq i \leq n)$, 记为 $u_k \sim \delta_m^k, \omega_g \sim \delta_q^g, x_i \sim \delta_n^i$, 则集合 A, B 与 X 将分别对应 Δ_m, Δ_q 与 Δ_n . 因此, 有效对 $(x_i, (u_k, \omega_g))$ 可被表示为 $(\delta_n^i, (\delta_m^k, \delta_q^g)) (1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m, 1 \leq g \leq q)$. 在不引起混淆的情况下, 向量形式和符号形式都可以用来表示各个输入变量和状态变量.

根据矩阵半张量积的知识以及输入变量和状态变量的向量表示, 可以得到带有敌对输入的异步时序机 Σ 关于输入 (u_k, ω_g) 的状态转移矩阵 $F^{(k-1)m+g} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的定义如下:

$$F_{j,i}^{(k-1)m+g} = \begin{cases} 1, & \delta_n^j = f(\delta_n^i, (\delta_m^k, \delta_q^g)), \\ 0, & \delta_n^j \neq f(\delta_n^i, (\delta_m^k, \delta_q^g)). \end{cases} \quad (6)$$

带有敌对输入的异步时序机 Σ 的状态转移结构矩阵为 $F = [F^1, F^2, \dots, F^{mq}] \in \mathbb{R}^{n \times mnq}$. 类似地, 可以定义带有敌对输入的异步时序机关于稳定状态转移函数的稳定状态转移结构矩阵 F_S 和关于输出函数的输出结构矩阵 H .

引理5 假设 F 为带有敌对输入的异步时序机 Σ 的状态转移结构矩阵, $x(1)$ 为其初始状态, 则 Σ 的动态行为可用如下等式表示:

$$x(t+1) = Fu(t)\omega(t)x(t), \quad (7)$$

其中 $x(t)$, $u(t)$ 和 $\omega(t)$ 分别为状态、正常输入和敌对输入的向量形式.

3.2 带有敌对输入的异步时序机控制问题解的存在性

文献 [9] 提出了带有敌对输入的异步时序机控制问题的解存在的充分必要条件. 为了便于研究带有敌对输入的异步时序机的具体控制过程, 本小节首先给出文献 [9] 所得到的一些理论结果.

给定输入/状态型异步时序机 $\Sigma = (A \times B, X, X, x_0, f, h)$, 定义集合 $U_{AB}(x) \subset A \times B$, 其元素为能够与状态 x 形成稳定组合的所有输入字符. 基于集合 U_{AB} , 分别定义关于正常输入集 A 和敌对输入集 B 的如下两个集合:

$$U_A(x, \omega) = \{u \in A | (u, \omega) \in U_{AB}(x)\}, \quad (8)$$

$$U_B(x, u) = \{\omega \in B | (u, \omega) \in U_{AB}(x)\}. \quad (9)$$

基于等式 (8) 和 (9), 文献 [9] 分别给出了关于正常输入集 A 和敌对输入集 B 的骨架矩阵的定义.

定义3 ([9]) $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为异步时序机 Σ 的状态集, 定义 $n \times n$ 矩阵 $K_A(\Sigma, \omega)$ 为关于敌对输入 ω 的正常骨架矩阵. 其元素定义为: 当存在 $u \in A$ 使得 $\omega \in U_B(x_i, u)$ 并且存在输入为 $e = e_0 e_1 \dots e_{p-1}$ 的序列使得状态 x_i 可稳定到达 x_j , 其中 $e_k = (u_k, \omega)$, $k = 0, 1, \dots, p-1$, 则令 (i, j) 元素为 $K_{Aij}(\Sigma, \omega) = 1$; 否则令 $K_{Aij}(\Sigma, \omega) = 0$. 定义 $n \times n$ 矩阵 $K_A(\Sigma, B)$ 为关于敌对输入集 B 的正常骨架矩阵. 其元素定义为: 当所有与状态 x_i 形成稳定组合的敌对输入 ω 都有 $K_{Aij}(\Sigma, \omega) = 1$ 时, 令 $K_{Aij}(\Sigma, B) = 1$; 否则令 $K_{Aij}(\Sigma, B) = 0$.

定义4 ([7]) 定义 $n \times n$ 矩阵 $K_B(\Sigma, \omega)$ 为关于敌对输入 ω 的敌对骨架矩阵. 其元素定义为: 当存在 $u \in U_A(x_i, \omega')$ ($\omega' \in B$ 且 $\omega' \neq \omega$) 使得 $x_j = s(x_i, (u, \omega))$ 时, 令 $K_{Bij}(\Sigma, \omega) = 1$; 否则 $K_{Bij}(\Sigma, \omega) = 0$.

本文所考虑的异步时序机 $\Sigma = (A \times B, X, X, x_0, f, h)$ 为带有敌对输入 $\omega \in B$ 的输入/状态型异步时序机. 假设 $\Sigma' = (A, X, X', x_0, s', h)$ 为状态集与 Σ 状态集相同, 输入集与 Σ 的正常输入集相同的不带有敌对输入的异步时序机. 则带有敌对输入的异步时序机的控制问题可以转化为模型匹配问题: 寻找控制器使得 $\Sigma|_C$ 与 Σ' 稳定等价, 即在稳定状态转移函数下 $\Sigma|_C$ 与 Σ' 的输入/输出行为等价. 基于上述两类骨架矩阵的定义, 文献 [9] 根据模型匹配的思想给出了带有敌对输入的异步时序机控制问题的解存在的充分必要条件.

引理6 ([9]) 令 $\Sigma = (A \times B, X, X, x_0, f, h)$ 为带有敌对输入 $\omega \in B$ 的输入/状态型异步时序机. $\Sigma' = (A, X, X', x_0, s', h)$ 的状态集与 Σ 状态集相同, 输入集与 Σ 的正常输入集相同. 则下面的两条叙述等价:

(1) 存在状态反馈控制器 C 使得闭环系统 $\Sigma_{C|s}$ 与异步时序机 Σ' 是稳定等价的, 其中 Σ_C 满足基本操作模式.

(2) 骨架矩阵满足 $K_A(\Sigma, B) \geq K(\Sigma')$, 其中 $K(\Sigma')$ 为异步时序机 Σ' 的正常骨架矩阵, 并且有 $K_A(\Sigma, \omega) \geq K_B^T(\Sigma, \omega)$, $\forall \omega \in B$, 其中 $K_B^T(\Sigma, \omega)$ 为骨架矩阵 $K_B(\Sigma, \omega)$ 的转置.

3.3 带有敌对输入的异步时序机的控制问题的分析

本小节考虑当控制器 C 存在时, 具体的控制过程.

假设异步时序机 Σ 和 Σ' 的初始状态为 $x_0 = x_i$, 设控制器 C 的初始状态为 $\xi^0 = \xi_1$. 根据图 1 中的闭环系统的结构图可以得到控制器 C 的转移过程如下:

(1) 当正常输入和敌对输入分别变为 v 和 ω 时, 异步时序机 Σ' 将转移至稳定状态 $s'(x'_i, v) = x'_j$. 因为控制器 C 存在, 由文献 [9] 可知, 存在输入字符串 $u = u_1 u_2 \cdots u_t$ 使得 $s(u, \omega_g, x_i) = x_j$.

(2) 为使控制器 C 依次输出字符串 $u = u_1 u_2 \cdots u_t$, 首先使其转移至状态 $f_C(x_i, v, \omega, \xi_1) := \xi_2$, 并令其输出为 $y_C = h_C(x_i, v, \omega, \xi_2) := u_1$. 当异步时序机 Σ 的输入变为 $y_C = h_C(x_i, v, \omega, \xi_2) := u_1$ 时, 它将发生一系列的状态转移, 即 $f_\Sigma(x_i, y_C), f_\Sigma(f_\Sigma(x_i, y_C), y_C), \dots, s(x_i, y_C) = s(x_i, u_1) := x^1$, 并同时输出 $f_\Sigma(x_i, y_C), f_\Sigma(f_\Sigma(x_i, y_C), y_C), \dots, x^1$. 当异步时序机 Σ 发生状态转移时, 根据基本操作模式的原理, 令控制器 C 的状态不变, 直到 Σ 到达稳定状态 $s(x_i, y_C) = s(x_i, u_1) := x^1$ 时, 令控制器转移至下一状态并进行相应输出.

(3) 重复步骤 (2), 则控制器 C 将发生一系列的状态转移并依次输出字符 $u = u_1 u_2 \cdots u_t$, 而异步时序机 Σ 也将根据控制器 C 的输出发生一系列的状态转移. 这个过程将一直进行下去直到异步时序机 Σ 到达稳定状态 $x^t := s(x_i, u) = x_j$.

根据以上分析的控制器 C 的转移和输出过程, 可以得到控制器 C 的转移函数和输出函数如下:

$$\begin{cases} f_C(x^0, v, \omega_p, \xi_1) := \xi_2, \\ f_C(x^k, v, \omega_p, \xi_{k+1}) := \xi_{k+2}, \quad k = 1, 2, \dots, t-1, \\ f_C(x^t, v, \omega_p, \xi_{t+1}) := \xi_1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} y_C = h_C(x^0, v, \omega_p, \xi_2) := u^1, \\ y_C = h_C(x^k, v, \omega_p, \xi_{k+2}) := u^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, t-1, \\ y_C = h_C(x^0, v, \omega_p, \xi_1) := u^t. \end{cases} \quad (11)$$

3.4 控制器 C 的状态转移结构矩阵和输出结构矩阵的赋值算法

假设异步时序机 Σ 有 m 个正常输入, q 个敌对输入和 n 个状态, 异步时序机 Σ' 有 m 个输入和 n 个状态. 根据 Σ 的状态转移函数可以得到其稳定转移结构矩阵为 $F_s = [F_s^1, F_s^2, \dots, F_s^{mq}]$. 对 Σ' 的任一稳定状态转移 $s'(x_i, v) = x_j$, 可以找到最短输入字符串 $u = u_1 u_2 \cdots u_t$ 使得 $s(\delta_n^i, \delta_q^a, u) = s'(\delta_n^i, \delta_m^k)$, $a = 1, 2, \dots, q$. 假设找到的这些字符串的最大长度为 t_0 , 则控制器 C 有 $t := t_0 + 1$ 个状态. 设 Σ' 的稳定转移结构矩阵为 $F_{s'} = [F_{s'}^1, F_{s'}^2, \dots, F_{s'}^m]$, 则可以给出控制器 C 的状态转移结构矩阵 $F_C = [F_C^1, F_C^2, \dots, F_C^{mq}]$ 和输出结构矩阵 $H_C = [H_C^1, H_C^2, \dots, H_C^{mq}]$ 的赋值算法.

因为异步时序机 Σ 有 n 个状态, 所以算法 1 与 2 的步骤 2 中输入字符串的长度不超过 $n-1$, 从而有控制器 C 状态个数不超过 n . 又因为控制器 C 有 nmq 个输入, 所以算法 1 与 2 的计算复杂度不超过 mqn^2 .

3.5 闭环系统的代数表示

本小节分析图 1 中的闭环系统 $\Sigma|_C$. 闭环系统 $\Sigma|_C$ 的状态为 $x(t) = (x_C(t), x_\Sigma(t))$, 根据矩阵半张量积的知识有 $x(t) = x_C(t)x_\Sigma(t)$ 且可以得到如下定理.

算法 1 控制器 C 状态转移结构矩阵的赋值算法

步骤 1. 对于异步时序机 Σ' 的稳定组合 (δ_n^i, δ_m^k) , 假设 Σ 存在组合 $(\delta_n^i, \delta_q^a, \delta_m^k)$ 满足 $s(\delta_n^i, \delta_q^a, \delta_m^k) = s'(\delta_n^i, \delta_m^k)$, 则令 $\text{Col}_1(F_C^{(i-1)n+(k-1)m+g}) = \delta_t^1$.

步骤 2. 对于 Σ' 的有效对 (δ_n^i, δ_m^k) , 如果存在敌对输入 $\delta_q^{g'}$ 使得 $s(\delta_n^i, \delta_q^{g'}, \delta_m^k) \neq s'(\delta_n^i, \delta_m^k)$, 则可以找到最短输入字符串 $u = \delta_m^1 \delta_m^2 \dots \delta_m^{t'}$ 使得 $s(\delta_n^i, \delta_q^{g'}, u) = s'(\delta_n^i, \delta_m^k)$ 并且假设中间状态为 $\delta_n^{r_1}, \delta_n^{r_2}, \dots, \delta_n^{r_{t'}}$, 则有

$$\begin{cases} \text{Col}_1(F_C^{(i-1)mq+(k-1)q+g'}) = \delta_{t'}^2, \\ \text{Col}_2(F_C^{(r_1-1)mq+(k-1)q+g'}) = \delta_{t'}^3, \\ \vdots \\ \text{Col}_t(F_C^{(r_{t-1}-1)mq+(k-1)q+g'}) = \delta_{t'}^{t+1}, \\ \text{Col}_{t+1}(F_C^{(r_t-1)mq+(k-1)q+g'}) = \delta_{t'}^1. \end{cases} \quad (12)$$

步骤 3. 若控制器 C 的状态转移结构矩阵 $F_C = [F_C^1, F_C^2, \dots, F_C^{nmq}]$ 的列向量未被步骤 1 和 2 赋值, 则令这些列向量为零向量 δ_t^0 .

算法 2 控制器 C 的输出结构矩阵的赋值算法

步骤 1. 对于异步时序机 Σ' 的稳定组合 (δ_n^i, δ_m^k) , 假设 Σ 存在组合 $(\delta_n^i, \delta_q^a, \delta_m^k)$ 满足 $s(\delta_n^i, \delta_q^a, \delta_m^k) = s'(\delta_n^i, \delta_m^k)$, 则令 $\text{Col}_1(H_C^{(i-1)n+(k-1)m+g}) = \delta_m^k$.

步骤 2. 对于 Σ' 的有效对 (δ_n^i, δ_m^k) , 如果存在敌对输入 $\delta_q^{g'}$ 使得 $s(\delta_n^i, \delta_q^{g'}, \delta_m^k) \neq s'(\delta_n^i, \delta_m^k)$, 则可以找到最短输入字符串 $u = \delta_m^1 \delta_m^2 \dots \delta_m^{t'}$ 使得 $s(\delta_n^i, \delta_q^{g'}, u) = s'(\delta_n^i, \delta_m^k)$ 并且假设中间状态为 $\delta_n^{r_1}, \delta_n^{r_2}, \dots, \delta_n^{r_{t'}}$, 则有

$$\begin{cases} \text{Col}_2(H_C^{(i-1)mq+(k-1)q+g'}) = \delta_m^{t_1}, \\ \text{Col}_2(H_C^{(r_1-1)mq+(k-1)q+g'}) = \delta_m^{t_1}, \\ \text{Col}_3(H_C^{(r_1-1)mq+(k-1)q+g'}) = \delta_m^{t_2}, \\ \text{Col}_3(H_C^{(r_2-1)mq+(k-1)q+g'}) = \delta_m^{t_2}, \\ \vdots \\ \text{Col}_{t+1}(H_C^{(r_{t-1}-1)mq+(k-1)q+g'}) = \delta_m^{t_t}, \\ \text{Col}_{t+1}(H_C^{(r_t-1)mq+(k-1)q+g'}) = \delta_m^{t_t}, \\ \text{Col}_1(H_C^{(r_t-1)mq+(k-1)q+g'}) = \delta_m^{t_t}. \end{cases} \quad (13)$$

步骤 3. 若控制器 C 的输出结构矩阵 $H_C = [H_C^1, H_C^2, \dots, H_C^{nmq}]$ 的列向量未被步骤 1 和 2 赋值, 则令这些列向量为零向量 δ_m^0 .

定理 1 闭环系统 $\Sigma|_C$ 的状态转移函数为

$$x(t+1) = x_C(t+1)x_\Sigma(t+1) = Gv(t)\omega(t)x_C(t)x_\Sigma(t) = Gv(t)\omega(t)x(t), \quad (14)$$

其中 $G = F_C(I_{nmq} \otimes F_\Sigma H(I_{nmq} \otimes F_\Sigma)\Phi_{nmq})\Phi_{nmqt}W_{[t, nmq]}(I_{tnm} \otimes \Phi_q)W_{[mq, tn]}(I_{mq} \otimes \Phi_n)$.

证明 由图 1 和算法 1 与 2, 得到控制器 C 的状态转移函数和输出函数如下:

$$x_C(t+1) = F_C y_\Sigma(t) v(t) \omega(t) x_C(t), \quad y_C(t) = H_C y_\Sigma(t-1) v(t-1) \omega(t-1) x_C(t), \quad (15)$$

因为异步时序机 Σ 的输出函数和状态转移函数为

$$x_\Sigma(t+1) = F_\Sigma y_C(t+1) \omega(t) x_\Sigma(t), \quad y_\Sigma(t) = x(t), \quad (16)$$

又由于 $x(t) = (x_C(t), x_\Sigma(t))$, 我们可以得到闭环系统 $\Sigma|_C$ 的转移函数为

$$x(t+1) = x_C(t+1)x_\Sigma(t+1)$$

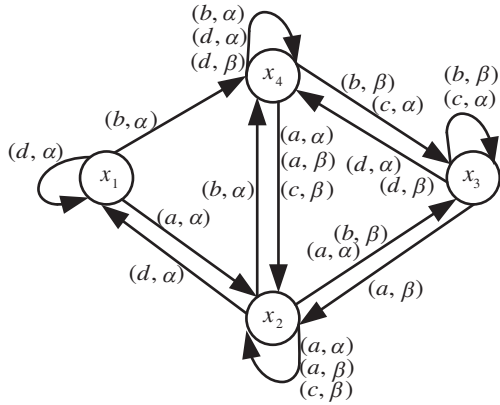


图 2 稳定异步时序机 Σ

Figure 2 The stable asynchronous sequential machine Σ

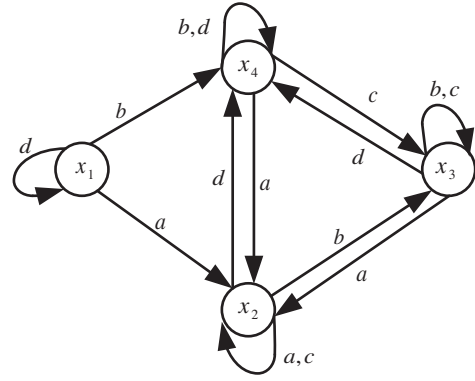


图 3 稳定异步时序机 Σ'

Figure 3 The stable asynchronous sequential machine Σ'

$$\begin{aligned}
 &= F_C y_{\Sigma}(t) v(t) \omega(t) x_C(t) F_{\Sigma} y_C(t+1) \omega(t) x_{\Sigma}(t) \\
 &= F_C y_{\Sigma}(t) v(t) \omega(t) x_C(t) F_{\Sigma} H_C y_{\Sigma}(t) v(t) \omega(t) x_C(t+1) \omega(t) x_{\Sigma}(t) \\
 &= F_C x_{\Sigma}(t) v(t) \omega(t) x_C(t) F_{\Sigma} H_C x_{\Sigma}(t) v(t) \omega(t) F_C x_{\Sigma}(t) v(t) \omega(t) x_C(t) \omega(t) x_{\Sigma}(t) \\
 &= F_C x_{\Sigma}(t) v(t) \omega(t) x_C(t) F_{\Sigma} H_C (I_{m \times n \times q} \otimes F_C) \Phi_{mnq} x_{\Sigma}(t) v(t) \omega(t) x_C(t) \omega(t) x_{\Sigma}(t) \\
 &= F_C (I_{mnqt} \otimes F_{\Sigma} (I_{mnq} \otimes F_C) \Phi_{mnq}) \Phi_{mnqt} W_{[t, mnq]} x_C(t) x_{\Sigma}(t) v(t) \Phi_q \omega(t) x_{\Sigma}(t) \\
 &= F_C (I_{mnqt} \otimes F_{\Sigma} (I_{mnq} \otimes F_C) \Phi_{mnq}) \Phi_{mnqt} W_{[t, mnq]} (I_{mnt} \otimes \Phi_q) W_{[mq, nt]} \\
 &\quad \times (I_{mqt} \otimes \Phi_n) v(t) \omega(t) x_C(t) x_{\Sigma}(t), \tag{17}
 \end{aligned}$$

从而可以得到定理 1 成立.

根据定理 1 和引理 4, 可以得到如下推论:

推论 1 考虑闭环系统 $\Sigma|_C$ 的状态变量 $x(t) = x_C(t)x_{\Sigma}(t)$, 有

$$x_C(t) = S_1 \times x(t), \tag{18}$$

$$x_{\Sigma}(t) = S_2 \times x(t), \tag{19}$$

其中 $S_1 = I_t \otimes \mathbf{1}_n$, $S_2 = \underbrace{[I_n, \dots, I_n]}_t$.

4 应用实例

本节将举例验证本文所提出的赋值算法和定理的正确性和有效性.

考虑图 2 中的稳定异步时序机 $\Sigma = (A \times B, X, X, x_0, s, h)$ 和图 3 中的稳定异步时序机 $\Sigma' = (A, X, X, x'_0, s', h')$, 其中 $A = \{a, b, c, d\}$ 为 Σ 正常输入集和 Σ' 的输入集, $B = \{\alpha, \beta\}$ 为敌对输入集, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 为状态集. 稳定异步时序机 Σ 的稳定转移函数 s 和输出函数 h 如表 1 所示, 稳定异步时序机 Σ' 的稳定转移函数 s' 和输出函数 h' 如表 2 所示.

根据表 1 和 2 可以得到 Σ 和 Σ' 的稳定转移结构矩阵分别为 $F|_s = \delta_4[2, 2, 0, 2, 0, 2, 2, 2, 4, 4, 0, 4, 0, 3, 3, 3, 0, 3, 3, 3, 0, 2, 0, 2, 1, 1, 4, 4, 0, 0, 4, 4]$ 和 $F|_{s'} = \delta_4[2, 2, 2, 2, 4, 3, 3, 4, 0, 2, 3, 3, 1, 4, 4, 4]$. 由文献 [9] 可

表 1 异步时序机 Σ 的稳定转移函数和输出函数

Table 1 The stable transition functions and output functions of machine Σ

s	(a, α)	(a, β)	(b, α)	(b, β)	(c, α)	(c, β)	(c, α)	(d, β)	h	X
x_1	x_2	—	x_4	—	—	—	x_1	—	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2	x_4	x_3	x_3	x_2	x_1	—	x_2	x_2
x_3	—	x_2	—	x_3	x_3	—	x_4	x_4	x_3	x_3
x_4	x_2	x_2	x_4	x_3	x_3	—	x_4	x_4	x_4	x_4

表 2 异步时序机 Σ' 的稳定转移函数和输出函数

Table 2 The stable transition functions and output functions of machine Σ'

s'	a	b	c	d	h'	X
x_1	x_2	x_4	—	x_1	x_1	x_1
x_2	x_2	x_3	x_2	x_4	x_2	x_2
x_3	—	x_3	x_3	x_4	x_3	x_3
x_4	x_2	x_4	x_3	x_4	x_4	x_4

知, 控制器 C 存在. 根据算法 1 与 2 考虑控制器 C 的状态转移结构矩阵和输出结构矩阵. 因为控制器 C 存在, 所以对于 Σ' 的任一稳定状态转移 $s'(\delta_4^k, \delta_4^i,) = \delta_4^j$, 都可以找到最短输入字符串 $u = u_1 u_2 \cdots u_t$ 使得 $s(\delta_4^i, \delta_4^k, \delta_2^g) = \delta_4^j$. 从而可以得到如下的一系列转移函数:

$$\begin{aligned}
 & \Sigma' : s'(\delta_4^1, \delta_4^1) = \delta_4^2, \quad \Sigma : s(\delta_4^1, \delta_4^1, \delta_2^1) = \delta_4^2; \\
 & \Sigma' : s'(\delta_4^1, \delta_4^2) = \delta_4^4, \quad \Sigma : s(\delta_4^1, \delta_4^2, \delta_2^1) = \delta_4^4; \\
 & \Sigma' : s'(\delta_4^1, \delta_4^4) = \delta_4^4, \quad \Sigma : s(\delta_4^1, \delta_4^4, \delta_2^1) = \delta_4^1; \\
 & \Sigma' : s'(\delta_4^3, \delta_4^1) = \delta_4^2, \quad \Sigma : s(\delta_4^3, \delta_4^1, \delta_2^2) = \delta_4^2; \\
 & \Sigma' : s'(\delta_4^3, \delta_4^2) = \delta_4^3, \quad \Sigma : s(\delta_4^3, \delta_4^2, \delta_2^2) = \delta_4^3; \\
 & \Sigma' : s'(\delta_4^3, \delta_4^3) = \delta_4^3, \quad \Sigma : s(\delta_4^3, \delta_4^3, \delta_2^2) = \delta_4^3; \\
 & \Sigma' : s'(\delta_4^2, \delta_4^2) = \delta_4^3, \quad \Sigma : s(\delta_4^2, \delta_4^3, \delta_2^1) = \delta_4^3, \quad s(\delta_4^2, \delta_4^2, \delta_2^2) = \delta_4^3; \\
 & \Sigma' : s'(\delta_4^2, \delta_4^3) = \delta_4^2, \quad \Sigma : s(\delta_4^2, \delta_4^1, \delta_2^1) = \delta_4^2, \quad s(\delta_4^2, \delta_4^3, \delta_2^2) = \delta_4^2; \\
 & \Sigma' : s'(\delta_4^3, \delta_4^4) = \delta_4^4, \quad \Sigma : s(\delta_4^3, \delta_4^4, \delta_2^1) = \delta_4^4, \quad s(\delta_4^3, \delta_4^4, \delta_2^2) = \delta_4^4; \\
 & \Sigma' : s'(\delta_4^4, \delta_4^1) = \delta_4^2, \quad \Sigma : s(\delta_4^4, \delta_4^1, \delta_2^1) = \delta_4^2, \quad s(\delta_4^4, \delta_4^1, \delta_2^2) = \delta_4^2; \\
 & \Sigma' : s'(\delta_4^4, \delta_4^2) = \delta_4^4, \quad \Sigma : s(\delta_4^4, \delta_4^2, \delta_2^1) = \delta_4^4, \quad s(\delta_4^4, \delta_4^2, \delta_2^2) = \delta_4^4; \\
 & \Sigma' : s'(\delta_4^4, \delta_4^3) = \delta_4^3, \quad \Sigma : s(\delta_4^4, \delta_4^3, \delta_2^1) = \delta_4^3, \quad s(\delta_4^4, \delta_4^3, \delta_2^2) = \delta_4^3; \\
 & \Sigma' : s'(\delta_4^4, \delta_4^4) = \delta_4^4, \quad \Sigma : s(\delta_4^4, \delta_4^4, \delta_2^1) = \delta_4^4, \quad s(\delta_4^4, \delta_4^4, \delta_2^2) = \delta_4^4; \\
 & \Sigma' : s'(\delta_4^2, \delta_4^1) = \delta_4^2, \quad \Sigma : s(\delta_4^2, \delta_4^1, \delta_2^1) = \delta_4^2, \quad s(\delta_4^2, \delta_4^1, \delta_2^2) = \delta_4^2;
 \end{aligned}$$

$$\Sigma' : s'(\delta_4^2, \delta_4^4) = \delta_4^4, \quad \Sigma : s(\delta_4^2, \delta_4^2, \delta_2^1) = \delta_4^4, \quad s((\delta_4^2, \delta_4^2, \delta_2^2), \delta_4^4, \delta_2^2) = \delta_4^4.$$

从上面的状态转移函数可以看出最长的输入字符串的长度为 2, 所以控制器 C 一共有 3 个状态变量. 下面举例说明算法 1 和 2 的操作. 考虑 Σ' 的状态输入组合 (δ_4^2, δ_4^4) , 对于敌对输入 δ_2^1 , 有

$s(\delta_4^2, \delta_4^2, \delta_2^1) = s'(\delta_4^2, \delta_4^4) = \delta_4^4$, 从而根据算法 1 有 $\text{Col}_1 F_C^{15} = \delta_3^2$, $\text{Col}_2 F_C^{31} = \delta_3^1$, 根据算法 2 有 $\text{Col}_2 H_C^{15} = \delta_4^2$, $\text{Col}_2 H_C^{31} = \delta_4^2$, $\text{Col}_1 H_C^{31} = \delta_4^2$; 对于敌对输入 δ_2^2 , 有 $s((\delta_4^2, \delta_4^2, \delta_2^2), \delta_4^2, \delta_2^2) = s'(\delta_4^2, \delta_4^4) = \delta_4^4$, 相应的中间状态为 δ_3^1 , 从而根据算法 1 有 $\text{Col}_1 F_C^{16} = \delta_3^2$, $\text{Col}_2 F_C^{24} = \delta_3^3$, $\text{Col}_3 F_C^{32} = \delta_3^1$, 根据算法 2 有 $\text{Col}_2 H_C^{16} = \delta_4^2$, $\text{Col}_2 H_C^{24} = \delta_4^2$, $\text{Col}_3 H_C^{24} = \delta_4^4$, $\text{Col}_3 H_C^{32} = \delta_4^4$, $\text{Col}_1 H_C^{32} = \delta_4^4$.

由算法 1 和 2, 可以得到控制器 C 的转移结构矩阵和输出结构矩阵分别为

$$F_C = \delta_3[1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 3, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 3];$$

$$H_C = \delta_4[1, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 3, 0, 1, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 3, 3, 0, 2, 2, 0, 3, 3, 0, 2, 2, 0, 4, 0, 0, 4, 2, 4, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 2, 0, 4, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 2, 0, 4, 0, 4].$$

由定理 1 和推论 1 可以得到闭环系统 $\Sigma|_C$ 的状态转移函数和输出函数为

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x_C(t+1)x_\Sigma(t+1) \\ &= F_C(I_{96} \otimes F_\Sigma H(I_{32} \otimes F)\Phi_{32})\Phi_{96}W_{[3,32]}(I_{48} \otimes \Phi_2)W_{[8,12]}(I_{24} \otimes \Phi_4)v(t)\omega(t)x(t), \\ y(t) &= y_\Sigma(t) = x_\Sigma(t) = S_2x(t), \quad S_2 = [I_4, I_4, I_4]. \end{aligned}$$

由推论 1 得到 $x_C(2) = S_1x(2)$, $S_1 = I_3 \otimes 1_4$. 接下来, 举例验证所设计控制器的正确性. 假设异步时序机 Σ 与 Σ' 的初始状态为 δ_4^2 , Σ' 的输入即 Σ 的正常输入为 δ_4^2 , 则由 Σ' 的稳定状态转移函数可知其将转移至稳定状态 δ_4^4 . 考虑所设计的闭环系统的状态转移过程: 首先假设异步时序机 Σ 的敌对输入为 δ_2^1 , 保持正常输入 δ_4^2 和敌对输入 δ_2^1 不变, 可以得到转移过程为

$$\begin{aligned} x(2) &= x_C(2)x_\Sigma(2) \\ &= F_C(I_{96} \otimes F_\Sigma H(I_{32} \otimes F)\Phi_{32})\Phi_{96}W_{[3,32]}(I_{48} \otimes \Phi_2)W_{[8,12]}(I_{24} \otimes \Phi_4)v(1)\omega(1)x(1) \\ &= F_C(I_{96} \otimes F_\Sigma H(I_{32} \otimes F)\Phi_{32})\Phi_{96}W_{[3,32]}(I_{48} \otimes \Phi_2)W_{[8,12]}(I_{24} \otimes \Phi_4)\delta_4^1 \delta_2^1 \delta_3^1 \delta_4^2 \\ &= \delta_{12}^8, \end{aligned}$$

$$y(2) = x_\Sigma(2) = S_2x(2) = \delta_4^4,$$

$$x_C(2) = S_1x(2) = \delta_3^2;$$

$$x(3) = x_C(3)x_\Sigma(3)$$

$$\begin{aligned} &= F_C(I_{96} \otimes F_\Sigma H(I_{32} \otimes F)\Phi_{32})\Phi_{96}W_{[3,32]}(I_{48} \otimes \Phi_2)W_{[8,12]}(I_{24} \otimes \Phi_4)v(2)\omega(2)x(2) \\ &= F_C(I_{96} \otimes F_\Sigma H(I_{32} \otimes F)\Phi_{32})\Phi_{96}W_{[3,32]}(I_{48} \otimes \Phi_2)W_{[8,12]}(I_{24} \otimes \Phi_4)\delta_4^1 \delta_2^1 \delta_3^2 \delta_4^4 \\ &= \delta_{12}^4, \end{aligned}$$

$$y(3) = x_\Sigma(3) = S_2x(3) = \delta_4^4,$$

$$x_C(3) = S_1x(3) = \delta_3^1;$$

$$x(4) = x_C(4)x_\Sigma(4)$$

$$= F_C(I_{96} \otimes F_\Sigma H(I_{32} \otimes F)\Phi_{32})\Phi_{96}W_{[3,32]}(I_{48} \otimes \Phi_2)W_{[8,12]}(I_{24} \otimes \Phi_4)v(3)\omega(3)x(3)$$

$$\begin{aligned}
 &= F_C(I_{96} \otimes F_\Sigma H(I_{32} \otimes F)\Phi_{32})\Phi_{96}W_{[3,32]}(I_{48} \otimes \Phi_2)W_{[8,12]}(I_{24} \otimes \Phi_4)\delta_4^1 \delta_2^1 \delta_3^1 \delta_4^4 \\
 &= \delta_{12}^4, \\
 y(4) &= x_\Sigma(4) = S_2 x(4) = \delta_4^4, \\
 x_C(4) &= S_1 x(4) = \delta_3^1.
 \end{aligned}$$

由整个闭环系统的转移过程可以得到系统最后将保持稳定状态, 且此时 Σ 的稳定状态为 δ_4^4 即系统的稳定输出为 δ_4^4 . 接着考虑当异步时序机 Σ 的敌对输入为 δ_2^2 时, 保持正常输入 δ_4^2 和敌对输入 δ_2^2 不变, 得到系统的转移过程为

$$\begin{aligned}
 x(2) &= x_C(2)x_\Sigma(2) \\
 &= F_C(I_{96} \otimes F_\Sigma H(I_{32} \otimes F)\Phi_{32})\Phi_{96}W_{[3,32]}(I_{48} \otimes \Phi_2)W_{[8,12]}(I_{24} \otimes \Phi_4)v(1)\omega(1)x(1) \\
 &= F_C(I_{96} \otimes F_\Sigma H(I_{32} \otimes F)\Phi_{32})\Phi_{96}W_{[3,32]}(I_{48} \otimes \Phi_2)W_{[8,12]}(I_{24} \otimes \Phi_4)\delta_4^1 \delta_2^2 \delta_3^1 \delta_4^2 \\
 &= \delta_{12}^7, \\
 y(2) &= x_\Sigma(2) = S_2 x(2) = \delta_4^3, \\
 x_C(2) &= S_1 x(2) = \delta_3^2; \\
 x(3) &= x_C(3)x_\Sigma(3) \\
 &= F_C(I_{96} \otimes F_\Sigma H(I_{32} \otimes F)\Phi_{32})\Phi_{96}W_{[3,32]}(I_{48} \otimes \Phi_2)W_{[8,12]}(I_{24} \otimes \Phi_4)v(2)\omega(2)x(2) \\
 &= F_C(I_{96} \otimes F_\Sigma H(I_{32} \otimes F)\Phi_{32})\Phi_{96}W_{[3,32]}(I_{48} \otimes \Phi_2)W_{[8,12]}(I_{24} \otimes \Phi_4)\delta_4^1 \delta_2^2 \delta_3^2 \delta_4^3 \\
 &= \delta_{12}^{12}, \\
 y(3) &= x_\Sigma(3) = S_2 x(3) = \delta_4^4, \\
 x_C(3) &= S_1 x(3) = \delta_3^3; \\
 x(4) &= x_C(4)x_\Sigma(4) \\
 &= F_C(I_{96} \otimes F_\Sigma H(I_{32} \otimes F)\Phi_{32})\Phi_{96}W_{[3,32]}(I_{48} \otimes \Phi_2)W_{[8,12]}(I_{24} \otimes \Phi_4)v(3)\omega(3)x(3) \\
 &= F_C(I_{96} \otimes F_\Sigma H(I_{32} \otimes F)\Phi_{32})\Phi_{96}W_{[3,32]}(I_{48} \otimes \Phi_2)W_{[8,12]}(I_{24} \otimes \Phi_4)\delta_4^1 \delta_2^2 \delta_3^3 \delta_4^4 \\
 &= \delta_{12}^4, \\
 y(4) &= x_\Sigma(4) = S_2 x(4) = \delta_4^4, \\
 x_C(4) &= S_1 x(4) = \delta_3^1; \\
 x(5) &= x_C(5)x_\Sigma(5) \\
 &= F_C(I_{96} \otimes F_\Sigma H(I_{32} \otimes F)\Phi_{32})\Phi_{96}W_{[3,32]}(I_{48} \otimes \Phi_2)W_{[8,12]}(I_{24} \otimes \Phi_4)v(4)\omega(4)x(4) \\
 &= F_C(I_{96} \otimes F_\Sigma H(I_{32} \otimes F)\Phi_{32})\Phi_{96}W_{[3,32]}(I_{48} \otimes \Phi_2)W_{[8,12]}(I_{24} \otimes \Phi_4)\delta_4^1 \delta_2^2 \delta_3^1 \delta_4^4 \\
 &= \delta_{12}^4, \\
 y(5) &= x_\Sigma(5) = S_2 x(5) = \delta_4^4, \\
 x_C(5) &= S_1 x(5) = \delta_3^1.
 \end{aligned}$$

同样, 由上述转移过程可以得到当 Σ 的敌对输入为 δ_2^2 时, 整个闭环系统最后也将保持稳定状态, 且此时 Σ 的稳定状态为 δ_4^4 , 即系统的稳定输出为 δ_4^4 . 从而可以得到所设计的控制器能够使得闭环系统 $\Sigma|_C$ 与 Σ' 的输入输出行为稳定等价, 即此控制器为带有敌对输入的异步时序机 Σ 的控制问题的解.

5 结论

本文基于矩阵半张量积的方法,研究了带有敌对输入的异步时序机的控制问题.利用矩阵半张量积,首先给出了带有敌对输入的异步时序机的状态转移结构矩阵.利用状态转移结构矩阵,可以用代数形式简洁地表示带有敌对输入的异步时序机的动态行为.接着,利用模型匹配的思想,分析了具体的控制过程并给出了控制器的状态转移结构矩阵和输出结构矩阵的赋值算法.本文最后给出了整个闭环系统动态行为的代数表示,因为赋值算法只涉及矩阵操作,所以可以利用计算机等工具快速高效地求解出整个闭环系统的状态转移过程.最后用具体实例阐释了所提算法的具体操作过程并验证了所给理论结果的正确性.

本文讨论的异步时序机为输入/状态机,具有一定的局限性,所以未来的工作将考虑带有敌对输入的输入/输出异步时序机的匹配问题.另外,实际应用中的异步时序机可能会包含有无限环,所以研究带有敌对输入的并且包含无限环的异步时序机的控制问题也有着重要意义.

参考文献

- 1 Kohavi Z. *Switching and Finite Automata Theory*. New York: McGraw-Hill, 1978
- 2 Emad N, Shahzadeh-Fazeli S A, Dongarra J. An asynchronous algorithm on the NetSolve global computing system. *Future Gener Comput Syst*, 2006, 22: 279–290
- 3 Nishimura N. Efficient asynchronous simulation of a class of synchronous parallel algorithms. *J Comput Syst Sci*, 1995, 50: 598–113
- 4 Alba E, Troya J M. Analyzing synchronous and asynchronous parallel distributed genetic algorithms. *Future Gener Comput Syst*, 2001, 17: 451–465
- 5 Hammer J. On some control problems in molecular biology. In: *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 1995. 4098–4103
- 6 Murphy T E. On the control of asynchronous sequential machines with races. Dissertation for Ph.D. Degree. Gainesville: University of Florida, 1996
- 7 Geng X J, Hammer J. Input/output control of asynchronous sequential machines. *IEEE Trans Automat Contr*, 2005, 50: 1956–1970
- 8 Yang J M. Corrective control of input/output asynchronous sequential machines with adversarial inputs. *IEEE Trans Autom Contr*, 2010, 55: 755–761
- 9 Yang J M, Hammer J. State feedback control of asynchronous sequential machines with adversarial inputs. *Int J Contr*, 2008, 81: 1910–1929
- 10 Yang J M. Corrective control of asynchronous sequential machines in the presence of adversarial input. *IET Contr Theor Appl*, 2008, 2: 706–716
- 11 Yang J M, Hammer J. Counteracting the effects of adversarial inputs on asynchronous sequential machines. *IFAC Proc Vol*, 2008, 41: 1432–1437
- 12 Cheng D Z, Qi H S, Zhao Y. *An Introduction to Semi-Tensor Product of Matrices and Its Applications*. Singapore: World Science, 2012
- 13 Cheng D Z. Semi-tensor product of matrices and its application to Morgen's problem. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2001, 44: 195–212
- 14 Liu R J, Lu J Q, Liu Y, et al. Delayed feedback control for stabilization of Boolean control networks with state delay. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2018, 29: 3283–3288
- 15 Chen H W, Liang J L, Lu J Q. Partial synchronization of interconnected Boolean networks. *IEEE Trans Cybern*, 2017, 47: 258–266
- 16 Liu Y, Chen H W, Lu J Q, et al. Controllability of probabilistic Boolean control networks based on transition probability matrices. *Automatica*, 2015, 52: 340–345

- 17 Li H T, Wang Y Z, Xie L H. Output tracking control of Boolean control networks via state feedback: Constant reference signal case. *Automatica*, 2015, 59: 54–59
- 18 Han X G, Chen Z Q, Liu Z X, et al. Calculation of siphons and minimal siphons in Petri nets based on semi-tensor product of matrices. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2017, 47: 531–536
- 19 Han X G, Chen Z Q, Liu Z X, et al. Semi-tensor product of matrices approach to stability and stabilization analysis of bounded Petri net systems. *Sci Sin Inform*, 2016, 46: 1542–1554 [韩晓光, 陈增强, 刘忠信, 等. 有界 Petri 网系统稳定性与镇定性分析的矩阵半张量积方法. *中国科学: 信息科学*, 2016, 46: 1542–1554]
- 20 Zhao J T, Chen Z Q, Liu Z X. Modeling and analysis of colored petri net based on the semi-tensor product of matrices. *Sci China Inf Sci*, 2018, 61: 010205
- 21 Yan Y Y, Chen Z Q, Yue J M, et al. STP approach to model controlled automata with application to reachability analysis of DEDS. *Asian J Contr*, 2016, 18: 2027–2036
- 22 Xu X R, Hong Y G. Matrix expression and reachability analysis of finite automata. *J Contr Theor Appl*, 2012, 10: 210–215
- 23 Zhang K Z, Zhang L J. Observability of Boolean control networks: a unified approach based on finite automata. *IEEE Trans Autom Contr*, 2016, 61: 2733–2738
- 24 Xu X R, Hong Y G. Model matching for asynchronous sequential machine via matrix approach. In: *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*, Hefei, 2012. 4646–4651
- 25 Wang J J, Han X G, Chen Z Q, et al. Model matching of input/output asynchronous sequential machines based on the semi-tensor product of matrices. *Future Gener Comput Syst*, 2018, 83: 468–475
- 26 Wang J J, Han X G, Chen Z Q, et al. Calculating skeleton matrix of asynchronous sequential machines based on the semi-tensor product of matrices. *IET Contr Theor Appl*, 2017, 11: 2131–2139
- 27 Wang B, Feng J E, Meng M. Model matching of switched asynchronous sequential machines via matrix approach. *Int J Contr*, 2018, 105: 1–11
- 28 Wang B, Feng J E, Meng M. Matrix approach to model matching of composite asynchronous sequential machines. *IET Contr Theor Appl*, 2017, 11: 2122–2130

Control of asynchronous sequential machine with adversarial input based on the semi-tensor product of matrices

Zengqiang CHEN^{1,2,3*}, Jingjing WANG^{1,2}, Xiaoguang HAN^{1,2} & Qing ZHANG³

1. *College of Computer and Control Engineering, Nankai University, Tianjin 300350, China;*

2. *Key Laboratory of Intelligent Robotics of Tianjin, Nankai University, Tianjin 300350, China;*

3. *College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China*

* Corresponding author. E-mail: chenzq@nankai.edu.cn

Abstract In this study, we investigate the control problem of asynchronous sequential machine with adversarial input by using the semi-tensor product (STP) of matrices. First, by applying the STP of matrices, a new algebraic expression of asynchronous sequential machines with an adversarial input is deduced. Next, by investigating the control process, the controller with the minimal state set is designed, and two algorithms for assigning the values to the state transition structure matrix and the output structure matrix of the controller are proposed. Then, in the framework of the algebraic expression of the asynchronous sequential machines with adversarial input and two proposed algorithms, an algebra expression of the closed-loop system dynamic is established; the theoretical results are verified by using this algebra expression. Finally, an example is presented to illustrate the validity and application of the proposed approach.

Keywords adversarial input, asynchronous sequential machine, semi-tensor product of matrices, controller, transition structure matrix, output structure matrix



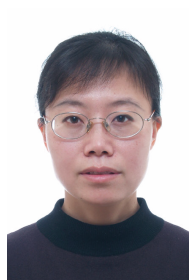
Zengqiang CHEN was born in 1964. He received his B.S., M.E., and Ph.D. degrees from Nankai University in 1987, 1990, and 1997, respectively. He is currently a professor of control theory and engineering at Nankai University and the deputy director of the Institute of Robotics and Information Automation. His current research interests include multi-agent system control, discrete event dynamic systems, Petri nets, and automata.



Jingjing WANG was born in 1992. She received her B.S. degree in mathematics and applied mathematics from Tianjin University, Tianjin, China, in 2015. She is currently pursuing her M.S. degree in optimization and automatic control theory at Nankai University, Tianjin, China. Her current research interests include discrete event dynamic systems, Petri nets, and automata.



Xiaoguang HAN was born in 1984. He received his B.S. and M.S. degrees from the Department of Mathematics, Harbin Normal University, Harbin Engineering University, Harbin, China, in 2007 and 2009, respectively. Since 2014 he has been pursuing his Ph.D. degree in control science and engineering at Nankai University, Tianjin, China. His research interests include discrete event dynamic systems, Petri nets, and automata.



Qing ZHANG was born in 1965. She received her B.S. and M.S. degrees in mathematics from Nankai University in 1987 and 2005, respectively. She is currently a professor at the College of Science, Civil Aviation University of China. Her main research interests include chaotic systems, complex networks, and multi-agent systems.