

论文

# 七次 PH 曲线 $G^2[C^1]$ Hermite 插值方法

李毓君<sup>1</sup>, 方林聪<sup>2\*</sup>, 汪国昭<sup>3</sup>

1. 浙江财经大学东方学院, 海宁 314408
2. 浙江财经大学信息管理与工程学院, 杭州 310018
3. 浙江大学数学科学学院, 杭州 310027

\* 通信作者. E-mail: lincongfang@gmail.com

收稿日期: 2018-02-14; 接受日期: 2018-03-22; 网络出版日期: 2019-06-06

浙江省自然科学基金(批准号: LY18F020023)、国家自然科学基金(批准号: 61272300)、浙江省一流学科 A 类(浙江财经大学统计学)和浙江财经大学东方学院院级一般课题(批准号: 2018dfy013)资助项目

**摘要** 本文讨论七次 PH (Pythagorean hodograph) 曲线的  $G^2[C^1]$  Hermite 插值问题. PH 曲线是具有有理形式的等距线的一类多项式参数曲线, 其弧长可精确计算, 因此在 CAD (computer aided design) 中有着广泛的应用. 本文采用平面参数曲线的复数表示形式, 根据导矢曲线因式分解得到的多项式因子次数不同, 将七次 PH 曲线分为 3 类. 第 1 类七次 PH 曲线都是正则曲线, 且其  $G^2[C^1]$  Hermite 插值方法已经被研究. 本文研究另外两类七次 PH 曲线的构造方法, 并指出对于给定的初始条件, 存在不超过 6 条的偶数条第 2 类七次 PH 曲线; 而第 3 类七次 PH 曲线的存在性不仅对初始条件有约束, 而且可以通过用户指定一个具有几何意义的实参进行交互构造. 本文最后通过实例构造了这两类曲线对六分之一圆弧曲线的逼近.

**关键词** Bézier 曲线, 等距曲线, 七次, 几何连续, Hermite 插值

## 1 引言

多项式参数曲线曲面是计算机辅助设计(CAD, computer aided design)中最受欢迎的建模工具之一. 作为一类特殊的参数曲线, Pythagorean hodograph(PH) 曲线的一阶导数满足 Pythagorean 条件, 即其一阶导数的欧式范数为一个实多项式. 由于这种特殊的代数结构, PH 曲线表现出了优越于普通参数曲线的几何特性, 如弧长可精确计算、具有有理等距曲线等, 因此它们被广泛地应用于机器人路径规划、数控加工、铁路道路设计等.

PH 曲线自被提出<sup>[1]</sup>以来便受到广泛的关注, 特别是在各种给定端点条件下 PH 曲线的构造方法, 涌现了大量的研究工作. Farouki 和 Neff<sup>[2]</sup>解决了五次 PH 曲线的  $C^1$  插值问题, 指出对于任意给定的  $C^1$  端点条件, 总存在 4 条满足条件的五次 PH 曲线. Moon 等<sup>[3]</sup>进一步深入讨论了在 4 个可行

**引用格式:** 李毓君, 方林聪, 汪国昭. 七次 PH 曲线  $G^2[C^1]$  Hermite 插值方法. 中国科学: 信息科学, 2019, 49: 698–707, doi: 10.1360/N112017-00229  
Li Y J, Fang L C, Wang G Z.  $G^2[C^1]$  Hermite interpolation using septic PH curves (in Chinese). Sci Sin Inform, 2019, 49: 698–707, doi: 10.1360/N112017-00229

解中选取最优解的标准与方法。Yong 和 Zheng<sup>[4]</sup>采用几何方法对五次 PH 曲线的  $C^1$  Hermite 插值问题进行研究。Meek 和 Walton<sup>[5]</sup>讨论了  $G^1$  端点条件下三次 PH 曲线的构造方法。Byrtus 和 Bastl<sup>[6]</sup>对该工作进一步推广并深入分析了插值解的数量与质量。Jütter<sup>[7]</sup>对一类七次 PH 曲线在  $G^2[C^1]$  端点条件下的构造进行了研究，并给出了七次 PH 曲线对任意曲线的逼近阶。Kong 等<sup>[8]</sup>采用曲线的复数表示方法，并考虑在复数域中 PH 曲线的导矢曲线零点分布情况，提出了一类特殊的 PH 曲线的  $C^1$  Hermite 插值方法。针对应用中经常出现的直角过渡曲线设计问题，Farouki<sup>[9]</sup>分别讨论了三次、五次、七次 PH 曲线在  $G^2$  条件下的构造方法。偶数次的 PH 曲线也可以被很好地应用于曲线构造，Wang 和 Fang<sup>[10]</sup>给出了四次 PH 曲线  $G^1$  条件下的几何构造方法，Fang 等<sup>[11]</sup>和 Wang 等<sup>[12]</sup>分别讨论了六次 PH 曲线在  $C^1$  和  $G^2$  端点条件下的构造方法。此外，PH 曲线的相关理论更进一步被推广至高维曲线<sup>[13, 14]</sup>和有理曲线<sup>[15, 16]</sup>。更多的内容以及实例可以参考文献[17~19]及其中的参考文献。

另一方面，PH 曲线的判别问题的研究也不断取得进展，即给定一个多项式曲线及其 Bézier 控制多边形，如何判断该曲线是否为 PH 曲线，这个问题在逆向工程中有着重要的应用<sup>[20]</sup>。针对该问题，Farouki 等<sup>[20]</sup>提出了一种代数学方法，并给出了可以保证 PH 性质的且在数控应用中的可靠精度范围。在 PH 曲线提出之初，Farouki<sup>[1]</sup>就已经给出了三次 PH 曲线的一种几何判断方法，该方法可通过 Bézier 控制多边形的边长和角度来判别三次 PH 曲线。Wang 和 Fang<sup>[10]</sup>采用曲线的复数表示方法，解决了四次 PH 曲线的几何判别问题。五次、六次、七次 PH 曲线的几何特征也相继被提出<sup>[21~23]</sup>。进一步，Lu 等<sup>[24]</sup>研究了三次间接 PH 曲线几何判别、分类，以及构造方法。

在考虑曲线逼近问题时，除了对目标曲线本身进行逼近，同时设计者可能希望对其曲率进行逼近，因此  $G^2[C^1]$  条件下的曲线构造方法研究有着重要的应用<sup>[7]</sup>。特别地，在数控加工中，曲线的切线表达的是加工速度，而曲率则表达了加工过程的加速度，因而在设计机械加工路径时，对切线和曲率设置约束条件显得非常重要。七次 PH 曲线在直角拐角进行过渡曲线设计时，可以保证有足够的自由度，因此有着非常灵活和有效的应用<sup>[9]</sup>。本文采用平面参数曲线的复数形式，提出了在给定的  $G^2[C^1]$  条件下七次 PH 曲线的构造方法。七次 PH 曲线根据其导矢曲线的因式分解的不同被分为 3 类，其中第 1 类曲线的构造已经在文献[7]中被研究，本文重点讨论其余两类曲线的基于  $G^2[C^1]$  Hermite 初始条件的构造方法。

## 2 七次 PH 曲线

本文以粗斜体字母表示复变量，而普通斜体字母表示实变量， $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$  为虚数单位。在复平面  $\mathbb{C}$  中，一条平面参数曲线  $\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t))$  的复数形式为  $\mathbf{P}(t) = x(t) + \mathbf{i}y(t)$ 。这种复数形式的表示方法对于 PH 曲线的性质以及构造研究带来了极大的便利性。对于一个复数  $z$ ，符号  $\|z\|$  表示它的模，符号  $\arg z$  表示其辐角，其实部与虚部分别记为  $\operatorname{Re}(z)$  和  $\operatorname{Im}(z)$ 。

给定复平面内的控制顶点  $\mathbf{P}_i = x_i + \mathbf{i}y_i$ ,  $i = 0, \dots, 7$ ,

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^7 \mathbf{P}_i B_i^n(t) \quad 0 \leq t \leq 1,$$

定义了一条平面七次 Bézier 曲线，且其速端曲线也可以表示为 Bernstein 形式：

$$\mathbf{P}'(t) = 7 \sum_{i=0}^6 \Delta \mathbf{P}_i B_i^6(t) \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

其中,  $\Delta \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i$ , 记  $L_i = \|\Delta \mathbf{P}_i\|$ ,  $\theta_i = \arg \Delta \mathbf{P}_i$ ,  $i = 0, \dots, 6$ , 分别为控制多边形每条边的边长与辐角.

**定义1** 一条平面多项式曲线  $\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t))$ , 若存在一个实多项式  $\sigma(t)$ , 使得其一阶导数  $\mathbf{P}'(t) = (x'(t), y'(t))$  满足

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t), \quad (2)$$

则称该曲线为一条平面 PH 曲线<sup>[1]</sup>.

**定理1** 一条平面参数曲线是 PH 曲线当且仅当其一阶导数有以下形式的因式分解:

$$\mathbf{P}'(t) = w(t)[u(t) + \mathbf{i}v(t)]^2, \quad (3)$$

其中  $u(t), v(t), w(t)$  为实多项式, 且  $u(t)$  与  $v(t)$  互素.

当  $w(t) = 0$  存在实根时, 其实根处即为曲线的奇异点. 由定理 1 可知, 当  $\mathbf{P}(t)$  为七次多项式时, 则  $\mathbf{P}'(t)$  为六次多项式, 因此其因式分解有以下 3 种可能: (1) 多项式  $w(t)$  为零次多项式, 而  $u(t) + \mathbf{i}v(t)$  为三次复多项式; (2) 多项式  $w(t)$  为二次多项式, 而  $u(t) + \mathbf{i}v(t)$  为二次复多项式; (3) 多项式  $w(t)$  为四次多项式, 而  $u(t) + \mathbf{i}v(t)$  为一次复多项式. 下文分别称这 3 种情况为第 1 类、第 2 类和第 3 类七次 PH 曲线. 对于第 1 类七次 PH 曲线, 由于  $w(t)$  为零次多项式, 故不存在  $w(t) = 0$  的实根, 即曲线是正则的; 而对于另外两类七次 PH 曲线, 既有可能是正则曲线, 也可能为非正则曲线, 即在曲线上可能存在奇异点. 文献 [7] 研究了第 1 类七次 PH 曲线在给定的  $G^2[C^1]$  初始条件下的构造方法, 即给定控制顶点  $\mathbf{P}_i$ ,  $i = 0, 1, 6, 7$ , 以及两端点  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_7$  处的曲率值  $k_0, k_1$ , 求出其他的控制顶点使得定理 1 成立. 本文将进一步深入讨论另外两类七次 PH 曲线在相同条件下的构造方法.

### 3 第 2 类七次 PH 曲线构造

对于第 2 类七次 PH 曲线, 其一阶导数  $\mathbf{P}'(t)$  的因式分解可写为  $\mathbf{P}'(t) = \sum_{i=0}^2 a_i B_i^2(t) (\sum_{j=0}^2 z_j B_j^2(t))^2$ , 其中  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $z_j \in \mathbb{C}$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $j = 0, 1, 2$ , 将其展开得到

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) = & a_0 z_0^2 (1-t)^6 \\ & + (4a_0 z_0 z_1 + 2a_1 z_0^2)(1-t)^5 t \\ & + [a_0(4z_1^2 + 2z_0 z_2) + 8a_1 z_0 z_1 + a_2 z_0^2](1-t)^4 t^2 \\ & + [4a_0 z_1 z_2 + 2a_1(4z_1^2 + 2z_0 z_2) + 4a_2 z_0 z_1](1-t)^3 t^3 \\ & + [a_0 z_2^2 + 8a_1 z_1 z_2 + a_2(4z_1^2 + 2z_0 z_2)](1-t)^2 t^4 \\ & + (2a_1 z_2^2 + 4a_2 z_1 z_2)(1-t)t^5 \\ & + a_2 z_2^2 t^6. \end{aligned}$$

由 (1) 知七次 Bézier 曲线的一阶导数可由其控制多边形表示, 因此通过比较 Bernstein 多项式的系数得到

$$\begin{aligned} 7\Delta \mathbf{P}_0 &= a_0 z_0^2, \\ 42\Delta \mathbf{P}_1 &= 4a_0 z_0 z_1 + 2a_1 z_0^2, \\ 105\Delta \mathbf{P}_2 &= a_0(4z_1^2 + 2z_0 z_2) + 8a_1 z_0 z_1 + a_2 z_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
140\Delta\mathbf{P}_3 &= 4a_0z_1z_2 + 2a_1(4z_1^2 + 2z_0z_2) + 4a_2z_0z_1, \\
105\Delta\mathbf{P}_4 &= a_0z_2^2 + 8a_1z_1z_2 + a_2(4z_1^2 + 2z_0z_2), \\
42\Delta\mathbf{P}_5 &= 2a_1z_2^2 + 4a_2z_1z_2, \\
7\Delta\mathbf{P}_6 &= a_2z_2^2.
\end{aligned} \tag{4}$$

因此, 在给定控制顶点  $\mathbf{P}_i$ ,  $i = 0, 1, 6, 7$ , 及两端点处的曲率  $k_0, k_1$  的条件下, 若能反求各个系数  $a_i, z_j$ , 即可重构七次 PH 曲线的各个控制顶点. 若不考虑控制顶点重合的退化情况, 下面的讨论假设  $a_2 = 1$ , 于是  $z_2 = \pm\sqrt{7\Delta\mathbf{P}_6}$ . 假设  $z_0 = r_0e^{i\theta_0}$ , 且  $L_i$ ,  $i = 0, \dots, 6$ , 分别为控制多边形各条边的长度, 则有  $\theta_0 = \frac{\arg \Delta\mathbf{P}_0}{2}$ , 且  $a_0r_0^2 = 7L_0$ . 又记  $z_0 = r_0(x_0 + iy_0)$ ,  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ , 于是  $x_0 = \cos\theta_0$ ,  $y_0 = \sin\theta_0$ ,  $x_2 = \operatorname{Re}(z_2)$ ,  $y_2 = \operatorname{Im}(z_2)$  均为已知, 而未知数为  $a_0, a_1, r_0, x_1, y_1$ .

已知曲线两端点处的曲率分别为  $k_0, k_1$ , 则有

$$k_0 = \frac{4\operatorname{Im}(\overline{z_0}z_1)}{a_0|z_0|^4}, \quad k_1 = \frac{4\operatorname{Im}(\overline{z_1}z_2)}{|z_2|^4}.$$

将  $z_i = x_i + iy_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , 代入上式得到

$$4x_0y_1 - 24x_1y_0 = 7k_0L_0r_0, \quad 4x_1y_2 - 24x_2y_1 = 49k_1L_6^2.$$

于是  $x_1, y_1$  均可用  $r_0$  表出如下:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{7k_0L_0r_0x_2 + 49k_1L_6^2x_0}{4(x_0y_2 - x_2y_0)}, \\
y_1 &= \frac{7k_0L_0r_0y_2 + 49k_1L_6^2y_0}{4(x_0y_2 - x_2y_0)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

将式 (4) 代入  $\sum_{i=1}^5 \Delta\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_1$  得到

$$\begin{aligned}
&(10z_0z_1 + 4z_1^2 + 2z_0z_2 + 3z_1z_2 + z_2^2)a_0 \\
&+ (5z_0^2 + 8z_0z_1 + 6z_1^2 + 3z_0z_2 + 8z_1z_2 + 5z_2^2)a_1 \\
&+ z_0^2 + 3z_0z_1 + 4z_1^2 + 2z_0z_2 + 10z_1z_2 - 105(\mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_1) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

因为  $a_1$  为实数, 所以必然有

$$\begin{aligned}
&[(10z_0z_1 + 4z_1^2 + 2z_0z_2 + 3z_1z_2 + z_2^2)a_0 + z_0^2 + 3z_0z_1 + 4z_1^2 + 2z_0z_2 + 10z_1z_2 - 105(\mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_1)] \\
&\times (5z_0^2 + 8z_0z_1 + 6z_1^2 + 3z_0z_2 + 8z_1z_2 + 5z_2^2) = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

其中  $\times$  表示的是复数的叉乘运算. 由前面的讨论已知  $a_0, x_1, y_1$  均可由  $r_0$  表示, 因此分别将  $z_i = x_i + iy_i$  代入式 (7), 得到关于  $r_0$  的一个六次实方程. 通过对该方程进行数值求解得到  $r_0$ , 若解为实数, 则  $z_0$  显然已知, 将其代入  $a_0r_0^2 = 7L_0$  可求得  $a_0$ , 再分别代入式 (5) 和 (6) 得到  $z_1$  和  $a_1$ , 进而由式 (4) 可构造符合条件的第 2 类七次 PH 曲线的控制多边形.

根据代数基本定理, 六次实方程最多有 6 个实数解, 且复数解必定是共轭的, 因此对于给定的任一  $G^2[C^1]$  初始条件, 存在不超过 6 条的偶数条第 2 类七次 PH 曲线. 虽然  $z_2 = \pm\sqrt{7\Delta\mathbf{P}_6}$  中存在符号的选择问题, 但是由于方程解的对称性, 因此对最终的解个数没有影响. 图 1 考虑用第 2 类七次

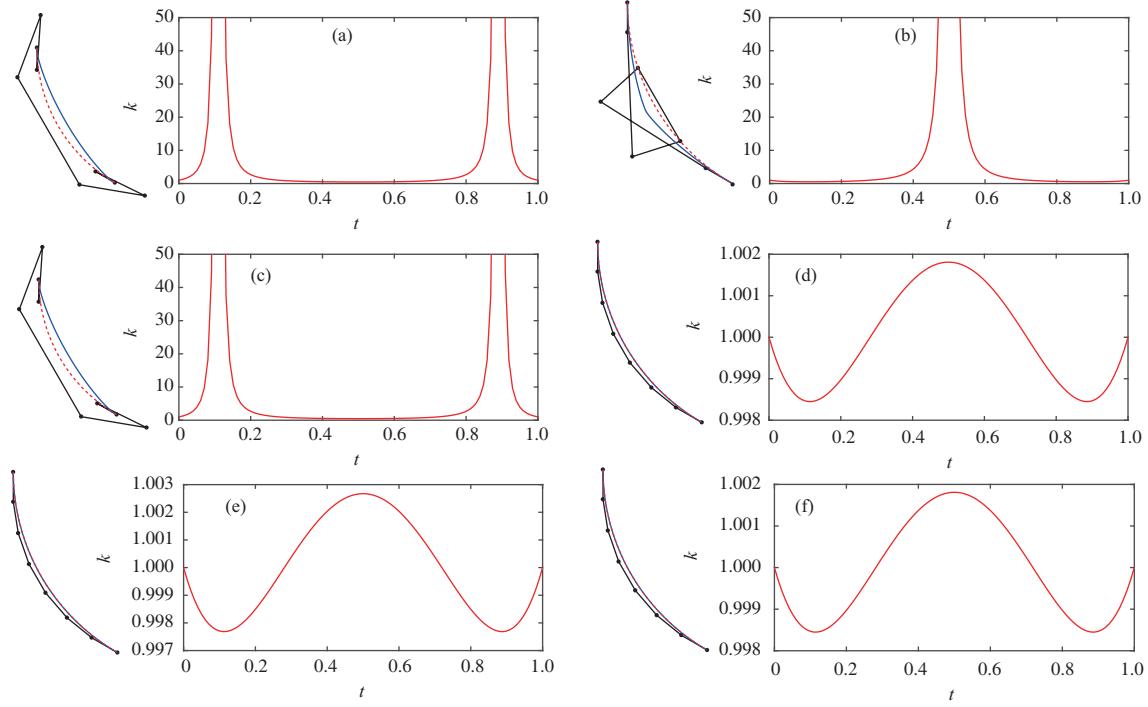


图 1 (网络版彩图) 六分之一圆弧的第 2 类七次 PH 曲线逼近. 由于求解的六次方程存在 6 个近似解, 因此得到 6 条相应的曲线及其曲率, 其中图中红色虚线表示的是六分之一圆弧. (a)  $r_0 = -8.1187$ ; (b)  $r_0 = -1$ ; (c)  $r_0 = -0.1232$ ; (d)  $r_0 = 0.5909$ ; (e)  $r_0 = 1$ ; (f)  $r_0 = 1.6925$

**Figure 1** (Color online) Approximation of a 1/6 circular arc using class II septic PH curves. Because there are six different roots for the sextic equation, we get six corresponding curves with their curvature profiles, where the dash line shows the circular arc. A septic PH curve with its curvature profile when (a)  $r_0 = -8.1187$ , (b)  $r_0 = -1$ , (c)  $r_0 = -0.1232$ , (d)  $r_0 = 0.5909$ , (e)  $r_0 = 1$ , and (f)  $r_0 = 1.6925$

PH 曲线对六分之一单位圆弧的逼近, 即初始条件为  $\mathbf{P}_0 = -1$ ,  $\mathbf{P}_1 = -1 - \frac{i}{7}$ ,  $\mathbf{P}_6 = -\frac{7+\sqrt{3}}{14} - \frac{-7\sqrt{3}+1}{14}i$ ,  $\mathbf{P}_7 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $k_0 = k_1 = 1$ . 于是, 得到的关于  $r_0$  的六次实方程为

$$\begin{aligned} & 11144332465904308r_0^6 + 66404041215143312r_0^5 - 198577830447777184r_0^4 - 133r_0^3 \\ & + 198577830447776800r_0^2 - 66404041215143312r_0 - 11144332465904306 = 0, \end{aligned}$$

通过数值求解方法得到它的 6 个实数解分别为  $-8.1187$ ,  $-1$ ,  $-0.1232$ ,  $0.5909$ ,  $1$ ,  $1.6925$ , 代入式 (4) 即可重构第 2 类七次 PH 曲线的控制多边形, 结果如图 1 所示. 图中用红色虚线表示六分之一圆弧曲线, 每个子图的右图为相应曲线的曲率分布. 其中第 1 个图中的曲线存在自交点, 第 3 和 4 个图中的曲线存在尖点.

此外, 第 2 类七次 PH 曲线可以应用于直角过渡曲线的构造问题 [9]. 这里考虑给定初始条件  $\mathbf{P}_0 = -3$ ,  $\mathbf{P}_1 = -3 - 2i$ ,  $\mathbf{P}_6 = -2 - 3i$ ,  $\mathbf{P}_7 = -3i$ , 且两端处曲率为  $k_0 = k_1 = 0$ . 因此有  $z_1 = 0$ , 即控制顶点  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  共线, 且  $\mathbf{P}_5$ ,  $\mathbf{P}_6$ ,  $\mathbf{P}_7$  也是共线的. 进一步可以得到关于  $r_0$  的方程:

$$7\sqrt{7}r_0^5 - 595r_0^4 + 8330r_0^2 - 1372\sqrt{7}r_0 = 0.$$

注意到当  $r_0 = 0$  时, 有  $z_0 = 0$ , 则曲线退化为一条直线段. 因此通过求解上述的五次方程可以得到 4 个非零实数解, 对应 4 条第 2 类七次 PH 曲线, 如图 2 所示. 其中, 第 1 条曲线的弯曲能量是最小的, 且

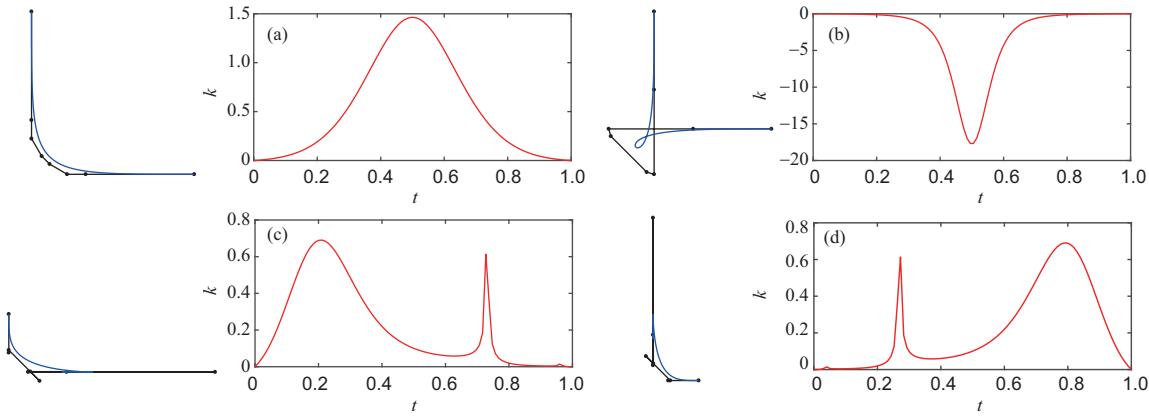


图2 (网络版彩图) 用第2类七次PH曲线设计直角拐角曲线. 由于仅有4个非零实数解, 因此得到4条相应的曲线及其曲率, 其中弯曲能量最小的第1条曲线, 其曲率最大值约为1.4628. (a)  $r_0 = 3.7417$ ; (b)  $r_0 = -3.7417$ ; (c)  $r_0 = 0.4418$ ; (d)  $r_0 = 31.6851$

**Figure 2** (Color online) Construction of right rounded corner using class II septic PH curves. There are four non-zero roots, so we get four different curves and their curvature profiles, where the first one has the minimum blending energy, and the maximum of its curvature is about 1.4628. A septic PH curve with its curvature profile when (a)  $r_0 = 3.7417$ , (b)  $r_0 = -3.7417$ , (c)  $r_0 = 0.4418$ , and (d)  $r_0 = 31.6851$

其曲率极大值约为1.4628.

**注1** 这类七次PH曲线与第1类七次PH曲线<sup>[9]</sup>一样, 具有连续的曲率, 且逼近直角. 如果采用文献[9]中的 $G^2$ 初始端点条件, 则通过改变控制顶点 $P_1$ (或 $P_6$ )的位置, 可以得到一族符合条件的拐角过渡曲线, 给设计者提供多种曲线的选择, 且这种交互方式比第1类七次PH曲线<sup>[9]</sup>更加直观便捷.

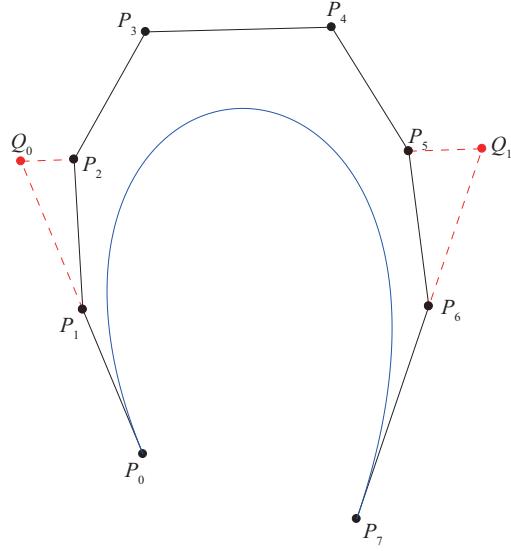
#### 4 第3类七次PH曲线构造

第3类七次PH曲线 $\mathbf{P}(t)$ 的一阶导数因式分解可以写为 $\mathbf{P}'(t) = \sum_{i=0}^4 a_i B_i^4(t) (\sum_{j=0}^1 z_j B_j^1(t))^2$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $z_j \in \mathbb{C}$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ,  $j = 0, 1$ , 将该因式分解展开得到

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) = & a_0 z_0^2 (1-t)^6 \\ & + (2a_0 z_0 z_1 + 4a_1 z_0^2) (1-t)^5 t \\ & + (a_0 z_1^2 + 8a_1 z_0 z_1 + 6a_2 z_0^2) (1-t)^4 t^2 \\ & + (4a_1 z_1^2 + 12a_2 z_0 z_1 + 4a_3 z_0^2) (1-t)^3 t^3 \\ & + (6a_2 z_1^2 + 8a_3 z_0 z_1 + a_4 z_0^2) (1-t)^2 t^4 \\ & + (4a_3 z_1^2 + 2a_4 z_0 z_1) (1-t) t^5 \\ & + a_4 z_1^2 t^6. \end{aligned}$$

比较上式与式(1)的Bernstein多项式的系数得到

$$\begin{aligned} 7\Delta P_0 &= a_0 z_0^2, \\ 42\Delta P_1 &= 2a_0 z_0 z_1 + 4a_1 z_0^2, \end{aligned}$$



**图 3** (网络版彩图) 第 3 类七次 PH 曲线控制多边形, 将  $\Delta\mathbf{P}_1$  和  $\Delta\mathbf{P}_5$  分解后, 有  $\frac{2a_1}{3a_0} = \frac{\mathbf{Q}_0 - \mathbf{P}_1}{\Delta\mathbf{P}_0}$ ,  $\frac{2a_3}{3a_4} = \frac{\mathbf{P}_6 - \mathbf{Q}_1}{\Delta\mathbf{P}_6}$

**Figure 3** (Color online) The control polygon of a class III septic PH curve. We have  $\frac{2a_1}{3a_0} = \frac{\mathbf{Q}_0 - \mathbf{P}_1}{\Delta\mathbf{P}_0}$ ,  $\frac{2a_3}{3a_4} = \frac{\mathbf{P}_6 - \mathbf{Q}_1}{\Delta\mathbf{P}_6}$  if we decompose  $\Delta\mathbf{P}_1$  and  $\Delta\mathbf{P}_5$

$$\begin{aligned}
 105\Delta\mathbf{P}_2 &= a_0\mathbf{z}_1^2 + 8a_1\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1 + 6a_2\mathbf{z}_0^2, \\
 140\Delta\mathbf{P}_3 &= 4a_1\mathbf{z}_1^2 + 12a_2\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1 + 4a_3\mathbf{z}_0^2, \\
 105\Delta\mathbf{P}_4 &= 6a_2\mathbf{z}_1^2 + 8a_3\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1 + a_4\mathbf{z}_0^2, \\
 42\Delta\mathbf{P}_5 &= 4a_3\mathbf{z}_1^2 + 2a_4\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1, \\
 7\Delta\mathbf{P}_6 &= a_4\mathbf{z}_1^2.
 \end{aligned} \tag{8}$$

从式(8)可以知道, 若将  $\Delta\mathbf{P}_1$  作为一个向量, 则该向量可以沿  $\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1$  和  $\mathbf{z}_0^2$  两个方向进行分解; 同理向量  $\Delta\mathbf{P}_5$  可以沿  $\mathbf{z}_1^2$  和  $\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1$  两个方向进行分解. 又因为  $\Delta\mathbf{P}_0$  和  $\mathbf{z}_0^2$  方向相同,  $\Delta\mathbf{P}_6$  和  $\mathbf{z}_1^2$  方向相同, 因此, 在直线  $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{P}_6\mathbf{P}_7$  上可以分别找到两个点  $\mathbf{Q}_0$  和  $\mathbf{Q}_1$ , 使得  $\mathbf{P}_2\mathbf{Q}_0$  和  $\mathbf{P}_5\mathbf{Q}_1$  都平行于  $\Delta\mathbf{P}_0$  和  $\Delta\mathbf{P}_6$  的角平分线, 即与  $\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1$  方向相同, 如图 3 所示.

当  $\mathbf{z}_0$  与  $\mathbf{z}_1$  共线时, 第 3 类七次 PH 曲线退化成直线段, 否则, 向量  $\mathbf{z}_0^2$ ,  $\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1$ ,  $\mathbf{z}_1^2$  是两两线性无关的, 因此可以得到

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_0 - \mathbf{P}_1 &= \frac{2a_1}{21}\mathbf{z}_0^2, \quad \mathbf{P}_2 - \mathbf{Q}_0 = \frac{a_0}{21}\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1, \\
 \mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_5 &= \frac{a_4}{21}\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1, \quad \mathbf{P}_6 - \mathbf{Q}_1 = \frac{2a_3}{21}\mathbf{z}_1^2,
 \end{aligned}$$

进一步有

$$\frac{2a_1}{3a_0} = \frac{\mathbf{Q}_0 - \mathbf{P}_1}{\Delta\mathbf{P}_0}, \quad \frac{2a_3}{3a_4} = \frac{\mathbf{P}_6 - \mathbf{Q}_1}{\Delta\mathbf{P}_6}. \tag{9}$$

这里同样假设  $a_4 = 1$ , 设  $\mathbf{z}_i = r_i e^{i\theta_i}$ ,  $i = 0, 1$ , 于是有  $\theta_0 = \frac{\arg \Delta\mathbf{P}_0}{2}$ ,  $\theta_1 = \frac{\arg \Delta\mathbf{P}_6}{2}$ ,  $r_1 = \|\mathbf{z}_1\| = \|\sqrt{7L_6}\|$ . 两端点  $\mathbf{P}_0$  和  $\mathbf{P}_7$  处的曲率分别为

$$k_0 = \frac{2\operatorname{Im}(\overline{\mathbf{z}_0}\mathbf{z}_1)}{a_0|\mathbf{z}_0|^4}, \quad k_1 = \frac{2\operatorname{Im}(\overline{\mathbf{z}_0}\mathbf{z}_1)}{|\mathbf{z}_1|^4}.$$

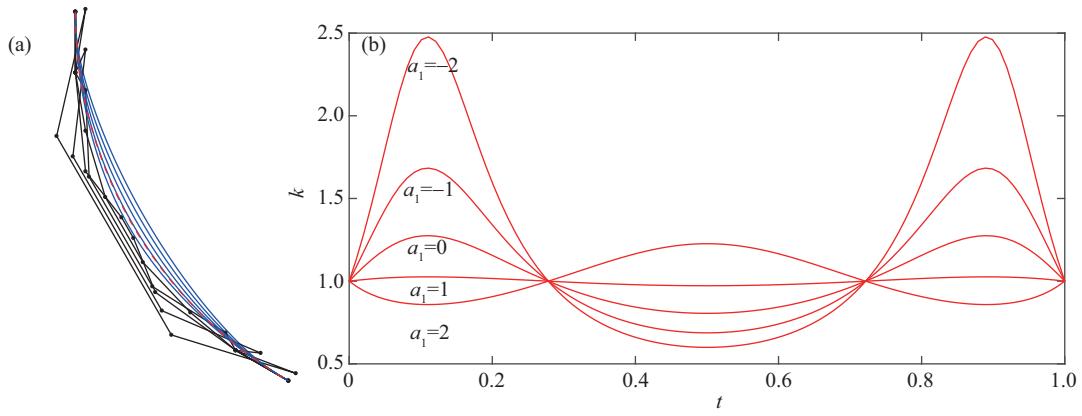


图 4 (网络版彩图) 六分之一圆弧的第 3 类七次 PH 曲线逼近. 这里分别给出了  $a_2 = -2, -1, 0, 1, 2$  时的曲线 (a) 及其曲率 (b), 其中 (a) 的红色虚线是六分之一圆弧

**Figure 4** (Color online) Approximation of a 1/6 circular arc using class III septic PH curves. We show curves when  $a_2 = -2, -1, 0, 1, 2$  (a) and their curvature profiles (b), where the dashed line shows the circular arc

将  $a_0 r_0^2 = 7L_0$ ,  $r_1^2 = 7L_6$ , 以及  $z_i = r_i e^{i\theta_i}$ ,  $i = 0, 1$ , 代入上式得到

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{2 \sin(\theta_1 - \theta_0)}{7k_0 L_0}, \quad \frac{r_0}{r_1} = \frac{7k_1 L_6}{2 \sin(\theta_1 - \theta_0)}.$$

因此,  $r_0$  可根据上式求得. 同时, 给定的  $G^2[C^1]$  条件必须满足

$$4 \sin^2(\theta_1 - \theta_0) = 49k_0 k_1 L_0 L_1.$$

注意到  $a_0 = \frac{7L_0}{r_0^2}$ , 由  $\sum_{i=1}^5 \Delta \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_1$  得到

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{21} z_0 z_1 + \frac{a_0}{105} z_1^2 + \frac{1}{105} z_0^2 + \frac{1}{21} z_0 z_1 + \left( \frac{2}{21} z_0^2 + \frac{8}{105} z_0 z_1 + \frac{1}{35} z_1^2 \right) a_1 \\ & + \left( \frac{2}{35} z_0^2 + \frac{3}{35} z_0 z_1 + \frac{2}{35} z_1^2 \right) a_2 + \left( \frac{1}{35} z_0^2 + \frac{8}{105} z_0 z_1 + \frac{2}{21} z_1^2 \right) a_3 = \mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_1, \end{aligned}$$

其中  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , 仍为未知数. 当  $a_0$  和  $a_4$  已知, 由式 (9) 可知, 实系数  $a_1$  (或  $a_3$ ) 的几何意义在于它影响了控制顶点  $\mathbf{P}_2$  (或  $\mathbf{P}_5$ ) 的位置. 因此这里不妨假设  $a_1$  由用户指定, 再分别考虑该方程的实部与虚部, 可以得到一个关于  $a_2$  和  $a_3$  的线性方程组. 通过求解该方程组, 并将解代入式 (8), 即可构造符合条件的第 3 类七次 PH 曲线的控制多边形. 当  $a_1$  发生变化时, 则可以得到一族符合条件的第 3 类七次 PH 曲线.

图 4 考虑了与图 1 相同的初始条件下第 3 类七次 PH 曲线的构造. 于是, 可以求得  $r_0 = \sqrt{2}$ ,  $a_4 = 0.5$ . 图中分别考虑了  $a_1 = -2, -1, 0, 1, 2$  时的情形, 通过求解关于  $a_2$  和  $a_3$  的线性方程组, 并将解代入式 (8), 即得到相应的第 3 类七次 PH 曲线, 结果如图 4 所示. 图 4(b) 给出了逼近曲线的曲率分布, 不难发现, 当  $a_1 = 1$  时, 第 3 类七次 PH 曲线比第 2 类更加逼近圆弧曲线. 特别地, 其曲率在 0.9724 到 1.0261 之间.

若曲线两端点处的曲率为零, 则存在  $k \in \mathbb{R}$ , 使得  $z_0 = kz_1$ , 即曲线退化为直线段, 因此, 第 3 类七次 PH 曲线不能用于类似文献 [9] 中的直角拐角过渡曲线的设计.

## 5 结论

本文指出非退化的七次 PH 曲线根据其导矢曲线因式分解的不同可以分为 3 类, 并深入讨论了第 2 和 3 类七次 PH 曲线的构造方法, 完善了七次 PH 曲线的相关理论。在给定插值端边及两端处的曲率数据, 从七次 PH 曲线的代数充要条件出发, 通过重构它们的代数结构来得到完整的控制多边形。在给定的  $G^2[C^1]$  条件下, 存在不超过 6 条的偶数条第 2 类七次 PH 曲线和一族第 3 类七次 PH 曲线, 同时本文指出第 3 类七次 PH 曲线在构造时对端点条件有约束条件。本文工作丰富了七次 PH 曲线在 CAD 和工业设计上的应用, 对七次 PH 曲线构造方法的研究将 PH 曲线的应用更推进了一步。本文工作继续推广, 可对任意给定的曲线使用七次 PH 曲线进行逼近, 今后可深入研究不同端点条件下可行解的存在性, 最优逼近曲线的选择、参数设置, 以及七次 PH 曲线对任意给定曲线的逼近阶等问题。

## 参考文献

- 1 Farouki R T, Sakkalis T. Pythagorean hodographs. *IBM J Res Dev*, 1990, 34: 736–752
- 2 Farouki R T, Neff C A. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph quintics. *Math Comput*, 1995, 64: 1589–1609
- 3 Moon H P, Farouki R T, Choi H I. Construction and shape analysis of PH quintic Hermite interpolants. *Comput Aided Geometric Des*, 2001, 18: 93–115
- 4 Yong J H, Zheng W. Geometric method for Hermite interpolation by a class of PH quintics (in Chinese). *J Comput Aided Design Comput Graph*, 2005, 17: 990–995
- 5 Meek D S, Walton D J. Geometric Hermite interpolation with Tschirnhausen cubics. *J Comput Appl Math*, 1997, 81: 299–309
- 6 Byrtus M, Bastl B. Hermite interpolation by PH cubics revisited. *Comput Aided Geometric Des*, 2010, 27: 622–630
- 7 Jüttler B. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph curves of degree seven. *Math Comput*, 2001, 70: 1089–1112
- 8 Kong J H, Jeong S P, Lee S, et al. Hermite interpolation with simple planar PH curves by speed reparametrization. *Comput Aided Geometric Des*, 2008, 25: 214–229
- 9 Farouki R T. Construction of rounded corners with Pythagorean-hodograph curves. *Comput Aided Geometric Des*, 2014, 31: 127–139
- 10 Wang G Z, Fang L C. On control polygons of quartic Pythagorean-hodograph curves. *Comput Aided Geometric Des*, 2009, 26: 1006–1015
- 11 Fang L C, Wang G Z.  $C^1$  Hermite interpolation using sextic PH curves. *Sci Sin Math*, 2014, 44: 799–804 [方林聪, 汪国昭. 六次 PH 曲线  $C^1$  Hermite 插值. 中国科学: 数学, 2014, 44: 799–804]
- 12 Wang H, Zhu C G, Li C Y.  $G^2$  Hermite interpolation by Pythagorean hodograph of degree six. *J Graph*, 2016, 37: 155–165 [王慧, 朱春钢, 李彩云. 六次 PH 曲线  $G^2$  Hermite 插值. 图学学报, 2016, 37: 155–165]
- 13 Sakkalis T, Farouki R T. Pythagorean-hodograph curves in Euclidean spaces of dimension greater than 3. *J Comput Appl Math*, 2012, 236: 4375–4382
- 14 Farouki R T, al-Kandari M, Sakkalis T. Hermite interpolation by rotation-invariant spatial Pythagorean-hodograph curves. *Adv Comput Math*, 2002, 17: 369–383
- 15 Pottmann H. Rational curves and surfaces with rational offsets. *Comput Aided Geometric Des*, 1995, 12: 175–192
- 16 Farouki R T, Šír Z. Rational Pythagorean-hodograph space curves. *Comput Aided Geometric Des*, 2011, 28: 75–88
- 17 Farouki R T. Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable. Berlin: Springer, 2008
- 18 Farouki R T, Jüttler B, Manni C. Pythagorean-hodograph curves and related topics. *Comput Aided Geometric Des*, 2008, 25: 203–204
- 19 Kosinka J, Lavicka M. Pythagorean hodograph curves: a survey of recent advances. *J Geom Graph*, 2014, 18: 23–43
- 20 Farouki R T, Giannelli C, Sestini A. Identification and “reverse engineering” of Pythagorean-hodograph curves. *Comput Aided Geometric Des*, 2015, 34: 21–36
- 21 Fang L X, Wang G Z. Geometric characteristics of planar quintic Pythagorean-hodograph curves. *J Comput Appl Math*, 2018, 330: 117–127

- 22 Wang H, Zhu C G, Li C Y. Identification of planar sextic Pythagorean-hodograph curves. *J Math Res Appl*, 2017, 37: 59–72
- 23 Zheng Z H, Wang G Z, Yang P. On control polygons of Pythagorean hodograph septic curves. *J Comput Appl Math*, 2016, 296: 212–227
- 24 Lu X J, Zheng J, Cai Y, et al. Geometric characteristics of a class of cubic curves with rational offsets. *Comput-Aided Des*, 2016, 70: 36–45

## $G^2[C^1]$ Hermite interpolation using septic PH curves

Yujun LI<sup>1</sup>, Lincong FANG<sup>2\*</sup> & Guozhao WANG<sup>3</sup>

1. Dongfang College, Zhejiang University of Finance & Economics, Haining 314408, China;  
 2. School of Information Management and Engineering, Zhejiang University of Finance & Economics, Hangzhou 310018, China;  
 3. School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China

\* Corresponding author. E-mail: lincongfang@gmail.com

**Abstract** In this paper, we examine the problem of  $G^2[C^1]$  Hermite interpolation using septic Pythagorean hodograph (PH) curves. PH curves are a special class of polynomial parametric curves, which have a polynomial arc length function and rational offsets, and are thus widely used in computer-aided design. According to different factorizations of their first derivative in complex form, septic PH curves are classified into three classes. The curves in the first class are all regular, and their construction under any  $G^2[C^1]$  condition has already been studied. Therefore, in this paper we focus on the remaining two classes. The number of septic PH curves in the second class is even and no more than six. The existence of septic PH curves in the third class is dependent on the initial Hermite data, and users may specify a real parameter to determine the resultant curve. In addition, we provide the approximation of arcs with septic PH curves as examples demonstrating the application of our results.

**Keywords** Bézier curve, offset curve, septic, continuous, Hermite interpolation



**Yujun LI** was born in 1992. She received a master's degree from ESC Rennes School of Business in France in 2016. She is currently a lecturer at Zhejiang University of Finance & Economics Dongfang College. Her research interests include geometric design and computation, and data analysis.



**Lincong FANG** was born in 1982. He received a Ph.D. degree in mathematics from Zhejiang University, Hangzhou, in 2009. He is currently a lecturer at Zhejiang University of Finance & Economics. His research interests include geometric design and computation, geometric modeling, and interval arithmetic.



**Guozhao WANG** was born in 1944. He is a professor at Zhejiang University. His research interests include computer-aided geometric design and computer graphics.