

基于张量子空间的互质频偏 FDS-MIMO 雷达多目标三维定位方法

李星星^{1*}, 王党卫¹, 马晓岩¹, 王文钦²

1. 中国人民解放军空军预警学院, 武汉 430019

2. 电子科技大学通信与信息工程学院, 成都 611731

* 通信作者. E-mail: li_x_xing@163.com

收稿日期: 2017-11-21; 接受日期: 2018-02-13; 网络出版日期: 2019-01-08

国家自然科学基金 (批准号: 61179015, 61401503) 资助项目

摘要 利用频控阵实现目标定位成为雷达领域一个新的研究热点. 针对频控阵雷达存在距离模糊和定位精度不高的问题, 本文基于提出的二维频率分集子孔径频控阵 MIMO (frequency diverse subaperturing MIMO, FDS-MIMO) 雷达, 深入研究了目标三维定位方法. 首先利用匹配滤波数据内在的多维结构, 建立了 5 阶张量信号模型. 针对该信号模型下的距离模糊问题, 提出了一种在面阵两方向采用互质频偏的方案, 该方案能够解决波束域最大无模糊距离和距离分辨率的矛盾. 基于这种频偏结构, 本文提出了基于张量的 ESPRIT 及其实值化算法, 并根据传统子空间和张量子空间的定量关系, 对该体制下的 ESPRIT 类算法进行了统一. 与已有的 ESPRIT 算法和频偏方式相比, 所提算法充分利用了回波数据内在的多维结构, 在解决距离模糊的同时具有更高的定位精度. 理论分析和仿真实验结果验证了本文方法的有效性.

关键词 FDS-MIMO 雷达, 目标定位, 张量子空间, 距离依赖波束, 距离模糊, 互质步进

1 引言

2006 年, Antonik 等^[1,2]首次提出了 frequency diversity array (FDA) 雷达的概念, 国内也称之为频控阵雷达^[3]. 这种雷达的本质是在阵元间附加一个很小的频偏控制再将信号辐射出去, 从而实现距离-角度依赖的波束. 由于其独特的波束特性, 频控阵在雷达界受到了极大的关注^[3~7]. 相对于传统相控阵或 MIMO 雷达, 利用这种波束的优势能够提高波束综合的灵活性^[8~13], 实现高分辨率目标成像^[14,15], 更好地抑制距离依赖的模糊杂波和干扰^[16,17], 获得更优的目标定位性能^[18~21]. 对于标准的 FDA 来讲, 其波束域目标距离和角度是耦合的, 因此难以直接从频控阵雷达的波束峰值得到目标的距

引用格式: 李星星, 王党卫, 马晓岩, 等. 基于张量子空间的互质频偏 FDS-MIMO 雷达多目标三维定位方法. 中国科学: 信息科学, 2019, 49: 87-103, doi: 10.1360/N112017-00164
Li X X, Wang D W, Ma X Y, et al. Three-dimensional target localization method based on the tensor subspace FDS-MIMO radar with a co-prime frequency offset (in Chinese). Sci Sin Inform, 2019, 49: 87-103, doi: 10.1360/N112017-00164

离角度信息. 针对这一问题, 目前的解决方案主要有 3 类: (1) 使用非均匀间隔阵列: 文献 [17] 提出了一种非线性 FDA 的单基地雷达, 该方法在文献 [22] 中得到了进一步的发展, 但是这种方法在实际中是难以操作的, 因为需要改变阵元位置来实现距离依赖波束的扫描. (2) 重新设计频偏: 文献 [20, 23] 分别提出了基于两快拍的均匀线阵目标定位方法, 文献 [19, 24] 基于子阵的方法实现了距离和方位的解耦, 但这些方法都存在距离模糊问题. 对此, 非线性频率偏置的思路如对数步进^[11]、平方和立方步进^[25], 以及正弦规律频偏^[26] 也被逐步采用, 然而这些方法的波束副瓣较高导致定位性能较差. (3) 采用组合阵列和组合频偏: 文献 [27] 研究了互质阵 FDA 雷达的目标定位方法, 文献 [28, 29] 研究了嵌套 FDA 参数估计方法.

然而, 上述方法都仅限于线阵 FDA. 文献 [30] 将线阵 FDA 波束形成理论扩展到面阵, 但是并没有研究其定位性能, 对此, 笔者研究了面阵频率分集 MIMO 雷达的定位性能并对 CRB 进行了优化^[31]. 此外, 目前基于 FDA 的目标定位方法都是将接收回波数据以特定的矩阵方法来储存处理, 然而 FDA 特别是面阵的很多优点都源于其方位 – 俯仰 – 距离之间信息多维性, 矩阵处理方法显然不能很好地体现这种多维结构, 也难以充分挖掘多维信息之间的关联, 从而导致目标定位性能下降, 因此, 能充分利用多维信息以及无模糊的目标定位新算法亟待进一步的研究.

本文提出了一种互质频偏的 FDS-MIMO 雷达目标三维定位方法. 不同于文献 [30] 中面阵两方向的频偏构成类似嵌套的关系, 也不同于文献 [27] 中的两个频偏组合呈互质关系, 本文提出了一种在两个方向频偏各自均匀步进, 相互之间又构成互质关系的频偏方案, 该方案的优点在于能够解决距离模糊, 同时保证了各自方向上频偏的均匀性和回波数据结构的可分解性. 本文首先提出了一种 FDA 和 MIMO 混合阵列的频率分集子孔径 MIMO (frequency diverse subaperturing MIMO, FDS-MIMO) 雷达的概念并将多线性代数^[32] 引入到频控阵体制, 建立了回波的张量信号模型, 讨论了距离模糊产生的机理并提出了互质频偏的解距离模糊方法. 更进一步, 为了充分利用多维信息提供定位精度, 本文提出了基于张量的 ESPRIT 及其实值化算法, 基于张量子空间和传统子空间的关系, 给出了 FDS-MIMO 雷达多维 ESPRIT 类算法的统一模型, 实现了多目标的无距离模糊三维定位.

本文的创新点主要有以下 3 点:

(1) 提出并设计了一种频偏互质 FDS-MIMO 雷达, 解决了已有基于 FDA 体制雷达的波束域距离栅瓣问题, 实现了 FDS-MIMO 雷达无模糊目标定位.

(2) 将张量分析引入 FDS-MIMO 雷达, 首次提出了基于高阶奇异值分解的频控阵雷达目标定位方法理论框架, 利用发射 – 接收距离依赖联合波束从波束域实现了目标三维定位; 由于充分利用了目标的多维结构信息, 该方法能够从多维“视角”滤除噪声, 从而提高噪声抑制能力, 改善目标定位性能.

(3) 深入讨论了传统信号子空间和张量子空间之间的定量关系, 在频控阵雷达体制下, 建立了高维 ESPRIT 类目标定位算法统一表达形式并能够直接应用于传统 MIMO 阵列体制之中.

标注: $(\cdot)^T$, $(\cdot)^*$, $(\cdot)^H$ 和 $(\cdot)^+$ 分别表示转置、共轭、共轭转置和矩阵的 Moore-Penrose 伪逆运算. \otimes , \odot , \circ 和 \oplus 分别代表 Kronecker 乘积、Hadamard 乘积、外积和 Khatri-Rao 乘积. $\|\cdot\|_F$ 和 $\|\cdot\|_H$ 表示矩阵 Frobenius 范数和高阶张量范数. \mathbf{I}_p 表示 $p \times p$ 的单位矩阵. $\mathbf{\Pi}_p$ 表示 $p \times p$ 交换矩阵即反对角线元素为 1, 其他位置为 0 的矩阵. $\mathbf{Q}_p \in \mathbb{C}^{p \times p}$ 表示实值化矩阵满足 $\mathbf{\Pi}_p \mathbf{Q}_p^* = \mathbf{Q}_p$, 具有以下的形式:

$$\mathbf{Q}_{2p+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & 0 & j\mathbf{I}_p \\ \mathbf{0}_{1 \times p} & \sqrt{2} & \mathbf{0}_{1 \times p} \\ \mathbf{\Pi}_p & 0 & -j\mathbf{\Pi}_p \end{bmatrix}. \quad (1)$$

通过去除上式中心列和行的元素能够直接获得 \mathbf{Q}_{2p} .

2 FDS-MIMO 雷达张量信号模型

考虑一个平面频控阵雷达,如图 1 所示,其中 $Ax'y'z'$ 表示雷达坐标系.不失一般性,设第一个子阵首阵元为坐标原点和参考阵元.二维阵面由 $M \times N$ 个天线阵元组成,其中 M 和 N 表示沿 x' 轴和 z' 轴方向的阵元个数,相应的阵元间隔分别为 d_x 和 d_z .本文考虑非重叠子阵,该面阵被划分为 $P \times Q$ 均匀长方形子阵,其中 P 和 Q 表示沿 x' 轴和 z' 方向的子阵个数,因此每个子阵沿 x' 轴和 z' 轴分别包含 $K_x = M/P$ 和 $K_z = N/Q$ 个天线阵元.在实际应用中,阵面往往是倾斜设置的,设其倾斜角为 β .在我们的 FDS-MIMO 雷达中,每个子阵发射相同信号,子阵间信号相互正交且在子阵间设置一定的频偏.此外, $Oxyz$ 表示目标坐标系,其中 h_r 表示参考点与地面的高度.该坐标系中天线 (m, n) 的位置矢量为

$$\mathbf{r}'_{mn} = (x_m, 0, z_n)^T, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

其中, $x_m = (m-1)d_x$, $z_n = (n-1)d_z$.本文用 (θ, φ, r) 即俯仰角、方位角和距离来表示目标的三维坐标位置,根据空间笛卡尔坐标转换关系,则阵元 (m, n) 与参考点 A 沿雷达视线方向的距离差为

$$d_{mn}(\theta, \varphi) = \mathbf{C}_r \mathbf{r}'_{mn} \mathbf{a}_r = (m-1)d_x \cos \theta \cos \varphi + (n-1)d_z (\cos \beta \sin \theta - \sin \beta \cos \theta \sin \varphi), \quad (3)$$

其中,目标坐标系中雷达视线归一化方向矢量 $\mathbf{a}_r = \mathbf{r}/r = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)^T$,而转换矩阵可以表示为

$$\mathbf{C}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (4)$$

从而子阵 (p, q) 的阵内发射流形矢量可以写成

$$\mathbf{a}_{pq}(\theta, \varphi) = [\mathbf{a}_p(\theta, \varphi) \circ \mathbf{a}_q(\theta, \varphi)], \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_p(\theta, \varphi) &= [1, \dots, \exp(j2\pi f_{pq}(K_x - 1)d_{21}(\theta, \varphi)/c)]^T, \\ \mathbf{a}_q(\theta, \varphi) &= [1, \dots, \exp(j2\pi f_{pq}(K_z - 1)d_{12}(\theta, \varphi)/c)]^T, \end{aligned}$$

阵间发射流形矢量为 $A_{pq}(\theta, \varphi) = \exp(j2\pi \frac{f_{pq}}{c} [(p-1)K_x d_{21}(\theta, \varphi) + (q-1)K_y d_{12}(\theta, \varphi)])$,这里 $A_{pq}(\theta, \varphi)$ 表示阵间发射流形矩阵 $\mathbf{A}(\theta, \varphi)$ 的第 (p, q) 个元素, f_{pq} 表示子阵 (p, q) 的发射载频,可以表示为

$$f_{pq} = f_c + (p-1)\Delta f_x + (q-1)\Delta f_z, \quad p = 1, 2, \dots, P, \quad q = 1, 2, \dots, Q, \quad (6)$$

其中 Δf_x 和 Δf_y 分别表示沿 x' 轴和 z' 轴的频偏,为抑制距离模糊,该文提出了沿面阵两方向频率偏置均匀且互质,即 Δf_x 和 Δf_y 互质.

子阵 (p, q) 发射的信号可以表示为

$$s_{pq}(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_p}\right) \phi_{pq}(t) \exp(j2\pi f_{pq}t), \quad (7)$$

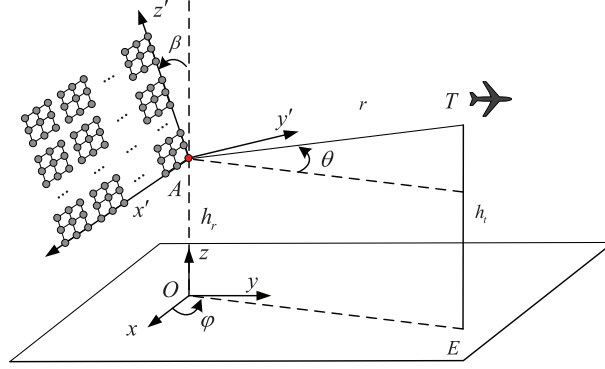


图 1 (网络版彩图) FDS-MIMO 雷达阵列结构示意图

Figure 1 (Color online) Basic geometry of the FDS-MIMO radar

其中 T_p 表示脉冲宽度, $\phi_{pq}(t)$ 表示归一化能量波形即 $\int_{T_p} \phi_{pq}(t)\phi_{pq}^*(t)dt = 1$. 考虑信号 $\phi_{pq}(t)$ 是相互正交的并具有一定的 Doppler 容限, 即

$$\int_T \phi_{pq}(t)\phi_{uv}^*(t - \tau) \exp(j2\pi(p - u)\Delta f_x t) \cdot \exp(j2\pi(q - v)\Delta f_y t) dt = 0, \quad p \neq u \text{ or } q \neq v, \quad (8)$$

其中 τ 表示任意时延. 在点目标的假设下, 所有子阵发射信号和可建模如下:

$$s_t(t) = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \mathbf{w}_{pq} \mathbf{a}_{pq} A_{pq}(\theta, \varphi) \phi_{pq}(t) \exp(j2\pi f_{pq} t), \quad (9)$$

其中 \mathbf{w}_{pq} 是子阵 (p, q) 的加权向量. 假设所有的子阵波束都指向 (θ, φ) , 则非自适应波束形成权向量可以表示为

$$\mathbf{w}_{pq} = \mathbf{a}_{pq}(\theta, \varphi) / \|\mathbf{a}_{pq}(\theta, \varphi)\|_F. \quad (10)$$

因此式 (9) 可以简化为

$$s_t(t) = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q A_{pq}(\theta, \varphi) \phi_{pq}(t) \exp(j2\pi f_{pq} t), \quad (11)$$

则第 (m', n') 个天线接收到的第 l 个脉冲信号可以表示为

$$x_{m'n'l}(t) = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \beta_l A_{pq}(\theta, \varphi) \phi_{pq}(t - (\tau_l - \tau_{m'n'})) \exp(j2\pi(f_{pq} + f_{dpq})(t - (\tau_l - \tau_{m'n'}))), \quad (12)$$

其中 $\tau_l = 2(r - lvT_r)/c$ 表示第 l 个发射脉冲回波参考点与目标之间的双程时延, c 表示光速, T_r 表示脉冲重复间隔, v 表示目标径向速度, β_l 是第 l 个发射脉冲期间目标的散射系数, 这里假设 β_l 在脉冲内是常数, 在脉冲间是独立变化的即服从 Swerling-II 模型, $f_{dpq} = 2v/\lambda_{pq}$ 表示第 (p, q) 个通道目标 Doppler 频率, $\tau_{m'n'} = d_{mn}(\theta, \varphi)/c$ 表示参考点和阵元 (m', n') 之间的传播时延. 利用波形 $\phi_{uv}(t) \exp(j2\pi f_{uv} t)$ 对 $x_{m'n'l}(t)$ 进行正交匹配滤波^[16,18], 可得

$$\begin{aligned} x_{m'n'pql} &= \int_T x_{m'n'l}(t) \exp(-j2\pi f_{pq} t) \phi_{pq}^*(t) dt \\ &= \exp(j2\pi(f_{pq} + f_{dpq})(\tau_{m'n'} - \tau_l)) \beta_l A_{pq}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

$$\approx \beta'_l e^{j2\pi f_d l T_r} \cdot b_{m'n'} A_{pq}(\theta, \varphi) R_{pq}(r), \quad (13)$$

其中 $b_{m'n'} \approx \exp(j2\pi((m'-1)d_{21}(\theta, \varphi) + (n'-1)d_{12}(\theta, \varphi))/\lambda_b)$ 表示接收流形矩阵 $\mathbf{B}(\theta, \varphi)$ 的第 (m', n') 个元素, 其中考虑到 $(p-1)\Delta f_x + (q-1)\Delta f_z \ll f_c$, 接收流形矩阵 $\mathbf{B}(\theta, \varphi)$ 的计算用了等效载频 $f_b = f_c + (P-1)\Delta f_x/2 + (Q-1)\Delta f_z/2$ [27]. 类似地, $R_{pq}(r) = \exp(-j4\pi r((p-1)\Delta f_x + (q-1)\Delta f_z)/c)$ 是发射流形矢量 $\mathbf{R}(r)$ 的第 (p, q) 个元素, $f_d = 2v/\lambda_b$, $\beta'_l = \exp(-j4\pi(f_d + f_c)r/c)\beta_l$, 由于 $\exp(-j4\pi(f_d + f_c)r/c)$ 是常数相位项, 不影响后续分析. 为方便后续分析, 我们定义一个 Vandermonde 矩阵函数

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\gamma_x, \gamma_z, P, Q) &= \mathbf{F}(\gamma_x, P) \circ \mathbf{F}(\gamma_z, Q) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \exp(j(Q-1)\gamma_x) \\ \cdots & \exp\left(\begin{bmatrix} j(p-1)\gamma_x \\ +j(q-1)\gamma_z \end{bmatrix}\right) & \cdots \\ \exp(j(P-1)\gamma_x) & \cdots & \exp\left(\begin{bmatrix} j(P-1)\gamma_x \\ +j(Q-1)\gamma_z \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\mathbf{F}(\gamma_x, P) = [1, \dots, \exp(j(P-1)\gamma_x)]^T$, $\mathbf{F}(\gamma_z, Q) = [1, \dots, \exp(j(Q-1)\gamma_z)]^T$, 可得

$$\mathbf{A}(\theta, \varphi) = \mathbf{F}(2\pi f_b K_x d_{21}(\theta, \varphi)/c, P) \circ \mathbf{F}(2\pi f_b K_z d_{12}(\theta, \varphi)/c, Q), \quad (15)$$

$$\mathbf{B}(\theta, \varphi) = \mathbf{F}(2\pi f_b d_{21}(\theta, \varphi)/c, M) \circ \mathbf{F}(2\pi f_b d_{12}(\theta, \varphi)/c, N), \quad (16)$$

$$\mathbf{R}(r) = \mathbf{F}(-4\pi r \Delta f_x/c, P) \circ \mathbf{F}(-4\pi r \Delta f_z/c, Q). \quad (17)$$

从而发射流形矢量可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{AR}(r, \theta, \varphi) &= \mathbf{R}(r) \odot \mathbf{A}(\theta, \varphi) \\ &= [\mathbf{F}(-4\pi r \Delta f_x/c, P) \circ \mathbf{F}(-4\pi r \Delta f_z/c, Q)] \odot [\mathbf{F}(2\pi f_b K_x d_{21}(\theta, \varphi)/c, P) \\ &\quad \circ \mathbf{F}(2\pi f_b K_z d_{12}(\theta, \varphi)/c, Q)] \\ &= \mathbf{F}(-4\pi r \Delta f_x/c + 2\pi f_b K_x d_{21}(\theta, \varphi)/c, P) \circ \mathbf{F}(-4\pi r \Delta f_z/c + 2\pi f_b K_z d_{12}(\theta, \varphi)/c, Q). \end{aligned} \quad (18)$$

从式 (18) 可以发射流形矢量不仅是角度依赖的, 同时也是距离依赖的. 进一步阵列的发射-接收联合流形矢量可以写成如下的张量形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(r, \theta, \varphi) &= \mathbf{AR} \circ \mathbf{B}(\theta, \varphi) \\ &= \mathbf{F}(-4\pi r \Delta f_x/c + 2\pi f_b K_x d_{21}(\theta, \varphi)/c, P) \circ \mathbf{F}(-4\pi r \Delta f_z/c + 2\pi f_b K_z d_{12}(\theta, \varphi)/c, Q) \\ &\quad \circ \mathbf{F}(2\pi f_b d_{21}(\theta, \varphi)/c, M) \circ \mathbf{F}(2\pi f_b d_{12}(\theta, \varphi)/c, N). \end{aligned} \quad (19)$$

所有接收阵列的输出 $x_{m'n'pql}$ 可写成如下的张量形式:

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{A}_0(\theta, \varphi, r) \circ \bar{\mathbf{s}}^T + \mathcal{N}_0, \quad (20)$$

其中, $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{P \times Q \times M \times N \times L}$, $\bar{\mathbf{s}} = [\beta_l e^{j2\pi f_d l T_r}, \dots, \beta_l e^{j2\pi f_d l T_r}] \in \mathbb{C}^{1 \times L}$, L 表示脉冲个数, \mathcal{N}_0 表示噪声张量与 \mathcal{X} 维数相同.

假设在远场存在 D 个目标, 其中 $(\theta_d, \varphi_d, r_d)$ 表示第 d 个目标的位置, 则模型 (20) 能够很容易扩展到多目标的情况.

$$\mathcal{X} = \mathcal{A} \times_5 \bar{\mathcal{S}}^T + \mathcal{N}, \quad (21)$$

其中 $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{P \times Q \times M \times N \times L}$, $\bar{\mathcal{S}} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_L] \in \mathbb{C}^{D \times L}$, $\mathbf{c}_l = [\beta_{1,l} e^{j2\pi f_{d1} l T_r}, \dots, \beta_{D,l} e^{j2\pi f_{dD} l T_r}]^T$, $\beta_{d,l}$ 表示第 l 个脉冲期间第 d 个目标的散射系数, f_{dd} 表示第 d 个目标的 Doppler 频率, $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{P \times Q \times M \times N \times D}$ 表示流形张量, 可以表示为

$$\mathcal{A} = [\mathcal{A}_0(\theta_1, \varphi_1, r_1) \sqcup_5 \mathcal{A}_0(\theta_2, \varphi_2, r_2) \dots \sqcup_5 \mathcal{A}_0(\theta_D, \varphi_D, r_D)], \quad (22)$$

其中 $\mathcal{A} \sqcup_5 \mathcal{B}$ 表示张量 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 沿模式 5 的连接操作. 此外, 模型 (21) 还可以写成外积的形式

$$\mathcal{X} = \sum_{d=1}^D \mathcal{A}(\theta_d, \varphi_d, r_d) \circ \bar{\mathbf{s}}_d^T + \mathcal{N}, \quad (23)$$

其中 $\bar{\mathbf{s}}_d^T$ 表示矩阵 $\bar{\mathcal{S}}$ 的第 d 列. 在传统的矩阵模型中, 我们将第 1~4 维 (阵列维) 沿列进行堆积操作, 将第 5 维 (快拍维) 沿行排列. 经过这一操作, 基于矩阵的回波模型可以表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{S}} + \mathbf{N}, \quad (24)$$

其中 $\bar{\mathbf{S}} = [\bar{\mathbf{s}}_1, \dots, \bar{\mathbf{s}}_d, \dots, \bar{\mathbf{s}}_D]^T \in \mathbb{C}^{D \times L}$. 流形矩阵 \mathbf{A} 可以表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)} \oplus \mathbf{A}^{(2)} \oplus \mathbf{A}^{(3)} \oplus \mathbf{A}^{(4)}, \quad (25)$$

其中 $\mathbf{A}^{(r)} = [\mathbf{G}_r(\mu_r^{(1)}), \mathbf{G}_r(\mu_r^{(2)}), \dots, \mathbf{G}_r(\mu_r^{(D)})]$, $r = 1, 2, 3, 4$, 向量 $\mathbf{G}_r(\mu_r^{(d)})$ 表示第 d 个目标的 r 维流形矢量 (即式 (19) 中的第 r 项), 此外

$$\mu_1^{(d)} = -4\pi r_d \Delta f_x / c + 2\pi f_b K_x d_{21}(\theta_d, \varphi_d) / c, \quad (26)$$

$$\mu_2^{(d)} = -4\pi r_d \Delta f_z / c + 2\pi f_b K_z d_{12}(\theta_d, \varphi_d) / c, \quad (27)$$

$$\mu_3^{(d)} = 2\pi f_b d_{21}(\theta_d, \varphi_d) / c, \quad (28)$$

$$\mu_4^{(d)} = 2\pi f_b d_{12}(\theta_d, \varphi_d) / c, \quad (29)$$

讨论 1 从式 (26) 和 (27) 中可知均匀偏率偏置条件下, 得到的距离估计值存在周期性模糊, 即相位估计 $\mu_1^{(d)}$ 和 $\mu_2^{(d)}$ 在 $[-\pi, \pi)$ 存在缠绕现象. 利用距离峰值在距离维是均匀分布的特性, 可以通过式

$$\begin{cases} \hat{\mu}_d^{(1)} = \tilde{\mu}_d^{(1)} + 2k_x \pi, \\ \hat{\mu}_d^{(2)} = \tilde{\mu}_d^{(2)} + 2k_z \pi \end{cases}$$

重构出所有可能的距离值 (包含真实值和模糊值). 得益于本节采用的互质频偏方案, $\mu_1^{(d)}$ 和 $\mu_2^{(d)}$ 将有且仅有一个共同的极大值 $\hat{\mu}_d$ 对应目标的真实距离.

在估计出 $\mu_i^{(d)}$, $i = 1, 2, 3, 4$ 的基础上即可得 $\hat{\mu}_d$, 然后对式 (26)~(29) 进行逆变换, 目标参数 $\{(\theta_d, \varphi_d, r_d)\}_{d=1}^D$ 的估计值为

$$\hat{r}_d = \left[c \left(K_x \mu_3^{(d)} - \hat{\mu}_d \right) / (4\pi \Delta f_x) + c \left(K_z \mu_4^{(d)} - \hat{\mu}_d \right) / (4\pi \Delta f_z) \right] / 2, \quad (30)$$

$$\hat{\theta}_d = \arcsin \frac{2\alpha_1 + \sqrt{4\alpha_1^2 - 4(1 + \tan^2\beta)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \tan^2\beta)}}{2(1 + \tan^2\beta)}, \quad (31)$$

$$\hat{\varphi}_d = \arccos \left(\mu_3^{(d)} / \pi \cos \hat{\theta}_d \right), \quad (32)$$

其中, $\alpha_1 = \mu_4^{(d)} / (\pi \cos \beta)$, $\alpha_2 = \mu_3^{(d)} \tan \beta / \pi$. 此外, 矩阵和张量信号模型具有如下转换关系

$$\mathbf{X} = [\mathcal{X}]_{(5)}^T \in \mathbb{C}^{PQM N \times L}, \quad (33)$$

$$\mathbf{A} = [\mathcal{A}]_{(5)}^T \in \mathbb{C}^{PQM N \times D}, \quad (34)$$

其中, $[\mathcal{A}]_{(n)}$ 表示张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ 在模式 n 下的矩阵展开, 其展开规则与文献 [32] 一致. 便于分析, 我们记 $J_1 = P$, $J_2 = Q$, $J_3 = M$, $J_4 = N$ 以及 $J = \prod_{r=1}^4 J_r$.

3 FDS-MIMO 雷达目标定位算法

3.1 经典 ESPRIT 算法

文献 [29] 将基于矩阵的二维 ESPRIT 算法应用于 FDA, 通过直接的四维扩展, 这方法同样也能够用于 FDS-MIMO 雷达的目标定位. 基于式 (24) 中多维流形矩阵之间的旋转不变特性, 标准的 ESPRIT 算法可以表示为

$$\tilde{\mathbf{J}}_1^{(r)} \cdot \mathbf{A} \cdot \Phi^{(r)} = \tilde{\mathbf{J}}_2^{(r)} \cdot \mathbf{A}, \quad r = 1, 2, 3, 4, \quad (35)$$

其中, $\tilde{\mathbf{J}}_i^{(r)} = (\mathbf{I}_{\Gamma_1^{(r)}} \otimes \mathbf{J}_i^{(r)} \otimes \mathbf{I}_{\Gamma_2^{(r)}})$, $i = 1, 2$, 且 $\mathbf{I}_{\Gamma_1^{(r)}} = \prod_{k=1}^{r-1} \mathbf{J}_k$, $\mathbf{I}_{\Gamma_2^{(r)}} = \prod_{k=r+1}^4 \mathbf{J}_k$, $\mathbf{J}_1^{(r)}$, $\mathbf{J}_2^{(r)}$ 表示 r -模式选择矩阵, 其中 $\mathbf{J}_1^{(r)} = [\mathbf{I}_{M_{r-1}} \mathbf{0}_{(M_{r-1}) \times 1}]$, $\mathbf{J}_2^{(r)} = [\mathbf{0}_{(M_{r-1}) \times 1} \mathbf{I}_{M_{r-1}}]$, 这里 $\Phi^{(r)} = \text{diag}\{\exp(j\mu_r^{(1)}), \dots, \exp(j\mu_r^{(D)})\}$, $r = 1, 2, 3, 4$. 由于 $\mathbf{A} = \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{T}_{\text{SE}}$, 其中 $\mathbf{T}_{\text{SE}} \in \mathbb{C}^{D \times D}$ 非奇异矩阵. 从而能够将式 (35) 中流形矩阵 \mathbf{A} 替换为信号子空间 $\mathbf{U}_s \in \mathbb{C}^{J \times D}$.

$$\tilde{\mathbf{J}}_1^{(r)} \cdot \mathbf{U}_s \cdot \Psi_{\text{SE}}^{(r)} = \tilde{\mathbf{J}}_2^{(r)} \cdot \mathbf{U}_s, \quad (36)$$

其中, $\Psi_{\text{SE}}^{(r)} = \mathbf{T}_{\text{SE}}^{-1} \cdot \Phi^{(r)} \cdot \mathbf{T}_{\text{SE}}$, 基于矩阵的信号子空间可以通过 \mathbf{X} 的截尾奇异值分解 (SVD) 得到

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{\Lambda}_s \cdot \mathbf{V}_s^H, \quad (37)$$

其中, $\mathbf{U}_s \in \mathbb{C}^{J \times D}$, $\mathbf{\Lambda}_s \in \mathbb{C}^{D \times D}$ 和 $\mathbf{V}_s \in \mathbb{C}^{L \times D}$. 因此空间频率 $\mu_r^{(d)}$ 能够通过 $\Psi^{(r)}$ 的特征值分解 (EVD) 得到. 式 (36) 的最小二乘解可以表示为

$$\hat{\Psi}_{\text{SE}}^{(r)} = \left(\tilde{\mathbf{J}}_1^{(r)} \cdot \mathbf{U}_s \right)^+ \cdot \tilde{\mathbf{J}}_2^{(r)} \cdot \mathbf{U}_s. \quad (38)$$

很显然, 上述的传统方法仅仅利用了“一维信息”, 忽略了接收数据之间的内在多维结构, 从而将会导致定位性能下降.

3.2 基于张量的 ESPRIT 算法

目前公开文献中基于 FDA 雷达体制的定位方法都局限于矩阵的处理方法, 没有充分利用回波信号内在的多维结构性. 张量分析发展多年, 近年来才广泛应用于信号和数据分析, 并在信号处理, 数据分析和机器学习等领域迅速发展^[33]. 张量分解主要包含 Tucker 分解^[34,35] 和 Candecomp/Parafac (CP) 分解^[36~38], CP 分解常采用迭代最小二乘实现, 可能需要多次迭代甚至不能收敛于全局最优^[35], 本文采用 Tucker 分解并用高阶奇异值分解 (high order singular value decomposition, HOSVD) 来计算. 张量模型 (23) 中, 张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{J \times L}$ 的 HOSVD 可以表示为

$$\mathcal{X} = \mathcal{S} \times_1 \mathbf{U}_1 \times_2 \mathbf{U}_2 \times_3 \mathbf{U}_3 \times_4 \mathbf{U}_4 \times_5 \mathbf{U}_5, \quad (39)$$

其中, $\mathbf{U}_r \in \mathbb{C}^{J_r \times J_r}, r = 1, 2, 3, 4, \mathbf{U}_5 \in \mathbb{C}^{L \times L}$, \mathcal{S} 表示核心张量维数与 \mathcal{X} 相同且满足全正交性^[35]. $\mathbf{U}_i, i = 1, 2, \dots, 5$ 是张量 i - 模式展开矩阵的左奇异向量. \mathcal{X} 的截尾 HOSVD 能够表示为

$$\mathcal{X} \approx \mathcal{S}^{[s]} \times_1 \mathbf{U}_1^{[s]} \times_2 \mathbf{U}_2^{[s]} \times_3 \mathbf{U}_3^{[s]} \times_4 \mathbf{U}_4^{[s]} \times_5 \mathbf{U}_5^{[s]}, \quad (40)$$

其中, $\mathbf{U}_r^{[s]} \in \mathbb{C}^{J_r \times \rho_r}, \rho_r = \min\{J_r, D\}, r = 1, 2, 3, 4, \mathbf{U}_5^{[s]} \in \mathbb{C}^{L \times D}$ 和 $\mathcal{S}^{[s]} \in \rho_1 \times \rho_2 \times \rho_3 \times \rho_4 \times D$. 从而可以定义下面的张量信号子空间:

$$\mathcal{U}^{[s]} \approx \mathcal{S}^{[s]} \times_1 \mathbf{U}_1^{[s]} \times_2 \mathbf{U}_2^{[s]} \times_3 \mathbf{U}_3^{[s]} \times_4 \mathbf{U}_4^{[s]}. \quad (41)$$

四维张量旋转不变等式可以表示为下面的形式:

$$\mathcal{A} \times_r \mathbf{J}_1^{(r)} \times_5 \Phi^{(r)} = \mathcal{A} \times_r \mathbf{J}_2^{(r)}. \quad (42)$$

利用 $\mathcal{U}^{[s]} = \mathcal{A} \times_5 \mathbf{T}_{\text{TE}}$ ^[35], 其中 $\mathbf{T}_{\text{TE}} \in \mathbb{C}^{D \times D}$ 是非奇异矩阵, 可得

$$\mathcal{U}^{[s]} \times_r \mathbf{J}_1^{(r)} \times_5 \Psi_{\text{TE}}^{(r)} \approx \mathcal{U}^{[s]} \times_r \mathbf{J}_2^{(r)}, \quad (43)$$

其中 $\Psi_{\text{TE}}^{(r)} = \mathbf{T}_{\text{TE}}^{-1} \cdot \Phi^{(r)} \cdot \mathbf{T}_{\text{TE}}$. 基于张量的最小二乘问题可以表示如下:

$$\hat{\Psi}_{\text{TE}}^{(r)} = \arg \min_{\Psi^{(r)}} \left\| \mathcal{U}^{[s]} \times_r \mathbf{J}_1^{(r)} \times_5 \Psi^{(r)} - \mathcal{U}^{[s]} \times_5 \mathbf{J}_2^{(r)} \right\|_{\text{H}}. \quad (44)$$

式 (44) 的最小二乘解可以表示为

$$\hat{\Psi}_{\text{TE}}^{(r)\text{T}} = \left(\tilde{\mathbf{J}}_1^{(r)} \cdot \left[\mathcal{U}^{[s]} \right]_5^{\text{T}} \right)^+ \cdot \tilde{\mathbf{J}}_2^{(r)} \cdot \left[\mathcal{U}^{[s]} \right]_5^{\text{T}}. \quad (45)$$

式 (45) 的推导见附录 A.

3.3 基于张量的酉 ESPRIT 算法

为了进一步提高小快拍下的参数估计性能, 前后向平滑预处理可以运用于 ESPRIT 算法. 从而可用快拍数变成原来的 2 倍并且不损失阵列孔径. 对张量 \mathcal{X} 进行前后向平滑处理可得

$$\mathcal{Y} = [\mathcal{X} \sqcup_5 (\mathcal{X}^* \times_1 \mathbf{\Pi}_{J_1} \times_2 \mathbf{\Pi}_{J_2} \times_3 \mathbf{\Pi}_{J_3} \times_4 \mathbf{\Pi}_{J_4} \times_5 \mathbf{\Pi}_L)]. \quad (46)$$

由于张量 \mathcal{Y} 是 centro-Hermitian 的矩阵^[35]. 因此 \mathcal{Y} 能够映射为下面的实值张量

$$\mathcal{T}\mathcal{Y} = \mathcal{Y} \times_1 \mathbf{Q}_{J_1}^{\text{H}} \times_2 \mathbf{Q}_{J_2}^{\text{H}} \times_3 \mathbf{Q}_{J_3}^{\text{H}} \times_4 \mathbf{Q}_{J_4}^{\text{H}} \times_5 \mathbf{Q}_{2L}^{\text{H}}, \quad (47)$$

其 HOSVD 为

$$\mathcal{T}\mathcal{Y} = \mathcal{S}_Y \times_1 \mathbf{E}_1 \times_2 \mathbf{E}_2 \times_3 \mathbf{E}_3 \times_4 \mathbf{E}_4 \times_5 \mathbf{E}_5 \approx \mathcal{S}_Y^{[s]} \times_1 \mathbf{E}_1^{[s]} \times_2 \mathbf{E}_2^{[s]} \times_3 \mathbf{E}_3^{[s]} \times_4 \mathbf{E}_4^{[s]} \times_5 \mathbf{E}_5^{[s]}, \quad (48)$$

同理可以定义实值张量信号子空间

$$\mathcal{E}^{[s]} \approx \mathcal{S}_Y^{[s]} \times_1 \mathbf{E}_1^{[s]} \times_2 \mathbf{E}_2^{[s]} \times_3 \mathbf{E}_3^{[s]} \times_4 \mathbf{E}_4^{[s]}, \quad (49)$$

从而旋转不变等式可以表示为

$$\mathcal{B} \times_r \mathbf{K}_1^{(r)} \times_5 \Omega^{(r)} = \mathcal{B} \times_r \mathbf{K}_2^{(r)}, \quad (50)$$

其中, $\mathcal{B} = \mathcal{A} \times_1 \mathbf{Q}_{J_1}^H \times_2 \mathbf{Q}_{J_2}^H \times_3 \mathbf{Q}_{J_3}^H \times_4 \mathbf{Q}_{J_4}^H$, 实值对角矩阵 $\Omega^{(r)}$ 可以表示为 $\Omega^{(r)} = \text{diag}\{\tan(\mu_r^{(d)}, /2)\}_{d=1}^D$.

定理 1 实值张量信号子空间 $\mathcal{E}^{[s]}$ 和实值信号流形张量 \mathcal{B} 张成同一子空间, 即 $\mathcal{E}^{[s]} = \mathcal{B} \times_5 \mathbf{T}_{\text{UTE}}$, 其中 $\mathbf{T}_{\text{UTE}} \in \mathbb{C}^{D \times D}$ 为非奇异矩阵.

证明见附录 B. 利用定理 1, 可以得到

$$\mathcal{E}^{[s]} \times_r \mathbf{K}_1^{(r)} \times_5 \Psi_{\text{UTE}}^{(r)} \approx \mathcal{E}^{[s]} \times_r \mathbf{K}_2^{(r)}, \quad (51)$$

从而有

$$\hat{\Psi}_{\text{UTE}}^{(r)\text{T}} = \left(\tilde{\mathbf{K}}_1^{(r)} \cdot [\mathcal{E}^{[s]}]_5^{\text{T}} \right)^+ \cdot \tilde{\mathbf{K}}_2^{(r)} \cdot [\mathcal{E}^{[s]}]_5^{\text{T}}, \quad (52)$$

其中 $\tilde{\mathbf{K}}_i^{(r)} = \mathbf{I}_{\Gamma_1^{(r)}} \otimes \mathbf{K}_i^{(r)} \otimes \mathbf{I}_{\Gamma_2^{(r)}}$, $\mathbf{K}_1^{(r)} = 2 \cdot \text{Re}\{Q_{m_r}^H \mathbf{J}_2^{(r)} Q_{\text{PQMN}}^H\}$ 和 $\mathbf{K}_2^{(r)} = 2 \cdot \text{Im}\{Q_{m_r}^H \mathbf{J}_2^{(r)} Q_{\text{PQMN}}^H\}$. 最后, 通过 $\Psi_{\text{UTE}}^{(r)} = \mathbf{T}_{\text{UTE}}^{-1} \cdot \Omega^{(r)} \cdot \mathbf{T}_{\text{UTE}}$ 可估计参数 $\mu_r^{(d)}$.

讨论 2 基于矩阵的信号子空间 \mathbf{U}_s , 张量子空间 $[\mathbf{U}^{[s]}]_5^{\text{T}}$ 以及实值张量子空间 $[\mathcal{E}^{[s]}]_5^{\text{T}}$ 具有如下的关系:

$$[\mathbf{U}^{[s]}]_5^{\text{T}} = \left(\mathbf{U}_1^{[s]} \cdot \mathbf{U}_1^{[s]\text{H}} \right) \otimes \cdots \otimes \left(\mathbf{U}_4^{[s]} \cdot \mathbf{U}_4^{[s]\text{H}} \right) \cdot \mathbf{U}_s, \quad (53)$$

$$[\mathcal{E}^{[s]}]_5^{\text{T}} = \left(\mathbf{E}_1^{[s]} \cdot \mathbf{E}_1^{[s]\text{H}} \right) \otimes \cdots \otimes \left(\mathbf{E}_4^{[s]} \cdot \mathbf{E}_4^{[s]\text{H}} \right) \cdot \mathcal{P} \left\{ 2\text{Re} \left\{ \mathbf{Q}^H \mathbf{U}_s \cdot \Lambda_s \cdot (\mathbf{Q}^H \mathbf{U}_s)^H \right\} \right\}. \quad (54)$$

证明见附录 C.

利用上述的关系, 本节的 ESPRIT 类算法可以统一写成下面的形式:

$$\hat{\Psi}^{(r)} = \left(\tilde{\mathbf{H}}_1^{(r)} \cdot \mathbf{F}_s \right)^+ \cdot \tilde{\mathbf{H}}_2^{(r)} \cdot \mathbf{F}_s, \quad (55)$$

其中 $\mathbf{H}_1^{(r)} = \mathbf{\Pi}_{m_r} \tilde{\mathbf{H}}_2^{(r)} \mathbf{\Pi}_J$, $m_r = J(J_r - 1)/J_r$, 其具体表达式见表 1. 算法最后一步是参数配对, 对于 3.2 小节的方法可以采用联合 Schur 分解方法^[39], 而 3.3 小节的方法则可以采用连续 Schur 分解方法^[40].

4 仿真实验

本节通过仿真实验验证所提算法在目标定位性能的优势. 若无特别说明, 雷达工作频率 $f_c = 300$ MHz, 基础频偏 $\delta_f = 3$ KHz 对应的不模糊距离为 $R_u = 50$ km. FDS-MIMO 雷达包含 $J_3 \times J_4 = 10 \times 10$ 个天线单元并划分为 $J_1 \times J_2 = 5 \times 5$ 个子阵, 倾斜角 $\beta = 10^\circ$, 天线间距为半波长. 脉冲重复周期 $T_r = 50$ μs . 噪声建模为复 Gauss 白噪声, 目标散射系数变化服从 Swerling-II 模型. 三个远场目标位于 $\{\theta_d\}_{d=1}^3 = \{10^\circ, 30^\circ, 60^\circ\}$, $\{\varphi_d\}_{d=1}^3 = \{45^\circ, 60^\circ, 80^\circ\}$, $\{r_d\}_{d=1}^3 = \{20.0 \text{ km}, 20.5 \text{ km}, 21.2 \text{ km}\}$, 其 Doppler 频率为 $\{f_{dd}\}_{d=1}^3 = [20 \text{ Hz}, 30 \text{ Hz}, 50 \text{ Hz}]$.

表 1 ESPRIT 算法统一表达形式

Table 1 Unified formulation of ESPRIT-type algorithms

ESPRIT-type algorithms	$\tilde{H}_2^{(r)}$	F_s
Classic ESPRIT	$I_{\Gamma_1^{(r)}} \otimes J_2^{(r)} \otimes I_{\Gamma_2^{(r)}}$	U_s
Tensor ESPTIT	$I_{\Gamma_1^{(r)}} \otimes J_2^{(r)} \otimes I_{\Gamma_2^{(r)}}$	$(U_1^{[s]} \cdot U_1^{[s]H}) \otimes \dots \otimes (U_4^{[s]} \cdot U_4^{[s]H}) \cdot U_s$
Tensor-unitary ESPIRT	$I_{\Gamma_1^{(r)}} \otimes \text{Re}\{2Q_{m,r}^H J_2^{(r)} Q_M^H\} \otimes I_{\Gamma_2^{(r)}}$	$(E_1^{[s]} \cdot E_1^{[s]H}) \otimes \dots \otimes (E_4^{[s]} \cdot E_4^{[s]H}) \cdot \mathcal{P}\{\text{Re}\{Q^H U_s \cdot \Lambda_s \cdot (Q^H U_s)^H\}\}$

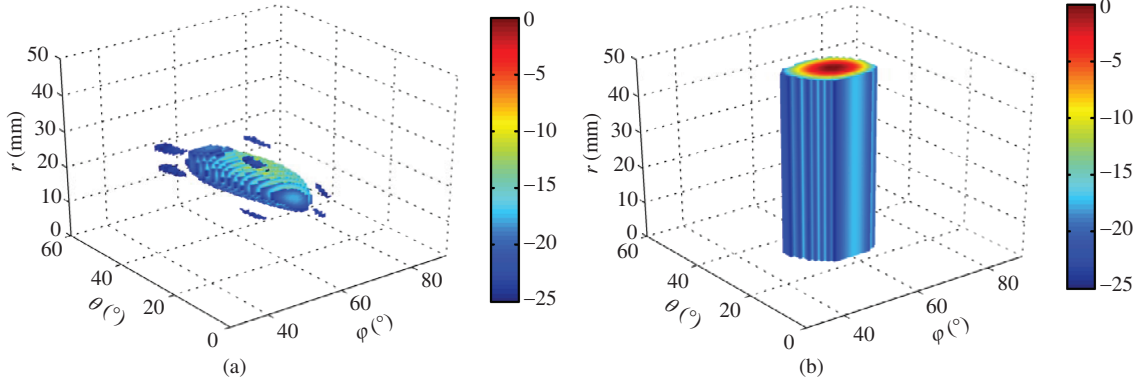


图 2 (网络版彩图) 四维视角下的波束方向图. (a) FDS-MIMO 雷达; (b) 传统 MIMO 雷达

Figure 2 (Color online) Beampattern comparison in 4D view. (a) FDS-MIMO radar; (b) traditional MIMO radar

4.1 仿真 1: 联合发射 – 接收方向图分析

为了更好地展现 FDS-MIMO 雷达相对于传统 MIMO 雷达在波束方面的优势以及直观地表现互质频偏在波束域如何解决距离模糊问题. 我们利用四维波束可视化技术来展示 FDS-MIMO 雷达的联合发射 – 接收波束, 并与传统 MIMO 雷达作对比, 假设只有一个目标位于 $(30^\circ, 60^\circ, 20 \text{ km})$. 图 2 为两种体制雷达在 -25 dB 截断的联合发射 – 接收方向图 (低于 -25 dB 没有显示). 由图 2 可知: (1) MIMO 体制下能够从波束域得到目标的角度, 由于波束是距离独立的, 不能得到距离信息; (2) FDS-MIMO 雷达的方向图是距离 – 角度依赖的且其主瓣呈类椭球体; (3) 由于结合了 FDA 和 MIMO 的特性, FDS-MIMO 雷达的方向图的距离方位耦合得到了有效抑制, 这一特性可用来直接在波束域对目标的距离和角度进行定位. 图 2(a) 的局部放大图展示了 60° 俯仰角下的 -3 dB 主瓣, 其距离分辨率大约为 $R_u/(P+Q-1) = 5.56 \text{ km}$, 这在目标定位中精度是远远不够的. 为提供距离分辨能力, 需要采用更多的子阵和更大的频偏. 图 3(a) 描述了 $(N_x, N_z) = (4, 4)$ 条件下的方向图, 可知距离分辨率提高了, 但是出现了距离模糊问题, 这与文献 [30] 的现象一致. 图 3(b) 中采用互质频偏即 $(N_x, N_z) = (4, 3)$, 距离模糊得到了有效消除, 同时距离分辨率提高到 $R_u/((P-1)N_x + (Q-1)N_z) \approx 2 \text{ km}$, 但这是以提高副瓣为代价的, 这可以通过在各通道加权来抑制, 图 3(b) 中加入了 -20 的 Chebyshev 权, 因此本文的互质频偏方案可以解决雷达距离分辨率和最大不模糊距离之间的矛盾.

4.2 仿真 2: 独立信号源下新算法定位性能仿真

本实验分析 3.2 和 3.3 小节所提算法定位性能, 并与文献 [30] 中采用的步进方法和文献 [29] 中的

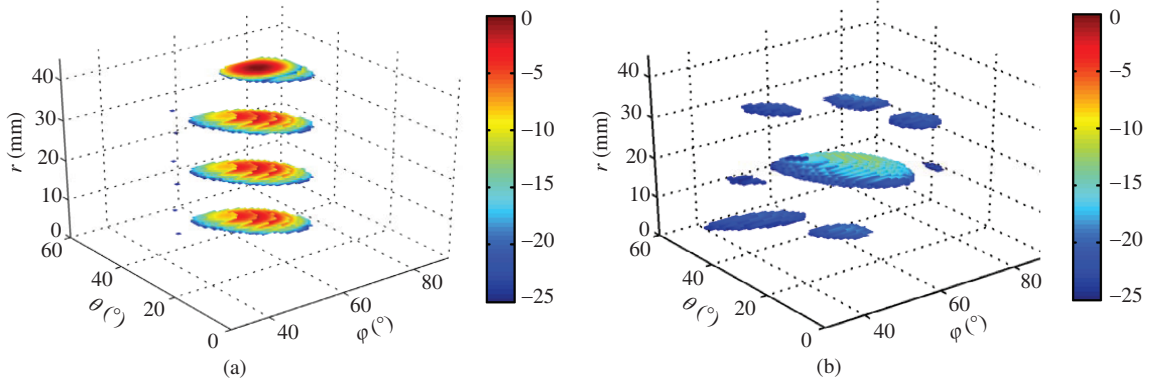


图 3 (网络版彩图) 四维视角下的 FDS-MIMO 雷达波束方向图

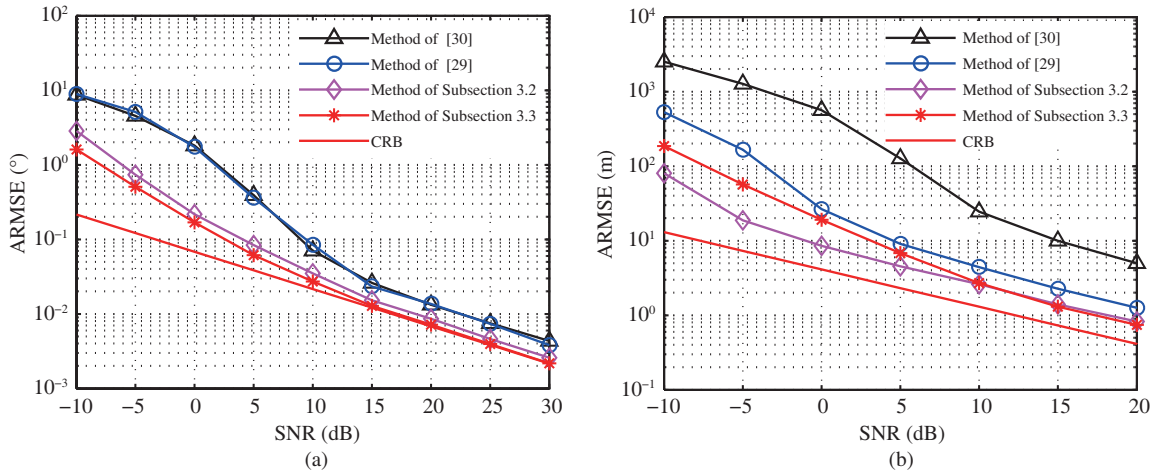
 Figure 3 (Color online) Beampattern of FDS-MIMO radar in 4D view. (a) $(N_x, N_z) = (4, 4)$; (b) $(N_x, N_z) = (4, 3)$


图 4 (网络版彩图) 独立信号源下估计误差与信噪比关系曲线. (a) 角度维; (b) 距离维

Figure 4 (Color online) RMSE vs. SNR under independent signal source. (a) Angle dimension; (b) range dimension

标准 ESPRIT 算法作对比. 定义参数估计的平均均方误差 (root mean square error, RMSE) 为

$$\text{ARMSE}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{2DM_c} \sum_{i=1}^{M_c} \sum_{d=1}^D \left[(\hat{\theta}_{i,d} - \theta_d)^2 + (\hat{\varphi}_{i,d} - \varphi_d)^2 \right]},$$

$$\text{ARMSE}(r) = \sqrt{\frac{1}{DM_c} \sum_{i=1}^{M_c} \sum_{d=1}^D (\hat{r}_{i,d} - r_d)^2},$$

其中 $\hat{\theta}_{i,d}$, $\hat{\varphi}_{i,d}$ 和 $\hat{r}_{i,d}$ 分别表示第 d 个在第 i 次仿真的目标俯仰、方位和距离估计值. M_c 表示仿真次数, 设定为 $M_c = 200$. 图 4 为不同算法的均方误差随信噪比变化曲线, 其中快拍数 $L = 10$, 我们将文献 [31] 的 CRB 扩展到多目标并作为对比标准. 从图 4 可知, 3.2 和 3.3 小节方法的性能明显优于文献 [29, 30], 其更接近于相应的 CRB. 这种性能的提升取决于我们考虑了回波 5 维矩阵是张量结构, 从而可以更高效地抑制噪声, 实现更高精度的定位. 此外, 图 4(b) 表明在低信噪比下, 3.2 小节算法

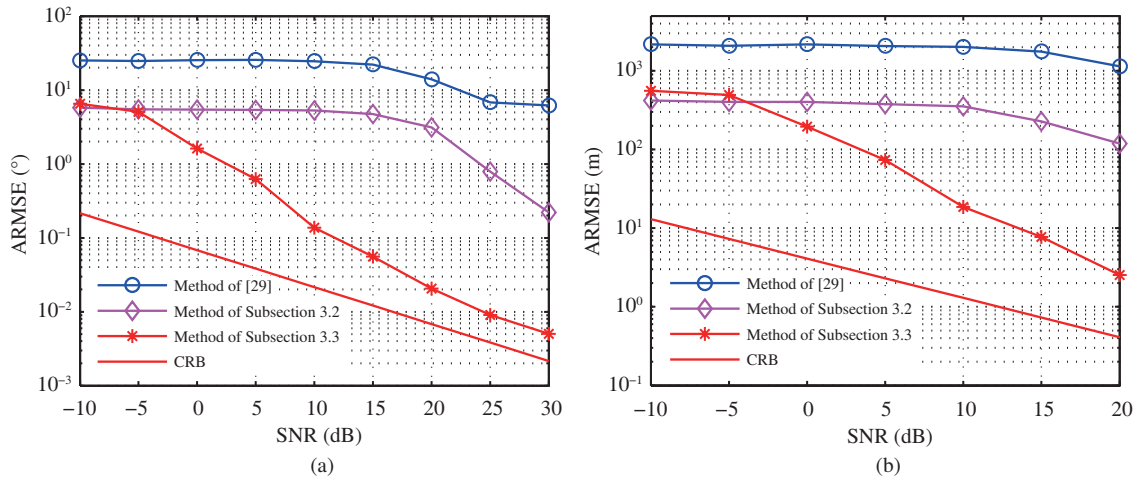


图 5 (网络版彩图) 相关信号源下估计误差与信噪比关系曲线. (a) 角度维; (b) 距离维

Figure 5 (Color online) RMSE vs. SNR under related signal source. (a) Angle dimension; (b) range dimension

的距离估计优于 3.3 小节, 这可能是快拍数已经足够而 3.3 小节算法丢失了复数虚部信息导致的 (见式 (54)).

4.3 仿真 3: 相关信号源下新算法定位性能分析

最后一个仿真条件为前两个目标是相关的, 其相关系数 $\rho = 0.9999$, 快拍数为 $L = 10$. 图 5 给出了不同算法均方误差随信噪比变化曲线. 很明显, 基于 3.2 小节算法的均方误差远远低于文献 [29] 的算法和文献 [30] 的方法. 由于采用了前后向平滑处理, 目标相关性得到降低, 3.3 小节的方法性能明显好于 3.2 小节的方法. 值得一提的是空间平滑预处理可以用于本文所提的算法来解决多相干源的问题, 其关键在于将阵列和通道分成更小的子阵和子通道. 也就是说本文所提算法能够应用于多径情况下目标定位问题. 限于篇幅, 本文不作具体考虑.

5 结束语

基于频控阵的雷达近年来受到雷达界的广泛关注, 特别是二维目标定位的应用. 然而以往的文献中基于频控阵的定位方法没有充分利用回波数据的多维结构特性, 导致性能损失较大. 本文首先提出了一种互质频偏方案解决了距离模糊问题, 然后提出了基于张量和实值张量的 ESPRIT 算法, 并根据矩阵子空间和张量子空间的定量关系, 对 FDS-MIMO 雷达 ESPRIT 类定位算法进行了统一. 研究表明, 相比于传统的 ESPRIT 算法和文献 [30] 提出的类似嵌套频偏方法, 本文所提算法能够更好地利用回波数据特征, 从“多维视角”有效抑制噪声, 实现更好的目标定位性能. 此外, 空间平滑方法能够直接应用于本文的 5 维张量信号回波结构, 因此本文所提算法能够直接扩展用于多相干源场景.

参考文献

- 1 Antonik P, Wicks M, Griffiths H, et al. Frequency diverse array radars. In: Proceedings of IEEE Radar Conference, Verona, 2006. 215–217

- 2 Antonik P, Wicks M, Griffiths H, et al. Multi-mission multi-mode waveform diversity. In: Proceedings of IEEE Radar Conference, Verona, 2006. 580–582
- 3 Wang W Q, Shao H Z, Chen H. Frequency diverse array radar: concept, principle and application. *J Electron Inf Tech*, 2016, 38: 1000–1011 [王文钦, 邵怀宗, 陈慧. 频控阵雷达: 概念、原理与应用. *电子与信息学报*, 2016, 38: 1000–1011]
- 4 Eker T, Demir S, Hizal A. Exploitation of linear frequency modulated continuous waveform (LFMCW) for frequency diverse arrays. *IEEE Trans Antenn Propag*, 2013, 61: 3546–3553
- 5 Wang W Q. Frequency diverse array antenna: new opportunities. *IEEE Antennas Propag Mag*, 2015, 57: 145–152
- 6 Antonik P. An investigation of a frequency diverse array. Dissertation for Ph.D. Degree. London: University College London, 2009
- 7 Secmen M, Demir S, Hizal A, et al. Frequency diverse array antenna with periodic time modulated pattern in range and angle. In: Proceedings of IEEE Radar Conference, Boston, 2007. 427–430
- 8 Wang W Q. Range-angle dependent transmit beampattern synthesis for linear frequency diverse arrays. *IEEE Trans Antenn Propag*, 2013, 61: 4073–4081
- 9 Xu Y, Shi X, Xu J, et al. Range-angle-dependent beamforming of pulsed frequency diverse array. *IEEE Trans Antenn Propag*, 2015, 63: 3262–3267
- 10 Yao A M, Wu W, Fang D G. Frequency diverse array antenna using time-modulated optimized frequency offset to obtain time-invariant spatial fine focusing beampattern. *IEEE Trans Antenn Propag*, 2016, 64: 4434–4446
- 11 Khan W, Qureshi I M, Saeed S. Frequency diverse array radar with logarithmically increasing frequency offset. *Antenn Wirel Propag Lett*, 2015, 14: 499–502
- 12 Shao H, Dai J, Xiong J, et al. Dot-shaped range-angle beampattern synthesis for frequency diverse array. *Antenn Wirel Propag Lett*, 2016, 15: 1703–1706
- 13 Gao K, Wang W Q, Chen H, et al. Transmit beamspace design for multi-carrier frequency diverse array sensor. *IEEE Sens J*, 2016, 16: 5709–5714
- 14 Wang T Y, Lu X F, Deng L, et al. Bayesian compressive sensing-based sparse imaging for Off-Grid target in frequency diverse MIMO radar. *Acta Electron Sin*, 2016, 44: 1314–1321 [王天云, 陆新飞, 丁丽, 等. 基于贝叶斯压缩感知的 FD-MIMO 雷达 Off-Grid 目标稀疏成像. *电子学报*, 2016, 44: 1314–1321]
- 15 Farooq J, Temple M, Saville M. Exploiting frequency diverse array processing to improve SAR image resolution. In: Proceedings of IEEE Radar Conference, Rome, 2008. 1–5
- 16 Xu J, Liao G, Zhu S, et al. Deceptive jamming suppression with frequency diverse MIMO radar. *Signal Process*, 2015, 113: 9–17
- 17 Sammartino P F, Baker C J, Griffiths H D. Frequency diverse MIMO techniques for radar. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2013, 49: 201–222
- 18 Xu J, Liao G, Zhu S, et al. Joint range and angle estimation using MIMO radar with frequency diverse array. *IEEE Trans Signal Process*, 2015, 63: 3396–3410
- 19 Wang W Q, So H C. Transmit subaperturing for range and angle estimation in frequency diverse array radar. *IEEE Trans Signal Process*, 2014, 62: 2000–2011
- 20 Wang W Q, Shao H Z. Range-angle localization of targets by a double-pulse frequency diverse array radar. *IEEE J Sel Top Signal Process*, 2014, 8: 106–114
- 21 Qin S, Zhang Y D, Amin M G. Multi-target localization using frequency diverse coprime arrays with coprime frequency offsets. In: Proceedings of IEEE Radar Conference, Philadelphia, 2016. 1–5
- 22 Wang W Q, So H C, Shao H Z. Nonuniform frequency diverse array for range-angle imaging of targets. *IEEE Sens J*, 2014, 14: 2469–2476
- 23 Khan W, Qureshi I M, Basit A, et al. A double pulse MIMO frequency diverse array radar for improved range-angle localization of target. *Wirel Pers Commun*, 2013, 82: 4073–4081
- 24 Wang W Q. Subarray-based frequency diverse array radar for target range-angle estimation. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2014, 50: 3057–3067
- 25 Xiong J, Cai J, Wang W Q, et al. Decoupled frequency diverse array range-angle-dependent beampattern synthesis using non-linearly increasing frequency offsets. *IET Microw Antenn Propag*, 2016, 10: 880–884
- 26 Wang Y X, Huang G C, Li W. Transmit beampattern design in range and angle domains for MIMO frequency diverse array radar. *IEEE Antenn Wirel Propag Lett*, 2016, 16: 1003–1006

- 27 Qin S, Zhang Y M D, Amin M G, et al. Frequency diverse coprime arrays with coprime frequency offsets for multi-target localization. *IEEE J Sel Topics Signal Process*, 2016, 11: 321–335
- 28 Wang W Q, Zhu C. Nested array receiver with time delayers for joint target range and angle estimation. *IET Radar Sonar Navig*, 2017, 10: 1384–1393
- 29 Huang L, Li X, Gong P C, et al. Frequency diverse array radar for target range-angle estimation. *Int J Comput Math Electr*, 2016, 35: 1257–1270
- 30 Jones A M, Rigling B D. Planar frequency diverse array receiver architecture. In: *Proceedings of IEEE Radar Conference*, Atlanta, 2012. 145–150
- 31 Li X X, Wang D W, Ma X Y. Three-dimensional target localization and Cramér-Rao bound for two-dimensional OFDM-MIMO radar. *Int J Antenn Propag*, 2017, 2017: 1–14
- 32 de Lathauwer L, de Moor B, Vandewalle J. A multilinear singular value decomposition. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 2000, 21: 1253–1278
- 33 Sidiropoulos N D, de Lathauwer L, Fu X, et al. Tensor decomposition for signal processing and machine learning. *IEEE Trans Signal Process*, 2017, 65: 3551–3582
- 34 Balda E R, Cheema S A, Steinwandt J, et al. First-order perturbation analysis of low-rank tensor approximations based on the truncated HOSVD. In: *Proceedings of the 50th Asilomar conference on signals, systems and computers*, Pacific Grove, 2016. 1723–1727
- 35 Haardt M, Roemer F, Del Galdo G. Higher-order SVD-based subspace estimation to improve the parameter estimation accuracy in multidimensional harmonic retrieval problems. *IEEE Trans Signal Process*, 2008, 56: 3198–3213
- 36 Domanov I, de Lathauwer L. Canonical polyadic decomposition of third-order tensors: Relaxed uniqueness conditions and algebraic algorithm. *Linear Algebra Appl*, 2017, 513: 342–375
- 37 Miron S, Song Y, Brie D, et al. Multilinear direction finding for sensor-array with multiple scales of invariance. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2015, 51: 2057–2070
- 38 Sahnoun S, Comon P. Joint source estimation and localization. *IEEE Trans Signal Process*, 2015, 63: 2485–2495
- 39 Abed-Meraim K, Hua Y. A least-squares approach to joint Schur decomposition. In: *Proceedings of IEEE Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Seattle, 1998. 2541–2544
- 40 Haardt M, Nosske J A. Simultaneous Schur decomposition of several nonsymmetric matrices to achieve automatic pairing in multidimensional harmonic retrieval problems. *IEEE Trans Signal Process*, 1998, 46: 161–169

附录 A

本附录讨论 4.2 小节中基于张量的最小二乘解, 利用 $\|\mathcal{A}\|_{\text{H}} = \|\mathcal{A}_{(n)}\|_{\text{F}}$, 式 (44) 可以重写为如下的最小二乘问题

$$\hat{\Psi}_{\text{TE}}^{(r)} = \arg \min_{\Psi^{(r)}} \left\| \left(\mathcal{U}^{[s]} \times_r \mathbf{J}_1^{(r)} \times_{R+1} \Psi^{(r)} - \mathcal{U}^{[s]} \times_{R+1} \mathbf{J}_2^{(r)} \right)_{(R+1)} \right\|_{\text{F}}, \quad (\text{A1})$$

从而有

$$\hat{\Psi}_{\text{TE}}^{(r)} = \arg \min_{\Psi^{(r)}} \left\| \left[\mathcal{U}^{[s]} \times_r \mathbf{J}_1^{(r)} \times_{R+1} \Psi^{(r)} \right]_{(R+1)} - \left[\mathcal{U}^{[s]} \times_r \mathbf{J}_2^{(r)} \right]_{(R+1)} \right\|_{\text{F}}. \quad (\text{A2})$$

利用张量的 n -模式积性质 $[\mathcal{A} \times_n \mathbf{B}]_{(n)} = \mathbf{B} \cdot \mathcal{A}_{(n)}$ 可得

$$\left[\mathcal{U}^{[s]} \times_r \mathbf{J}_1^{(r)} \times_{R+1} \Psi^{(r)} \right]_{(R+1)} = \Psi^{(r)} \cdot \left[\mathcal{U}^{[s]} \times_r \mathbf{J}_1^{(r)} \right]_{(R+1)}. \quad (\text{A3})$$

利用 $\mathcal{A} \times_n \mathbf{I}_n = \mathcal{A}$ 可得

$$\left[\mathcal{U}^{[s]} \times_r \mathbf{J}_1^{(r)} \right]_{(R+1)} = \left[\mathcal{U}^{[s]} \times_1 \mathbf{I}_{M_1} \times_2 \dots \times_r \mathbf{J}_1^{(r)} \times_{r+1} \mathbf{I}_{M_{r+1}} \dots \times_{R+1} \mathbf{I}_{M_{R+1}} \right]_{(R+1)}. \quad (\text{A4})$$

运用张量性质

$$[\mathcal{A} \times_1 \mathbf{X}_1 \times_2 \mathbf{X}_2 \times \dots \times_R \mathbf{X}_R]_{(n)} = \mathbf{X}_n \cdot [\mathcal{A}]_{(n)} \cdot (\mathbf{X}_{n+1} \otimes \mathbf{X}_{n+2} \dots \otimes \mathbf{X}_R \otimes \mathbf{X}_1 \dots \otimes \mathbf{X}_{n-1}). \quad (\text{A5})$$

式 (A4) 可以简化为

$$\left[\mathcal{U}^{[s]} \times_r \mathbf{J}_1^{(r)} \right]_{(R+1)} = \mathbf{I}_{M_{R+1}} \cdot \left[\mathcal{U}^{[s]} \right]_{(R+1)} \cdot \left(\tilde{\mathbf{J}}_1^{(r)} \right)^{\text{T}}, \quad (\text{A6})$$

同理有

$$\left[\mathcal{U}^{[s]} \times_r \mathbf{J}_2^{(r)} \right]_{(R+1)} = \mathbf{I}_{M_{R+1}} \cdot \left[\mathcal{U}^{[s]} \right]_{(R+1)} \cdot \left(\tilde{\mathbf{J}}_2^{(r)} \right)^{\text{T}}. \quad (\text{A7})$$

将式 (A6) 和 (A7) 带入式 (A2) 中可得

$$\hat{\Psi}_{\text{TE}}^{(r)} = \arg \min_{\Psi^{(r)}} \left\| \Psi^{(r)} \cdot [\mathcal{U}^{[s]}]_{(R+1)} \cdot (\tilde{J}_1^{(r)})^T - [\mathcal{U}^{[s]}]_{(R+1)} \cdot (\tilde{J}_1^{(r)})^T \right\|_{\text{F}}, \quad (\text{A8})$$

此时上式已经转化为矩阵形式, 因此可以直接得到

$$\hat{\Psi}_{\text{TE}}^{(r)T} = \left(\tilde{J}_1^{(r)} \cdot [\mathcal{U}^{[s]}]_{(R+1)}^T \right)^+ \cdot \tilde{J}_2^{(r)} \cdot [\mathcal{U}^{[s]}]_{(R+1)}^T, \quad (\text{A9})$$

令 $R = 4$, 可得式 (45).

附录 B

根据式 (47) 和 (49) 可得

$$\mathcal{T}\mathcal{Y} = \mathcal{Y} \times_1 \mathbf{Q}_{J_1}^H \times_2 \mathbf{Q}_{J_2}^H \times_3 \mathbf{Q}_{J_3}^H \times_4 \mathbf{Q}_{J_4}^H \times_5 \mathbf{Q}_{2L}^H = \mathcal{E}^{[s]} \times_5 \mathbf{E}_5^{[s]}, \quad (\text{B1})$$

复值张量 \mathcal{Y} 的 HOSVD 可以表示为

$$\mathcal{Y} = \mathcal{U}^{[s]} \times_5 \mathbf{U}_5^{[s]}, \quad (\text{B2})$$

这里张量 \mathcal{Y} 的子空间 $\mathcal{U}^{[s]}$ 的获得与张量 \mathcal{X} 的类似. 将式 (B2) 代入式 (B1), $\mathcal{E}^{[s]}$ 与 $\mathcal{U}^{[s]}$ 的关系可以表示为

$$\left(\mathcal{U}^{[s]} \times_5 \mathbf{U}_5^{[s]} \right) \times_1 \mathbf{Q}_{J_1}^H \times_2 \mathbf{Q}_{J_2}^H \times_3 \mathbf{Q}_{J_3}^H \times_4 \mathbf{Q}_{J_4}^H \times_5 \mathbf{Q}_{2L}^H = \mathcal{E}^{[s]} \times_5 \mathbf{E}_5^{[s]}. \quad (\text{B3})$$

利用 $\mathbf{E}_5^{[s]H} \mathbf{E}_5^{[s]} = \mathbf{I}_D$ 和 $\mathcal{A} \times_1 \mathbf{X}_1 \times_1 \mathbf{Y}_1 = \mathcal{A} \times_1 (\mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{X}_1)$ 可得

$$\mathcal{U}^{[s]} \times_1 \mathbf{Q}_{J_1}^H \times_2 \mathbf{Q}_{J_2}^H \times_3 \mathbf{Q}_{J_3}^H \times_4 \mathbf{Q}_{J_4}^H \times_5 \left(\mathbf{E}_5^{[s]H} \cdot \mathbf{Q}_{2L}^H \cdot \mathbf{U}_5^{[s]} \right) = \mathcal{E}^{[s]}. \quad (\text{B4})$$

根据 $\mathcal{U}^{[s]} = \mathcal{A} \times_5 \mathbf{T}_{\text{TE}}$ 有

$$\mathcal{A} \times_1 \mathbf{Q}_{J_1}^H \times_2 \mathbf{Q}_{J_2}^H \times_3 \mathbf{Q}_{J_3}^H \times_4 \mathbf{Q}_{J_4}^H \times_5 \left(\mathbf{E}_5^{[s]H} \cdot \mathbf{Q}_{2L}^H \cdot \mathbf{U}_5^{[s]} \cdot \mathbf{T}_{\text{TE}} \right) = \mathcal{E}^{[s]}. \quad (\text{B5})$$

进一步可知

$$\mathcal{B} \times_5 \left(\mathbf{E}_5^{[s]H} \cdot \mathbf{Q}_{2L}^H \cdot \mathbf{U}_5^{[s]} \cdot \mathbf{T}_{\text{TE}} \right) = \mathcal{E}^{[s]}, \quad (\text{B6})$$

记 $\mathbf{T}_{\text{UTE}} = \left(\mathbf{E}_5^{[s]H} \cdot \mathbf{Q}_{2L}^H \cdot \mathbf{U}_5^{[s]} \cdot \mathbf{T}_{\text{TE}} \right)$, 很明显由于矩阵 $\mathbf{E}_5^{[s]}$, \mathbf{Q}_{2L}^H , $\mathbf{U}_5^{[s]}$ 都是列满秩矩阵, 因此 \mathbf{T}_{UTE} 是非奇异矩阵, 定理 1 证明完毕.

附录 C

在这一附录中, 我们讨论各子空间之间的关系. 限于篇幅, 我们仅推导式 (54), 同理可得式 (53). 根据式 (48), 截尾核心矩阵 $\mathcal{S}_Y^{[s]}$ 可以计算为

$$\mathcal{S}_Y^{[s]} \approx \mathcal{T}\mathcal{Y} \times_1 \mathbf{E}_1^{[s]H} \times_2 \mathbf{E}_2^{[s]H} \times_3 \mathbf{E}_3^{[s]H} \times_4 \mathbf{E}_4^{[s]H} \times_5 \mathbf{E}_5^{[s]H}, \quad (\text{C1})$$

将式 (C1) 代入式 (49) 可得

$$\mathcal{E}^{[s]} = \mathcal{T}\mathcal{Y} \times_1 \left(\mathbf{E}_1^{[s]} \cdot \mathbf{E}_1^{[s]H} \right) \dots \times_4 \left(\mathbf{E}_4^{[s]} \cdot \mathbf{E}_4^{[s]H} \right) \times_5 \left(\sum_5^{[s]-1} \cdot \mathbf{E}_5^{[s]H} \right), \quad (\text{C2})$$

这里增加了 $\sum_5^{[s]}$ 的逆矩阵这一项, 其中 $\sum_5^{[s]}$ 包含了张量 \mathcal{Y} 的 5- 模式展开矩阵的 D 个主特征值, 但这并不影响实值子空间 $\mathcal{E}^{[s]}$. 对上式进行 5- 模式展开并转, 利用式 (A5) 可得

$$\left[\mathcal{E}^{[s]} \right]_5^T = \left(\left(\mathbf{E}_1^{[s]} \cdot \mathbf{E}_1^{[s]H} \right) \otimes \dots \otimes \left(\mathbf{E}_4^{[s]} \cdot \mathbf{E}_4^{[s]H} \right) \right) \cdot [\mathcal{T}\mathcal{Y}]_{(5)}^T \cdot \mathbf{E}_5^{[s]*} \cdot \sum_5^{[s]-1}, \quad (\text{C3})$$

根据式 (33) 有

$$\mathbf{Y} = [\mathcal{T}\mathcal{Y}]_{(5)}^T = \mathbf{Q}^H [\mathcal{Y}]_{(5)}^T \mathbf{Q}_{2L}^*, \quad (\text{C4})$$

其中 $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_{J_1} \otimes \mathbf{Q}_{J_2} \otimes \mathbf{Q}_{J_3} \otimes \mathbf{Q}_{J_4})$, 又有

$$[\mathcal{Y}]_{(5)}^T = \left[\mathcal{X}_{(5)}^T \sqcup_2 [\mathcal{X}^* \times_1 \mathbf{\Pi}_{J_1} \times_2 \mathbf{\Pi}_{J_2} \times_3 \mathbf{\Pi}_{J_3} \times_4 \mathbf{\Pi}_{J_4} \times_5 \mathbf{\Pi}_L]_{(5)}^T \right] = \left[\mathcal{X}_{(5)}^T \sqcup_2 \mathbf{\Pi} \mathcal{X}_{(5)}^H \mathbf{\Pi}_L \right] = \left[\mathbf{X} \mathbf{\Pi} \mathbf{X}^* \mathbf{\Pi}_L \right], \quad (\text{C5})$$

从而可得

$$\mathbf{Y} = [\mathcal{T}\mathcal{Y}]_{(5)}^T = \mathbf{Q}^H \left[\mathbf{X} \mathbf{\Pi} \mathbf{X}^* \mathbf{\Pi}_L \right] \mathbf{Q}_{2L}^* \quad (\text{C6})$$

矩阵 \mathbf{Y} 的 SVD 可以表示为

$$\mathbf{Y} = [\mathcal{T}\mathcal{Y}]_{(5)}^T \approx \mathbf{E}_s \cdot \sum_s \cdot \mathbf{F}_s^H, \quad (\text{C7})$$

其中, $\mathbf{U}_s \in \mathbb{C}^{J \times D}$, $\sum_s \in \mathbb{C}^{D \times D}$ 和 $\mathbf{V}_s \in \mathbb{C}^{L \times D}$. 注意到 $[\mathcal{T}\mathcal{Y}]_{(5)} = \mathbf{E}_5^{[s]} \sum_5^{[s]} \mathbf{F}_5^{[s]H}$, 我们可得

$$\mathbf{E}_5^{[s]*} = \mathbf{F}_s, \quad (\text{C8})$$

因此实值张量子空间与对应的矩阵子空间有如下的关系:

$$\left[\mathcal{E}^{[s]} \right]_5^T = \left(\left(\mathbf{E}_1^{[s]} \cdot \mathbf{E}_1^{[s]H} \right) \otimes \dots \otimes \left(\mathbf{E}_4^{[s]} \cdot \mathbf{E}_4^{[s]H} \right) \right) \cdot \mathbf{E}_s, \quad (\text{C9})$$

下面讨论实值子空间 \mathbf{E}_s 和复值子空间 \mathbf{U}_s 的关系. 除了式 (C7), 实值子空间 \mathbf{E}_s 也能从回波 \mathbf{Y} 的协方差矩阵 \mathbf{R}_Y 的特征值分解获得, 其中 \mathbf{E}_s 可以表示为

$$\mathbf{R}_Y = \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H / 2L = \mathbf{Q}^H [\mathcal{Y}]_{(5)}^T \mathbf{Q}_{2L}^* \mathbf{Q}_{2L}^T [\mathcal{Y}]_{(5)}^* \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^H [\mathcal{Y}]_{(5)}^T [\mathcal{Y}]_{(5)}^* \mathbf{Q}, \quad (\text{C10})$$

其中 $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_{J_1} \otimes \mathbf{\Pi}_{J_2} \otimes \mathbf{\Pi}_{J_3} \otimes \mathbf{\Pi}_{J_4}$. 将式 (C5) 代入式 (C10) 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_Y &= \mathbf{Q}^H [\mathcal{Y}]_{(5)}^T [\mathcal{Y}]_{(5)}^* \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^H \left[\mathbf{X} \mathbf{\Pi} \mathbf{X}^* \mathbf{\Pi}_L \right] \left[\mathbf{X} \mathbf{\Pi} \mathbf{X}^* \mathbf{\Pi}_L \right]^H \mathbf{Q} \\ &= \mathbf{Q}_J^H (\mathbf{X} \mathbf{X}^H + \mathbf{\Pi} \mathbf{X}^* \mathbf{X}^T \mathbf{\Pi}) \mathbf{Q}_J / 2L = \mathbf{Q}^H \mathbf{R}_X \mathbf{Q} / 2 + \mathbf{Q}^H \mathbf{\Pi} \mathbf{R}_X^* \mathbf{\Pi} \mathbf{Q} / 2. \end{aligned} \quad (\text{C11})$$

利用 $\mathbf{\Pi}_p \mathbf{Q}_p^* = \mathbf{Q}_p$ 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^H \mathbf{\Pi} &= \left(\mathbf{Q}_{J_1}^H \otimes \mathbf{Q}_{J_2}^H \otimes \mathbf{Q}_{J_3}^H \otimes \mathbf{Q}_{J_4}^H \right) \left(\mathbf{\Pi}_{J_1} \otimes \mathbf{\Pi}_{J_2} \otimes \mathbf{\Pi}_{J_3} \otimes \mathbf{\Pi}_{J_4} \right) \\ &= \left(\mathbf{Q}_{J_1}^H \mathbf{\Pi}_{J_1} \right) \otimes \left(\mathbf{Q}_{J_2}^H \mathbf{\Pi}_{J_2} \right) \otimes \left(\mathbf{Q}_{J_3}^H \mathbf{\Pi}_{J_3} \right) \otimes \left(\mathbf{Q}_{J_4}^H \mathbf{\Pi}_{J_4} \right) \\ &= \mathbf{Q}_{J_1}^T \otimes \mathbf{Q}_{J_2}^T \otimes \mathbf{Q}_{J_3}^T \otimes \mathbf{Q}_{J_4}^T = \mathbf{Q}^T. \end{aligned} \quad (\text{C12})$$

将式 (C12) 代入式 (C11) 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_Y &= \mathbf{Q}^H \mathbf{R}_X \mathbf{Q}_J / 2 + \mathbf{Q}^T \mathbf{R}_X^* \mathbf{Q}^* / 2L = \mathbf{Q}^H \mathbf{R}_X \mathbf{Q} / 2 + (\mathbf{Q}^H \mathbf{R}_X \mathbf{Q})^* / 2 \\ &= \text{Re} \left\{ \mathbf{Q}^H \mathbf{R}_X \mathbf{Q} \right\} = \text{Re} \left\{ \mathbf{Q}^H \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{\Lambda}_s \cdot (\mathbf{Q}^H \mathbf{U}_s)^H \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C13})$$

因此式 (C3) 能够进一步写成

$$\left[\mathcal{E}^{[s]} \right]_5^T = \left(\mathbf{E}_1^{[s]} \cdot \mathbf{E}_1^{[s]H} \right) \otimes \dots \otimes \left(\mathbf{E}_4^{[s]} \cdot \mathbf{E}_4^{[s]H} \right) \cdot \mathcal{P} \left\{ \text{Re} \left\{ \mathbf{Q}^H \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{\Lambda}_s \cdot (\mathbf{Q}^H \mathbf{U}_s)^H \right\} \right\}, \quad (\text{C14})$$

其中 $\mathcal{P} \{ \mathbf{A} \}$ 表示选择矩阵 \mathbf{A} 的 D 个主特征向量. 从而讨论 2 证明完毕.

Three-dimensional target localization method based on the tensor subspace FDS-MIMO radar with a co-prime frequency offset

Xingxing LI^{1*}, Dangwei WANG¹, Xiaoyan MA¹ & Wenqin WANG²

1. Air Force Early Warning Academy, Wuhan 430019, China;

2. School of Communication and Information Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China

* Corresponding author. E-mail: li_x_xing@163.com

Abstract Target localization utilizing frequency diversity array (FDA) is one of the most popular research directions in the study of radars. Considering the problems of range ambiguity and localization accuracy, this paper investigates the issue of three-dimensional (3D) target localization based on the proposed frequency diverse-subaperturing multiple-input multiple-output (FDS-MIMO) radar. First, a fifth-order tensor signal model is established by exploiting the inherent multidimensional structure of the matched filter output. To alleviate the difficulty of range ambiguity, the idea of employing co-prime frequency offsets along the two directions in the planer array is provided. This strategy can resolve the contradiction between the range resolution and maximum unambiguous range in beam domain. The tensor-based complex- and real-valued rotational invariance technique (tensor- and unitary tensor-ESPRIT) algorithms are developed based on frequency offset structure. Given that the inherent multidimensional structure is utilized, the proposed methods can resolve range ambiguity with improved localization performance as compared with the existing ESPRIT algorithm and frequency offset manner. Theoretical analysis and numerical results demonstrate the effectiveness of the proposed approaches.

Keywords FDS-MIMO radar, target localization, tensor subspace, range-angle-dependent beampattern, range ambiguity, co-prime frequency offset



Xingxing LI received his B.S. degree from Air Force Radar Academy, Wuhan, China in 2011. He received his M.S. degrees from Air Force Early Warning Academy, Wuhan, China in 2013. He is currently working toward his Ph.D. degree in Air Force Early Warning Academy. His research interests include MIMO radar signal processing, adaptive beamforming, target localization, and target feature extraction and identification.



Dangwei WANG received his B.S. and M.S. degrees from Wuhan Radar Academy, Wuhan, China in 2000 and 2003, respectively. He received his Ph.D. degree from Department of Electrical and Electronic Engineering in National University of Defense Technology, Changsha, China in 2006. He is currently an associate professor of Air Force Early Warning Academy, Wuhan, China. His research interests include multi-channel radar target characteristics and advanced signal processing with applications in radar target imaging and identification.



Xiaoyan MA received his B.S. degree from Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, China in 1982. He received his M.S. degree from National University of Defense Technology, Changsha, China in 1988. He received his Ph.D. degree from Tsinghua University, Beijing, China in 2002. He is currently a full professor and dean of Air Force Early Warning Academy, Wuhan, China. His main research interests include radar system design, target detection and imaging, and ISAR signal processing.



Wenqing WANG received his B.S. degree in electrical engineering from Shandong University, Shandong, China in 2002. He earned his M.E. and Ph.D. degrees in information and communication engineering from the University of Electronic Science and Technology of China (UESTC), Chengdu, China in 2005 and 2010, respectively. He worked with the National Key Laboratory of Microwave Imaging Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China from 2005 to 2007. Since 2007, he has been working with the School of Communication and Information Engineering, UESTC, where he is currently a full professor. From 2011 to 2012, he was a visiting scholar at the Stevens Institute of Technology, NJ, USA. From 2012 to 2013, he was a Hong Kong scholar at the City University of Hong Kong, Hong Kong. From January 2014 to January 2016, he was a Marie Curie Fellow at Imperial College London, U.K. His current research interests span the area of array signal processing and circuit systems for radar, communications, and microwave remote sensing.