



# 基于连续时间商品模型的电力市场定价理论

陈皓勇<sup>1\*</sup>, 韩励佳<sup>2</sup>

1. 华南理工大学电力学院, 广州 510641

2. 华北电力大学数理学院, 北京 102206

\* 通信作者. E-mail: eehychen@scut.edu.cn

收稿日期: 2018-07-28; 接受日期: 2018-09-13; 网络出版日期: 2018-10-25

国家重点研发计划 (批准号: 2016YFB0900100) 资助项目

**摘要** 实时电价理论是许多国家电力现货市场设计的理论基础, 但有两个重大缺陷: 一是仍然基于传统的分时调度模型, 忽略了电能生产和消费的时间连续性这个十分重要的特征对电能成本及电力系统调度运行的影响, 没有认真处理跨时段约束; 二是假设同一时段的电能商品都是同质的, 无法区别基荷、腰荷和峰荷机组区别明显的技术特征及成本构成. 为克服这些缺陷, 本文提出连续时间电能商品模型 (即功率对于时间的函数), 以及该模型下两者不同的定价方式, 即实时电价和按负荷持续时间定价. 两种定价方式下的市场优化问题也相应地由传统电力市场理论中的数值优化问题变为泛函极值优化模型. 本文通过严格的数学推导证明了按负荷持续时间定价的可行性. 所提的理论和方法可为国内外电力市场建设提供全新的思路和理论基础.

**关键词** 电力市场, 实时电价, 价格形成机制, 市场均衡, 泛函优化

## 1 引言

《关于进一步深化电力体制改革的若干意见》(中发〔2015〕9号文) 印发以来, 电力市场改革已成为能源电力行业关注的焦点.

随着电力市场改革的深化, 加快建设现货市场已成为有关部门推动电力体制改革的重要举措. 全国将以南方 (以广东起步)、蒙西、浙江、山西、山东、福建、四川、甘肃等 8 个地区作为第一批试点, 加快组织推动电力现货市场建设工作. 按国家有关文件规定, 现货市场主要开展日前、日内、实时电能交易. 这种电力现货市场的概念主要来自于国外电力市场的 spot market, 其理论基础为美国麻省理工学院 Schweppe 等<sup>[1]</sup>, Bohn<sup>[2]</sup>, Caramanis 等<sup>[3]</sup> 提出的实时电价 (spot pricing) 理论, 取决于某一小时的电力供需情况. 电价理论的研究包括两个部分: 一是电能成本分析, 即什么是合理电价; 二是电力市场中的电价形成机制. 电能成本分析是衡量电价是否合理的基础, 但电价最终要通过市场机制

**引用格式:** 陈皓勇, 韩励佳. 基于连续时间商品模型的电力市场定价理论. 中国科学: 信息科学, 2018, 48: 1287-1299, doi: 10.1360/N112018-00061  
Chen H Y, Han L J. Electricity pricing theory based on continuous time commodity model (in Chinese). Sci Sin Inform, 2018, 48: 1287-1299, doi: 10.1360/N112018-00061

形成. 在理想电力市场中, 出清电价应与电力系统中的电能边际生产成本和电力用户的电能边际效用相等<sup>[4]</sup>.

近期美国能源部 (Department of Energy) 与各大区域电力市场运营商 ISO/RTO 就电力市场价格形成机制等问题发生激烈争论. 在 2017 年 9 月 28 日美国能源部长里克·佩里 (Rick Perry) 给联邦能源管理委员会 (Federal Energy Regulatory Commission, FERC) 的信中, 提到美国电力市场的短期市场可能无法提供充分的价格信号来确保合理的长期容量投资<sup>[5]</sup>. 此外, 当前的批发市场价格形成机制也受到质疑, 甚至认为已威胁到美国电网安全和国家安全. 在美国能源部给 FERC 的通知中, 对煤电、核电过早退役给电网弹性带来的威胁等问题进行了进一步阐述, 并提到现有的容量市场不能确保足够可靠的电力供应<sup>[6]</sup>. 在此前美国能源部给部长的报告中, 重点研究了当前电力批发市场的问题及其与电网可靠性/弹性的关系, 建议 FERC 应加快与联邦、RTO / ISO 和其他利益相关方的合作, 改革集中组织的电力批发市场的价格形成机制<sup>[7]</sup>. 而在哈佛大学肯尼迪政府学院 Hogan<sup>[8]</sup> 给 PJM Interconnection 的信函中, 则对 PJM 电力市场的价格形成机制进行了分析和评述, 并肯定了 PJM 电力市场正在进行的价格形成机制改革.

在上述背景下, 重新研究电力市场的定价机制已成为当务之急. Schweppe 教授等<sup>[1]</sup> 在 1988 年出版的 *Spot Pricing of Electricity* 成为电价理论的经典文献, 并成为多国电力现货市场设计的理论基础. 实时电价 (spot pricing) 理论数学上十分精致, 但笔者认为其并不符合电力生产和消费的物理特征. 在实际中, 基于实时电价理论设计的现货市场或多或少都出现了一些问题: 现货市场价格变化剧烈, 给市场主体带来很大的财务风险, 需要另外引入金融交易等避险措施; 大多数电力用户并无能力 (或无意愿) 对快速变化的现货价格作出响应, 需要依赖售电公司将批发市场的现货价格转化为简单的购电套餐, 未达到通过实时电价增强供需方互动的理论设计目标, 也导致电改红利被售电公司等中间商截留, 传导不到用户侧, 违背了电改的初衷; 现货价格不能完全覆盖固定成本, 导致发电投资容量不足, 需要另设容量市场; 在可再生能源大规模接入的背景下, 现货价格偏低甚至成为负值, 无法保证常规能源机组的合理收益, 等等.

## 2 实时电价定价原理

实时电价取决于某一小时的电力供需情况, 特别是

- 负荷 (总负荷及分区负荷);
- 发电的充裕度及成本 (包括从其他公司购电);
- 输、配电网的充裕度及损耗.

实时电价的定义为各用户在各时段 (1 h/0.5 h/0.25 h/...) 的电价, 包括以下分量: 发电边际燃料成本, 发电边际维护成本、发电供电质量费用、发电收支平衡费用、网络边际损耗成本、网络供电质量费用、网络收支平衡费用.

在不考虑收支平衡费用时, 实时电价由边际成本决定, 即

$$\rho_k(t) = \frac{\partial F}{\partial d_k(t)}, \quad (1)$$

其中  $F$  为供给所有用户电能的总费用;  $\rho_k(t)$  为第  $k$  个用户在第  $t$  小时的实时电价, 单位为 \$/kWh;  $d_k(t)$  为第  $k$  个用户在第  $t$  小时的电量需求, 单位为 kWh.

上式在求导时应满足以下约束:

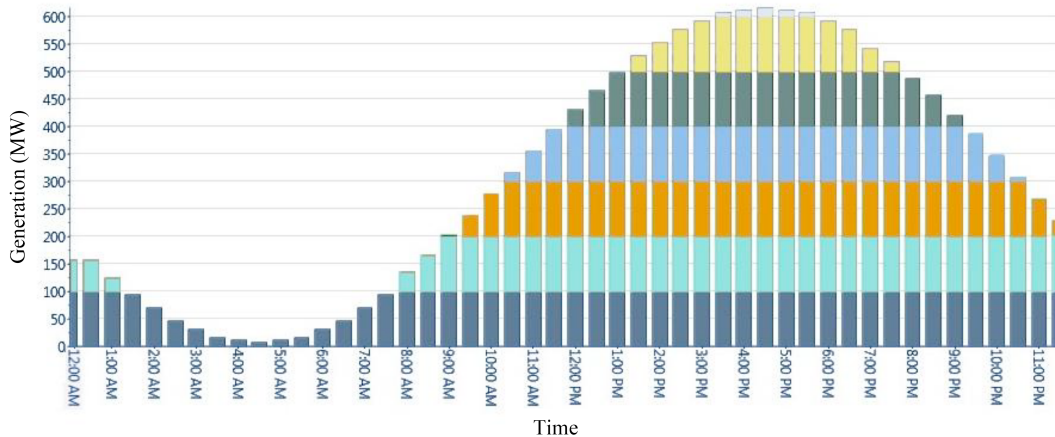


图 1 (网络版彩图) 实时电价理论中的电能商品模型

Figure 1 (Color online) Electric energy commodity model in real time electricity price theory

- 电能平衡: 总发电量等于总负荷加损耗;
- 发电限制: 第  $t$  小时的总需求不能超过该小时所有发电厂的可用容量之和;
- 基尔霍夫 (Kirchhoff) 定律: 电力潮流及损耗应满足电路定律;
- 线路潮流极限: 任何线路潮流不得超过其功率传输极限.

实时电价是基于经典微观经济学中的社会福利最大化原理形成的, 在其原始理论中综合考虑了短期与长期, 运行与规划, 而在实际电力市场中, 实时电价往往由安全约束机组组合 (security constrained unit commitment, SCUC)、安全约束经济调度 (security constrained economic dispatch, SCED) 等短期运行优化模型求出. 但实时电价的计算模型仍采用传统经济调度的分时段功率平衡模型, 将整个考察区间分成一系列的周期 (cycle), 每个周期又分为若干时段 (period), 然后分时段按能量 (电量) 平衡模型进行计算, 由于每个时段的功率 (电力) 假设为常数, 所以能量平衡模型也就是功率平衡模型. 如图 1 所示, 在这个过程中, 电能商品模型实际上是按如下方式定义的.

将整个负荷曲线下的面积按时段切分成若干“条”, 然后每条又分为若干“段”. 在 1 个时段中, 成交的发电商各取 1 “段” (即 1 个商品), 而按边际价格出清方式, 同一时段的各段负荷 (所有商品) 的结算价是相同的 (即该时段成交机组的最高价格).

限于篇幅, 本文不对实时电价理论作详细介绍, 有兴趣的读者可参考文献 [1, 2].

### 3 基于实时电价的电力现货市场缺陷与连续时间电能商品模型

基于实时电价理论设计的电力现货市场有以下缺陷:

(1) 实时电价基于传统的分时调度 (或分时功率平衡) 模型计算, 没有认真处理跨时段 (inter-temporal) 约束 (文献 [1] 中已提到这个约束, 但未进行深入探讨), 因此也忽略了电能生产和消费的时间连续性这个十分重要的特征, 在当前风、光等新能源大规模接入和对电力系统灵活性需求急剧升高的情况下, 这个问题尤其严重.

(2) 假设同一时段的电能商品都是同质的, 由于未考虑不同类型发电机组功率的时间动态特征, 无法区别基荷、腰荷和峰荷机组区别明显的技术特征及成本构成.

(3) 虽然实时电价理论模型包括了从运行到规划的长时间尺度的资源优化 [2], 但这样的超大规模

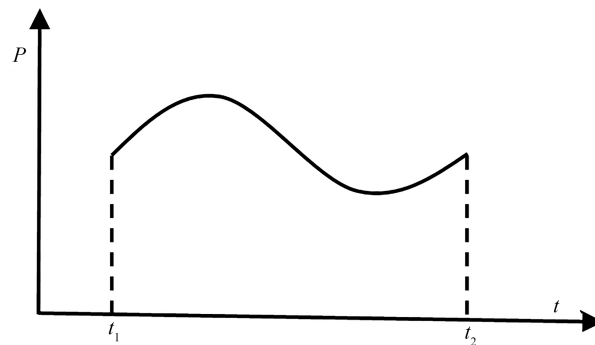


图 2 连续时间电能商品模型

Figure 2 Continuous time electricity commodity model

优化问题在实际中是无法应用的. 实际市场往往采用 SCUC (安全约束机组组合) 或 SCED (安全约束经济调度) 模型计算出清电价, 并不包括长期发电容量投资的经济信号, 无法保证发电容量的充裕性.

(4) 电能的生产 and 用都具有时间连续性, 无论对于发电商还是电力负荷, 销售或购买的商品都是具有一定持续时间的“能量块”(energy block). 能量(电量)是发电厂商和电力用户所关注的主要对象, 而功率(电力)平衡主要作为电力系统运行的物理约束(主要体现在潮流方程中). 在实时电价理论中, 由于未将时间因素纳入商品模型, 功率平衡与能量平衡成为等同的, 物理约束直接作为市场供需平衡条件, 这并不合适.

(5) 电量(能量)型商品(特别是中长期交易的商品)与电力(功率)型商品的特性不同, 电量型商品与普通商品更相近, 在较长时期内达到供需动态平衡即可; 在中长期交易中电量型商品其实是可存储的, 主要以煤(或其他燃料)、水库储水等形式存储, 这与不能存储的电力型商品形成鲜明对比.

(6) 电能作为基础性产品与生产资料的一部分(在我国尤其如此), 保证持续稳定供应是最关键的考虑, 不需要片面追求电力市场本身的“最高效率”(特别是短期现货市场的最高效率).

为强调时间因素在电能商品中的作用, 本文重新定义由(功率, 时间)对组成的连续时间电能商品模型  $(P, t)$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ), 功率曲线下的面积即为电量, 如图 2 所示. 当  $t_2 = t_1 + 1$  并且  $P = C$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ) ( $C$  表示常数) 时, 即退化为实时电价理论中的分时电能商品模型. 由于功率可看成时间的函数, 所以该连续时间电能商品模型也可写成  $(P(t), t)$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ) 的形式, 实时电价定义中的电量(功率)点变成定义于  $(t_1, t_2)$  时间区间的函数, 需要用无穷维空间上的数学理论(如泛函分析、变分法等)进行分析. 引入连续时间电能商品模型后, 市场出清的社会福利最大化问题从多阶段静态优化问题变为连续时间的泛函优化问题, 求解方法也从 Lagrange 方法变为 Euler-Lagrange 方程的求解.

国内外也有不少其他学者提出了考虑电能商品时间连续性的竞价模型, 如文献 [9] 提出的水平拍卖机制 (horizontal auction), 文献 [10] 提出的分段竞价机制, 但均未对基于连续时间商品模型的电力市场定价基础理论进行深入研究.

#### 4 基于连续时间商品模型的电力市场建模

本文仍采用文献 [3] 中基于社会福利最大化的微观经济学模型来定义电力市场, 为便于参照, 借鉴该文的变量符号与表达方式, 因为本文目的主要是原理性说明, 市场模型在该文的基础上进行一定的简化.

(1) 市场参与者.  $B_j (j \in \phi)$  为市场参与者  $j$  在一个市场周期内的可变成本 (效益), 其成本 (效益) 函数为

$$B_j = B_j(P_j(t)), \quad j \in \phi, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

其中,  $\phi$  为市场中所有参与者的集合;  $B_j$  为一个关于市场参与者  $j$  功率曲线  $P_j(t)$  的泛函. 当  $j$  为发电厂时,  $B_j \leq 0$  (即表示发电成本), 当  $j$  为电力用户时,  $B_j \geq 0$  为正值 (即表示用电效益);  $T$  为交易期间时长.

(2) 目标函数. 目标函数即为微观经济学中的标准社会福利最大化模型:

$$\text{Max 社会福利} = \text{电能的使用价值} - \text{电能的生产成本.}$$

目标函数可写为

$$\max W(P_1, P_2, \dots, P_n) = \sum_{j \in \phi} B_j(P_j(t))dt. \quad (3)$$

(3) 约束条件. 只考虑能量平衡约束, 即  $0 = \text{发电量} - \text{网损电量} - \text{用电量}$ . 能量平衡约束可写为

$$0 = e(t) = \sum_j P_j(t) - L(t), \quad j \in \phi, \quad 0 \leq t \leq T, \quad L(t) > 0. \quad (4)$$

注意此式中, 时间  $t$  为连续变量, 不再离散化, 当  $j$  为发电厂时,  $P_j(t)$  为正值, 否则为负值,  $L(t)$  为有功损耗.

(4) 参与者行为. 采用连续时间电能商品模型后, 市场参与者利润最大化模型变为积分 (或功率曲线的泛函) 形式. 实时电价下的利润最大化模型对应于数学上的 Riemann (黎曼) 积分, 而本文引入按负荷持续时间 (数学上称为“测度”) 定价的利润最大化模型, 对应于数学上的 Lebesgue (勒贝格) 积分. 注意按负荷持续时间定价的基本思想在文献 [9,10] 中已有所涉及. 关于 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的定义及基础理论参见文献 [11].

(a) 实时电价下的参与者利润最大化模型 (Riemann 积分). 假设参与者  $j$  按随时间变化的实时电价  $\tilde{\pi}_j(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ) 获得收入 (对于发电厂) 或购买电能 (对于电力用户), 参与者的目标即在生产 (消费) 能力约束下最大化净收入:

$$\begin{aligned} \max N_j^R(P_j(t)) &= \int_{t=0}^T [B_j^R(P_j(t)) + \tilde{\pi}_j(t) P_j(t)] dt \\ \text{s.t. } P_j^{\min}(t) &\leq P_j(t) \leq P_j^{\max}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $B_j^R$  表示 Riemann 积分意义下单位时间的成本 (效益), 对一个具体的参与者,  $P_j^{\min}(t)$ ,  $P_j^{\max}(t)$  往往是常数 (不随时间变化).

(b) 按负荷持续时间定价的参与者利润最大化模型 (Lebesgue 积分). 假设参与者  $j$  按由负荷持续时间 (测度) 决定的价格函数  $\tilde{\pi}_j(y)$  ( $P_j^{\min} \leq y \leq P_j^{\max}$ ) (本文假设负荷曲线是单调增长的, 因此该价格函数也能写为负荷的函数, 参见第 6 节算例分析) 获得收入 (对于发电厂) 或购买电能 (对于电力用户), 参与者的目标, 即在生产 (消费) 能力约束下最大化净收入:

$$\begin{aligned} \max N_j^L(m_j(y)) &= \int_{P_j^{\min}}^{P_j^{\max}} [B_j^L(y) \pm \tilde{\pi}_j(y) m_j(y)] dy \\ \text{s.t. } P_j^{\min}(t) &\leq P_j(t) \leq P_j^{\max}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $B_j^L$  表示 Lebesgue 积分意义下单位负荷的成本 (效益),  $m_j(y) = m\{t: P_j(t) > y\}$  为函数值为  $y$  时对应的测度, 当  $j$  为发电厂时,  $\tilde{\pi}_j(m_j(y))$  前取加号, 否则取减号.

(5) 商品模型. 在两种不同的定价方式下, 电能商品模型也有所区别. 实时电价下, 一段时间  $t$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ) 内参与者  $j$  的功率曲线  $P_j(t)$  ( $j \in \phi, t_1 \leq t \leq t_2$ ) 被视为其所销售 (或购买) 的 “一个” 商品, 其总价格  $P_{\text{Total}}$  表达式为

$$P_{\text{Total}} = \int_{\tau=t_1}^{t_2} \tilde{\pi}_j(\tau) P_j(\tau) d\tau. \quad (7)$$

因而可以进一步定义该商品的单位电能量价格:

$$\tilde{\pi}_j = \frac{\int_{\tau=t_1}^{t_2} \tilde{\pi}_j(\tau) P_j(\tau) d\tau}{\int_{\tau=t_1}^{t_2} P_j(\tau) d\tau}. \quad (8)$$

按负荷持续时间定价的方式下, 一定功率范围  $P_j(t)$  ( $P_1 \leq t \leq P_2$ ) 内参与者  $j$  的 “能量块” 被视为其所销售 (或购买) 的 “一个” 商品, 即

$$\bar{P}_j(t) = \begin{cases} P_j(t) : P_1 \leq P_j(t) \leq P_2, \\ P_2 : P_j(t) > P_2, \end{cases} \quad (9)$$

$$j \in \phi, t \in \{t : P_j(t) \geq P_1\},$$

其总价格为  $\int_{P_1}^{P_2} \tilde{\pi}_j(y) m_j(y) dy$ , 而该商品的单位电能量价格为

$$\tilde{\pi}_j = \frac{\int_{P_1}^{P_2} \tilde{\pi}_j(y) m_j(y) dy}{\int_{P_1}^{P_2} m_j(y) dy}. \quad (10)$$

(6) 市场机制. 整个市场优化的目标, 即在式 (4) 表示的约束条件下使式 (3) 表示的社会福利最大化, 很显然该问题是一个关于  $P_j(t)$  ( $j \in \phi, 0 \leq t \leq T$ ) 的变分问题, 根据其最优性条件将得到其对偶变量 (影子价格)  $\lambda(t)$ .

在基于实时电价的机制中, 直接将  $\lambda(t)$  作为参与者  $j$  的市场价格  $\tilde{\pi}_j(t)$ , 使得  $\tilde{\pi}_j(t) = \lambda(t)$ , 此即市场均衡价格, 此时参与者的个体最优 (5) 与市场总体最优 (3) 是一致的.

在按负荷持续时间定价的机制中, 需要另外寻求参与者的市场价格  $\tilde{\pi}_j(m_j(y))$ , 并且使得所有  $\tilde{\pi}_j(m_j(y))$  ( $j \in \phi$ ) 相等, 即为市场均衡价格, 此时参与者的个体最优 (6) 与市场总体最优 (3) 是一致的. 下面将以具体模型的求解和算例分析来说明.

## 5 基于连续时间商品模型的电力市场模型求解

为求解和分析方便, 本文暂考虑发电侧单边竞价模型, 假设发电厂成本函数取为二次函数形式, 并且忽略网损, 此时式 (3) 和 (4) 的社会福利最大问题变为以下发电成本最小的问题, 即

$$\begin{aligned} \min C(P_1, P_2, \dots, P_n) &= \sum_{j=1}^n \int_0^T C_j(P_j(t)) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^T (a_j P_j(t)^2 + b_j P_j(t) + c_j) dt \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n P_j(t) = P_d(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

其中  $P_d(t)$  为  $t$  时刻的系统负荷.

首先求解带一个约束条件的变分问题 (11), 列出 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{cases} C'_1(P_1(t)) - \lambda(t) = 0, \\ C'_2(P_2(t)) - \lambda(t) = 0, \\ \vdots \\ C'_n(P_n(t)) - \lambda(t) = 0, \\ \sum_{j=1}^n P_j(t) - P_d(t) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

从上式第  $j$  个方程中我们能通过  $\lambda(t)$  来表示  $P_j(t), j = 1, \dots, n$ , 将  $P_1(t)$  到  $P_n(t)$  的表达式代入最后功率平衡方程, 即可求出  $\lambda(t)$ , 继而求出所有的  $P_1(t)$  到  $P_n(t)$ .

其次求解 Riemann 积分意义下的变分问题 (5), 暂不考虑功率约束条件限制, 把变分问题 (5) 看成无约束变分问题来求解, 并写出其 Euler-Lagrange 方程为

$$C'_j(P_j(t)) - \tilde{\pi}_j(t) = 0. \quad (13)$$

比较式 (12) 和 (13), 得到

$$\tilde{\pi}_j(t) = \lambda(t). \quad (14)$$

$\lambda(t)$  即市场均衡价格.

在成本函数取为二次函数形式时, 可以求得

$$\lambda(t) = C'_j(P_j(t)) = 2a_j P_j(t) + b_j = \frac{P_d(t)}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{2a_j}} + \frac{\sum_{j=1}^n \frac{b_j}{2a_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{2a_j}}, \quad (15)$$

体现出实时电价  $\lambda(t)$  与负荷曲线  $P_d(t)$  一致.

最后, 考虑 Lebesgue 积分意义下的变分问题 (6). 在负荷曲线单调增长和发电侧单边竞价的假设条件下, 式 (6) 可以写为如下形式:

$$\min N_j^L(P_j) = \int_{P_{\min}}^{P_{\max}} [(T - P_j^{-1}(y))C'_j(y) - \tilde{\pi}_j(y) m_j(y)] dy, \quad (16)$$

其中  $m_j(y) = m\{t : P_j(t) > y\}$  为函数值为  $y$  时对应的测度,  $\tilde{\pi}_j$  是按负荷持续时间定价系统下的价格, 它是测度的函数, 而在  $y$  点处对应的测度就是  $T - P_j^{-1}(y)$ ,

$$P_{\max} = \max_{t \in [0, T]} \{P(t)\}, \quad (17)$$

$$P_{\min} = \min_{t \in [0, T]} \{P(t)\}. \quad (18)$$

无论在 Lebesgue 积分下和 Riemann 积分下, 成本都是相同的, 即我们无论对  $x$  轴分划还是对  $y$  轴分划, 成本是相同的. 这里

$$\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} [T - P_j^{-1}(y)] C'_j(y) dy + C_j(P_{\min}) T$$

$$\begin{aligned} h=C_j(y) \int_{C_j(P_{\min})}^{C_j(P_{\max})} [T - P_j^{-1} C_j^{-1}(h)] dh + C_j(P_{\min})T \\ = \int_{t=0}^T C_j(P_j(t)) dt \end{aligned} \tag{19}$$

为成本.  $\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} (T - P_j^{-1}(y)) C_j'(y) dy$  为成本单调增长的部分 (可变成本的部分).  $\int_{P_{\min}}^{P_{\max}} \tilde{\pi}_j(y) m_j(y) dy$  为收入 (总收入减去基荷收入的部分).

在成本函数取为二次函数形式时, 由式 (15) 可知,  $P_j(t)$  为严格单调递增函数, 此时  $m_j(P_j(t)) = T - t$ . 我们可以做变量替换  $P_j(t) = y$ , 则式 (16) 转化为如下变分问题:

$$\begin{aligned} \min N_j^I(P_j) &= \int_0^T [(T - t) C_j'(P_j(t)) - \tilde{\pi}_j(P_j(t)) m_j(P_j(t))] P_j'(t) dt \\ &= \int_0^T [(T - t)(2a_j P_j(t) + b_j) - \tilde{\pi}_j(P_j(t)) (T - t)] P_j'(t) dt. \end{aligned} \tag{20}$$

写出其 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{aligned} 2a_j P_j'(t) (T - t) - \tilde{\pi}_j'(P_j(t)) P_j'(t) (T - t) \\ - \frac{d}{dt} [(T - t)(2a_j P_j(t) + b_j) - \tilde{\pi}_j(P_j(t)) (T - t)] = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

解关于  $\tilde{\pi}_j(P_j(t))$  的方程 (21), 即可得到价格函数  $\tilde{\pi}_j(P_j(t)) = 2a_j P_j(t) + b_j$ .

另一方面  $2a_j P_j(t) + b_j = \lambda(t)$  与  $j$  无关, 由此可以得到 (21) 的解与  $j$  无关, 则所有电厂的价格是相同的, 即

$$\pi_j(t) = \tilde{\pi}_j(P_j(t)) = \lambda(t). \tag{22}$$

由于测度  $m = 1 - t$ , 则按负荷持续时间定价的市场均衡价格  $\pi(m)$  为

$$\pi(m) = \pi_j(1 - m) = \lambda(1 - m). \tag{23}$$

为清晰起见, 下面用图示的方法来说明两种定价方式下的价格计算过程. 实时电价 (Riemann 积分) 的计算过程可用图 3(a) 来表示. 对负荷曲线竖着切条, 每一条的高度即为  $\sum_j P_j(t)$ , 宽度为  $dt$ , 价格为  $t$  点的实时价格  $\lambda(t)$ . 负荷持续时间价格 (Lebesgue 积分) 的计算过程可用图 3(b) 来表示. 对负荷曲线横着切片, 每一片的高度即为  $dy$ , 宽度为测度  $m_j(y)$ , 价格为  $y$  点的价格  $\tilde{\pi}_j(y) = \pi(y)$ . 变量替换  $P_j(t) = y$  后的负荷持续时间价格可用图 3(c) 来表示. 仍旧是对负荷曲线横着切片, 每一片的高度即为  $P_j'(t) dt$ , 宽度为测度  $T - t$ , 价格为点的价格  $\tilde{\pi}_j(p_j(t)) = \pi(p_j(t))$ .

## 6 算例分析

假设负荷单调增长, 考虑负荷曲线如下:

$$P_d(t) = 350 \times (1 + kt), \quad t \in [0, 1],$$

其中  $k$  取不同数值 (本例中  $k$  分别取 0.5, 1, 2, 3, 4) 来模拟不同负荷斜率.



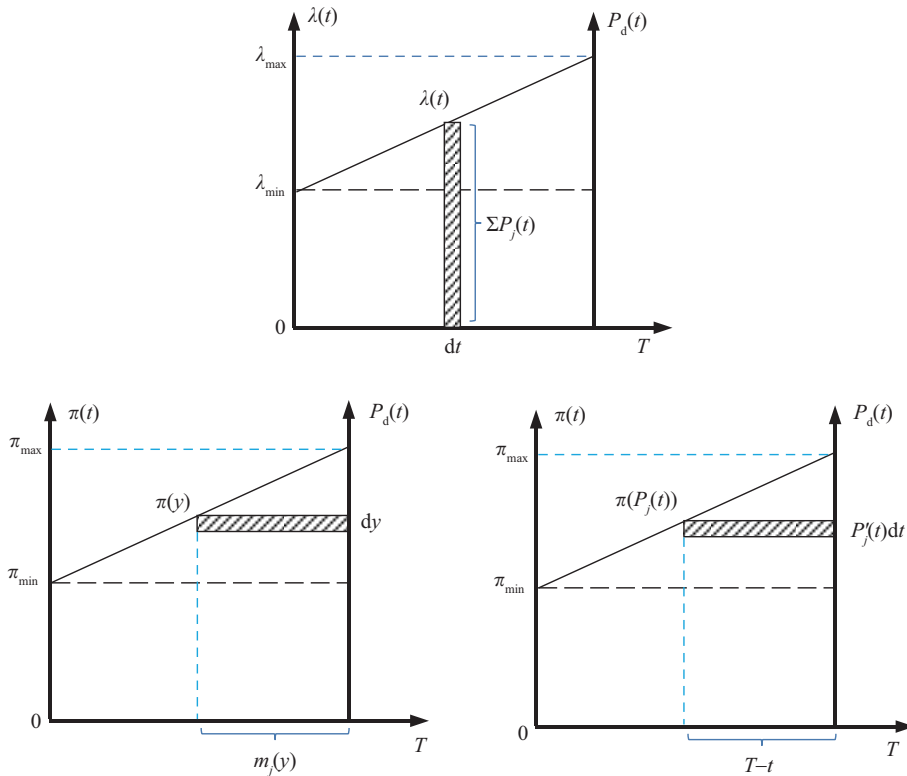


图 3 (网络版彩图) 不同定价方式下的价格计算示意图

Figure 3 (Color online) Schematic diagram of price calculation under different pricing methods. (a) Spot pricing; (b) load duration pricing; (c) load duration pricing with variable substitution

假设市场中有 3 个电厂, 成本依次相差 2 倍, 分别代表低、中、高成本 (基荷、腰荷、峰荷) 电厂, 成本函数如下 (取  $a = 0.001, b = 0.07, c = 0.2$ ):

$$C_1(P_1(t)) = \frac{a}{2}P_1(t)^2 + bP_1(t) + c,$$

$$C_2(P_2(t)) = aP_2(t)^2 + 2bP_2(t) + 2c,$$

$$C_3(P_3(t)) = 2aP_3(t)^2 + 4bP_3(t) + 4c.$$

由式 (12) 解得, 实时电价  $\lambda(t)$  与各电厂的负荷  $P_i(t)$  为

$$\lambda(t) = aP_1(t) + b = 2aP_2(t) + 2b = 4aP_3(t) + 4b,$$

$$P_1(t) = \frac{4}{7}P_d(t) + \frac{5b}{7a} = 250 + 200kt,$$

$$P_2(t) = \frac{2}{7}P_d(t) - \frac{b}{7a} = 90 + 100kt,$$

$$P_3(t) = \frac{1}{7}P_d(t) - \frac{4b}{7a} = 10 + 50kt.$$

$k$  取不同数值时的  $\lambda(t)$  如图 3(a) 所示.

可求得 3 个电厂的发电成本分别为

$$C_1 = \int_0^1 \left( \frac{a}{2}P_1(t)^2 + bP_1(t) + c \right) dt = 6.67k^2 + 32k + 48.95,$$

$$C_2 = \int_0^1 (aP_2(t)^2 + 2bP_2(t) + 2c) dt = 3.33k^2 + 16k + 21.1,$$

$$C_3 = \int_0^1 (2aP_3(t)^2 + 4bP_3(t) + 4c) dt = 1.67k^2 + 8k + 3.8.$$

(1) 实时电价下的收入及利润分析. 另外, 可计算得实时电价下 3 个电厂售电收入分别为

$$I_1^R = \int_{t=0}^1 \lambda(t) P_1(t) dt = 13.33k^2 + 57k + 80,$$

$$I_2^R = \int_{t=0}^1 \lambda(t) P_2(t) dt = 6.67k^2 + 25k + 28.8,$$

$$I_3^R = \int_{t=0}^1 \lambda(t) P_3(t) dt = 3.33k^2 + 9k + 3.2.$$

计算得各电厂利润分别如下:

$$N_1^R(P_1) = 6.66k^2 + 25k + 31.05,$$

$$N_2^R(P_2) = 3.34k^2 + 9k + 7.7,$$

$$N_3^R(P_3) = 1.66k^2 + k - 0.6.$$

(2) 按负荷持续时间定价方式下的市场价格、收入及利润分析. 由于测度  $m = 1 - t$ , 则  $\bar{\pi}_j(m) = \bar{\pi}_j(1 - t) = 0.32(1 - m) + 0.32$ . 将数据带入式 (22), 我们有

$$\bar{\pi}_j(P_j(t)) = 2a_j P_j(t) + b_j = 0.32 + 0.2kt, \quad t \in [0, 1], \quad j = 1, 2, 3,$$

又有

$$P_1^{-1}(y) = \frac{y - 250}{200k}, \quad P_2^{-1}(y) = \frac{y - 90}{100k}, \quad P_3^{-1}(y) = \frac{y - 10}{50k},$$

则

$$\bar{\pi}_1(y) = 0.32 + 0.2k \frac{y - 250}{200k}, \quad y \in [250, 250 + 200k],$$

$$\bar{\pi}_2(y) = 0.32 + 0.2k \frac{y - 90}{100k}, \quad y \in [90, 100k + 90],$$

$$\bar{\pi}_3(y) = 0.32 + 0.2k \frac{y - 10}{50k}, \quad y \in [10, 10 + 50k].$$

由于

$$m_1(y) = \frac{200k + 250 - y}{200k}, \quad y \in [250, 250 + 200k],$$

$$m_2(y) = \frac{100k + 90 - y}{100k}, \quad y \in [90, 100k + 90],$$

$$m_3(y) = \frac{50k + 10 - y}{50k}, \quad y \in [10, 10 + 50k].$$

将上述价格函数  $\bar{\pi}_j(P_j(t))$  代入到式 (16) 中, 可以得到三家电厂按负荷持续时间定价下的总收入:

$$I_1^L = \int_{250}^{250+200k} \left[ \left( 0.32 + 0.2k \times \frac{y - 250}{200k} \right) \left( 1 - \frac{y - 250}{200k} \right) \right] dy + \int_0^{250} 0.32 dy$$

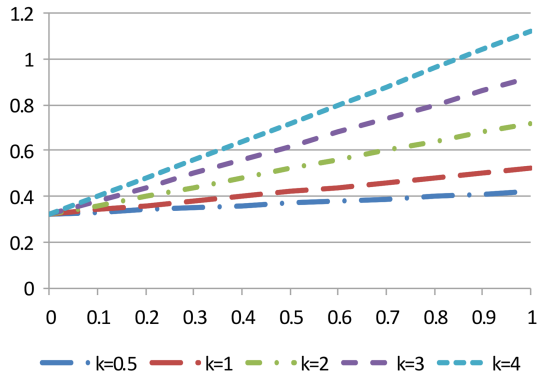


图 4 (网络版彩图) 不同负荷斜率下的价格变化  
**Figure 4** (Color online) Price changes under different load slopes

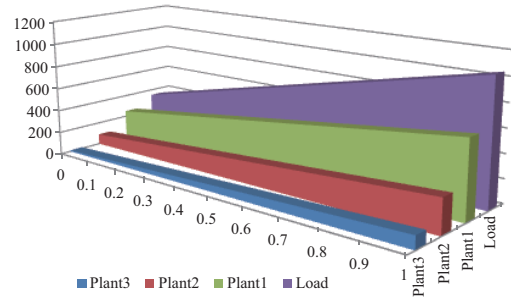


图 5 (网络版彩图)  $k = 2$  时的系统负荷及电厂调度计划  
**Figure 5** (Color online) System load and power plant dispatching plan at  $k = 2$

$$= 6.67k^2 + 32k + 80,$$

$$I_2^L = \int_{90}^{90+100k} \left[ \left( 0.32 + 0.2k \times \frac{y-90}{100k} \right) \left( 1 - \frac{y-90}{100k} \right) \right] dy + \int_0^{90} 0.32 dy$$

$$= 3.33k^2 + 16k + 28.8,$$

$$I_3^L = \int_{10}^{10+50k} \left[ \left( 0.32 + 0.2k \times \frac{y-10}{50k} \right) \left( 1 - \frac{y-10}{50k} \right) \right] dy + \int_0^{10} 0.32 dy$$

$$= 1.67k^2 + 8k + 3.2.$$

计算得 3 个电厂利润分别为

$$N_1^L(P_1) = 31.05, \quad N_2^L(P_2) = 7.7, \quad N_3^L(P_3) = -0.6.$$

该利润与实时电价下  $k = 0$  时的利润相同, 即利润产生于基荷部分, 而其余腰荷和峰荷部分的收入恰好覆盖成本, 说明定价的准确性 (假设完全按成本报价). 由于仍然是统一边际价格结算, 基荷部分成本最高的第 3 个电厂的收入不能完全覆盖发电成本, 利润为负值, 但这是可以理解的, 在实际市场中可以通过其他方式 (例如上抬费用) 来解决.

图 4 为不同负荷斜率下的价格变化情况. 从图 4 可以看出, 由于系统负荷是随时间线性增长的, 实时电价也是随时间线性增长的. 而在按负荷持续时间定价方式下, 测度越小 (负荷持续时间越短), 电价越高. 从电力系统运行的角度, 负荷持续时间越短, 对电力系统冲击越大, 需要更高成本的峰荷机组与之匹配, 电价更高是合理的.

图 5 中绘出  $k = 2$  时的系统负荷曲线及 3 个电厂的调度计划. 由于两种定价方式下 3 个电厂的调度计划是相同的, 发电成本也是相同的, 分别为 139.63, 66.42, 26.48, 3 个电厂的总发电成本为 232.52. 在实时电价方式下, 3 个电厂利润分别为 134.33, 39.06, 8.04, 而市场总购电费用为 413.95, 总利润为 181.43, 市场总利润率为 78% (总利润 / 总成本  $\times 100$ ). 在按负荷持续时间定价方式下, 3 个电厂利润

分别为 31.05, 7.7, -0.6, 而市场总购电费用为 270.67, 总利润为 38.15, 市场总利润率为 16.4% (总利润 / 总成本  $\times 100$ ).

从算例分析可以看出, 按负荷持续时间定价的市场价格能准确反映真实发电成本, 减小市场总购电费用, 总利润率比较合理, 市场效率更高. 由于两种定价方式各有优缺点, 以后的研究中将考虑两者定价方式相结合的市场机制.

## 7 结论

当前的电力市场改革急需电能商品及市场交易的基础理论研究. 本文在分析国外基于实时电价 (spot pricing) 理论的电力现货市场缺陷的基础上, 提出连续时间电能商品模型, 包括实时电价下和按负荷持续时间定价的方式下的电能商品模型, 并建立了基于社会福利最大化的电力市场模型; 进一步将实时电价下和按负荷持续时间定价的市场优化模型与数学上的 Riemann 积分和 Lebesgue 积分相对应, 基于各自的 Euler-Lagrange 方程求得市场均衡解, 通过严格的数学推导证明了按负荷持续时间定价的可行性; 最后以一个算例验证了所提理论和方法的合理性. 本文所提的理论和方法有望为国内外电力市场建设提供全新的思路和理论基础.

## 参考文献

- 1 Schweppe F C, Caramanis M C, Tabors R D, et al. Spot Pricing of Electricity. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1988
- 2 Bohn R E. Spot pricing of public utility services. Dissertation for Ph.D. Degree. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1982
- 3 Caramanis M, Bohn R E, Schweppe F C. Optimal spot pricing: practice and theory. IEEE Trans Power Apparatus Syst, 1982, 101: 3234-3245
- 4 Chen H Y. Electricity cost analysis based on modified lagrangian relaxation optimization. Dissertation for Ph.D. Degree. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2000 [陈皓勇. 基于改进拉格朗日松弛法的电能成本分析. 博士学位论文. 西安: 西安交通大学, 2000]
- 5 Perry R. Re: Secretary of Energy's Direction That the Federal Energy Regulatory Commission Issue Grid Resiliency Rules Pursuant to the Secretary's Authority Under Section 403 of the Department of Energy Organization Act. Washington, September 28, 2017. <https://energy.gov/sites/prod/files/2017/09/f37/Secretary%20Rick%20Perry%27s%20Letter%20to%20the%20Federal%20Energy%20Regulatory%20Commission.pdf>
- 6 U.S. Department of Energy (DOE). Grid Resiliency Pricing Rule. Docket No. RM17-3-000. 2017. <https://www.energy.gov/downloads/notice-proposed-rulemaking-grid-resiliency-pricing-rule>
- 7 U.S. Department of Energy (DOE). Staff Report to the Secretary on Electricity Markets and Reliability. 2017. <https://energy.gov/downloads/download-staff-report-secretary-electricity-markets-and-reliability>
- 8 Hogan W W. PJM Price Formation. Letter to Senior Vice President Operations & Markets of PJM Interconnection. 2017. <http://www.pjm.com/-/media/library/reports-notices/special-reports/20171115-proposed-enhancements-to-energy-price-formation.ashx>
- 9 Elmaghraby W, Oren S S. The efficiency of multi-unit electricity auctions. Energy J, 1999, 20: 89-116
- 10 Wang X F. Block bidding model based power market. Proc CSEE, 2001, 21: 1-6 [王锡凡. 分段竞价的电力市场. 中国电机工程学报. 2001, 21: 1-6]
- 11 程其襄, 张奠宙, 魏国强, 等. 实变函数与泛函分析基础 (第三版). 北京: 高等教育出版社, 2010

# Electricity pricing theory based on continuous time commodity model

Haoyong CHEN<sup>1\*</sup> & Lijia HAN<sup>2</sup>

1. *Institute of Power Economics and Electricity Markets, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China;*

2. *Mathematical and Physical Science School, North China Electric Power University, Beijing 102206, China*

\* Corresponding author. E-mail: eehychen@scut.edu.cn

**Abstract** The theory of spot pricing forms the basis of power market design in several countries. However, this theory has two major drawbacks. First, it is based on the traditional hourly scheduling/dispatch model, it ignores the critical influence of time continuity in the electric power production/consumption on cost and power system operation, and it fails to address intertemporal constraints. The second drawback is that it assumes that electric products are homogeneous in the same dispatch period and cannot distinguish among the base, intermediate, and peak load powers with different technical and economic characteristics. This study aims to present a continuous time commodity model of electricity, which comprise spot pricing and load duration pricing methods, to overcome the abovementioned shortcomings of the spot pricing theory. Market optimization models in traditional electricity market theories were then changed accordingly from a static optimization problem to a functional optimization problem. The feasibility of load duration pricing was validated by strict mathematical derivation. The proposed theory and methods will provide new concepts and theoretical foundation for the development of electric power markets globally and in China.

**Keywords** electricity markets, spot pricing, functional optimization



renewable energy & smart grids, power economics & electricity markets, and integrated energy systems.

**Haoyong CHEN** received his B.S., M.S., and Ph.D. degrees in electrical engineering from Xi'an Jiaotong University, Xi'an, China, in 1995, 1997, and 2000, respectively. He is currently working as a professor at the School of Electric Power, South China University of Technology, Guangzhou, China. His current research interests include power system planning, operation and control,



ods in power economics & electricity markets, among others.

**Lijia HAN** received her Ph.D. degree in mathematics from the Peking University, Beijing, China, in 2009. She received her B.S. degree from Jilin University, Jilin, China, in 2004. She is currently working as a professor at the School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing, China. Her current research interests include applied partial differential equation and mathematical meth-