



自适应控制的虚拟等价系统理论及仿真验证

张维存^{1*}, 魏伟²

1. 北京科技大学自动化学院, 北京 100083

2. 北京工商大学计算机与信息工程学院, 北京 100048

* 通信作者. E-mail: weicunzhang@ustb.edu.cn

收稿日期: 2017-12-24; 接受日期: 2018-02-14; 网络出版日期: 2018-07-12

国家自然科学基金 (批准号: 61520106010, 61741302) 资助项目

摘要 基于虚拟等价系统理论统一分析和理解针对线性被控对象的, 由任意控制策略和任意参数估计算法构成的自校正控制系统的稳定性、收敛性, 给出了各种情况下便于工程应用的判据, 这些判据的共同特点是不需要参数估计的收敛性. 考虑到模型参考自适应控制可视为自校正控制的一种特殊情况, 因此, 本文方法和结论也可用于模型参考自适应控制系统的稳定性和收敛性分析. 最后, 用仿真结果验证了虚拟等价系统理论的有效性.

关键词 自适应控制, 稳定性, 收敛性, 虚拟等价系统

1 引言

自适应控制系统是一类特定的复杂系统, 虽然有众多的研究成果, 但是对这类复杂控制系统的认识仍然不够充分, 距离指导工程实践仍有差距. 一个自适应控制系统能正常工作的前提是其稳定性和收敛性. 但分析和理解自适应控制系统的稳定性和收敛性并非易事, 特别是针对非最小相位对象的自适应控制系统的分析尤其复杂和困难. 自适应控制主要包括自校正控制和模型参考自适应控制, 其中, 自校正控制的思想源于著名控制学者 Kalman^[1], 而首先将其实用化的工作属于 Åström 和 Wittenmark^[2], 此后, 围绕自校正控制系统的稳定性和收敛性, 很多学者做出了出色的工作, 文献 [3] 将 Åström-Wittenmark 自校正调节器中的最小二乘辨识算法改为随机逼近算法, 然后证明了其稳定性和收敛性; 文献 [4, 5] 证明了原始的 Åström-Wittenmark 自校正调节器的稳定性和收敛性, 文献 [6, 7] 则提出“修正的最小二乘算法”, 也得到了相应的自校正调节器的稳定性和收敛性.

上述结果均是针对最小相位对象的, 其共同特点是不需要参数估计的收敛性. 若被控对象是非最小相位的, 则不能采用最小方差类型的自校正算法进行控制, 而需要采用极点配置等控制策略, 相应的稳定性和收敛性分析比最小方差类型的自适应控制系统更加困难, 现有的结果基本上都是在参数估计

引用格式: 张维存, 魏伟. 自适应控制的虚拟等价系统理论及仿真验证. 中国科学: 信息科学, 2018, 48: 947-962, doi: 10.1360/N112017-00282
Zhang W C, Wei W. Virtual equivalent system theory for adaptive control and simulation verification (in Chinese). Sci Sin Inform, 2018, 48: 947-962, doi: 10.1360/N112017-00282

收敛 (可以收敛到真值或非真值) 的前提下得到的, 也有一些结果没有要求参数估计收敛, 但是只能保证系统的稳定性和鲁棒性, 而不能保证系统的收敛性.

针对非最小相位确定性被控对象, 文献 [8, 9] 通过引入附加激励信号证明了极点配置自校正控制的稳定性、收敛性; 不引入附加激励信号, 而是通过估计模型的修正, 使其满足可控性条件, 也可以得到极点配置自校正控制的稳定性和收敛性^[10], 文献 [11, 12] 用“关键性技术引理”分析了极点配置算法的稳定性、收敛性; 针对非最小相位随机被控对象, 文献 [13, 14] 采用了附加“衰减激励信号”的方法, 来保证随机极点配置自校正控制的稳定性和收敛性, 而文献 [15, 16] 则给出了不需要外加激励信号, 而是采用自收敛的加权最小二乘参数估计算法来保证随机极点配置自校正控制的稳定性和收敛性, 文献 [17~20] 分析了自适应解耦控制系统的稳定性和收敛性, 文献 [21] 基于李亚普诺夫函数 (Lyapunov function) 分析了针对最小相位对象和某类非最小相位对象的广义最小方差自校正控制的稳定性和收敛性. 相关成果还有很多, 难以一一列举, 近年来, 有关稳定性和收敛性的工作较少, 原因是很多自适应控制方案虽然没有理论分析结果, 但在实际应用中都有很好的效果^[22].

众所周知, 各种参数估计算法和各种控制策略可以任意组合产生相应的自适应控制方案, 而且还会有新的方案不断出现, 因此, 很难逐一具体分析每一种自适应控制系统的稳定性和收敛性. 为此, 人们一直期待着能找到统一的稳定性、收敛性分析方法^[23~27], 然而, 尽管有一些零星结果出现^[28~31], 但是人们期待的统一分析方法和理论仍然有待探索. 虚拟等价系统 (virtual equivalent system, VES) 的概念和相应的分析方法正是在这样的背景下产生的^[32~36], 本文是对前期工作特别是文献 [35] 的归纳、完善和扩展, 同时给出了虚拟等价系统理论的仿真验证, 本文目的是使虚拟等价系统理论更加便于工程应用, 也就是减少或放松稳定性、收敛性判据所要求的条件, 主要是取消对受控对象阶次信息的直接依赖、放松对参数估计误差的要求, 以及取消极点配置自校正控制策略对参数估计收敛的依赖.

概括起来, 虚拟等价系统理论带来的好处是: 不需要具体的控制策略和参数估计算法, 而只需要它们的一些性质就可以判断自校正控制系统的稳定性和收敛性, 因此有望为设计新算法及工程实践提供事前的指导. 究其根源, 是因为虚拟等价系统将自校正控制系统的结构复杂性 (时变非线性) 转化为补偿信号的复杂性 (时变非线性), 从而带来了分析上的便利.

2 确定性自校正控制系统的虚拟等价系统及结论

考虑一个一般的单输入单输出确定性被控对象 P , 可以为最小相位或者非最小相位系统.

$$P: A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k), \quad (1)$$

其中, $A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_naq^{-na}$, $B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_nbq^{-nb}$, $d \geq 1$; $na \geq 1$; $nb \geq 1$. 相应的自校正控制系统如图 1 所示, 其中, $y_r(k)$, $u(k)$, $y(k)$ 分别为系统的参考输入信号、控制信号和输出信号. 控制器 $C(k)$ 可以用任何适当的控制策略进行设计, 参数估计算法也可以任意选择, 只要满足一定条件即可 (细节见后面的定理). 由于本文的目的是稳定性、收敛性的统一分析, 故省略了参数估计和控制器设计的具体细节.

进一步, 估计参数记为 $\hat{\theta}(k)$, 对应的模型记为 $P_m(k)$, 模型 $P_m(k)$ 的阶次可以低于被控对象 P 的阶次, 对模型阶次的要求, 隐含在对参数估计误差的要求之中. 参数估计误差记为

$$e(k) = y(k) - \phi^T(k-d)\hat{\theta}(k), \quad (2)$$

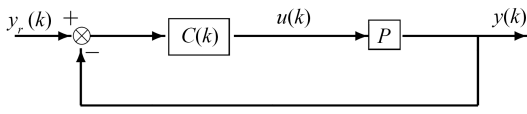


图 1 自校正控制系统

Figure 1 Self-tuning control system

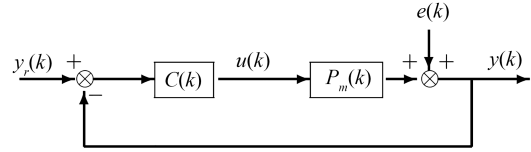


图 2 确定性虚拟等价系统 I

Figure 2 Deterministic VES I

其中, $\phi^T(k-d)$ 为回归向量, 其一般形式为

$$\phi^T(k-d) = [y(k-1), \dots, u(k-d), \dots]. \quad (3)$$

控制律可以一般性地记为

$$u(k) = \phi_c^T(k)\theta_c(k), \quad (4)$$

其中, $\theta_c(k) = f(\hat{\theta}(k))$ 为 $C(k)$ 的参数向量; $\phi_c^T(k)$ 为控制器的回归向量; $f(\cdot)$ 是由控制策略决定的映射. $\phi_c^T(k)$ 的一般形式为

$$\phi_c^T(k) = [y_r(k), y_r(k-1), \dots, y(k), y(k-1), \dots, u(k-1), u(k-2), \dots], \quad (5)$$

其中, $y_r(k)$ 为有界参考输入, $\phi_c^T(k)$ 的具体形式取决于具体的控制器设计方法.

不难看出, 图 1 中被控对象的输出 $y(k)$ 可以用 $P_m(k)$ 的输出和 $e(k)$ 来取代, 即 $y(k) = e(k) + \phi^T(k-d)\hat{\theta}(k)$. 因此, 可以构造虚拟等价系统如图 2 所示.

若参数估计满足条件: $\|\hat{\theta}(k)\| \leq M < \infty$, $\|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-l)\| \rightarrow 0$, 其中, l 为有限值, 则可以进一步构造“慢切换”虚拟等价系统 (如图 3 所示), 图中,

$$e_i(k) = y(k) - \phi^T(k-d)\hat{\theta}(k) + \phi^T(k-d)[\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(t_k)] = e(k) + \phi^T(k-d)[\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(t_k)], \quad (6)$$

$$\Delta u'(k) = \phi_c^T(k)\theta_c(k) - \phi_c^T(k)\theta_c(t_k). \quad (7)$$

$\theta_c(t_k) = f(\hat{\theta}(t_k))$ 为控制器 $C(t_k)$ 的参数向量或参数矩阵. 其中, t_k 为 k 的子序列, t_k 的选取是为了形成“慢切换”系统的需要, 具体选取方法可参见文献 [32].

分析图 3 所示的“慢切换”虚拟等价系统, 可以得到如下判据.

定理 1 针对确定性被控对象的自校正控制系统, 若

- (1) $\|\hat{\theta}(k)\| \leq M < \infty$; $\|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-l)\| \rightarrow 0$, l 为有限值;
- (2) $e(k) = o(\alpha + \|\phi(k-d)\|)$, $0 < \alpha < \infty$;
- (3) 自适应控制器按确定性等价原则设计, 且满足稳定性和跟踪性要求;
- (4) 从估计参数到控制器参数的映射, 即 $f(\hat{\theta}(k))$, 为 $\hat{\theta}(k)$ 的一致连续函数,

则自校正控制系统是稳定的和收敛的.

注 1 条件 (1) 并不意味着参数估计收敛, 而只是意味着参数估计有界和慢时变.

注 2 条件 (2) 是常见的确定性自校正控制系统参数估计算法都能满足的性质, 并不需要持续激励条件, 但是就目前的参数估计研究成果来说, 还是需要知道被控对象的结构信息.

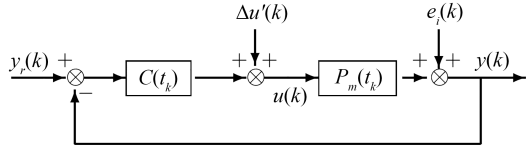


图 3 虚拟等价系统 II
Figure 3 Deterministic VES II

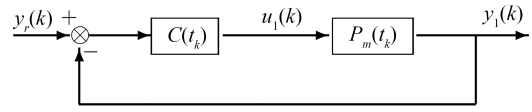


图 4 分解子系统 1
Figure 4 Subsystem 1 of deterministic VES II

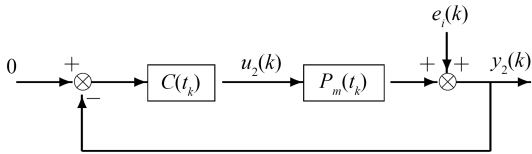


图 5 分解子系统 2
Figure 5 Subsystem 2 of deterministic VES II

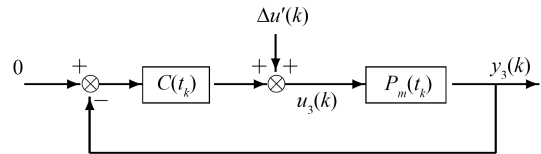


图 6 分解子系统 3
Figure 6 Subsystem 3 of deterministic VES II

注3 条件 (3) 意味着在图 2 中, 令 $e(k) = 0$, 同时“冻结” k , 这样得到的定常系统是稳定的并满足跟踪性要求. 条件 (3) 还涉及到估计模型的可控性问题, 已经有各种解决办法, 如估计参数投影、修正等.

注4 在条件 (1) 之下, 条件 (4) 中 $f(\hat{\theta}(k))$ 实际上可以放松为连续映射, 常见的极点配置控制策略在估计模型可控时即满足这一要求, 细节参见文献 [26] 的 11.4 小节, 并注意满秩矩阵求逆为连续映射.

证明 第一步, 将图 3 所示的虚拟等价系统进行分解, 得到 3 个子系统, 分别见图 4~6. 在各相关系统零初始条件下可以证明分解前后系统输入输出的等价性 [见附录 A 引理 A1], 即

$$y(k) = y_1(k) + y_2(k) + y_3(k), \quad u(k) = u_1(k) + u_2(k) + u_3(k). \quad (8)$$

定理 1 条件 (1) 和 (3) 保证图 4 所示系统是一个稳定的“慢切换”控制系统 [37, 38], 因此有

$$\|u_1(k)\| = O(1), \quad \|y_1(k)\| = O(1). \quad (9)$$

第二步, 由定理 1 的条件 (2) 和 (4) 以及 (6) 和 (7) 两式, 可以得到两个补偿信号的性质:

$$e_i(k) = o(\alpha + \|\phi(k-d)\|), \quad 0 < \alpha < \infty; \quad \Delta u'(k) = o(\beta + \|\phi_c(k)\|), \quad 0 < \beta < \infty. \quad (10)$$

为便于证明, 定义一个新的变量 $\tilde{\phi}(k)$, 其元素是 $\phi(k-d)$ 和 $\phi_c(k)$ 的并集, 即

$$\tilde{\phi}(k) = [y(k), y(k-1), \dots, u(k-1), \dots, y_r(k), \dots]. \quad (11)$$

类似地, 在 3 个子系统中分别定义 $\tilde{\phi}_1(k)$, $\tilde{\phi}_2(k)$, 和 $\tilde{\phi}_3(k)$:

$$\tilde{\phi}_1(k) = [y_1(k), \dots, u_1(k-1), \dots, y_r(k), \dots], \quad (12)$$

$$\tilde{\phi}_2(k) = [y_2(k), \dots, u_2(k-1), \dots, 0, \dots], \quad (13)$$

$$\tilde{\phi}_3(k) = [y_3(k), \dots, u_3(k-1), \dots, 0, \dots]. \quad (14)$$

于是有 $\|\phi_c(k)\| = O(\|\tilde{\phi}(k)\|)$, $\|\phi(k-d)\| = O(\|\tilde{\phi}(k)\|)$, $\tilde{\phi}(k) = \tilde{\phi}_1(k) + \tilde{\phi}_2(k) + \tilde{\phi}_3(k)$. 从而 (10) 式可以进一步表示为

$$e_i(k) = o(\alpha + \|\tilde{\phi}(k)\|), \quad \Delta u'(k) = o(\beta + \|\tilde{\phi}(k)\|). \quad (15)$$

由于子系统 2 和 3 均为稳定系统, 所以有^[39]

$$y_2(k) = o(\alpha + \|\tilde{\phi}(k)\|), \quad u_2(k) = o(\alpha + \|\tilde{\phi}(k)\|), \quad (16)$$

$$y_3(k) = o(\beta + \|\tilde{\phi}(k)\|), \quad u_3(k) = o(\beta + \|\tilde{\phi}(k)\|). \quad (17)$$

第三步, 证明稳定性, 由

$$y(k) = y_1(k) + y_2(k) + y_3(k) = y_1(k) + o(\alpha + \beta + \|\tilde{\phi}(k)\|), \quad (18)$$

$$u(k) = u_1(k) + u_2(k) + u_3(k) = u_1(k) + o(\alpha + \beta + \|\tilde{\phi}(k)\|), \quad (19)$$

可以得到

$$\|\tilde{\phi}_2(k)\| = o(\alpha + \|\tilde{\phi}(k)\| + \dots + \|\tilde{\phi}(k-s)\|), \quad (20)$$

$$\|\tilde{\phi}_3(k)\| = o(\beta + \|\tilde{\phi}(k)\| + \dots + \|\tilde{\phi}(k-s)\|). \quad (21)$$

s 为有限正整数. 又由 (9) 式知 $\|\tilde{\phi}_1(k)\| < \infty$, 将 $\tilde{\phi}_2(k)$, $\tilde{\phi}_3(k)$ 看成一个变量, 由引理 A2 知道 $\|\tilde{\phi}(k)\|$ 必有界, 进而 $\|\phi(k-d)\|$ 必有界. 稳定性得证.

第四步, 证明收敛性. 首先, 基于定理 1 条件 (3), 用多李亚普诺夫函数 (multiple Lyapunov function) 方法可以证明图 4 所示子系统的跟踪特性^[32], 即 $y_1(k) \rightarrow y_r(k)$, 进一步由 (18) 式及 $\|\tilde{\phi}(k)\|$ 有界, 得到 $y(k) \rightarrow y_1(k) \rightarrow y_r(k)$.

若被控对象存在干扰或非线性因素或采用低阶模型, 则定理 1 所要求的参数估计条件难以满足, 这种情况下, 确定性自校正控制系统的收敛性难以保证, 但有如下稳定性结论.

推论 1 针对确定性被控对象 P 的自校正控制系统, 若

(1) $\|\hat{\theta}(k)\| \leq M < \infty$; $\|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-l)\| \rightarrow 0$, l 为有限值;

(2) $e(k) \leq M' < \infty$;

(3) 自适应控制器按确定性等价原则设计, 且满足稳定性和跟踪性要求;

(4) 从估计参数到控制器参数的映射, 即 $f(\hat{\theta}(k))$, 为 $\hat{\theta}(k)$ 的一致连续函数,

则自校正控制系统是稳定的.

证明 过程同定理 1 的证明类似, 细节省略.

若被控对象是最小相位系统, 则可以按一步超前 (相当于随机情况下的最小方差) 策略设计相应的自校正控制系统^[11], 这种特殊情况下, 我们采用更为简单的虚拟等价系统, 如图 7 所示, 其中 C 为按确定性等价原则, P 所对应的一步超前控制器, 可以称之为理想控制器. $\Delta u(k)$ 为自校正控制器 $C(k)$ 与理想控制器 C 之间的输出误差, 即 $\Delta u(k) = u(k) - u_0(k)$. 虽然我们不知道 P 和 C 的具体参数, 但是由于一步超前控制的特性, 我们能够找到 $\Delta u(k)$ 和参数估计误差 $e(k)$ 之间的关系, 见 (22) 式, 使得我们可以方便地分析一步超前自校正控制系统的稳定性和收敛性.

相应地, 有如下结论.

定理 2 针对最小相位对象的一步超前自校正控制系统, 若满足如下条件:

(1) $b_0 \neq 0$, $\hat{b}_0 \neq 0$;

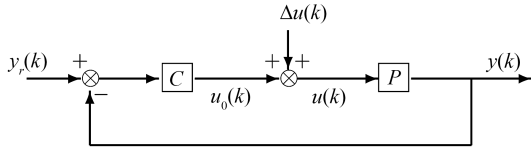


图 7 一步超前自校正控制的虚拟等价系统

Figure 7 VES for one-step-ahead STC (self-tuning control)

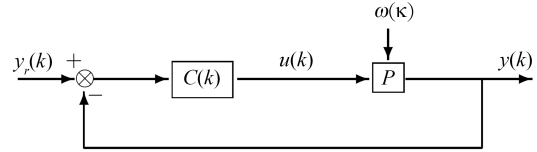


图 8 随机自校正控制系统

Figure 8 Stochastic self-tuning control system

$$(2) e(k) = o(\alpha + \|\phi(k-d)\|), 0 < \alpha < \infty,$$

则自校正控制系统是稳定的和收敛的.

注5 $\hat{b}_0 \neq 0$ 是为了保证一步超前自校正控制律的存在性, 可以对 b_0 的估计做适当修正, 以满足该条件, 细节可参见文献 [4,5]. 目前来看, 要保证参数估计误差满足条件 (2), 尚需知道被控对象的结构信息.

证明思路 首先, 我们分析图 7 中 $\Delta u(k)$ 的性质, 其实对象结构信息未知情况下的 $\Delta u(k)$ 与对象结构信息已知情况下的性质是一样的, 仿照文献 [32] 的推导方法, 可以得到

$$\Delta u(k) = \frac{1}{b_0} [y(k) - \phi^T(k-d)\hat{\theta}(k)] = O(\|e(k)\|). \quad (22)$$

文献 [32] 在上式的推导过程中差了一个负号, 但并不影响结论. 进一步考虑到定理 2 条件 (2) 得到

$$\Delta u(k) = o(\alpha + \|\phi(k-d)\|), \quad 0 < \alpha < \infty. \quad (23)$$

接下来, 将图 7 所示的系统进行分解, 然后用反证法得到最终结论, 细节类似定理 1 的证明过程.

若被控对象存在干扰或非线性因素或采用低阶模型导致不能满足定理 2 中的条件 (2), 但是能保证参数估计误差有界, 则有如下稳定性结论 (证明过程类似定理 2, 细节省略).

推论2 针对最小相位对象的一步超前自校正控制系统, 若满足如下条件:

- (1) $b_0 \neq 0, \hat{b}_0 \neq 0$;
- (2) $e(k) \leq M' < \infty$,

则自校正控制系统是稳定的.

3 随机自校正控制系统的虚拟等价系统及结论

考虑一个一般的单输入单输出随机被控对象 P , 可以是最小相位或者非最小相位系统.

$$P: A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + \omega(k), \quad (24)$$

其中, $A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na}$, $B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb}$, $d \geq 1, na \geq 1, nb \geq 1$. 为了叙述和理解上的方便, 本文仅考虑随机部分为白噪声的情况, 相应的自校正控制系统如图 8 所示, 其中 $C(k)$ 可以用任何适当的控制策略进行设计, 参数估计算法也可以任意选择, $\omega(k)$ 为白噪声, 其他变量符号同确定性系统图 1. 此外, 需要说明的是, 本节的极限运算都是在概率 1 的意义下进行的.

与确定性情况类似, 首先构造随机自校正控制系统 (图 8) 的虚拟等价系统, 如图 9 所示, 其中

$$e(k) = y(k) - \phi^T(k-d)\hat{\theta}(k) - \omega(k). \quad (25)$$

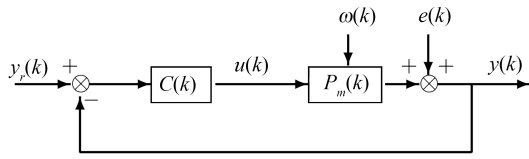


图 9 随机虚拟等价系统 I
Figure 9 Stochastic VES I

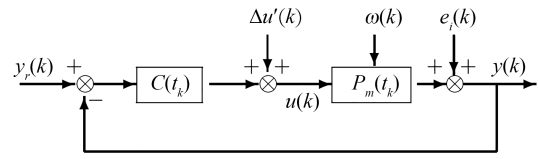


图 10 随机虚拟等价系统 II
Figure 10 Stochastic VES II

模型 $P_m(k)$ 的阶次可以低于被控对象 P 的阶次, 对模型阶次信息的要求隐含在对参数估计误差的要求之中.

若参数估计满足下列条件: $\|\hat{\theta}(k)\| \leq M < \infty$, $\|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-l)\| \rightarrow 0$, 其中 l 为有限值, 则可以进一步构造“慢切换”虚拟等价系统 (如图 10 所示), 图中,

$$e_i(k) = y(k) - \phi^T(k-d)\hat{\theta}(k) - \omega(k) + \phi^T(k-d)[\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(t_k)] = e(k) + \phi^T(k-d)[\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(t_k)], \quad (26)$$

$$\Delta u'(k) = \phi_c^T(k)\theta_c(k) - \phi_c^T(k)\theta_c(t_k). \quad (27)$$

其中, $\theta_c(k)$ 为控制器 $C(k)$ 的参数向量, $\theta_c(t_k)$ 为控制器 $C(t_k)$ 的参数向量. t_k 的选取同确定性情况, 依然是为了形成“慢切换”的需要.

分析图 10 所示的随机“慢切换”虚拟等价系统, 得到如下判据.

定理3 针对上述随机自校正控制系统, 若

- (1) $\|\hat{\theta}(k)\| \leq M < \infty$; $\|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-l)\| \rightarrow 0$, l 为有限值;
- (2) $\sum_{k=1}^n [e(k)]^2 = o(\alpha + \sum_{k=1}^n \|\phi(k-d)\|^2)$, $0 < \alpha < \infty$;
- (3) 自适应控制器按确定性等价原则设计, 且满足稳定性和跟踪性要求;
- (4) 从估计参数到控制器参数的映射, 即 $f(\hat{\theta}(k))$, 为 $\hat{\theta}(k)$ 的一致连续函数,

则自校正控制系统是稳定的和收敛的.

注6 条件 (2) 是常规的随机自校正控制系统参数估计算法都能满足的性质, 并不需要持续激励条件, 但就目前参数估计的研究成果, 尚需要知道被控对象的结构信息.

注7 条件 (3) 意味着在图 9 中, 令 $e(k) = 0$, 同时“冻结” k , 这样得到的定常系统是稳定的并满足跟踪性要求. 条件 (3) 还涉及到估计模型的可控性问题, 已经有各种解决办法, 如估计参数投影、修正等.

证明 第一步, 将图 10 所示的虚拟等价系统进行分解, 得到 3 个子系统, 分别见图 11~13. 在各相关系统零初始条件下, 可以证明分解前后系统输入输出的等价性 (细节见引理 A3), 即

$$y(k) = y_1(k) + y_2(k) + y_3(k), \quad u(k) = u_1(k) + u_2(k) + u_3(k). \quad (28)$$

定理 3 条件 (1) 和 (3) 保证图 11 所示系统是一个稳定的“慢切换”随机控制系统, 因此有^[40~42]

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ([y_1(k)]^2 + [u_1(k)]^2) < \infty, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_1(k) - y_r(k)]^2 < \infty. \quad (29)$$

第二步, 与确定性情况类似, 定义 $\tilde{\phi}(k)$, 其元素是 $\phi(k-d)$ 和 $\phi_c(k)$ 的并集, 即

$$\tilde{\phi}(k) = [y(k), y(k-1), \dots, u(k-1), \dots, y_r(k), \dots]. \quad (30)$$

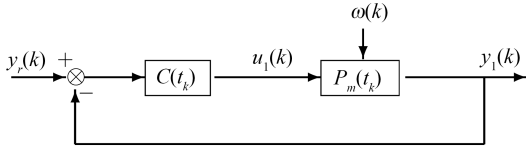


图 11 随机虚拟等价系统的分解子系统 1

Figure 11 Subsystem 1 of stochastic VES II

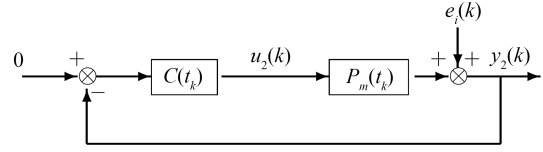


图 12 随机虚拟等价系统的分解子系统 2

Figure 12 Subsystem 2 of stochastic VES II

类似地, 在 3 个子系统中分别定义 $\tilde{\phi}_1(k)$, $\tilde{\phi}_2(k)$, 和 $\tilde{\phi}_3(k)$:

$$\tilde{\phi}_1(k) = [y_1(k), \dots, u_1(k-1), \dots, y_r(k), \dots], \quad (31)$$

$$\tilde{\phi}_2(k) = [y_2(k), \dots, u_2(k-1), \dots, 0, \dots], \quad (32)$$

$$\tilde{\phi}_3(k) = [y_3(k), \dots, u_3(k-1), \dots, 0, \dots]. \quad (33)$$

于是有

$$\|\phi_c(k)\| = O(\|\tilde{\phi}(k)\|), \quad \|\phi(k-d)\| = O(\|\tilde{\phi}(k)\|), \quad \tilde{\phi}(k) = \tilde{\phi}_1(k) + \tilde{\phi}_2(k) + \tilde{\phi}_3(k). \quad (34)$$

在此基础上, 由定理 3 条件 (2) 和 (4) 及式 (26) 和 (27) 可以得到两个补偿信号的性质:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [e_i(k)]^2 = o\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2\right), \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\Delta u'(k)]^2 = o\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2\right). \quad (35)$$

得到以上两式的过程中利用了 Stolz 定理, 并假设 $\sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2 \rightarrow \infty$, 否则 $\sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2 < \infty$ 意味着 $\|\tilde{\phi}(k)\|^2 \rightarrow 0, y(k) \rightarrow 0, u(k) \rightarrow 0, y_r(k) \rightarrow 0$, 系统的稳定性、收敛性自然得证.

由于子系统 2 和 3 均为稳定系统, 进而有

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_2(k)]^2 = o\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2\right), \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [u_2(k)]^2 = o\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2\right), \quad (36)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_3(k)]^2 = o\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2\right), \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [u_3(k)]^2 = o\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2\right). \quad (37)$$

第三步, 证明稳定性, 由 (36) 和 (37) 式, 可以看出

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\phi_2(k-d)\|^2 = o\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2\right), \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\phi_3(k-d)\|^2 = o\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2\right). \quad (38)$$

又由 (29) 式知: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}_1(k)\|^2 < \infty$, 在此基础上考虑 (34) 和 (38) 两式, 并根据引理 A4 得出结论: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2 < \infty$, 进而有 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\phi(k-d)\|^2 < \infty$. 稳定性得证.

第四步, 证明收敛性, 由 (36) 和 (37) 两式及 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}_1(k)\|^2 < \infty$, 得到

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_2(k)]^2 = o(1), \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_3(k)]^2 = o(1). \quad (39)$$

继而由引理 A5 可以得出

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y(k) - y_r(k)]^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_1(k) - y_r(k) + y_2(k) + y_3(k)]^2 \rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_1(k) - y_r(k)]^2. \quad (40)$$

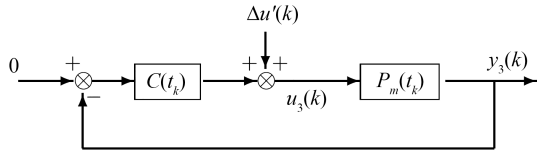


图 13 随机虚拟等价系统的分解子系统 3
Figure 13 Subsystem 3 of stochastic VES II

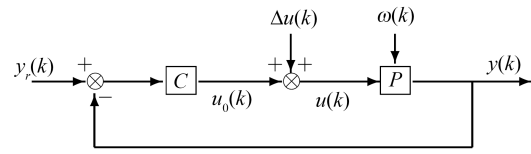


图 14 最小方差自校正控制的虚拟等价系统
Figure 14 VES for minimum variance self-tuning control

收敛性得证.

若被控对象存在白噪声之外的干扰或非线性因素或采用低阶模型, 则定理 3 所要求的参数估计条件难以满足, 这种情况下, 随机自校正控制系统的收敛性难以保证, 但有如下稳定性结论.

推论 3 针对上述随机自校正控制系统, 若

- (1) $\|\hat{\theta}(k)\| \leq M < \infty; \|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-l)\| \rightarrow 0, l$ 为有限值;
- (2) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|e(k)\|^2 \leq M' < \infty$;
- (3) 自适应控制器按确定性等价原则设计, 且满足稳定性和跟踪性要求;
- (4) 从估计参数到控制器参数的映射, 即 $f(\hat{\theta}(k))$, 为 $\hat{\theta}(k)$ 的一致连续函数,

则随机自校正控制系统是稳定的.

证明 过程与定理 3 的证明类似, 细节省略.

若被控对象是最小相位系统, 则可以按最小方差策略设计相应的自校正控制系统, 这种特殊情况下, 我们采用更为简单的虚拟等价系统, 如图 14 所示, 其中 C 为按确定性等价原则, P 所对应的最小方差控制器, 可以称之为理想控制器. $\Delta u(k)$ 为自校正控制器 $C(k)$ 与理想控制器 C 之间的输出误差, 即 $\Delta u(k) = u(k) - u_0(k)$. 虽然我们不知道 P 和 C 的具体参数, 但是由于最小方差控制的特性, 我们能够找到 $\Delta u(k)$ 和参数估计误差 $e(k)$ 之间的关系, 见 (41) 式, 使得我们可以方便地分析最小方差自校正控制系统的稳定性和收敛性.

相应地, 有如下结论.

定理 4 针对最小相位对象的最小方差自校正控制系统, 若满足如下条件:

- (1) $b_0 \neq 0, \hat{b}_0 \neq 0$;
- (2) $\sum_{k=1}^n [e(k)]^2 = o(1 + \sum_{k=1}^n \|\phi(k-d)\|^2)$,

则自校正控制系统是稳定的和收敛的.

注 8 $\hat{b}_0 \neq 0$ 是为了保证最小方差控制律的存在性, 可以对 b_0 的估计做适当修正, 以满足该条件, 细节可参见文献 [4, 5], 目前, 要保证参数估计误差满足条件 (2), 尚需知道被控对象的结构信息.

证明思路 首先, 我们分析图 14 中 $\Delta u(k)$ 的性质, 其实对象结构信息未知情况下的 $\Delta u(k)$ 与对象结构信息已知情况下的性质是一样的, 仿照文献 [32] 的推导方法, 可以得到

$$\Delta u(k) = \frac{1}{b_0} [y(k) - \phi^T(k-d)\hat{\theta}(k) - \omega(k)] = O(\|e(k)\|). \quad (41)$$

进一步考虑到定理 4 条件 (2) 有

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\Delta u(k)]^2 = o\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\phi(k-d)\|^2\right) = o\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2\right). \quad (42)$$

接下来, 将图 14 所示的系统进行分解, 然后用反证法得到最终结论, 细节类似定理 3 的证明过程.

注9 定理 4 结合图 14 所示的虚拟等价系统可以在某种程度上直观地解释自适应控制专家 Åström 在其奠基性论文 [2] 里的 “surprise (意外, 惊奇)”: 若参数估计收敛, 但不收敛到真值, 则最小方差自校正控制将收敛到参数已知时的最小方差控制, 这多少有点令人感到意外. 定理 4 结合图 14 说明, 虽然参数估计不收敛或不收敛到系统真值, 但与非自适应控制系统只差一个范数为无穷小的补偿信号.

若被控对象存在干扰或非线性因素或采用低阶模型, 导致不能满足定理 4 中的条件 (2), 但是能保证参数估计误差有界, 则有如下稳定性结论 (证明过程类似定理 4, 细节省略).

推论4 针对最小相位对象的最小方差自校正控制系统, 若满足如下条件:

- (1) $b_0 \neq 0, \hat{b}_0 \neq 0$;
- (2) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [e(k)]^2 \leq M' < \infty$,

则自校正控制系统是稳定的.

4 仿真验证

由于虚拟等价系统理论的关键是虚拟等价系统与其分解子系统之间的输入-输出等价性, 所以本节用仿真结果验证随机被控对象的虚拟等价系统与其分解子系统之间的等价性, 即图 9 的分解等价性. 为了适当简化仿真验证, 考虑到图 9 和 10 是一类系统, 且图 9 比图 10 时变性更强, 我们不再验证图 10 的分解等价性. 此外, 由于确定性被控对象的情形可以看成是随机被控对象的特殊情况 (即噪声为零), 所以不再单独对确定性系统进行同样验证.

考虑如下的被控对象:

$$y(k) - 1.6065y(k-1) + 0.6065y(k-2) = 0.1065u(k-10) + 0.0902u(k-4) + \omega(k) + 0.5\omega(k-1), \quad (43)$$

其中 $\omega(k)$ 为白噪声, 其方差为 $\sigma^2 = 0.01$. 参数估计算法采用最小二乘法, $P(0) = 10^6 I, \hat{\theta}(0) = \mathbf{0}$. 控制策略为间接极点配置控制策略. 期望闭环特征多项式为

$$A_m(q^{-1}) = 1 - 1.3205q^{-1} + 0.4966q^{-2}.$$

仿真结果见图 15 和 16. 图 15 分别画出了 $y_1(k)$ 和 $y_2(k)$ 以及 $y_1(k) + y_2(k)$ 与 $y(k)$ 的比较, 由于 $y_1(k) + y_2(k)$ 的红色曲线 (在仿真程序中先画) 和 $y(k)$ 的蓝色曲线 (在仿真程序中后画) 完全重合, 以至于只能看到蓝色曲线, 说明 $y(k) = y_1(k) + y_2(k)$. 图 16 分别画出了 $u_1(k)$ 和 $u_2(k)$ 以及 $u_1(k) + u_2(k)$ 与 $u(k)$ 的比较, 由于 $u_1(k) + u_2(k)$ 的红色曲线 (在仿真程序中先画) 和 $u(k)$ 的蓝色曲线 (在仿真程序中后画) 完全重合, 以至于只能看到蓝色曲线, 说明 $u(k) = u_1(k) + u_2(k)$.

5 结论

关于自适应控制系统的稳定性和收敛性, 曾经有数以千计的研究成果, 其研究过程跌宕起伏, 精彩纷呈 [43]. 虚拟等价系统是在总结前人工作的基础上得出的一套分析方法, 但没有涉及参数估计算法的分析, 而只是提出了对参数估计算法的要求. 得到的结果表明, 针对线性被控对象 (确定或随机, 最小相位或非最小相位) 的自校正控制系统, 要保证其稳定性和收敛性, 只需要参数估计的有界性, 慢时变性以及估计模型的输出逼近效果 (即参数估计误差为相对无穷小), 同时控制策略按确定性等价原则满

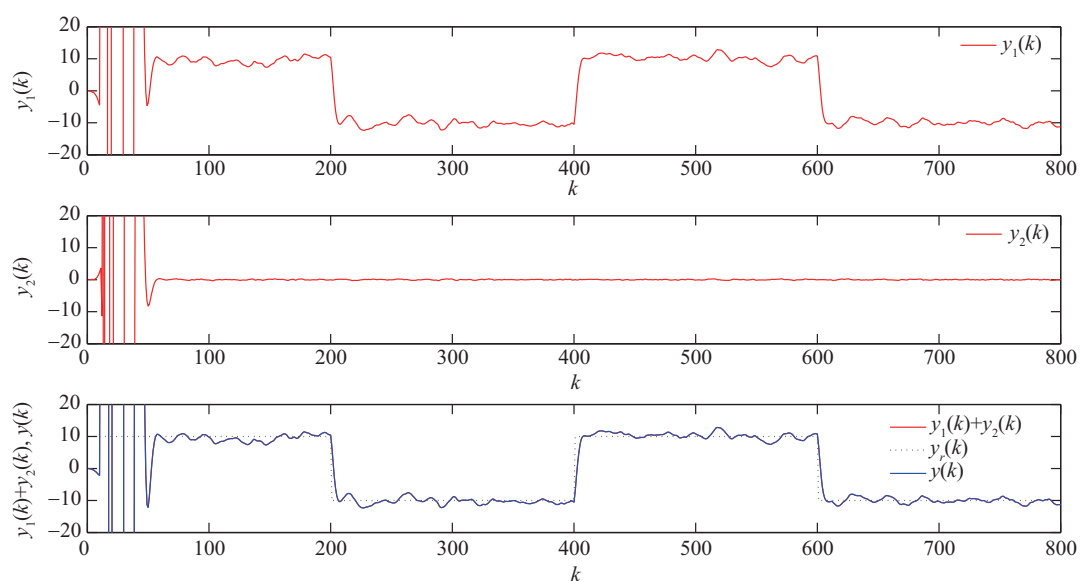


图 15 虚拟等价系统分解前后的输出等价性

Figure 15 Equivalence of output signals of VES before and after decomposition

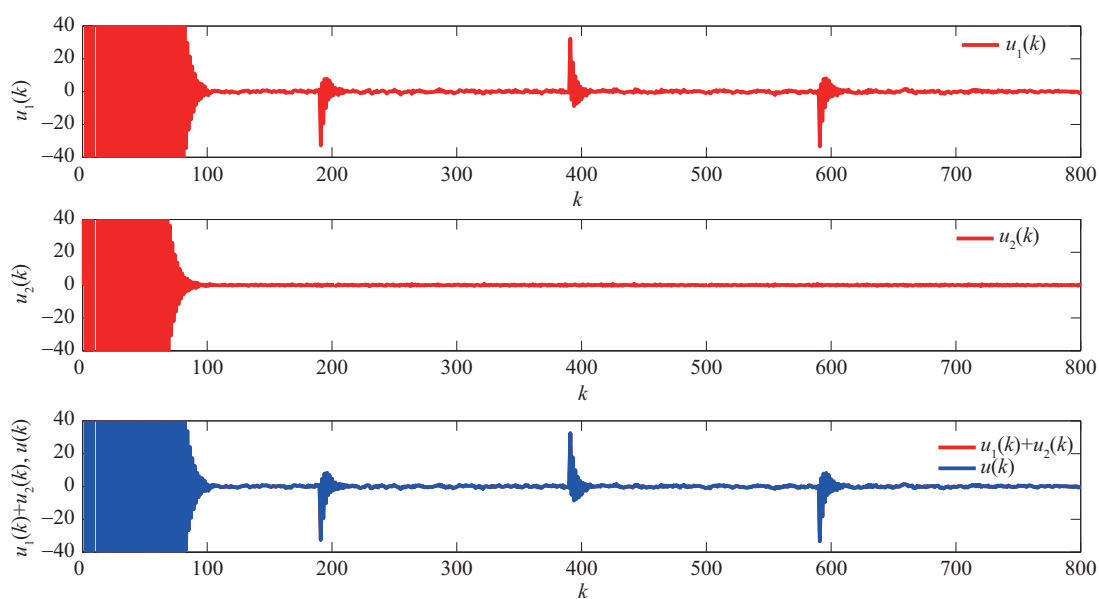


图 16 虚拟等价系统分解前后的输入等价性

Figure 16 Equivalence of control signals of VES before and after decomposition

足稳定性和跟踪行要求即可. 考虑到模型参考自适应控制是自校正控制的一种特殊情况^[44~47], 因此, 虚拟等价系统有望成为一种分析自适应控制系统的统一方法.

实际上, 虚拟等价系统方法可用来分析各种基于模型设计的控制系统, 如: 多模型自适应控制系统的稳定性和收敛性^[34, 48]、自抗扰控制系统的稳定性^[49]、基于 T-S 模型的模糊控制系统的稳定性^[50].

参考文献

- 1 Kalman R E. Design of a self optimizing control system. *Trans ASME*, 1958, 80: 468–478
- 2 Åström K J, Wittenmark B. On self tuning regulators. *Automatica*, 1973, 9: 185–199
- 3 Goodwin G C, Ramadge P J, Caines P E. Discrete time stochastic adaptive control. *SIAM J Control Opt*, 1981, 19: 829–853
- 4 Guo L, Chen H F. The Åström-Wittenmark self-tuning regulator revisited and ELS-based adaptive trackers. *IEEE Trans Automat Contr*, 1991, 36: 802–812
- 5 Guo L, Chen H F. Convergence and optimality of self-tuning regulators. *Science China (Series A)*, 1991, 21: 905–913 [郭雷, 陈翰馥. 自校正调节器的稳定性和最优性. *中国科学 (A 辑)*, 1991, 21: 905–913]
- 6 Sin K S, Goodwin G C. Stochastic adaptive control using a modified least squares algorithm. *Automatica*, 1982, 18: 315–321
- 7 Zhang Y-H. Stochastic adaptive control and prediction based on a modified least squares—the general delay-colored noise case. *IEEE Trans Automat Contr*, 1982, 27: 1257–1260
- 8 Anderson B D O, Johnstone R M G. Global adaptive pole positioning. *IEEE Trans Automat Contr*, 1985, 30: 11–22
- 9 Elliott H, Cristi R, Das M. Global stability of adaptive pole placement algorithms. *IEEE Trans Automat Contr*, 1985, 30: 348–356
- 10 Lozano R, Zhao X H. Adaptive pole placement without excitation probing signals. *IEEE Trans Automat Contr*, 1994, 39: 47–58
- 11 Goodwin G C, Sin K S. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Englewood: Prentice-hall, Inc., 1984
- 12 Chan C Y, Sirisena H R. Convergence of adaptive pole-zero placement controller for stable non-minimum phase systems. *Int J Control*, 1989, 50: 743–754
- 13 Lai T L, Wei C Z. Extended least squares and their applications to adaptive control and prediction in linear systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 1986, 31: 898–906
- 14 Chen H F, Guo L. Asymptotically optimal adaptive control with consistent parameter estimates. *SIAM J Control Opt*, 1987, 25: 558–575
- 15 Guo L. Self-convergence of weighted least-squares with applications to stochastic adaptive control. *IEEE Trans Automat Contr*, 1996, 41: 79–89
- 16 Nassiri-Toussi K, Ren W. Indirect adaptive pole-placement control of MIMO stochastic systems: self-tuning results. *IEEE Trans Automat Contr*, 1997, 42: 38–52
- 17 Wittenmark B, Middleton R H, Goodwin G C. Adaptive decoupling of multivariable systems. *Int J Control*, 1987, 46: 1993–2009
- 18 Chai T Y. The global convergence analysis of a multivariable decoupling self-tuning controller. *Acta Autom Sin*, 1989, 15: 432–436 [柴天佑. 多变量自校正解耦控制器的全局收敛性分析. *自动化学报*, 1989, 15: 432–436]
- 19 Chai T Y. Direct adaptive decoupling control for general stochastic multivariable systems. *Int J Control*, 1990, 51: 885–909
- 20 Chai T Y, Wang G. Globally convergent multivariable adaptive decoupling controller and its application to a binary distillation column. *Int J Control*, 1992, 55: 415–429
- 21 Patete A, Furuta K, Tomizuka M. Stability of self-tuning control based on Lyapunov function. *Int J Adapt Control Signal Process*, 2008, 22: 795–810
- 22 Katayama T, McKelvey T, Sano A, et al. Trends in systems and signals. *Annu Rev Control*, 2006, 30: 5–17
- 23 Li Q Q. Adaptive control. *Comput Autom Meas Control*, 1999, 7: 56–60 [李清泉. 自适应控制. *计算机自动测量与控制*, 1999, 7: 56–60]
- 24 Li Q Q. *Adaptive Control System Theory, Design and Application*. Beijing: Science Press, 1990 [李清泉. 自适应控制系统理论、设计与应用. 北京: 科学出版社, 1990]
- 25 Fekri S, Athans M, Pascoal A. Issues, progress and new results in robust adaptive control. *Int J Adapt Control Signal Process*, 2006, 20: 519–579
- 26 Åström K J, Wittenmark B. *Adaptive Control*. Upper Saddle River: Addison-Wesley, 1995
- 27 Ioannou P A, Sun J. *Robust Adaptive Control*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1996
- 28 Kumar P R. Convergence of adaptive control schemes using least-squares parameter estimates. *IEEE Trans Automat Contr*, 1990, 35: 416–424

- 29 van Schuppen J H. Tuning of Gaussian stochastic control systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 1994, 39: 2178–2190
- 30 Nassiri-Toussi K, Ren W. A unified analysis of stochastic adaptive control: asymptotic self-tuning. In: *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, 1995. 2932–2937
- 31 Morse A S. Towards a unified theory of parameter adaptive control. II. Certainty equivalence and implicit tuning. *IEEE Trans Automat Contr*, 1992, 37: 15–29
- 32 Zhang W C. On the stability and convergence of self-tuning control-virtual equivalent system approach. *Int J Control*, 2010, 83: 879–896
- 33 Zhang W C. The convergence of parameter estimates is not necessary for a general self-tuning control system- stochastic plant. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, Shanghai, 2009
- 34 Zhang W C, Li X L, Choi J Y. A unified analysis of switching multiple model adaptive control — virtual equivalent system approach. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, Seoul, 2008. 41: 14403–14408
- 35 Zhang W C. Virtual equivalent system theory for self-tuning control. *J Harbin Inst Tech*, 2014, 46: 107–112 [张维存. 自校正控制的虚拟等价系统理论. *哈尔滨工业大学学报*, 2014, 46: 107–112]
- 36 Zhang W C, Chu T G, Wang L. A new theoretical framework for self-tuning control. *Int J Inf Tech*, 2005, 11: 123–139
- 37 Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Syst Mag*, 1999, 19: 59–70
- 38 Shorten R, Wirth F, Mason O, et al. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Rev*, 2007, 49: 545–592
- 39 Desoer C A, Vidyasagar M. *Feedback Systems: Input-Output Properties*. New York: Academic Press, 1975
- 40 Chatterjee D, Liberzon D. On stability of stochastic switched systems. In: *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Nassau, 2004. 4: 4125–4127
- 41 Prandini M. Switching control of stochastic linear systems: stability and performance results. In: *Proceedings of the 6th Congress of SIMAI*, Cagliari, 2002
- 42 Prandini M, Campi M C. Logic-based switching for the stabilization of stochastic systems in presence of unmodeled dynamics. In: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, 2001
- 43 Guo L. A retrospect of the research on self-tuning regulators. *All About Control Syst*, 2014, 1: 50–61 [郭雷. 回溯自校正调节器研究之路. *系统与控制纵横*, 2014, 1: 50–61]
- 44 Egardt B. Unification of some discrete-time adaptive control schemes. *IEEE Trans Automat Contr*, 1980, 25: 693–697
- 45 Gawthrop P J. Some interpretations of the self-tuning controller. *Proc IEEE*, 1997, 124: 889–894
- 46 Ljung L, Landau I D. Model reference adaptive systems and self-tuning regulators — some connections. In: *Proceedings of the 7th IFAC World Congress*, Helsinki, 1978. 3: 1973–1980
- 47 Narendra K S, Valavani L S. Direct and indirect adaptive control. *Automatica*, 1979, 15: 663–664
- 48 Zhang W C. Stable weighted multiple model adaptive control: discrete-time stochastic plant. *Int J Adapt Control Signal Process*, 2013, 27: 562–581
- 49 Wei W, Zhang W C, Li D H, et al. On the stability of linear active disturbance rejection control: virtual equivalent system approach. In: *Proceedings of the Chinese Intelligent Systems Conference*, Yangzhou, 2015. 295–306
- 50 Li P W, Zhang W C. Towards a unified stability analysis of continuous-time T-S model based fuzzy control-virtual equivalent system approach. *Int J Model Ident Control*, 2018

附录 A 引理及证明

以下引理在文献 [32] 里都有对应内容, 为方便中文阅读, 特意归纳整理, 并略有修正.

引理 A1 确定性自校正控制的虚拟等价系统 (图 3) 可以分解为 3 个子系统, 分别如图 4~6 所示, 且满足 $y(k) = y_1(k) + y_2(k) + y_3(k)$, $u(k) = u_1(k) + u_2(k) + u_3(k)$.

证明 本引理是引理 3 的特殊情形, 在引理 3 中令 $\omega(k) = 0$, 即得本引理结论.

引理 A2 给定 $\tilde{\phi}(k) = \tilde{\phi}_1(k) + \tilde{\phi}_2(k)$, $\|\tilde{\phi}_1(k)\| < \infty$, $\|\tilde{\phi}_2(k)\| = o(\alpha + \|\tilde{\phi}(k)\| + \dots + \|\tilde{\phi}(k-s)\|)$, 其中 s 为有限正整数, α 为常数. 则必有 $\|\tilde{\phi}(k)\| < \infty$.

证明 首先, 我们知道

$$\sum_{k=1}^{k=N} \|\tilde{\phi}(k)\| \leq \sum_{k=1}^{k=N} \|\tilde{\phi}_1(k)\| + \sum_{k=1}^{k=N} \|\tilde{\phi}_2(k)\|. \quad (\text{A1})$$

下面采用反证法进行证明, 假设 $\|\tilde{\phi}(k)\|$ 无界. 那么必有无穷子列 $\|\tilde{\phi}(p_k)\| \rightarrow \infty$ 满足

$$\sum_{k=1}^{k=N} \|\tilde{\phi}(p_k)\| \leq \sum_{k=1}^{k=N} \|\tilde{\phi}_1(p_k)\| + \sum_{k=1}^{k=N} \|\tilde{\phi}_2(p_k)\|. \quad (\text{A2})$$

接下来分别考察 (A2) 式右面两项的性质. 首先考察第一项, 根据 Stolz 定理以及 $\|\tilde{\phi}_1(p_k)\| < \infty$, 知道

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=N} \|\tilde{\phi}_1(p_k)\|}{\sum_{k=1}^{k=N} \|\tilde{\phi}(p_k)\|} \rightarrow \frac{\|\tilde{\phi}_1(p_k)\|}{\|\tilde{\phi}(p_k)\|} \rightarrow 0. \quad (\text{A3})$$

接下来考察第二项, 注意到 $\|\tilde{\phi}(k)\| = 0, k \leq 0$, 那么,

$$\sum_{k=1}^{k=N} \|\tilde{\phi}(k-i)\| \leq \sum_{k=1}^{k=N} \|\tilde{\phi}(k)\|, \quad i = 1, \dots, s. \quad (\text{A4})$$

因此,

$$\sum_{k=1}^{k=N} (\alpha + \|\tilde{\phi}(k)\| + \dots + \|\tilde{\phi}(k-s)\|) \leq (s+1) \sum_{k=1}^{k=N} (\alpha + \|\tilde{\phi}(k)\|). \quad (\text{A5})$$

上式结合本引理的给定条件导致

$$\sum_{k=1}^{k=N} \|\tilde{\phi}_2(k)\| = o\left(\sum_{k=1}^{k=N} (\alpha + \|\tilde{\phi}(k)\|)\right). \quad (\text{A6})$$

进一步, 考虑到收敛序列及其子序列的极限相同, 我们有

$$\sum_{k=1}^{k=N} \|\tilde{\phi}_2(p_k)\| = o\left(\sum_{k=1}^{k=N} (\alpha + \|\tilde{\phi}(p_k)\|)\right). \quad (\text{A7})$$

考虑到 (A2) 和 (A3) 式, 并利用夹逼原理有

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=N} \|\tilde{\phi}(p_k)\|}{\sum_{k=1}^{k=N} (\alpha + \|\tilde{\phi}(p_k)\|)} \rightarrow 0. \quad (\text{A8})$$

上式与如下事实相矛盾 (根据 Stolz 定理):

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=N} (\|\tilde{\phi}(p_k)\|)}{\sum_{k=1}^{k=N} (\alpha + \|\tilde{\phi}(p_k)\|)} \rightarrow 1. \quad (\text{A9})$$

因此原假设不成立. 从而证得结论, 即 $\|\tilde{\phi}(k)\| < \infty$.

引理 A3 随机自校正控制的虚拟等价系统 (图 10) 可以分解为 3 个子系统, 分别如图 11~13 所示, 且有

$$y(k) = y_1(k) + y_2(k) + y_3(k), \quad u(k) = u_1(k) + u_2(k) + u_3(k).$$

证明 用数学归纳法给出证明. 首先, 我们知道, 对于 $k \leq 0$ 有

$$y(k) = y_1(k) + y_2(k) + y_3(k), \quad u(k) = u_1(k) + u_2(k) + u_3(k). \quad (\text{A10})$$

接下来, 假设 (A10) 式对于 $k, k-1, \dots, 1$. 成立. 分别考虑图 11~13, 有

$$y(k+1) = \phi^T(k-d+1)\hat{\theta}(t_k) + \omega(k+1) + e_i(k+1), \quad (\text{A11})$$

$$y_1(k+1) = \phi_1^T(k-d+1)\hat{\theta}(t_k) + \omega(k+1), \quad (\text{A12})$$

$$y_2(k+1) = \phi_2^T(k-d+1)\hat{\theta}(t_k) + e_i(k+1), \quad (\text{A13})$$

$$y_3(k+1) = \phi_3^T(k-d+1)\hat{\theta}(t_k). \quad (\text{A14})$$

其中

$$\phi_1^T(k-d+1) = [y_1(k), \dots, y_1(k-n+1), u(k-d+1), \dots, u_1(k-d-m+1)], \quad (\text{A15})$$

$$\phi_2^T(k-d+1) = [y_2(k), \dots, y_2(k-n+1), u_2(k-d+1), \dots, u_2(k-d-m+1)], \quad (\text{A16})$$

$$\phi_3^T(k-d+1) = [y_3(k), \dots, y_3(k-n+1), u_3(k-d+1), \dots, u_3(k-d-m+1)]. \quad (\text{A17})$$

按照前面的假设, 即, (A10) 式对于 $k, k-1, \dots, 1$. 成立, 显然有

$$\phi_1^T(k-d+1) + \phi_2^T(k-d+1) + \phi_3^T(k-d+1) = \phi^T(k-d+1). \quad (\text{A18})$$

因此,可以得到

$$y_1(k+1) + y_2(k+1) + y_3(k+1) = \phi^T(k-d+1)\hat{\theta}(t_k) + \omega(k+1) + e_i(k+1) = y(k+1). \quad (A19)$$

下面考察 $u_1(k+1)$, $u_2(k+1)$ 和 $u_3(k+1)$. 在图 10 中,有

$$u(k+1) = \phi_c^T(k+1)\theta_c(t_{k+1}) + \Delta u'(k+1). \quad (A20)$$

类似地,在图 11~13 中,有

$$u_1(k+1) = \phi_{c1}^T(k+1)\theta_c(t_{k+1}), \quad (A21)$$

$$u_2(k+1) = \phi_{c2}^T(k+1)\theta_c(t_{k+1}), \quad (A22)$$

$$u_3(k+1) = \phi_{c3}^T(k+1)\theta_c(t_{k+1}) + \Delta u'(k+1), \quad (A23)$$

其中

$$\phi_c^T(k+1) = [y(k+1), \dots, y(k+1-s_1), u(k), \dots, u(k+1-s_2), y_r(k+1), \dots, y_r(k+1-s_3)], \quad (A24)$$

$$\phi_{c1}^T(k+1) = [y_1(k+1), \dots, y_1(k+1-s_1), u_1(k), \dots, u_1(k+1-s_2), y_r(k+1), \dots, y_r(k+1-s_3)], \quad (A25)$$

$$\phi_{c2}^T(k+1) = [y_2(k+1), \dots, y_2(k+1-s_1), u_2(k), \dots, u_2(k+1-s_2), 0, \dots, 0], \quad (A26)$$

$$\phi_{c3}^T(k+1) = [y_3(k+1), \dots, y_3(k+1-s_1), u_3(k), \dots, u_3(k+1-s_2), 0, \dots, 0], \quad (A27)$$

其中, $s_1 \geq 1, s_2 \geq 1, s_3 \geq 1$ 为正整数,由不同的控制策略决定. 进一步基于 (A10) 及 (A19) 式,显然有

$$\phi_{c1}^T(k+1) + \phi_{c2}^T(k+1) + \phi_{c3}^T(k+1) = \phi_c^T(k+1). \quad (A28)$$

因此,

$$u_1(k+1) + u_2(k+1) + u_3(k+1) = \phi_c^T(k+1)\theta_c(t_{k+1}) + \Delta u'(k+1) = u(k+1). \quad (A29)$$

所以 (A10) 式对所有 k 皆成立.

引理 A4 若 $\tilde{\phi}(k) = \tilde{\phi}_1(k) + \tilde{\phi}_2(k)$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}_1(k)\|^2 < \infty$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}_2(k)\|^2 = o(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2)$, 则必有 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2 < \infty$.

证明 利用三角不等式以及显然的事实 $2ab \leq a^2 + b^2$, 有

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}_1(k) + \tilde{\phi}_2(k)\|^2 \leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}_1(k)\|^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}_2(k)\|^2. \quad (A30)$$

下面用反证法得出结论. 假设 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2$ 无界, 则一定存在无穷子列 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(p_k)\|^2 \rightarrow \infty$, 满足

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(p_k)\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}_1(p_k) + \tilde{\phi}_2(p_k)\|^2 \leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}_1(p_k)\|^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}_2(p_k)\|^2. \quad (A31)$$

进一步考虑到收敛序列及其子序列的极限相同, 于是得到

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}_2(p_k)\|^2 = o\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(p_k)\|^2\right). \quad (A32)$$

上式结合 (A31) 式以及事实 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}_1(p_k)\|^2 < \infty$, 利用夹逼定理, 得出明显的错误结论 $\frac{\sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(p_k)\|^2}{\sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(p_k)\|^2} \rightarrow 0$, 因此, 之前的假设不成立, 从而得到 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\tilde{\phi}(k)\|^2 < \infty$.

引理 A5 若 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_2(k)]^2 = o(1)$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_1(k) - y_r(k)]^2 < \infty$, 则必有 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_1(k) - y_r(k) + y_2(k)]^2 \rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_1(k) - y_r(k)]^2$.

证明 显然

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_1(k) - y_r(k) + y_2(k)]^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_1(k) - y_r(k)]^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_2(k)]^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n [y_1(k) - y_r(k)]y_2(k) \\ &\rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_1(k) - y_r(k)]^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n [y_1(k) - y_r(k)]y_2(k). \end{aligned} \quad (A33)$$

根据 Cauchy 不等式, 有

$$0 \leq \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_1(k) - y_r(k)] y_2(k) \right\}^2 \leq \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_1(k) - y_r(k)]^2 \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_2(k)]^2 \right\} \rightarrow 0. \quad (\text{A34})$$

于是, 运用夹逼定理得到

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_1(k) - y_r(k)] y_2(k) \right\}^2 \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_1(k) - y_r(k)] y_2(k) \rightarrow 0. \quad (\text{A35})$$

代入 (A33) 式, 即得所证结果.

Virtual equivalent system theory for adaptive control and simulation verification

Weicun ZHANG^{1*} & Wei WEI²

1. School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;

2. School of Computer and Information Engineering, Beijing Technology and Business University, Beijing 100048, China

* Corresponding author. E-mail: weicunzhang@ustb.edu.cn

Abstract A general and unified analysis of a self-tuning control (STC) system composed of any possible control strategy, any possible parameter estimation algorithm, and any linear plant is presented. Based on virtual equivalent system (VES) theory, several stability and convergence criteria were developed without the convergence requirement of parameter estimation. These criteria could be used to guide control engineering practice. Considering that model reference adaptive control (MRAC) can be regarded as a special case of STC, VES theory is also suitable for the stability and convergence analysis of MRAC. Finally, simulation results verified the effectiveness of VES theory.

Keywords adaptive control, stability, convergence, virtual equivalent system



Weicun ZHANG is an associate professor at the School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing. He obtained his Ph.D. degree in control theory and applications from Tsinghua University in 1993. His research interests cover adaptive control, multiple-model adaptive control, intelligent control, their applications, etc.



Wei WEI is a professor at the School of Computer and Information Engineering, Beijing Technology and Business University. He obtained his Ph.D. degree in control theory and control engineering from the University of Science and Technology Beijing in 2010. His research interests cover active disturbance rejection control, nonlinear control, control and optimization of wastewater treatment systems, and neural control systems.