



社会网络上的观念动力学

王龙^{1*}, 田野², 杜金铭³

1. 北京大学系统与amp;控制研究中心, 北京 100871

2. 西安电子科技大学复杂系统研究中心, 西安 710071

3. 东北大学工业与系统工程研究所, 沈阳 110819

* 通信作者. E-mail: longwang@pku.edu.cn

收稿日期: 2017-05-09; 接受日期: 2017-08-25; 网络出版日期: 2018-01-03

国家自然科学基金 (批准号: 61533001, 61375120) 资助项目

摘要 观念动力学是近年来国际系统与amp;控制科学领域的研究热点之一, 旨在从动态系统的角度研究社会网络中观念和行为的演化. 本文概述了观念动力学的研究现状和发展趋势. 首先介绍了观念动力学领域的基本问题和模型. 然后结合多智能体系统的相关结果, 分别从个体性质、个体交互方式和个体决策过程 3 个方面论述了观念动力学的主要研究成果. 最后, 对该领域的未来发展方向作出展望.

关键词 观念动力学, 社会网络, 多智能体系统, 复杂网络, 博弈

1 引言

近年来, 观念动力学 (opinion dynamics, 也称为观点动力学) 作为控制理论、社会学、物理学、生物学和经济学等学科的交叉研究热点迅速兴起, 取得了丰硕的成果. 在社会中, 个体间的相互影响和作用关系构成一个网络——社会网络 (social network). 观念动力学研究社会网络中观念或行为的产生、扩散和聚合. 对一个特定的事件或问题, 不同个体会产生不同的观念 (即行为倾向), 观念通过个体间的相互影响在网络中传播扩散. 同时, 来自不同个体的观念根据个体的决策方式发生聚合, 最终形成整个社会的观念. 从社会学的角度来看, 一个社会中的所有观念构成的整体即为社会的文化. 通常, 在相对简单的社会结构和社会机制下, 个体观念在局部相互作用下会在宏观层面上产生复杂的涌现现象 (emergence) [1~4]. 对复杂的社会现象进行建模和分析, 不仅可以揭示人类社会和动物种群发展的基本规律 (如国际政治中的合作与对抗、股票市场涨跌和动物种群的迁徙等), 而且对科学知识以及工程技术 (如互联网、电力网络、交通网络等人工复杂系统) 的发展也有重要的推动作用 [5, 6]. 然而, 社会现象的复杂性和关联性也给研究者带来了极大的挑战. 特别是在当今信息时代, 社会群体中的信息来源不再仅限于传统的大媒体 (如电视新闻、报纸等), 还包括各种各样的移动和互联网设备 (如图 1). 这

引用格式: 王龙, 田野, 杜金铭. 社会网络上的观念动力学. 中国科学: 信息科学, 2018, 48: 3–23, doi: 10.1360/N112017-00096
Wang L, Tian Y, Du J M. Opinion dynamics in social networks (in Chinese). Sci Sin Inform, 2018, 48: 3–23, doi: 10.1360/N112017-00096

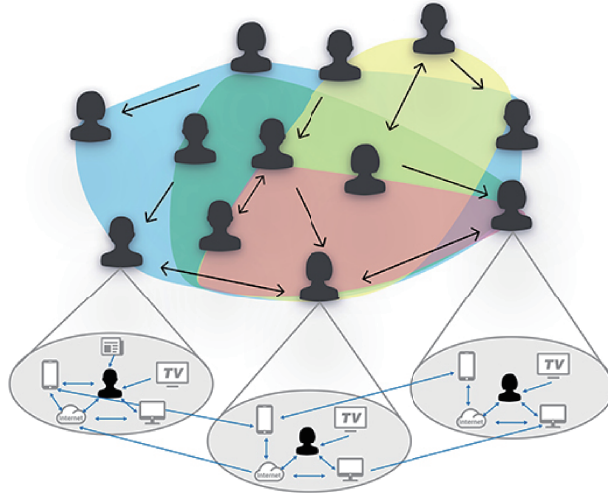


图 1 (网络版彩图) 一个广义的社会网络

Figure 1 (Color online) A generalized social network

些因素不仅增加了社会网络中的信息量,同时也使个体间的连接方式和信息交互方式变得越发复杂,甚至导致网络结构发生分层,增加了社会网络建模和分析的难度.

探索社会网络中群体观念和行为的演化规律是人类自我认识过程中的一个重要问题. 早期关于社会网络的研究主要使用数学方法和算法工具研究社会网络的结构特性,尤其是借助定量方法描述个体之间的社会关系,因此也称为计量社会学 (sociometry) [7,8]. 二十世纪中叶, Wiener 在控制论 (cybernetics) [9] 方面的开创性工作为社会控制论 (sociocybernetics) [10~13] 的兴起奠定了基础. 社会控制论关注社会系统的自组织、自适应等内在规律,探讨在何种社会机制和社会结构下一个社会系统可以自发地完成特定的协调和控制行为. 社会学和系统与控制理论的结合 [14~16] 使得社会网络的研究重心由社会网络分析转向从动态系统的角度研究社会网络中观念、行为和社会关系的演化 [17~22], 催生了观念动力学这一新的研究方向. 进入二十一世纪, 多智能体系统 (multi-agent systems) [23~29] 和复杂网络 (complex networks) [30~34] 的发展为研究者提供了丰富的数学模型, 以及对大规模社会网络进行定量分析或数值模拟的工具 [35,36]. 目前研究观念动力学的模型主要可以分为两类: 宏观模型和微观模型 [37]. 宏观模型主要借助统计物理 (statistical physics) 方法对社会网络进行建模, 应用概率统计知识分析观念的分布如何演化, 如 Ising 模型 (Ising model)、选举模型 (voter model) 等 [38]. 宏观模型在描述大规模社会网络上的观念动力学时具有明显的优势, 尤其是在解释当今随着互联网的普及而产生的复杂社会现象时其可以选择性地对网络中的元素进行简化和抽象. 在文献 [39,40] 中, 作者分别借助 Sznajd 模型和多数制选举 (plurality voting) 模型揭示了德国选举中每个政党的得票数及其党员数量的关系以及巴西市长选举中关于两个主要竞选者的票数分布的极化现象. 微观模型指从社会个体的角度直接描述个体观念如何演化的模型, 如 Degroot 模型、Friedkin-Johnsen (F-J) 模型等 [41,42]. 与宏观模型相比, 基于个体的微观模型不仅适用于建模大规模社会网络, 同时也可以很好地描述小型社会网络, 特别是在刻画网络中个体的相互影响或个体性质和个体观念的耦合关系方面比宏观模型具有更好的效果. 在文献 [43,44] 中, 作者基于 F-J 模型分别研究了大规模电力网络的状态估计问题和美国民众在有关伊拉克战争的一系列问题上观念的演化.

近年来, 基于多智能体系统的微观观念动力学模型越来越受到研究者的青睐. 多智能体系统指由

具有一定传感、计算、执行、通信能力的智能体组成的集合^[45], 社会网络中的个体以及个体之间的相互影响可以由智能体和智能体之间的相互作用描述. 多智能体系统具有较为成熟的理论体系和研究方法, 为观念动力学的研究提供了丰富的视角. 来自不同领域的研究者提出了大量动力学模型并对许多社会现象给出了严格的数学分析, 如观念收敛、观念一致、和观念极化等. 基于多智能体系统的观念动力学模型一般具有 3 个基本要素, 即个体、网络和动力学方程. 在社会网络中, 个体的性质决定个体观念产生的方式; 个体之间的交互决定了观念在网络中扩散的方式; 个体的决策过程, 由动力学方程刻画, 决定了网络中观念聚合的方式. 本文结合多智能体系统的相关研究结果, 分别从个体差异、交互方式和决策过程 3 个角度对当前观念动力学的模型和研究结果进行介绍和梳理, 并对其发展趋势作一展望.

文章结构安排如下: 第 2 节介绍社会网络的图论描述和观念动力学的基本模型——Degroot 模型, 并讨论其收敛性和一致性. 第 3 节基于个体差异介绍带有固执个体的 F-J 模型及其拓展工作和拜占庭将军问题 (Byzantine generals problem) 等. 第 4 节基于个体交互方式的不同, 总结观念动力学中的 3 类基本的网络结构, 即时变网络、状态相关网络和符号网络, 并介绍 Degroot 模型在不同网络下的研究结果. 第 5 节基于个体决策过程的不同, 介绍偏差同化模型以及博弈中的几类学习算法. 第 6 节对观念动力学领域未来可能的研究方向和问题作出展望.

2 社会网络和观念动力学

本节首先介绍有关社会网络的一些图论的基本知识和观念动力学的基本模型, 然后给出一些观念动力学的基本问题及结果.

本文将使用如下记号. $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 分别代表实数空间、自然数空间、 n 维向量空间和 $n \times n$ 矩阵空间. $\mathbf{1}_n$ 和 I_n 分别代表 n 维全 1 向量和 n 维单位矩阵. 对一个给定的向量或矩阵 A , A^T 表示它的转置, $\|A\|_\infty$ 表示它的行和范数. $\mathbf{0}$ 表示一个适当维数的全 0 向量或矩阵. $|\cdot|$ 表示实数的绝对值、复数的模和集合的基数. 对给定的向量 $\zeta \in \mathbb{R}^n$, $\text{diag}(\zeta)$ 表示一个由 ζ 的元素作为对角元的对角矩阵. $\rho(A)$ 表示矩阵 A 的谱半径.

2.1 社会网络的图论描述

通常, 含有 n 个个体的社会网络可以被描述为一个 n 阶加权有向图 (weighted directed graph) $\mathcal{G}(W) = (V, E, W)$. 其中 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 为节点集, 即社会网络中个体组成的集合. $E = \{e_{ij} : i, j \in V\}$ 为边集, 在网络中代表个体间的交互或影响关系. 边 e_{ij} 代表有序对 (i, j) , 表示个体 j 可以接收到来自个体 i 的信息或被其所影响. 此时, i 称为 j 的父节点, j 称为 i 的子节点. $W = [w_{ij}]_{n \times n}$ 是图的加权邻接矩阵 (weighted adjacent matrix), 其元素 w_{ij} 代表边 e_{ji} 对应的权值. 特别地, $w_{ij} > 0$ 当且仅当 $e_{ji} \in E$, 否则, $w_{ij} = 0$. 根据上述定义, 一个社会网络中的个体以及个体之间的关系可以由一个加权有向图 $\mathcal{G}(W)$ 描述. 下文将用图 $\mathcal{G}(W)$ 代表以 W 为邻接矩阵的社会网络. 下面将介绍一些图论中的基本概念, 更多关于图论的知识可参考文献 [35].

在有向图 $\mathcal{G}(W) = (V, E, W)$ 中, 如果对节点 i 有 $w_{ii} > 0$, 则称节点 i 有自环 (self-loop). 一条从节点 i 到节点 j 的有向路径 (directed path) 指由不同节点组成的有限节点序列 $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m$, 其中 $k_0 = i$, $k_m = j$ 且对任意的 $0 \leq l < m$, $l \in \mathbb{N}$ 满足 $(k_l, k_{l+1}) \in E$. m 为有向路径的长度. 特别地, 当 $i = j$ 时称这个有向路径为节点 i (或 j) 的回路 (cycle). 如果在图 $\mathcal{G}(W)$ 中存在一个节点 i , 对任意

的节点 $j \in V$ 都存在由 i 到 j 的有向路径, 称 $\mathcal{G}(W)$ 有生成树 (spanning tree), 其中节点 i 称为根节点 (root). 进一步, 如果在图 $\mathcal{G}(W)$ 中总存在从任意节点 i 到任意节点 j 的有向路径, 则称 $\mathcal{G}(W)$ 是强连通 (strongly connected) 的. 任意一个 $\mathcal{G}(W)$ 的最大强连通子图构成 $\mathcal{G}(W)$ 的一个强连通分支 (strongly connected component, SCC), 简称强分支. 特别地, 如果一个强分支中存在一个节点且这个节点有属于其他强分支的父节点, 则称这个强分支的入度大于 0, 否则, 称其为独立强连通分支 (ISCC), 简称独立强分支. 在有向图 $\mathcal{G}(W)$ 中, 节点 i 的邻居集表示为 $\mathcal{N}_i = \{j \in V : w_{ij} > 0\}$. 若有向图 $\mathcal{G}(W)$ 满足 $w_{ij} > 0$ 当且仅当 $w_{ji} > 0$, 则称 $\mathcal{G}(W)$ 为双向图 (bidirectional graph). 若有向图 $\mathcal{G}(W)$ 满足 $w_{ij} = w_{ji}$, 则称 $\mathcal{G}(W)$ 为无向图 (undirected graph). 强连通的无向图称为连通图 (connected graph).

2.2 观念动力学基本模型

本小节介绍观念动力学的基本模型以及相关理论结果.

2.2.1 Degroot 模型

1974 年, Degroot 在文献 [41] 中提出了观念动力学的基本模型 —— Degroot 模型. Degroot 模型刻画了在社会网络中, 一组个体通过交换各自的主观观念从而在某个共同的问题上达成一致的过程. 在由 n 个个体组成的社会网络 $\mathcal{G}(W) = (V, E, W)$ 中, 令 $x_i(k)$ 表示个体 i 在时刻 k 的观念, 其中 $k \in \mathbb{N}$. 则在时刻 $k+1$, 个体 i 的观念由自己及其邻居个体在时刻 k 观念的加权平均决定, 具体地,

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k), \quad (1)$$

其中 w_{ij} 为邻接矩阵 W 的元素, 且满足 $\sum_{j=1}^n w_{ij} = 1$. 令 $x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^T \in \mathbb{R}^n$ 表示在时刻 k 所有个体的观念组成的向量, 则系统 (1) 的矩阵形式表示为

$$x(k+1) = Wx(k), \quad (2)$$

其中 W 为随机矩阵, 即行和等于 1 的非负矩阵. 在 Degroot 模型中, 图 $\mathcal{G}(W)$ 刻画了个体之间的相互影响, 也称为社会影响网络. 在每一个时刻, 个体的观念由自己及其邻居个体在上一个时刻的观念共同决定, 即 $x_i(k+1)$ 等于 $x_j(k)$ 的加权平均, 其中 $j \in \mathcal{N}_i$. 此外, Degroot 模型假设社会影响网络是时不变的 (time-invariant). 因此, Degroot 模型包含简单的同质个体、时不变的影响网络以及加权平均的决策方式, 可以视为描述社会网络及其上的观念演化的基本模型.

2.2.2 观念的扩散和聚合

观念在网络中的扩散和聚合是观念动力学研究的重点, 本小节介绍关于 Degroot 模型的收敛性和一致性的结果. 首先, 给出 Degroot 模型收敛性 (convergence) 和一致性 (consensus) 的定义.

定义1 (收敛性) 若模型 (2) 满足对任意初始观念 $x(0)$, 存在向量 $x^* \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x^*,$$

则称模型 (2) 是收敛的.

进一步地, Degroot 模型的一致性定义如下.

定义2 (一致性) 若模型 (2) 满足对任意初始观念 $x(0)$, 存在实数 α 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \alpha \mathbf{1}_n,$$

则称模型 (2) 可以达到一致.

由定义 1 和 2 可知, 一致性是收敛性的特殊情况. 由式 (2) 可得

$$x(k) = W^k x(0), \quad (3)$$

即在给定的初始观念下, Degroot 模型在任意时刻的观念完全由社会影响网络 $\mathcal{G}(W)$ 决定. 由于 W 为随机矩阵, 故式 (2) 也可看作离散时间齐次 Markov 链 (discrete-time homogeneous Markov chain) 的状态转移方程. 在文献 [41] 中, 作者应用有关 Markov 链 [46] 的知识给出了 Degroot 模型达到一致的充要条件. 下面结合离散时间多智能体系统的研究结果, 对 Degroot 模型收敛性和一致性的结果作一个总结.

定理1 对 Degroot 模型 (2), 下述诸结论等价:

- (a) 模型 (2) 是收敛的.
- (b) 极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} W^k$ 存在.
- (c) W 是非周期的 (aperiodic) [47].
- (d) 若 λ 为 W 的特征值, 则 $|\lambda| = 1$ 当且仅当 $\lambda = 1$ [47].
- (e) $\mathcal{G}(W)$ 的每个独立强分支中, 都至少存在一个节点, 该节点所有的回路的长度互质 (即最大公约数为 1).

在定理 1 中, (b) 可直接由式 (3) 得到. 关于 (c), 由于 W 是随机矩阵, 故 $\rho(W) = 1$, 且 $\|W^k\|_\infty \leq \|W\|_\infty^k = 1$, 所以 W^k 当 $k \rightarrow \infty$ 时极限存在当且仅当 W 非周期. (d) 和 (e) 分别是 W 非周期的关于特征值和图的充分必要条件. 关于 (d), 由于 W 位于复平面单位圆上的特征值除 1 之外都是周期的, 位于单位圆之内的特征值都是稳定的, 故 W 非周期当且仅当 W 位于复平面单位圆上的特征值只有 1. 关于 (e), 若 W 是可约的 (reducible), 对 W 做如下置换变换:

$$\tilde{W} = P^T W P = \begin{bmatrix} W_1 & \times & \cdots & \times \\ & W_2 & \cdots & \times \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & W_l \end{bmatrix},$$

其中每个分块 W_i 都是不可约的 (irreducible). 由可约的定义 (Definition 6.2.21, [48]) 知以上置换变换必存在. 由于强连通图对应的矩阵是不可约的, 故 W_i 为 $\tilde{W}$ 的强分支对应的邻接矩阵. 对 $\tilde{W}$ 的入度大于零的强分支, 由 $\tilde{W}$ 的分块形式知其对应的 W_i 为不可约严格次随机矩阵 (strictly substochastic matrix, 即至少有一行的行和严格小于 1 的次随机矩阵), 由 Taussky 定理 (Theorem 6.2.26, [48]) 可得 $\rho(W_i) < 1$. 对 $\tilde{W}$ 的独立强分支对应的 W_i , 由文献 [48] 中定理 8.5.3 直接可得 W_i 非周期当且仅当 $\mathcal{G}(W_i)$ 中至少存在一个节点, 该节点的所有回路的长度互质. 此外, 由定理 1(e) 可以立刻得到下述推论.

推论1 若 $\mathcal{G}(W)$ 的每个独立强分支中都至少存在一个节点有自环, 则模型 (2) 收敛.

定理2 对 Degroot 模型 (2), 下列诸结论等价:

- (a) 模型 (2) 可以达到一致.
- (b) 存在唯一的非负向量 $\omega \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} W^k = \mathbf{1}_n \omega^T$, 其中 $\omega^T W = \omega^T$ 且 $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ [25].
- (c) 1 是 W 唯一的最大模特征值 (maximum-modulus eigenvalue), 且其代数重数为 1 [25].
- (d) 存在正整数 m 使得矩阵 W^m 中至少有一列的元素全为正 [41].
- (e) $\mathcal{G}(W)$ 只有一个非周期的独立强分支.
- (f) $\mathcal{G}(W)$ 有生成树且至少存在一个根节点, 其所有的回路的长度互质.
- (g) 以 W 作为概率转移矩阵的 Markov 链只有一个正常返 (positive recurrent) 并且非周期的不可约闭集 [41].

在文献 [25] 中, 作者得出了固定网络拓扑下的离散时间多智能体系统在假设图 $\mathcal{G}(W)$ 的任意节点有自环的前提下达到一致性的充要条件, 即 $\mathcal{G}(W)$ 有生成树. 由定理 1 可知, 有自环并非模型 (2) 收敛的必要条件. 在定理 2(f) 中, 对有向图 $\mathcal{G}(W)$, 若存在根节点, 则所有根节点必构成唯一的独立强分支, 故只要有一个根节点保证非周期即可保证 1 是 W 唯一的最大模特征值, 有生成树则保证了 W 的 1 特征值的代数重数等于 1. 此外, 由有向图的相关概念易知条件 (d), (e), (g) 均为 (f) 的等价条件. 由定理 2 可知, 在定理 1 中, 每个独立强分支内的个体的观念可以达到一致, 而对于非独立的强分支, 其观念收敛到所有其能接收到信息的独立强分支观念的加权平均. 这也就是说, 在收敛的前提下, 如果模型 (2) 不能达到观念一致, 则其最终可以达到观念分群 (opinion cluster). 结合 W 的分块形式和 Perron-Forbenius 定理 [49], 可以得到下述关于定理 2(b) 中非负向量 ω 的结果.

定理3 若模型 (2) 能达到一致, 则 $\alpha = \omega^T x(0)$. 且 $\omega_i > 0$ 当且仅当 i 是 $\mathcal{G}(W)$ 的根节点. 特别地, 若 $\mathcal{G}(W)$ 强连通, 则对任意的 $i \in V$ 有 $\omega_i > 0$ [26].

在模型 (2) 中, 收敛性和一致性只与 $\mathcal{G}(W)$ 的网络结构有关, 而与边的具体权重无关. 与有关矩阵 W 的条件相比, 图条件更易判断且一目了然, 因此是网络化系统研究中关注的重点. 定理 2 和 3 说明, 若社会网络中存在某些可以将其观念扩散到全网络的个体 (即对应有向图中的根节点), 整个网络的观念会一致收敛到这些个体初始观念的凸组合.

随着多智能体系统相关研究的深入, 连续时间动力学和切换网络拓扑下的 Degroot 模型 [23~25] 以及其更复杂的变形也得到了进一步的发展, 包括异步一致性 [50]、时延 [51]、有限时间一致性 [52]、leader-following 结构 [53~56] 和符号网络 [57] 等. 基于 Gossip 算法 [58], Acemoglu 等 [59]、Frasca 等 [43] 和 Li 等 [60] 分别研究了随机的观念动力学模型. 下文将从个体差异、交互方式以及决策过程 3 个维度对基于 Degroot 模型的扩展模型作一个梳理和总结.

3 观念动力学中的个体差异

Degroot 模型假设网络中的个体是具有简单认知能力的同质个体, 然而在现实中, 个体的认知过程往往更为复杂, 且认知能力存在差异. 本节介绍具有个体差异的观念动力学模型. 我们将重点介绍带有固执个体的 F-J 模型以及基于 F-J 模型的相关拓展工作.

3.1 Friedkin-Johnsen 模型

1999 年, Friedkin 和 Johnsen 在文献 [42] 中提出了 F-J 模型. 在 Degroot 模型中, 个体的观念完全由其在网络中邻居的观念决定, 也就是说个体对社会影响是完全开放的. 作为对 Degroot 模型的拓

展, F-J 模型假设不同个体对自身的初始观念具有不同程度的固执性. 作者引入了一个对角矩阵来描述个体对社会影响的敏感程度, 即

$$x(k+1) = \Xi W x(k) + (I - \Xi)x(0), \quad (4)$$

其中 $\Xi = \text{diag}(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 且满足 $\xi_i \in [0, 1]$. ξ_i 代表个体 i 对其他个体影响的敏感程度, 相应地, $1 - \xi_i$ 代表 i 对自身初始观念的固执程度. 因此, 若 $\xi_i = 1$, 称 i 为非固执个体; 若 $0 < \xi_i < 1$, 称 i 为部分固执个体; 若 $\xi_i = 0$, 称 i 为完全固执个体. 部分固执个体和完全固执个体统称为固执个体.

在模型 (4) 中, 若 $\xi = \mathbf{1}_n$, 则 F-J 模型退化成 Degroot 模型. 相反, 考虑系统 (4) 的增广形式, 令 $\hat{x}(k) = [x(0)^T x(k)^T]^T$, 则

$$\hat{x}(k+1) = \hat{W} \hat{x}(k), \quad (5)$$

其中

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ (I - \Xi) & \Xi W \end{bmatrix}.$$

式 (5) 说明 F-J 模型也可以看作 Degroot 模型的特殊情况. 因此, 由定理 1 和 2 可直接得到下述关于 F-J 模型收敛性和一致性的结果.

定理4 对 F-J 模型 (4), 下列诸结论等价:

- (a) 模型 (4) 是收敛的.
- (b) 极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} (\Xi W)^k$ 存在.
- (c) ΞW 是非周期的 (aperiodic) [61].
- (d) 若 λ 为 ΞW 的特征值, 则 $|\lambda| = 1$ 当且仅当 $\lambda = 1$ [61].
- (e) $\mathcal{G}(W)$ 的每个完全由 1 个以上非固执节点组成的独立强分支中都至少存在一个节点, 该节点的所有回路的长度互质 [61].

在定理 4 中, 条件 (b), (c), (d) 可以直接由定理 1 和式 (5) 得到. 对于定理 4(e), 由于含有固执节点的独立强分支对应的分块矩阵是严格次随机的, 因此其谱半径小于 1. 此外, 由单个非固执节点组成的独立强分支对应的分块矩阵只有一个特征值 1, 因此只需保证完全由 1 个以上非固执节点组成的独立强分支对应的分块矩阵非周期即可保证 ΞW 是非周期的. 由定理 4(e) 可直接得到以下推论.

推论2 F-J 模型 (4) 满足:

- (a) 若 $\mathcal{G}(W)$ 的每个完全由 1 个以上非固执节点组成的独立强分支中都至少存在一个有自环的节点, 则模型 (4) 收敛.
- (b) 若 $\mathcal{G}(W)$ 中不包含完全由非固执节点组成的独立强分支, 则模型 (4) 收敛, 且 $x^* = (I - \Xi W)^{-1}(I - \Xi)x(0)$.

其中推论 2(b) 中的条件也可表述为对任意非固执节点, 总存在一条从某个固执节点到该节点的有向路径. 事实上, 从多智能体系统包围控制 (containment control) [53] 的角度, 推论 2(b) 所描述的是一个包围问题, 也就是说固执个体的初始观念可以被虚拟为固定的领航者 (leader). 在文献 [62] 中, Ghaderi 和 Srikant 在假设 W 是不可约的严格次随机矩阵的前提下, 把 F-J 模型重新建模成一个随机行走 (random walk) 问题, 借助随机行走的首达概率 (first hitting probability) 给出了 F-J 模型的收敛状态, 并分析了 F-J 模型的收敛速度.

值得注意的是, F-J 模型很难达到一致. 由定理 2 可知, 在 Degroot 模型中, 观念无法达到一致的原因是观念无法在网络中充分扩散. 但是对 F-J 模型, 根据推论 2(b), 即使 $\mathcal{G}(W)$ 是强连通的, 系统的最终观念也很难对任意初始观念达到一致, 因为需要对网络的权重作很严格的限制才能使矩阵 $(I - \Xi W)^{-1}(I - \Xi)$ 的秩 (rank) 等于 1. 因此, F-J 模型中观念不能达到一致性的原因更可能是个体的固执性使得扩散到网络中的观念无法充分地聚合. 正如 Horowitz^[63] 所言: “任何有关一致和决策的严肃理论都必然同时也是关于不一致和决策无法完成的理论”, Degroot 模型刻画了社会网络中观念达到一致的过程, 而 F-J 模型通过引入个体的固执程度解释了社会网络中观念不能一致的现象.

但是, 相关社会研究表明, 当带有固执个体的群体连续地讨论一系列相关问题或重复出现的相似问题时, 群体的观念最终有可能达到一致. 在文献 [61] 中, 作者基于路径依赖理论 (path-dependence)^[64, 65] 研究了 F-J 模型在问题序列 (issue sequence) 和时间序列上演化时观念的一致性. 令 $s = 0, 1, 2, \dots$ 为问题序列, $x(s, k)$ 代表系统在 k 时刻对问题 s 的观念. 假设在时刻 k_s , 个体停止讨论问题 $s - 1$, 并开始讨论问题 s , 则 F-J 模型可表示为

$$x(s, k + 1) = \Xi W x(s, k) + (I - \Xi)x(s, k_s),$$

其中 $k \in [k_s, k_{s+1})$.

在现实中, 组织或团体经常会面临一系列特定领域的问题. 根据路径依赖理论, 个体对这些连贯的相似问题的观念具有惯性, 即个体对某一问题的观念受到其对之前的相似问题观念的限制. 因此作者假设个体通过优化以下目标函数形成对下一个问题的初始观念:

$$C_i(x) = \zeta_i(x_i - x_i(s, 0))^2 + (1 - \zeta_i) \sum_{j=1}^n w_{ij}(x_i - x_j)^2,$$

其中 ζ_i 表示个体 i 的惯性系数 (inertia factor), 且 $\zeta_i = 1 - \xi_i$. 由于 $C_i(x)$ 为二次凸函数, 故

$$x(s + 1, k_{s+1}) = \Lambda x(s, k_s) + (I - \Lambda)W x(s + 1, k_{s+1}),$$

其中 $\Lambda = \text{diag}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)^T$. 若推论 2(b) 中的条件成立, 则 $I - W + \Lambda W = I - \Xi W$ 非奇异. 令 $\Psi = [\psi_{ij}] = (I - \Xi W)^{-1}(I - \Xi)$, 则

$$x(s + 1, k_{s+1}) = \Psi x(s, k_s).$$

关于图 $\mathcal{G}(W)$ 和图 $\mathcal{G}(\Psi)$ 有以下结果:

引理1 若 $\mathcal{G}(W)$ 中不包含完全由非固执节点组成的独立强分支, 则

- (a) 图 $\mathcal{G}(\Psi)$ 中所有的固执节点都有自环;
- (b) 对任意满足 $\xi_i > 0$ 的节点 i 和满足 $\xi_j < 1$ 的节点 j , $\psi_{ij} > 0$ 当且仅当在图 $\mathcal{G}(W)$ 中存在一条不包含完全固执节点的从节点 i 到节点 j 的有向路径.

引理 1 表明当 F-J 模型在问题序列上演化时, 网络的连通性被进一步加强了. 此外, 引理 1(b) 说明在图 $\mathcal{G}(\Psi)$ 中, 任意的部分固执节点之间如果存在有向路径, 则必存在和路径同方向的有向边, 即若部分固执节点构成的子图有生成树, 则其必定是一个星形网络. 在文献 [61] 中, 作者定义若存在实数 α 使得 $\lim_{s \rightarrow \infty} x(s, k_s) = \alpha \mathbf{1}_n$, 则称 F-J 模型可以在问题序列上达到一致. 由引理 1 和定理 2 可得下述定理.

定理5 假设任意节点 $i \in V$ 满足 $\xi_i > 0$ 且 $\mathcal{G}(W)$ 中不包含完全由非固执节点组成的独立强分支. 则 F-J 模型在问题序列上能达到一致当且仅当图 $\mathcal{G}(W)$ 中存在一个部分固执节点, 该节点具有到其他所有部分固执节点的有向路径.

关于引理 1 和定理 5 的详细证明请参考文献 [61]. 定理 5 解释了在社会网络中存在固执个体的情况下观念仍然可以达到一致的原因, 即在问题序列上网络连通性的增强抵消了个体固执性对个体达到一致的阻碍. 在文献 [66] 中, 作者进一步研究了 F-J 模型在问题序列上的观念包围 (opinion containment) 问题.

3.2 Friedkin-Johnsen 模型的拓展

近年来, 来自不同领域的研究者对 F-J 模型进行了进一步拓展. Bindel 等 [67] 将 F-J 模型重新建模成一个最佳对策博弈 (best-response game), 对每个个体 i , 分配如下二次成本函数 (cost function):

$$c_i(x) = \xi_i \sum_{j=1}^n w_{ij}(x_i - x_j)^2 + (1 - \xi_i)(x_i - x_i(0))^2$$

和全局成本函数:

$$C(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x).$$

在最佳对策博弈中, 个体 i 根据自己的观念和网络中邻居的观念决定自己下一时刻的观念以最小化自己的局部成本函数, 即

$$x_i(k+1) = \arg \min_{x_i(k)} c_i(x(k)).$$

由于 $c_i(x)$ 为可微的二次凸函数, 故其最优点在导数等于零时取得. 由上式直接可得 $x(k+1) = \Xi W x(k) + (I - \Xi)x(0)$. 由势博弈 (potential game) [68] 的相关知识和 F-J 模型的收敛性可知, 以上博弈存在 Nash 平衡 (Nash equilibrium), 且在一定条件下可以达到 Nash 平衡. 但是, 一般情况下 Nash 平衡点不一定是全局最优点. 在文献 [67] 中, 作者定义全局最优成本和 Nash 平衡点的全局成本的比值为无秩序的代价 (price of anarchy, POA) [69], 分别讨论了在无向网络和有向网络下 POA 的范围.

在文献 [70,71] 中, Friedkin 等根据社会网络中个体的反映评价 (reflected appraisal) 和个体的社会权力 (social power) 之间的关系提出了基于 F-J 模型的自我评价动力学 (self-appraisal dynamics). 作者定义个体的自我评价为个体在影响网络中的自权重. 若 F-J 模型收敛, 则存在随机矩阵 V 满足

$$V = \lim_{k \rightarrow \infty} \left((\Xi W)^k + \sum_{t=0}^{k-1} (\Xi W)^t (I - \Xi) \right),$$

即 $x^* = Vx(0)$. 令 $\omega = \frac{V^T \mathbf{1}_n}{n}$, 则 ω_i 代表个体 i 的初始观念在网络的最终观念 x^* 中的平均权值, 即个体 i 的社会权力. 由于在 W 中, w_{ii} 代表个体 i 自身观念对自己的影响, 作者假设在一个问题序列 $s = 0, 1, 2, \dots$ 上, 个体在社会影响网络中的自权重根据个体的社会权力进行演化, 即

$$w_{ii}(s) = \omega_i(s).$$

假设社会影响网络中个体之间的互相影响固定, 用对角元素全为 0 的随机矩阵 C 表示, 则

$$W(s) = \text{diag}(\omega(s)) + (I - \text{diag}(\omega(s)))C.$$

令 $x_i(s, k)$ 代表个体 i 在时刻 k 关于问题 s 的观念, 则结合 F-J 模型 (4) 可得

$$x(s, k+1) = \Xi W(s)x(s, k) + (I - \Xi)x(s, 0).$$

在文献 [71] 中, 作者分析了上述基于 F-J 模型的自我评价动力学在某些特殊网络下的收敛性以及自我评价大小与网络结构的关系, 但是其在更一般网络下的收敛性仍然有待解决.

基于 Converse [72] 提出的信念系统 (belief system) 理论, Parsegov 等 [44, 73] 在 F-J 模型中引入了一个矩阵来刻画个体对不同问题的观念之间的互相影响, 提出了带有多问题关联结构 (multi-issues dependence structure, MiDS) 的 F-J 模型. 令 $x_i(k) \in \mathbb{R}^m$ 代表个体 i 在时刻 k 对 m 个不同问题的观念向量, 且假设个体对不同问题的观念是互相关联的, 则基于 F-J 模型信念系统动力学可表示为

$$x_i(k+1) = \xi_i C \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k) + (1 - \xi_i) x_i(0),$$

其中 $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为 MiDS 矩阵, 刻画个体对不同问题的观念之间的影响. 作者分析了上述模型的稳定性和收敛性, 并讨论了如何对矩阵 C 进行估计. 此外, 在文献 [43, 73, 74] 中, 研究者对基于 Gossip 算法的 F-J 模型进行了详细的研究. 文献 [75] 则从社会控制论的角度出发, 基于 F-J 模型讨论了社会群体分裂的问题.

除固执个体之外, 社会网络中还有可能存在其他类型的个体, 如带有恶意的对抗性个体 (adversaries). 1982 年, Lamport 等 [76] 提出了拜占庭将军问题, 来描述分布式计算中的容错问题: 在拜占庭帝国, 将军们分别带领一支军队与敌人进行作战, 将军们之间通过交换各自的意见和情报进行决策. 但是, 将军中间可能存在叛徒, 叛徒的目的是通过提供错误的信息或情报使得所有将军最终无法达成一致的决策或作出错误的决策. 所以拜占庭将军问题即指在固定的决策方式下, 将军的总数满足什么样的条件可以避免叛徒对最终群体决策的影响. 在文献 [77] 中, 作者从多智能体系统的角度研究了拜占庭将军问题, 并给出了可以保证群体决策不被对抗性个体影响的决策方式和个体个数应满足的条件.

4 观念动力学中的个体交互方式

本节基于个体交互方式的不同, 介绍 Degroot 模型中有关社会影响网络 $\mathcal{G}(W)$ 的相关拓展工作. 我们重点介绍时变网络 (time-varying networks)、状态相关网络 (state-dependent networks) 和符号网络 (signed networks).

4.1 时变的社会网络

在 Degroot 模型中, 作者假设社会影响网络 $\mathcal{G}(W)$ 是固定的. 但是在现实中, 一个群体中个体之间的影响关系总是时刻变化着的. 假设在模型 (2) 中, 社会影响网络与时间 k 有关, 即 $W = W(k)$, 则

$$x(k+1) = W(k)x(k). \quad (6)$$

特别地, 若 $W(k)$ 取自一个有限集, 则称模型 (6) 的网络是切换的 [23, 25]. 在切换网络的情形下, 借助 Wolfwitz [78] 关于 SIA (stochastic, indecomposable, aperiodic) 矩阵乘积的结果, 直接可得下述定理.

定理6 如果下述条件之一成立, 则模型 (6) 可以达到一致.

(a) 存在一致有界的时间区间序列 $[k_s T, k_{s+1} T)$, $s = 0, 1, 2, \dots$, 其中 $k_0 = 0$ 且对任意的 s , $k_{s+1} - k_s$ 有上界, 满足对任意的 s , 矩阵乘积 $W(k_{s+1} T - 1) \cdots W(k_s T + 1)$ 是 SIA 矩阵 [25].

(b) 存在一致有界的时间区间序列 $[k_s T, k_{s+1} T), s = 0, 1, 2, \dots$, 满足在每个时间区间上, 社会影响网络的并图 $\bigcup_{k=k_s T+1}^{k_{s+1} T-1} \mathcal{G}(W(k))$ 有生成树且至少包含一个根节点, 该根节点的所有回路的长度互质.

对于更一般的情况, 即不要求 $W(k)$ 取自有限集, 文献 [79,80] 研究了模型 (6) 的一致性和收敛性. 在文献 [80] 中, 作者证明了当矩阵序列 $\{W(k)\}$ 是强非周期的且满足 cut-balance 条件时模型 (6) 收敛. 若 $\{W(k)\}$ 是强非周期的且满足 cut-balance 条件和无穷流特性 (infinite flow property), 则模型 (6) 可以达到一致. 此外, 作者还证明了模型 (6) 可以达到一致的必要条件是 $\{W(k)\}$ 满足无穷流特性, 即 $\{W(k)\}$ 对应的无穷流图 (infinite flow graph) 连通. 在关于时变网络上的 Degroot 模型的研究过程中, 有限非齐次 Markov 链 (finite inhomogeneous Markov chain) 和遍历性 (ergodicity) 的知识有着重要作用, 关于矩阵序列 $\{W(k)\}$ 收敛性或遍历性的详细讨论请参考文献 [81,82].

4.2 状态相关的社会网络

时变网络的更特殊情况是状态相关网络, 即网络不仅随着时间变化而变化, 还与系统的状态有关. 本小节介绍 Hegselmann-Krause (H-K) 模型和 Degroot-Friedkin (D-F) 模型以及相关拓展工作.

4.2.1 Hegselmann-Krause 模型

在文献 [83] 中, Hegselmann 和 Krause 提出了 H-K 模型. 不同于 Degroot 模型和 F-J 模型等线性模型, H-K 模型是非线性的. 其假设网络中的每个个体都具有一个信任边界 (confidence bound), 个体的观念只能被观念处于自己信任边界之内的其他个体所影响, 也就是说 H-K 模型中个体之间的互相影响是状态相关的. 令 d 代表个体的信任边界, 则 H-K 模型可以表示为

$$x_i(k+1) = \frac{1}{|\mathcal{N}_i(k)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} x_j(k), \quad (7)$$

其中 $\mathcal{N}_i(k) = \{j \in V : |x_j(k) - x_i(k)| < d\}$. 由个体邻居集 $\mathcal{N}_i(k)$ 的定义可知 H-K 模型的网络是无向的. 然而, 由于 H-K 中网络既受个体观念的影响, 又影响个体观念的演化, 故对 H-K 模型的理论分析非常困难. 文献 [84] 研究了 H-K 模型收敛状态之间的距离. 在文献 [85] 中, 作者分析了 H-K 模型中观念的排序不变性, 证明了 H-K 模型可以在有限时间内收敛, 并对不同初始观念分布下的收敛结果进行了仿真.

定理7 H-K 模型 (7) 在有限时间内收敛. 特别地, 假设最终观念为 x^* , 则对任意的 i, j , 都有 $x_i^* = x_j^*$ 或 $|x_i^* - x_j^*| > d$ [85].

由于 H-K 模型的有限时间收敛性, 对其收敛时间的估计也吸引了大量研究者. 文献 [86~88] 研究了 H-K 模型的收敛时间, 并分别给出了收敛时间的上界. Chazelle 等 [89~91] 从算法的角度研究了 H-K 模型及带有惯性的 H-K 模型的收敛性和收敛时间. 文献 [92] 基于 H-K 模型提出了异质的影响网络的概念, 即每个个体不仅具有信任边界, 还具有影响边界. Hegselmann 等 [93] 基于 H-K 模型进一步提出了社会网络中的真值搜索 (truth seeking) 问题.

由对时变网络的 Degroot 模型一致性的分析可知, H-K 模型要达到一致必须保证网络具有持续的连通性. 但是由于 H-K 模型中网络和观念复杂的耦合性, 使得其连通性保持 (connectivity preservation) 问题的研究变得非常困难. 在文献 [94,95] 中, 作者分别使用不同的方法研究了对称的 H-K 模型的连通性保持问题, 并分别给出了 H-K 模型保持连通性的初始条件, 从而得到了 H-K 模型达到一致的充分条件. 然而, H-K 模型保持连通性和能达到一致的必要条件仍然是有待解决的问题.

4.2.2 Degroot-Friedkin 模型

在 H-K 模型中, 网络拓扑直接由网络中的观念和个体的信任边界决定. 文献 [96] 结合 Friedkin [70] 的社会权力理论提出了 D-F 模型. 在 D-F 模型中, 个体之间的影响固定, 但个体在影响网络中的自权重由个体的社会权力决定. 假设 $s = 0, 1, 2, \dots$ 为问题序列, 则模型 (2) 在问题序列上表示为

$$x(s, k+1) = W(s)x(s, k). \quad (8)$$

由定理 2(b), 若对任意 s , 系统 (8) 能达到一致, 则存在唯一的非负向量 $\omega(s) \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x(s, k) = \mathbf{1}_n \omega^T(s)x(s, 0)$, 即最终的一致观念 $\alpha = \omega(s)^T x(s, 0)$. 在 D-F 模型中, 假设个体在下一个问题中的自我评价, 即个体在影响网络中的自权重, 等于其在上一个问题中的社会权力, 即个体初始观念在一致观念中所占比例, 也就是 $w_{ii}(s+1) = \omega_i(s)$. 令 C 为对角元素全为 0 的随机矩阵, 网络 $\mathcal{G}(C)$ 代表个体之间的影响关系, 则 $W(s+1) = \text{diag}(\omega(s)) + (I - \text{diag}(\omega(s)))C$. 在文献 [96] 中, 作者分析了个体的社会权力向量 $\omega(s)$ 在问题序列 $s = 0, 1, 2, \dots$ 上的演化. 对 D-F 模型的进一步研究请参考文献 [97~99].

在文献 [100] 中, 作者基于 D-F 模型进一步分析了社会网络中个体间社会影响的演化. 令 $x_{ij} \in \mathbb{R}$ 表示个体 i 对个体 j 的评价, $x_{ij}^+ = \max\{x_{ij}, 0\}$. 假设在网络中, 个体只考虑被其作出正面评价的其他个体的观念, 则个体之间的影响网络由评价矩阵 $X = [x_{ij}]_{n \times n}$ 的正元素决定:

$$w_{ij}(X(k)) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon + \sum_{j=1}^n x_{ij}^+(k)} (x_{ij}^+(k) + \epsilon), & i = j, \\ \frac{1}{\epsilon + \sum_{j=1}^n x_{ij}^+(k)} x_{ij}^+(k), & i \neq j, \end{cases}$$

其中 $\epsilon > 0$ 为自我评价常数. 相应地, 个体间的评价又由个体间的影响决定:

$$X(k+1) = W(X(k))X(k).$$

也就是说, 网络中的社会影响和个体间的评价是共演化的 (coevolutionary) [101~105]. 基于上述模型, 文献 [100] 分析了社会影响网络 $\mathcal{G}(W(k))$ 和个体间的评价共演化时最终形成的社会影响结构, 并对社会网络中的分层现象给出解释.

4.3 符号图描述的社会网络

在上述所有模型中, 个体间的相互影响都是正向的. 然而在实际中, 由于误会或个体之间的敌对关系等因素, 个体之间的互相影响也有可能是负向的. Altafini [57] 使用符号图的理论研究了带有负权重的社会网络. 在 Degroot 模型中, 若放松对 W 为非负的随机矩阵的要求, 则 W 对应的网络 $\mathcal{G}(W)$ 称为符号网络. 此外, 假设 $\sum_{j=1}^n |w_{ij}| = 1$, 也就是说 $|w_{ij}|$ 代表个体 j 对 i 的影响在 i 所能受到的总的社会影响中所占的比例. 在符号图的研究中, 结构平衡 (structurally balanced) 图 [106] 是一个重要概念. 下面给出符号图 $\mathcal{G}(W)$ 结构平衡的定义.

定义3 (结构平衡) 对符号网络 $\mathcal{G}(V, E, W)$, 如果存在节点集 V 的互不相交的子集 V_1, V_2 满足 $V_1 \cup V_2 = V$ 且每个子集内部的边的权重都是非负的, 子集之间的边的权重都是非正的, 则称 $\mathcal{G}(V, E, W)$ 是结构平衡的.

对结构平衡的符号网络 $\mathcal{G}(V, E, W)$, 根据上述定义, 存在置换变换 P 满足

$$\tilde{W} = P^T W P = \begin{bmatrix} W_1 & W_{12} \\ W_{21} & W_2 \end{bmatrix},$$

其中 W_1, W_2 分别对应 V_1, V_2 中的节点. 故 W_1, W_2 为非负矩阵, W_{12}, W_{21} 为非正矩阵. 令对角矩阵

$$D = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

则

$$\bar{W} = D\tilde{W}D = \begin{bmatrix} W_1 & -W_{12} \\ -W_{21} & W_2 \end{bmatrix}$$

为随机矩阵. 令 $\tilde{P} = PD$, 则 $\bar{W} = \tilde{P}^T W \tilde{P}$ 且 $\tilde{P}^T \tilde{P} = I$, 即 W 与 $\bar{W}$ 相似. 令 $y(k) = \tilde{P}^T x(k)$, 则

$$y(k+1) = \tilde{P}^T W \tilde{P} y(k) = \bar{W} y(k). \quad (9)$$

因为 $\bar{W}$ 为随机矩阵, 故 $y(k)$ 达到一致当且仅当定理 2 中的条件成立. 此时 $x^* = \tilde{P} y^* = P D y^*$, 即 V_1 中个体的观念一致到 $-\alpha$, V_2 中个体的观念一致到 α , 这种情形也被称为二分一致 (bipartite consensus). 由于 $\bar{W}$ 和 W 具有相同的特征值且 $\mathcal{G}(\bar{W})$ 和 $\mathcal{G}(W)$ 对应于相同的网络结构, 故根据定理 2 直接可得下述定理.

定理 8 若符号网络 $\mathcal{G}(W)$ 结构平衡, 则 Degroot 模型能达到二分一致当且仅当下述条件之一成立.

- (a) $\mathcal{G}(W)$ 只有一个非周期的独立强分支.
- (b) $\mathcal{G}(W)$ 有生成树且至少存在一个根节点, 该节点的所有回路的长度互质.

关于符号网络更详细的性质以及非结构平衡图下 Degroot 模型的收敛性及一致性, 请参考文献 [57, 107, 108]. 除时变网络、状态相关网络和符号网络之外, 随机网络 (random networks) 上的观念动力学模型也是一个重要的研究方向, 有关随机网络上 Degroot 模型的研究结果可以参考文献 [109~111].

5 观念动力学中的个体决策过程

Degroot 模型假设个体简单地根据邻居观念的加权平均来决定自己的观念, 然而现实中社会个体的决策方式可能更复杂. 人们在观察到其他人的行为或听到其他人的意见后总会仔细考虑再决定自己的行为或意见, 而不是对所有得到的信息做加权平均来作出自己的决定. 本节将重点介绍偏见同化 (biased assimilation) 模型及博弈中基于学习理论 (learning theory) 的决策方式.

5.1 偏见同化模型

在文献 [112] 中, 作者基于社会心理学中的偏见同化理论^[113]提出了偏见同化模型. 即社会个体会迅速接受自己确认的信息, 同时会慎重审视自己无法确定的信息. 在文献 [113] 中, 作者发现当所有个体都能接收到相同的不确定信息时, 群体的观念最终更可能发生极化 (polarization). 文献 [112] 假设在时刻 $k+1$, 个体 i 根据以下方式决策:

$$x_i(k+1) = \frac{w_{ii}x_i(k) + (x_i(k))^{b_i}s_i(k)}{w_{ii} + (x_i(k))^{b_i}s_i(k) + (1 - x_i(k))^{b_i}(d_i - s_i(k))}, \quad (10)$$

其中 $x_i \in [0, 1]$, $s_i(k) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} x_j(k)$ 表示 i 的邻居观念的加权和, $b_i \geq 0$ 为偏见系数, $d_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}$ 为 i 在网络中的入度. 特别地, 这里不要求 W 是随机矩阵.

在式 (10) 中, $(x_i(k))^{b_i}$ 代表个体 i 对其邻居观念的加权和分配的权重. 由于 $d_i - s_i(k) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(1 - x_j(k))$, 故 $(1 - x_i(k))^{b_i}$ 为个体 i 对其邻居观念的对立面分配的权重. 当 b_i 固定时, 若 $x_i(k)$ 更接近 1, 则 $(x_i(k))^{b_i}$ 更大而 $(1 - x_i(k))^{b_i}$ 更小, 且 b_i 越大这种差异越明显. 在这种决策方式下, 当偏见系数足够大时, 就会产生极化. 在文献 [112] 中, 作者分别讨论了在双岛网络 (two-island network) 结构下初始观念满足一定条件时模型 (10) 分别达到一致、持续不一致和极化的偏见系数 b_i 的取值范围, 并解释了著名的回声室效应 (echo-chamber effect) [114].

5.2 社会网络中的博弈

如 3.2 小节所述, 博弈模型 [18, 21, 22, 33, 34, 115~117] 是描述群体协调行为的非常有效的工具. 在社会群体中, 个体在决定自己的观念时需要考虑群体中其他人的观念, 故个体观念的形成通常可以解读为持有不同观念的个体相互说服, 最终达到一定观念的过程, 因此个体的这一决策过程也可以用博弈模型进行刻画 [118, 119]. 本小节将介绍几种基于博弈中学习理论的决策方式.

假设在社会网络中, 个体 i 的观念 (策略) x_i 取自有限集 $\mathcal{A}_i$, 则观念向量 $x \in \mathcal{A} = \prod_{i \in V} \mathcal{A}_i$. 记 x_{-i} 为除个体 i 外的个体观念组成的向量. 假设个体 i 的收益函数为 $U_i(x_i, x_{-i})$, 即个体 i 的收益由所有个体的观念共同决定. 假设网络中所有个体均是理性的和趋利的, 即在每一个时刻, 个体 i 从集合 $\mathcal{A}_i$ 中选择能使自己当前收益最大的观念. 由于个体在每个时刻的收益不仅取决于自己的观念, 还取决于其他个体的观念, 故个体会通过对其他个体之前时刻观念的观察来建立一个其他个体的行为模式, 或称经验频率 (empirical frequency). 然后个体通过计算在这个经验频率下自己的最大收益, 得到自己的最佳策略.

在文献 [120, 121] 中, 作者从势博弈和弱非循环博弈 (weakly acyclic game) [122] 的角度讨论了合作控制和势博弈的关系. 在势博弈中, 单个个体单方面改变策略造成的自身收益函数的变化和势函数的变化是完全相等的. 为了放松这个约束, 作者引入了更一般的弱非循环博弈的概念, 并针对时变拓扑提出了间或弱非循环博弈 (sometimes weakly acyclic game) 的概念. 针对势博弈和弱非循环博弈, 作者分别给出了空间自适应对策 (spatial adaptive play, SAP) 和带有惯性的较好反应动力学 (better reply with inertia dynamics, BRID) 等学习算法, 以确保群体决策最终收敛到唯一的 Nash 平衡点.

定义 4 (势博弈和弱非循环博弈) 对个体集 V , 策略集 $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in V}$ 和收益函数集 $\{U_i\}_{i \in V}$:

(a) 其组成一个势博弈当且仅当存在势函数 (potential function) $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, 对任意的 $i \in V$, $x_i^1, x_i^2 \in \mathcal{A}_i$ 和 $x_{-i} \in \prod_{j \in V - \{i\}} \mathcal{A}_j$, 满足

$$U_i(x_i^1, x_{-i}) - U_i(x_i^2, x_{-i}) = \phi(x_i^1, x_{-i}) - \phi(x_i^2, x_{-i}).$$

(b) 其组成一个弱非循环博弈当且仅当存在势函数 $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, 满足若 x 不是 Nash 平衡点, 则存在 $i \in V$ 和 $x_i^* \in \mathcal{A}_i$ 使得

$$U_i(x_i^*, x_{-i}) > U_i(x_i, x_{-i}), \phi(x_i^*, x_{-i}) > \phi(x_i, x_{-i}).$$

由定义 4 可知, 势博弈是特殊的弱非循环博弈. 在弱非循环博弈中, 只要求个体单方面改变策略造成的收益函数和势函数的变化符号相同, 而不要求完全相等. 下面介绍 SAP 算法和 BRID 算法.

SAP. 在每一个时刻 $k+1$, 假设个体 i 以均匀分布的概率被随机地从 V 中选出来更新自己的策略, 同时, 其他个体的策略保持不变, 即 $x_{-i}(k+1) = x_{-i}(k)$. 假设个体 i 在 $k+1$ 时刻将根据 Gibbs

分布 (Gibbs distribution)¹⁾ 随机地选择自己的策略. 令 $p_i^{x_i}(k+1)$ 表示个体 i 在 $k+1$ 时刻选择策略 x_i 的概率, 则

$$p_i^{x_i}(k+1) = \frac{\exp\{\beta U_i(x_i, x_{-i}(k))\}}{\sum_{\tilde{x}_i \in \mathcal{A}_i} \exp\{\beta U_i(\tilde{x}_i, x_{-i}(k))\}},$$

其中 $\beta \geq 0$.

BRID. 定义个体 i 对群体决策 x^0 的严格较好反应集 (strict better reply set) 为 $B_i(x^0) = \{x_i \in \mathcal{A}_i : U_i(x_i, x_{-i}^0) > U_i(x^0)\}$. 在时刻 $k+1$, 个体 i 假设其他个体将保持自己在时刻 k 的策略, 即 $x_{-i}(k+1) = x_{-i}(k)$, 并且根据以下规则更新自己的策略:

- (a) 若 $B_i(x(k)) = \emptyset$, 则 $x_i(k+1) = x_i(k)$;
- (b) 若 $B_i(x(k)) \neq \emptyset$, 则 i 以概率 $p(k+1)$ 选择保持自己的策略不变, 即 $x_i(k+1) = x_i(k)$. 以概率 $\frac{1-p(k+1)}{|B_i(x(k))|}$ 任意选择一个严格较好反应策略, 即 $x_i(k+1) = x^*, x^* \in B_i(x(k))$. 其中 $0 < p(k+1) < 1$ 代表个体的惯性.

在以上算法中, 个体在决定自己的策略时均假设其他个体的策略不变. 在文献 [123] 中, 作者基于虚拟对策 (fictitious play, FP) 算法针对势博弈提出了联合策略虚拟对策 (joint strategy fictitious play, JSFP) 算法. 不同于 SAP 和 BRID 算法, 在 FP 和 JSFP 算法中, 个体在决策时会根据其他个体策略的经验频率来计算自己的最佳策略. 除 FP 和 JSFP 算法外, 后悔匹配 (regret matching)^[124] 和强化学习 (reinforcement learning)^[125] 算法及其变形也要用到个体在之前所有时刻的策略信息. 更多有关学习理论的知识请参考文献 [126~128].

6 总结与展望

本文从个体差异、网络交互和决策方式 3 个维度介绍了当前观念动力学领域的研究现状. 首先, 介绍了描述社会网络上观念演化的基本动力学模型 —— Degroot 模型, 并介绍了关于 Degroot 模型收敛性和一致性的研究结果. 然后, 从个体差异的角度, 介绍了带有固执个体的 F-J 模型以及基于 F-J 模型的相关研究工作. 从网络拓扑的角度, 主要介绍了时变网络模型、状态相关网络下的 H-K 模型和 D-F 模型以及符号网络模型. 从个体决策方式的角度, 介绍了偏见同化模型以及一些博弈中的决策算法. 近年来, 来自控制领域的研究者对复杂系统动力学的深入研究为经典的社会学理论注入了新的活力, 同时也提出了新的问题. 当前观念动力学领域的研究结果虽然已经比较丰富, 但是从控制的角度来看还有很多模型的理论结果尚待完善, 从社会学的角度来看已有的数学模型在背景假设上还比较简单, 建模的过程中忽略了很多社会因素之间的联系. 特别是, 以下几个方面的问题还亟待研究.

(1) 已有的模型中尚有许多公开问题没有解决, 如 H-K 模型一致性的研究中保持网络连通性的充分必要条件目前还没有解决. 由于 H-K 模型在演化过程中其网络拓扑由实时的观念所决定, 故在给定的初始观念和信任边界下, 系统的动力学是确定的. 但是, 确定充要的初值条件非常困难, 目前仅有关于这一问题的充分条件. 而且, 由时变 Degroot 模型的结果可知 H-K 模型要达到一致并不需要每一个时刻的网络拓扑都是连通图, 但是目前已有的充分条件多要求系统在每一个时刻的网络拓扑都是连通的. 此外, 还有很多模型只有仿真结果, 没有严格的理论推导, 特别是当个体性质差异比较大时, 比如信任边界异质的 H-K 模型、惯性系数异质的带惯性的 H-K 模型和大量演化博弈模型.

(2) 目前对观念动力学的研究多假设个体使用凸的决策方式, 这在一定程度上必然导致个体趋同, 但在现实社会中, 个体的决策方式往往更为复杂. 大量关于群体行为的研究已表明非凸的决策方式

1) Gibbs 分布描述在不计外力的情况下, 理想气体处于热平衡状态时气体分子按能量的分布律.

广泛存在于群体的决策过程中, 因此, 在观念动力学模型中引入这些因素可以更细致地刻画群体行为. 此外, 目前观念动力学的研究中大多假设个体在决策时只用到上一个时刻的信息, 对于带有记忆的决策方式涉及得还比较少. 因此, 关于个体信息处理方式方面的研究也将是未来观念动力学研究的一个重点.

(3) 当前还没有能刻画社会网络中群体行为的一般模型. 在多智能体系统的研究中, 一般假设智能体为具有有限行为能力, 并可以同周围环境进行简单交互的个体 (例如蚂蚁、蜜蜂等主要依靠反射机制决策的低等动物). 不同于多智能体系统, 社会网络中的个体具有更复杂的思维和学习能力, 且个体的某些特性会受个体观念演化的影响, 故以多智能体系统刻画的观念动力学模型还有待进一步拓展. 例如, 真实社会中在群体中总存在个体退出或死亡, 同时也伴随着新个体的加入. 这也就是说群体的数目可能是动态的. 其次, 在社会网络中, 很多因素之间都存在着密切的内在联系, 从而影响着系统最终的状态, 如个体的信任边界或固执系数和个体在社会影响网络中的出度和入度之间的关系. 从这个角度看, 社会网络中的观念以及个体的某些特性实际上是共演化的. 此外, 从个体性质、个体交互方式以及个体决策方式 3 个维度出发, 任何两个不同维度的问题综合在一起都会产生很大的理论推导难度 (如 F-J 模型和 H-K 模型结合会得到惯性系数异质的带惯性的 H-K 模型), 这些问题还有待进一步研究.

参考文献

- 1 Lewes G H. Problems of Life and Mind. London: Trübner & Company, 1877
- 2 Waldrop M M. Complexity: the Emerging Science at the Edge of Order and Chaos. New York: Simon and Schuster, 1993
- 3 Holland J H. Emergence: From Chaos to Order. Oxford: Oxford University Press, 1998
- 4 Corning P A. The re-emergence of "emergence": a venerable concept in search of a theory. Complexity, 2002, 7: 18-30
- 5 Qian X S, Yu J Y, Dai R W. A new discipline of science — the study of open complex giant system and its methodology. Chin J Nat, 1990, 13: 3-10 [钱学森, 于景元, 戴汝为. 一个科学新领域 —— 开放的复杂巨系统及其方法论. 自然杂志, 1990, 13: 3-10]
- 6 Guo L. What is systematology. J Syst Sci Math Sci, 2016, 36: 291-301 [郭雷. 系统学是什么. 系统科学与数学, 2016, 36: 291-301]
- 7 Moreno J L. Sociometry, Experimental Method and the Science of Society. Oxford: Beacon House, 1951
- 8 Diani M, McAdam D. Social Movements and Networks. Oxford: Oxford University Press, 2003
- 9 Wiener N. Cybernetics. Paris: Hermann, 1948
- 10 Wiener N. The Human Use of Human Beings: Cybernetics and Society. Cambridge: MIT Press, 1950
- 11 Janowitz M. Sociological theory and social control. Am J Sociol, 1975, 81: 82-108
- 12 Geyer F. The challenge of sociocybernetics. Kybernetes, 1995, 24: 6-32
- 13 Cheng D Z, Chen H F. From swarm to social behavior control. Sci Technol Rev, 2004, 22: 4-7 [程代展, 陈翰馥. 从群集到社会行为控制. 科技导报, 2004, 22: 4-7]
- 14 Qian X S, Song J. Engineering Cybernetics. Beijing: Science Press, 1983 [钱学森, 宋健. 工程控制论. 北京: 科学出版社, 1983]
- 15 Zheng D Z. The development and enlightenment of control science. Stud Dial Nat, 1986, 2: 57-62 [郑大钟. 控制科学的发展及其启示. 自然辩证法研究, 1986, 2: 57-62]
- 16 Zheng D Z, Zheng Y P. The current state and developing trends of DEDS theory. Acta Autom Sin, 1992, 18: 131-142 [郑大钟, 郑应平. 离散事件动态系统理论: 现状和展望. 自动化学报, 1992, 18: 131-142]
- 17 Wang L, Shi H, Chu T G, et al. Aggregation of foraging swarms. In: Proceedings of Australasian Joint Conference on Artificial Intelligence, Cairns, 2004. 766-777
- 18 Wang L, Fu F, Chen X J, et al. Evolutionary games and self-organizing cooperation. J Syst Sci Math Sci, 2007, 27: 330-343 [王龙, 伏锋, 陈小杰, 等. 演化博弈与自组织合作. 系统科学与数学, 2007, 27: 330-343]

- 19 Chen X J, Wang L. Cooperation enhanced by moderate tolerance ranges in myopically selective interactions. *Phys Rev E*, 2009, 80: 046109
- 20 Wu B, Fu F, Wang L. Imperfect vaccine aggravates the long-standing dilemma of voluntary vaccination. *PLoS ONE*, 2011, 6: 20577
- 21 Cheng D Z, Zhao Y, Xu T T. Dynamic games and optimal control of logical dynamic systems. *J Syst Sci Math Sci*, 2012, 32: 1226–1238 [程代展, 赵寅, 徐昕昕. 演化博弈与逻辑动态系统的优化控制. *系统科学与数学*, 2012, 32: 1226–1238]
- 22 Wang L, Cong R, Li K. Feedback mechanism in cooperation evolving. *Sci Sin Inform*, 2014, 44: 1495–1514 [王龙, 丛睿, 李昆. 合作演化中的反馈机制. *中国科学: 信息科学*, 2014, 44: 1495–1514]
- 23 Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Trans Autom Control*, 2003, 48: 988–1001
- 24 Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans Autom Control*, 2004, 49: 1520–1533
- 25 Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Trans Autom Control*, 2005, 50: 655–661
- 26 Xiao F. Consensus problems in networks of multiple autonomous agents. Dissertation for Ph.D. Degree. Beijing: Peking University, 2008 [肖峰. 多智能体网络系统的一致性. 博士学位论文. 北京: 北京大学, 2008]
- 27 Wang L, Jiang F C, Xie G M, et al. Controllability of multi-agent systems based on agreement protocols. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2009, 52: 2074–2088
- 28 Wang L, Du J M. Evolutionary game theoretic coordinated control of multi-agent systems. *J Syst Sci Math Sci*, 2016, 36: 302–318 [王龙, 杜金铭. 多智能体协调控制的演化博弈方法. *系统科学与数学*, 2016, 36: 302–318]
- 29 Qin J H, Ma Q C, Shi Y, et al. Recent advances in consensus of multi-agent systems: a brief survey. *IEEE Trans Ind Electron*, 2017, 64: 4972–4983
- 30 Wu C W. Synchronization in Complex Networks of Nonlinear Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2007
- 31 Wang L, Fu F, Chen X J, et al. Evolutionary games on complex networks. *CAAI Trans Intell Syst*, 2007, 2: 1–10 [王龙, 伏锋, 陈小杰, 等. 复杂网络上的演化博弈. *智能系统学报*, 2007, 2: 1–10]
- 32 Wang L, Fu F, Chen X J, et al. Collective decision-making over complex networks. *CAAI Trans Intell Syst*, 2008, 3: 95–108 [王龙, 伏锋, 陈小杰, 等. 复杂网络上的群体决策. *智能系统学报*, 2008, 3: 95–108]
- 33 Han X, Cao S N, Shen Z S, et al. Emergence of communities and diversity in social networks. *Proc Natl Acad Sci*, 2017, 114: 2887–2891
- 34 Su Q, Li A M, Zhou L, et al. Interactive diversity promotes the evolution of cooperation in structured populations. *New J Phys*, 2016, 18: 103007
- 35 Godsil C, Royal G. Algebraic Graph Theory. New York: Springer-Verlag, 2001
- 36 Zheng D Z. Linear System Theory. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2002 [郑大钟. 线性系统理论 (第二版). 北京: 清华大学出版社, 2002]
- 37 Proskurnikov A V, Tempo R. A tutorial on modeling and analysis of dynamic social networks. Part I. *Annu Rev Control*, 2017, 43: 65–79
- 38 Castellano C, Fortunato S, Loreto V. Statistical physics of social dynamics. *Rev Mod Phys*, 2009, 81: 591–646
- 39 Schneider J J, Hirtreiter C. The impact of election results on the member numbers of the large parties in Bavaria and Germany. *Int J Mod Phys C*, 2005, 16: 1165–1215
- 40 Araripe L E, Costa Filho R N, Herrmann H J, et al. Plurality voting: the statistical laws of democracy in Brazil. *Int J Mod Phys C*, 2006, 17: 1809–1813
- 41 Degroot M H. Reaching a consensus. *J Am Stat Assoc*, 1974, 69: 118–121
- 42 Friedkin N E, Johnsen E C. Social influence networks and opinion change. *Adv Group Process*, 1999, 16: 1–29
- 43 Frasca P, Ishii H, Ravazzi C, et al. Distributed randomized algorithms for opinion formation, centrality computation and power systems estimation: a tutorial overview. *Eur J Control*, 2015, 24: 2–13
- 44 Friedkin N E, Proskurnikov A V, Tempo R, et al. Network science on belief system dynamics under logic constraints. *Science*, 2016, 354: 321–326
- 45 Minsky M. The Society of Mind. New York: Simon and Schuster, 1986
- 46 Karlin S, Taylor M H. A First Course in Stochastic Processes. New York: Academic Press, 1975

- 47 Golub B, Jackson M O. Naive learning in social networks and the wisdom of crowds. *Am Econ J Microeconomics*, 2010, 2: 112–149
- 48 Horn R A, Johnson C R. *Matrix Analysis*. New York: Cambridge University Press, 2012
- 49 Meyer C D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelphia: SIAM, 2000
- 50 Xiao F, Wang L. Asynchronous consensus in continuous-time multi-agent systems with switching topology and time-varying delays. *IEEE Trans Autom Control*, 2008, 53: 1804–1816
- 51 Xiao F. A new approach to consensus problems in discrete-time multiagent systems with time-delays. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2007, 50: 625–635
- 52 Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents. *IEEE Trans Autom Control*, 2010, 55: 950–955
- 53 Liu H Y, Xie G M, Wang L. Necessary and sufficient conditions for containment control of networked multi-agent systems. *Automatica*, 2012, 48: 1415–1422
- 54 Ma J Y, Zheng Y S, Wang L. Topology selection for multi-agent systems with opposite leaders. *Syst Control Lett*, 2016, 93: 43–49
- 55 Guan Y Q, Ji Z J, Zhang L, et al. Controllability of multi-agent systems under directed topology. *Int J Robust Nonlinear Control*, 2017, 27: 4333–4347
- 56 Guan Y Q, Wang L. Structural controllability of multi-agent systems with absolute protocol under fixed and switching topologies. *Sci China Inf Sci*, 2017, 60: 092203
- 57 Altafini C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions. *IEEE Trans Autom Control*, 2013, 58: 935–946
- 58 Boyd S, Ghosh A, Prabhakar B, et al. Randomized gossip algorithms. *IEEE Trans Inform Theory*, 2006, 52: 2508–2530
- 59 Acemoglu D, Ozdaglar A, ParandehGheibi A. Spread of (mis) information in social networks. *Games Econ Behav*, 2010, 70: 194–227
- 60 Li L, Scaglione A, Swami A, et al. Consensus, polarization and clustering of opinions in social networks. *IEEE J Sel Area Commun*, 2013, 31: 1072–1083
- 61 Tian Y, Wang L. Opinion dyanmics in social networks with stubborn agents: an issue-based perspective. 2017. ArXiv:1609.03465v2
- 62 Ghaderi J, Srikant R. Opinion dynamics in social networks with stubborn agents: equilibrium and convergence rate. *Automatica*, 2014, 50: 3209–3215
- 63 Horowitz I L. Consensus, conflict and cooperation: a sociological inventory. *Soc Forces*, 1962, 41: 177–188
- 64 North D C. *Institutions, Institutional Change and Economic Performance*. New York: Cambridge University Press, 1990
- 65 Egidi M, Narduzzo A. The emergence of path-dependent behaviors in cooperative contexts. *Int J Ind Organ*, 1997, 15: 677–709
- 66 Tian Y, Jing G, Wang L. Opinion containment in social networks over issue sequences. In: *Proceedings of the 13th IEEE Conference on Automation Science and Engineering*, Xi'an, 2017. 1374–1379
- 67 Bindel D, Kleinberg J, Oren S. How bad is forming your own opinion? In: *Proceedings of the 52nd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, Palm Springs, 2011. 57–66
- 68 Monderer D, Shapley L S. Potential games. *Games Econ Behav*, 1996, 14: 124–143
- 69 Etesami S R, Başar T. Price of anarchy and an approximation algorithm for the binary-preference capacitated selfish replication game. *Automatica*, 2017, 76: 153–163
- 70 Friedkin N E. A formal theory of reflected appraisals in the evolution of power. *Administrative Sci Quart*, 2011, 56: 501–529
- 71 Mirtabatabaei A, Jia P, Friedkin N E, et al. On the reflected appraisals dynamics of influence networks with stubborn agents. In: *Proceedings of American Control Conference*, Portland, 2014. 3978–3983
- 72 Converse P. The nature of belief systems in mass publics. In: *Ideology and Discontent*. New York: Free Press, 1964
- 73 Parsegov S E, Proskurnikov A V, Tempo R, et al. Novel multidimensional models of opinion dynamics in social networks. *IEEE Trans Autom Control*, 2017, 62: 2270–2285
- 74 Ravazzi C, Frasca P, Tempo R, et al. Ergodic randomized algorithms and dynamics over networks. *IEEE Trans*

- Control Netw Syst, 2015, 2: 78–87
- 75 Friedkin N E. The problem of social control and coordination of complex systems in sociology: a look at the community cleavage problem. *IEEE Control Syst*, 2015, 35: 40–51
 - 76 Lamport L, Shostak R, Pease M. The Byzantine generals problem. *ACM Trans Program Lang Syst*, 1982, 4: 382–401
 - 77 LeBlanc H J, Zhang H T, Sundaram S, et al. Consensus of multi-agent networks in the presence of adversaries using only local information. In: *Proceedings of the 1st International Conference on High Confidence Networked Systems*, Beijing, 2012. 1–10
 - 78 Wolfowitz J. Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices. *Proc Am Math Soc*, 1963, 14: 733–736
 - 79 Lorenz J. A stabilization theorem for dynamics of continuous opinions. *Physica A*, 2005, 355: 217–223
 - 80 Touri B, Nedić A. Product of random stochastic matrices. *IEEE Trans Autom Control*, 2014, 59: 437–448
 - 81 Touri B. *Product of Random Stochastic Matrices and Distributed Averaging*. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2012
 - 82 Seneta E. *Non-negative Matrices and Markov Chains*. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2006
 - 83 Hegselmann R, Krause U. Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation. *J Artif Societies Soc Simula*, 2002, 5: 1–24
 - 84 Blondel V D, Hendrickx J M, Tsitsiklis J N. On the 2R conjecture for multi-agent systems. In: *Proceedings of European Control Conference*, Kos, 2007. 874–881
 - 85 Blondel V D, Hendrickx J M, Tsitsiklis J N. On Krause’s multi-agent consensus model with state-dependent connectivity. *IEEE Trans Autom Control*, 2009, 54: 2586–2597
 - 86 Etesami S R, Başar T, Nedić A, et al. Termination time of multidimensional Hegselmann-Krause opinion dynamics. In: *Proceedings of American Control Conference*, Washington, 2013. 1255–1260
 - 87 Touri B, Nedić A. Discrete-time opinion dynamics. In: *Proceedings of Conference Record of the 45th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, 2011. 1172–1176
 - 88 Etesami S R, Başar T. Game-theoretic analysis of the Hegselmann-Krause model for opinion dynamics in finite dimensions. *IEEE Trans Autom Control*, 2015, 60: 1886–1897
 - 89 Chazelle B. The total s-energy of a multiagent system. *SIAM J Control Optim*, 2011, 49: 1680–1706
 - 90 Chazelle B. Diffusive influence systems. *SIAM J Comput*, 2015, 44: 1403–1442
 - 91 Chazelle B, Wang C. Inertial Hegselmann-Krause systems. *IEEE Trans Autom Control*, 2017, 62: 3905–3913
 - 92 Mirtabatabaei A, Bullo F. Opinion dynamics in heterogeneous networks: convergence conjectures and theorems. *SIAM J Control Optim*, 2012, 50: 2763–2785
 - 93 Hegselmann R, Krause U. Truth and cognitive division of labor: first steps towards a computer aided social epistemology. *J Artif Societies Soc Simula*, 2006, 9: 9–10
 - 94 Yang Y, Dimarogonas D V, Hu X. Opinion consensus of modified Hegselmann-Krause models. *Automatica*, 2014, 50: 622–627
 - 95 Jing G S, Zheng Y S, Wang L. Consensus of multiagent systems with distance-dependent communication networks. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2017, 28: 2712–2726
 - 96 Jia P, Mirtabatabaei A, Friedkin N E, et al. Opinion dynamics and the evolution of social power in influence networks. *SIAM Rev*, 2015, 57: 367–397
 - 97 Xu Z, Liu J, Başar T. On a modified DeGroot-Friedkin model of opinion dynamics. In: *Proceedings of American Control Conference*, Chicago, 2015. 1047–1052
 - 98 Xia W, Liu J, Johansson K H, et al. Convergence rate of the modified DeGroot-Friedkin model with doubly stochastic relative interaction matrices. In: *Proceedings of American Control Conference*, Boston, 2016. 1054–1059
 - 99 Chen X D, Liu J, Belabbas M A, et al. Distributed evaluation and convergence of self-appraisals in social networks. *IEEE Trans Autom Control*, 2017, 62: 291–304
 - 100 Jia P, Friedkin N E, Bullo F. The coevolution of appraisal and influence networks leads to structural balance. *IEEE Trans Netw Sci Eng*, 2016, 3: 286–298
 - 101 Fu F, Wang L. Coevolutionary dynamics of opinions and networks: from diversity to uniformity. *Phys Rev E*, 2008, 78: 016104
 - 102 Wu T, Fu F, Wang L. Partner selections in public goods games with constant group size. *Phys Rev E*, 2009, 80: 026121

- 103 Wu T, Fu F, Zhang Y, et al. Expectation-driven migration promotes cooperation by group interactions. *Phys Rev E*, 2012, 85: 066104
- 104 Wang L, Wu T, Zhang Y L. Feedback mechanism in coevolutionary games. *Control Theory Appl*, 2014, 31: 823–836 [王龙, 吴特, 张艳玲. 共演化博弈中的反馈机制. *控制理论与应用*, 2014, 31: 823–836]
- 105 Wu T, Wang L, Fu F. Coevolutionary dynamics of phenotypic diversity and contingent cooperation. *PLoS Comput Biol*, 2017, 13: 1005363
- 106 Cartwright D, Harary F. Structural balance: a generalization of Heider's theory. *Psychol Rev*, 1956, 63: 277–292
- 107 Meng D Y, Du M J, Jia Y M. Interval bipartite consensus of networked agents associated with signed digraphs. *IEEE Trans Autom Control*, 2016, 61: 3755–3770
- 108 Proskurnikov A V, Matveev A S, Cao M. Opinion dynamics in social networks with hostile camps: consensus vs. polarization. *IEEE Trans Autom Control*, 2016, 61: 1524–1536
- 109 Hatano Y, Mesbahi M. Agreement over random networks. *IEEE Trans Autom Control*, 2005, 50: 1867–1872
- 110 Tahbaz-Salehi A, Jadbabaie A. A necessary and sufficient condition for consensus over random networks. *IEEE Trans Autom Control*, 2008, 53: 791–795
- 111 Matei I, Baras J S, Somarakis C. Convergence results for the linear consensus problem under markovian random graphs. *SIAM J Control Optim*, 2013, 51: 1574–1591
- 112 Dandekar P, Goel A, Lee D T. Biased assimilation, homophily, and the dynamics of polarization. In: *Proceedings of International Workshop on Internet and Network Economics*, Cambridge, 2013. 5791–5796
- 113 Lord C G, Ross L, Lepper M R. Biased assimilation and attitude polarization: the effects of prior theories on subsequently considered evidence. *J Personality Soc Psychol*, 1979, 37: 2098–2109
- 114 Sunstein C. Breaking up the echo. *NY Times*, 2012, A25. <http://www.indiana.edu/~c228/BreakingUpTheEcho.pdf>
- 115 Cheng D Z, Xu T T, Qi H S. Evolutionarily stable strategy of networked evolutionary games. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2014, 25: 1335–1345
- 116 Cheng D Z, He F H, Qi H S, et al. Modeling, analysis and control of networked evolutionary games. *IEEE Trans Autom Control*, 2015, 60: 2402–2415
- 117 Ramazi P, Riehl J, Cao M. Networks of conforming or nonconforming individuals tend to reach satisfactory decisions. *Proc Natl Acad Sci*, 2016, 113: 12985–12990
- 118 Zheng Y P. Study on game theory and social complex systems. *Syst Eng Theory Pract*, 1987, 4: 50–55 [郑应平. 博弈论和社会复杂系统研究. *系统工程理论与实践*, 1987, 4: 50–55]
- 119 Zheng Y P. Multiperson decision-making and game theory. *Inform Control*, 1987, 1: 38–45 [郑应平. 多人决策与博弈论. *信息与控制*, 1987, 1: 38–45]
- 120 Marden J R, Arslan G, Shamma J S. Connections between cooperative control and potential games illustrated on the consensus problem. In: *Proceedings of European Control Conference*, Kos, 2007. 4604–4611
- 121 Marden J R, Arslan G, Shamma J S. Cooperative control and potential games. *IEEE Trans Syst Man Cybernet Part B*, 2009, 39: 1393–1407
- 122 Young H P. *Individual Strategy and Social Structure*. New Jersey: Princeton University Press, 1998
- 123 Marden J R, Arslan G, Shamma J S. Joint strategy fictitious play with inertia for potential games. *IEEE Trans Autom Control*, 2009, 54: 208–220
- 124 Hart S, Mas-Colell A. A simple adaptive procedure leading to correlated equilibrium. *Econometrica*, 2000, 68: 1127–1150
- 125 Sutton R S, Barto A G. *Reinforcement Learning: an Introduction*. Cambridge: MIT Press, 1998
- 126 Fudenberg D, Levine D K. *The Theory of Learning in Games*. Cambridge: MIT Press, 1998
- 127 Du J M, Wu B, Altrock P M, et al. Aspiration dynamics of multi-player games in finite populations. *J Royal Soc Interface*, 2014, 11: 20140077
- 128 Du J M, Wu B, Wang L. Aspiration dynamics in structured population acts as if in a well-mixed one. *Sci Rep*, 2015, 5: 8014

Opinion dynamics in social networks

Long WANG^{1*}, Ye TIAN² & Jinming DU³

1. *Center for Systems and Control, Peking University, Beijing 100871, China;*

2. *Center for Complex Systems, Xidian University, Xi'an 710071, China;*

3. *Institute of Industrial and Systems Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China*

* Corresponding author. E-mail: longwang@pku.edu.cn

Abstract In recent years, research in opinion dynamics has received a great amount of attention in the field of systems and control. Opinion dynamics studies the spreading of opinions and the evolution of behaviors in social networks by utilizing mathematical and physical models, the agent-based computational modeling tools and dynamical systems theories. Here, we review recent advances in the study of opinion dynamics. First, the fundamental model and some concepts are introduced. Second, opinion dynamics models are presented combined with related results of multi-agent systems from three aspects: individuals, interactions, and decision-makings. Some interesting issues are also discussed. Finally, future directions of the research are pointed out.

Keywords opinion dynamics, social networks, multi-agent systems, complex networks, game



Long WANG was born in 1964. He received his Ph.D. degree in dynamics and control from Peking University in 1992. He is currently Cheung Kong chair professor of dynamics and control, director of Center for Systems and Control of Peking University. His research interests are in the fields of complex networked systems, collective intelligence, and bio-mimetic robotics. Email: longwang@pku.edu.cn



Ye TIAN was born in 1992. He is currently a Ph.D. student at the School of Mechano-Electronic Engineering in Xidian University. His research interests include multi-agent systems and opinion dynamics. Email: tiny-beta7.1@gmail.com



Jinming DU was born in 1987. He received the Ph.D. degree in general mechanics and foundation of mechanics from Peking University. In 2016, he joined Northeastern University, where he is currently an assistant professor at the College of Information Science and Engineering. His research interests include evolutionary game dynamics, intelligent optimization, and complex systems modeling and control. Email: du-jinming@ise.neu.edu.cn