



# 一类五次 OR 曲线的构造方法

方林聪<sup>1\*</sup>, 汪国昭<sup>2</sup>

1. 浙江财经大学信息管理与工程学院, 杭州 310018

2. 浙江大学数学科学学院, 杭州 310027

\* 通信作者. E-mail: lincongfang@gmail.com

收稿日期: 2016-10-09; 接受日期: 2016-12-11; 网络出版日期: 2017-05-18

国家自然科学基金 (批准号: 61272300, 61100084)、浙江省一流学科 A 类 (浙江财经大学统计学) 资助和浙江省教育厅科研基金 (批准号: Y201223321) 资助项目

**摘要** 本文讨论非 PH (Pythagorean hodograph) 曲线的一类五次 OR 曲线 (curves with rational offsets) 的构造方法. OR 曲线是具有有理形式的等距线的一类参数曲线, 在 CAD 中有着广泛的应用. 本文采用参数曲线的复数表示形式, 根据导矢曲线的因式分解的不同, 将非 PH 曲线的五次 OR 曲线分为两种类型, 并分别给出这两类曲线的构造方法. 在给定  $C^1$  连续的初始条件下, 通过指定一个自由实参数来确定构造曲线. 本文进一步阐述了这个自由实参数的几何意义. 由于五次 OR 曲线是非正则的曲线, 对于第一类曲线, 奇异点可以在构造过程中显式地被指定, 因此可以有效地避免其在特定曲线段上的出现; 而对于第二类曲线, 奇异点在曲线中的位置则不易被直接控制.

**关键词** Bézier 曲线, 等距曲线, 五次, 连续, Hermite 插值

## 1 引言

给定一条平面参数曲线  $P(t) = (x(t), y(t))$ , 那么与该曲线距离为  $d$  的一条曲线可以表示为  $P_o(t) = P(t) + dN(t)$ , 其中  $N(t) = (-y'(t), x'(t))/\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$  是曲线在点  $P = P(t)$  上的单位法向, 曲线  $P_o(t)$  称为  $P(t)$  的一条等距线. 若一条曲线  $P(t)$  的任一等距线为有理多项式, 则称该曲线为 OR 曲线 (curves with rational offsets).

虽然 Bézier 曲线在计算机辅助设计与制造 (CAD/CAM) 中具有广泛的应用<sup>[1]</sup>, 但通常一条 Bézier 曲线并不具有有理形式的等距线<sup>[2]</sup>, 因此涌现出了一批等距线逼近方法的研究工作<sup>[3~5]</sup>. 本文介绍了一类具有有理等距线的平面多项式曲线, 这类曲线在工程应用中具有许多优点, 例如, 它们的弧长可以通过计算有理多项式方便地得到, 避免了复杂的数值积分运算, 从而极大地提高了许多数控加工算法的效率<sup>[6]</sup>, 因此它们被广泛应用于机器人路径规划、数控加工、铁路道路设计等.

如果一条平面多项式曲线的一阶导数的欧式范数为一个实多项式, 则称该曲线为 Pythagorean hodograph (PH) 曲线<sup>[7]</sup>. 于是, 一条 PH 曲线的等距线可以表示为有理形式, 从而可以在 CAD 系统

**引用格式:** 方林聪, 汪国昭. 一类五次 OR 曲线的构造方法. 中国科学: 信息科学, 2017, 47: 1694–1704, doi: 10.1360/N112016-00240  
Fang L C, Wang G Z. Construction of a class of quintic curves with rational offsets (in Chinese). Sci Sin Inform, 2017, 47: 1694–1704, doi: 10.1360/N112016-00240

中被精确表示<sup>[7]</sup>. 目前, 已经有许多关于 PH 曲线的相关研究工作, 如有理 PH 曲线<sup>[8,9]</sup>, Minkowski PH 曲线<sup>[10]</sup>, 空间 PH 曲线以及高维 PH 曲线<sup>[11]</sup>, 等等. 此外, 采用各种 PH 曲线进行 Hermite 插值或者曲线设计的方法不断被提出<sup>[12~18]</sup>, 更多的细节以及实例可以参考文献<sup>[19~21]</sup>.

然而, 具有有理等距线的参数曲线并不一定是 PH 曲线. 一条适当参数化的平面参数曲线具有有理等距曲线, 当且仅当其速端曲线的范数平方的奇数重复根不超过两个<sup>[22]</sup>. 因此, PH 曲线<sup>[7]</sup> 是 OR 曲线的一类. 为有效地分析和构造 OR 曲线, 研究方法通常会采用复分析方法<sup>[22,23]</sup>、四元数模型<sup>[24,25]</sup> 等代数方法.

由于 Bézier 控制多边形提供了一种简单直观的方式来处理参数曲线, CAD 中的多项式曲线通常采用 Bernstein 形式进行表示. 但是, 具有有理等距线的参数曲线的代数特征通常不能直观地转化为控制多边形的几何约束条件, 因此, 关于 OR 曲线的几何性质及构造方法的研究工作不断被深入. Farouki 等<sup>[7]</sup> 介绍了三次 PH 曲线的几何特征, 即控制多边形的三条边成等比关系且两内角相等, 这个特征给三次 PH 曲线提供了一种简单直观的几何构造方法. 类似地, 四次 PH 曲线的几何特征的研究<sup>[26]</sup> 给出了一种  $G^1$  条件下的曲线构造方法. 更高次数的 OR 曲线由于有更多的自由度, 可以构造更加丰富的曲线, 特别是五次 PH 曲线的构造方法层出不穷<sup>[12,13,18,27~29]</sup>. Fang 等<sup>[30]</sup> 提出了基于  $C^1$  Hermite 初始条件的六次 PH 曲线的构造方法. Jüttler<sup>[31]</sup> 给出了七次 PH 曲线的 Hermite 插值方法. Zheng 等<sup>[32]</sup> 学习了正则的七次 PH 曲线的几何特征及构造方法. 但是, 对于非 PH 曲线的 OR 曲线的相关研究工作相对较少. 近来, Lu 等<sup>[33]</sup> 研究了非 PH 曲线的一类三次 OR 曲线的几何性质以及构造方法.

本文采用平面 Bézier 曲线的复数形式, 提出了非 PH 曲线的五次 OR 曲线的构造方法. 首先, 这类曲线根据其导矢曲线的因式分解的不同被分为两类. 其次, 本文分别给出这两类曲线基于  $C^1$  Hermite 初始条件的构造方法. 为得到最终的构造曲线, 需要另外给定一个实参数. 该实参数不仅可以用来调整曲线形状, 同时决定或影响着奇异点在曲线上的位置.

## 2 OR 曲线

本文以加粗斜体字母表示复变量, 普通斜体字母表示实变量,  $i = \sqrt{-1}$  为虚数单位. 在复平面  $\mathbb{C}$  中, 一条平面参数曲线  $\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t))$  的复数形式为  $\mathbf{P}(t) = x(t) + iy(t)$ . 这种复数形式的表示方法对 OR 曲线的性质以及构造研究带来了极大的便利性<sup>[23,26]</sup>. 一条平面多项式曲线  $\mathbf{P}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  的等距线可有理参数化当且仅当其一阶导数  $\mathbf{P}'(t)$  可表示为如下形式<sup>[22]</sup>:

$$\mathbf{P}'(t) = \rho(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{W}^2(t), \quad (1)$$

其中  $\rho(t)$  是一个关于  $t$  的实多项式,  $\mathbf{R}(t)$  和  $\mathbf{W}(t)$  有如下表达式:

$$\mathbf{R}(t) = \lambda t + 1 + i\mu t, \quad \mathbf{W}(t) = u(t) + iv(t), \quad (2)$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $u(t)$  和  $v(t)$  是关于  $t$  的两个互素的实多项式. 特别地, 当  $\mathbf{R}(t) = 1$  时, 该曲线为 PH 曲线 (由于  $\rho(t)$  为任意实多项式,  $\mathbf{R}(t)$  为任意实数等价于  $\mathbf{R}(t) = 1$ ). 否则  $\mathbf{R}(t)$  为一个复多项式, 该曲线不直接具有有理形式的等距线. 此时, 可令

$$b = \sqrt{(\lambda + 1)^2 + \mu^2}, \quad c = \sqrt{(\lambda + 2)^2 + \mu^2}.$$

$B_i^n(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i, i = 0, \dots, n$ , 为 Bernstein 多项式, 经过一个二次的参数变换 [22,33]:

$$t(s) = \frac{B_1^2(s) + (c-1+b)B_2^2(s)}{(c+1-b)B_0^2(s) + (1+b)B_1^2(s) + (c-1+b)B_2^2(s)},$$

则其等距线可以表示为有理形式, 这是因为

$$(\lambda t + 1)^2 + (\mu t)^2 = \left( \frac{(c+1-b)B_0^2(s) + \frac{c^2-(1-b)^2}{2}B_1^2(s) + b(c-1+b)B_2^2(s)}{(c+1-b)B_0^2(s) + (1+b)B_1^2(s) + (c-1+b)B_2^2(s)} \right)^2.$$

这类非 PH 曲线的五次 OR 曲线的构造方法即为本文的主要研究目标 [22,33]. 若不作特别说明, 下文中的五次 OR 曲线即指该类曲线.

给定复平面内的控制顶点  $P_i = x_i + iy_i, i = 0, \dots, 5$ ,

$$P(t) = \sum_{i=0}^5 P_i B_i^5(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

定义了一条平面五次 Bézier 曲线. 其速端曲线也可以表示为 Bernstein 形式:

$$P'(t) = 5 \sum_{i=0}^4 \Delta P_i B_i^4(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{3}$$

其中  $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$ .

### 3 五次 OR 曲线的构造方法

本节将从五次 OR 曲线的特征入手, 研究该类曲线的构造方法. 由于五次 OR 曲线  $P(t)$  的导矢曲线  $P'(t)$  是四次的, 因此 (1) 中的  $\rho(t), R(t), W(t)$  的次数可分别为 1, 1, 1 或者 3, 1, 0, 即

$$P'(t) = [a_0(1-t) + t][z_0(1-t) + t][z_1(1-t) + z_2t]^2, \tag{4}$$

或者

$$P'(t) = [a_0(1-t)^3 + 3a_1(1-t)^2t + 3a_2(1-t)t^2 + t^3][z_0(1-t) + z_1t], \tag{5}$$

$a_i \in \mathbb{R}, z_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, 2$ . 下面分别将这两类曲线称为第一类和第二类五次 OR 曲线, 并分别进行讨论.

对于第一类五次 OR 曲线, 若令  $\xi$  为其奇异点的参数值, 则有  $a_0 = \frac{\xi}{\xi-1}$ . 因此, 当  $a_0 = 0$  时, 有  $P'(0) = 0$ , 即奇异点的参数值为  $t = 0$  (由于控制多边形的几何对称性, 这里不考虑  $P'(1) = 0$  的情况); 当  $a_0 > 0$  时, 奇异点的参数值不在区间  $[0,1]$  内; 否则, 有  $a_0 < 0$ , 奇异点的参数值在  $(0,1)$  内, 曲线段内会有一个尖点. 特别地, 若存在  $k \in \mathbb{R}$ , 使得  $z_1 = kz_2$  时, 其导矢曲线其实为 (5) 形式的, 因此本文假设  $z_1 \neq kz_2, \forall k \in \mathbb{R}$ .

对于第二类五次 OR 曲线, 不妨假设  $\xi_i, i = 0, 1, 2$  为三次实多项式  $\rho(t)$  的 3 个根, 由代数基本定理可知  $\rho(t)$  至少有一个实根. 若假设  $\xi_0$  为一个实根, 则  $\xi_1$  和  $\xi_2$  为两个共轭复根或两个实根. 于是有

$$a_0 = -\frac{\xi_0\xi_1\xi_2}{(1-\xi_0)(1-\xi_1)(1-\xi_2)},$$

$$a_1 = \frac{\xi_0 \xi_1}{(1-\xi_0)(1-\xi_1)} + \frac{\xi_1 \xi_2}{(1-\xi_1)(1-\xi_2)} + \frac{\xi_0 \xi_2}{(1-\xi_0)(1-\xi_2)},$$

$$a_2 = -\frac{\xi_0}{1-\xi_0} - \frac{\xi_1}{1-\xi_1} - \frac{\xi_2}{1-\xi_2}.$$

当  $a_0 = 0$  时, 有  $\mathbf{P}'(0) = 0$ , 即至少有一个奇异点在  $t = 0$  处 (由于控制多边形的几何对称性, 本文不考虑  $\mathbf{P}'(1) = 0$  的情况). 当  $a_0 > 0$  时, 在区间  $(0,1)$  内有一个或者三个奇异点; 否则当  $a_0 < 0$  时, 在区间  $(0,1)$  内有两个奇异点或没有奇异点. 此外, 若存在  $k \in \mathbb{R}$ , 使得  $z_0 = kz_1$  时, 曲线退化为直线, 因此本文的讨论假设  $z_0 \neq kz_1, \forall k \in \mathbb{R}$ .

综上所述, 若不考虑退化情况, 这两类五次 OR 曲线是互补的. 本节将分别考虑这两类五次 OR 曲线的构造问题: 假设给定  $C^1$  Hermite 条件以及一个实参数  $a_0$  进行五次 OR 曲线的构造, 即已知  $\mathbf{P}_i, i = 0, 1, 4, 5$ , 以及曲线的奇异点在参数域的初步分布情况, 求解未知的控制顶点  $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ , 从而得到符合初始条件的五次 OR 曲线.

### 3.1 第一类五次 OR 曲线

本节考虑第一类五次 OR 曲线的构造方法, 由于曲线  $\mathbf{P}(t)$  是第一类五次 OR 曲线的充要条件是存在  $a_0, z_i, i = 0, 1, 2$ , 使得 (4) 式成立, 将 (4) 式展开可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) = & a_0 z_0 z_1^2 (1-t)^4 \\ & + [(a_0 + z_0) z_1^2 + 2a_0 z_0 z_1 z_2] (1-t)^3 t \\ & + [a_0 z_0 z_2^2 + 2(a_0 + z_0) z_1 z_2 + z_1^2] (1-t)^2 t^2 \\ & + [2z_1 z_1 z_2 + (a_0 + z_0) z_2^2] (1-t) t^3 \\ & + z_2^2 t^4, \end{aligned}$$

与 (3) 式比较 Bernstein 多项式的系数, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} a_0 z_0 z_1^2 &= \Delta \mathbf{P}_0, \\ \frac{1}{20} [z_0 z_1^2 + a_0 (z_1^2 + 2z_0 z_1 z_2)] &= \Delta \mathbf{P}_1, \\ \frac{1}{30} [z_1^2 + 2z_0 z_1 z_2 + a_0 (z_0 z_2^2 + 2z_1 z_2)] &= \Delta \mathbf{P}_2, \\ \frac{1}{20} [z_0 z_2^2 + 2z_0 z_1 z_2 + a_0 z_2^2] &= \Delta \mathbf{P}_3, \\ \frac{1}{5} z_2^2 &= \Delta \mathbf{P}_4. \end{aligned} \tag{6}$$

为进一步展开讨论, 这里引入 3 个辅助点  $\mathbf{Q}_i, i = 0, 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0 &= \mathbf{P}_1 + \frac{1}{20} z_0 z_1^2 = \mathbf{P}_2 - \frac{a_0}{20} (z_1^2 + 2z_0 z_1 z_2), \\ \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{P}_2 + \frac{1}{30} (z_1^2 + 2z_0 z_1 z_2) = \mathbf{P}_3 - \frac{a_0}{30} (z_0 z_2^2 + 2z_1 z_2), \\ \mathbf{Q}_2 &= \mathbf{P}_3 + \frac{1}{20} (z_0 z_2^2 + 2z_0 z_1 z_2) = \mathbf{P}_4 - \frac{a_0}{20} z_2^2. \end{aligned}$$

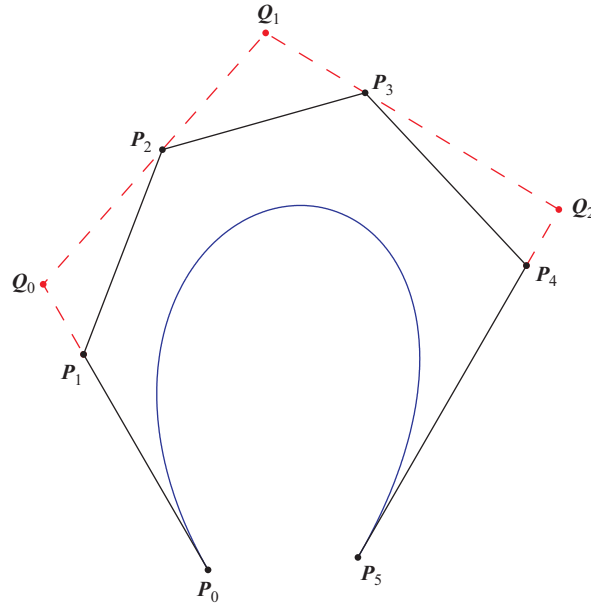


图 1 (网络版彩图) 第一类五次 OR 曲线的控制多边形的必要条件: 存在点  $Q_i, i = 0, 1, 2$ , 使得  $\Delta P_0 : 4(Q_0 - P_1) = 2(P_2 - Q_0) : 3(Q_1 - P_2) = 3(P_3 - Q_1) : 2(Q_2 - P_3) = 4(P_4 - Q_2) : \Delta P_4$ , 且这个比值刚好确定了奇异点的参数值  
**Figure 1** (Color online) A necessary and sufficient condition on the control polygon of a class I quintic OR curve: there are points  $Q_i, i = 0, 1, 2$ , such that  $\Delta P_0 : 4(Q_0 - P_1) = 2(P_2 - Q_0) : 3(Q_1 - P_2) = 3(P_3 - Q_1) : 2(Q_2 - P_3) = 4(P_4 - Q_2) : \Delta P_4$ , where the ratio determines the parameter value of the cusp

如图 1 所示, 得到一个原控制多边形的外接四边形  $P_0Q_0Q_1Q_2P_5$ . 方便起见, 不妨记

$$\begin{aligned} A &= z_0 z_1^2, \\ B &= z_1^2 + 2z_0 z_1 z_2, \\ C &= z_0 z_2^2 + 2z_1 z_2, \\ D &= z_2^2, \end{aligned} \tag{7}$$

则有

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{a_0} \Delta P_0 = 20(Q_0 - P_1), \\ B &= \frac{20}{a_0} (P_2 - Q_0) = 30(Q_1 - P_2), \\ C &= \frac{30}{a_0} (P_3 - Q_1) = 20(Q_2 - P_3), \\ D &= \frac{20}{a_0} (P_4 - Q_2) = 5\Delta P_4, \end{aligned} \tag{8}$$

即  $A, B, C, D$  分别表示了四边形  $P_0Q_0Q_1Q_2P_5$  每一条边的方向. 同时可以得到

$$a_0 = \frac{\Delta P_0}{4(Q_0 - P_1)} = \frac{2(P_2 - Q_0)}{3(Q_1 - P_2)} = \frac{3(P_3 - Q_1)}{2(Q_2 - P_3)} = \frac{4(P_4 - Q_2)}{\Delta P_4}.$$

给定  $C^1$  Hermite 条件以及实参数  $a_0$  进行第一类五次 OR 曲线的构造, 即已知  $P_i, i = 0, 1, 4, 5$ , 以及曲线的奇异点参数值, 求解  $P_2, P_3$ . 在给定条件下,  $Q_0, Q_2, A, D$  是明确的, 而  $Q_1, B, C$  是未知

的. 由  $\Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 = P_4 - P_1$  可以得到关于  $B$  和  $C$  的方程:

$$\frac{1}{20}A + \frac{3a_0 + 2}{60}B + \frac{2a_0 + 3}{60}C + \frac{a_0}{20}D = P_4 - P_1. \quad (9)$$

对于构造的第一类五次 OR 曲线, 由 (7) 可知  $z_1^2 = D\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ,  $z_0 z_1 z_2 = A\frac{z_2}{z_1}$ ,  $z_1 z_2 = D\frac{z_1}{z_2}$ ,  $z_0 z_2^2 = A\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$ , 因此, 若设  $x = \frac{z_2}{z_1}$ , 则由 (7) 可以得到关于  $x$  的两个方程:

$$\begin{aligned} D\frac{1}{x^2} + 2Ax &= B, \\ 2D\frac{1}{x} + Ax^2 &= C. \end{aligned}$$

因  $x \neq 0$ , 该方程组可转化为一个等价的三次方程组:

$$\begin{aligned} 2Ax^3 - Bx^2 + D &= 0, \\ Ax^3 - Cx + 2D &= 0. \end{aligned}$$

分别消去  $x^3$  项和常数项, 并约去公因子  $x$ , 得到一个等价的二次方程组:

$$\begin{aligned} Bx^2 - 2Cx + 3D &= 0, \\ 3Ax^2 - 2Bx + C &= 0. \end{aligned}$$

将该方程组视为关于  $x$  和  $x^2$  的二元一次方程组, 可求解得到

$$\begin{aligned} x &= \frac{BC - 9AD}{2(B^2 - 3AC)}, \\ x^2 &= \frac{C^2 - 3BD}{B^2 - 3AC}. \end{aligned}$$

因此, 构造的曲线为第一类五次 OR 曲线当且仅当关于  $z_i, i = 0, 1, 2$  的方程组 (7) 的解存在, 即满足如下条件:

$$4AC^3 + 4B^3D - B^2C^2 + 27A^2D^2 - 18ABCD = 0. \quad (10)$$

于是, 由于  $A$  和  $D$  已知, 将方程 (9) 代入 (10) 可以得到关于  $B$  (或者  $C$ ) 的一个一元四次方程, 由代数基本定理知  $B$  (或者  $C$ ) 必然有 4 个解. 当通过求解得到  $B$  和  $C$  时, 将它们代入 (8) 可以得到  $Q_1$  点, 以及控制顶点  $P_2, P_3$ , 因此可得到符合条件的 4 条第一类五次 OR 曲线. 上述过程整理后为算法 1. 考虑到在实际的计算和应用中, 无法总是精确表示曲线的控制多边形的顶点数据, Farouki 等<sup>[34]</sup>指出为保证鲁棒的实际应用, 计算误差  $\epsilon$  应该是机器加工单位的  $10^2 - 10^3$  倍, 即  $\epsilon \approx 1.11 \times 10^{-16}$ , 为本文算法数值求解的精度要求.

图 2 给出了一个第一类五次 OR 曲线的  $C^1$  Hermite 插值示例. 设定  $P_0 = 0, P_1 = -1 + 2i, P_4 = 10 + 4i, P_5 = 8 + i, a_0 = 2$ , 即奇异点所在的位置为  $t = 2$ . 通过求解由 (9) 和 (10) 构成的方程组, 图中给出了 4 条第一类五次 OR 曲线. 其中, 上面两图中的两条曲线是凸的, 下面两图中的曲线则含有一个拐点. 其实, 实参数  $a_0$  的设置可以当作调节曲线形状的参数, 这里考虑当  $a_0$  分别为 1, 1.5, 2, 2.5, 3 时, 其中两条凸曲线的形状变化如图 3 所示. 因此, 若将  $a_0$  作为一个自由参数, 可得到一族五次 OR 曲线.

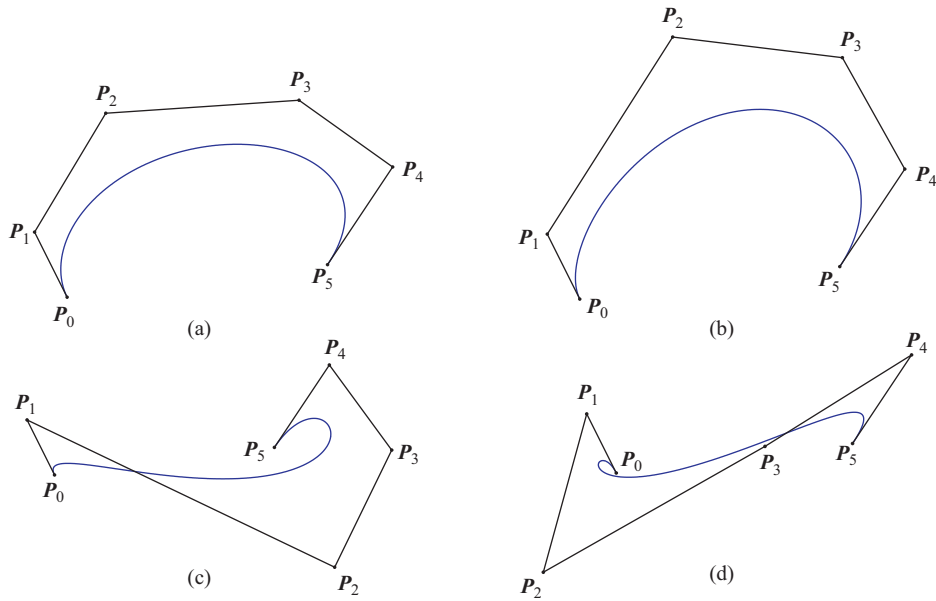


图 2 (网络版彩图) 第一类五次 OR 曲线  $C^1$  Hermite 插值的示例, 给定  $P_0 = 0, P_1 = -1+2i, P_4 = 10+4i, P_5 = 8+i, a_0 = 2$ , 求解得到: (a)  $P_2 \approx 1.187+5.650i, P_3 \approx 7.125+6.050i$ ; (b)  $P_2 \approx 2.858+8.064i, P_3 \approx 8.079+7.429i$ ; (c)  $P_2 \approx 10.193-3.358i, P_3 \approx 12.271+0.903i$ ; (d)  $P_2 \approx -2.470-3.361i, P_3 \approx 5.035+0.901i$

Figure 2 (Color online)  $C^1$  Hermite interpolation using class I quintic curves with rational offsets. Given  $P_0 = 0, P_1 = -1+2i, P_4 = 10+4i, P_5 = 8+i$ , and  $a_0 = 2$ , we get four class I quintic OR curves: (a)  $P_2 \approx 1.187+5.650i, P_3 \approx 7.125+6.050i$ ; (b)  $P_2 \approx 2.858+8.064i, P_3 \approx 8.079+7.429i$ ; (c)  $P_2 \approx 10.193-3.358i, P_3 \approx 12.271+0.903i$ ; (d)  $P_2 \approx -2.470-3.361i, P_3 \approx 5.035+0.901i$

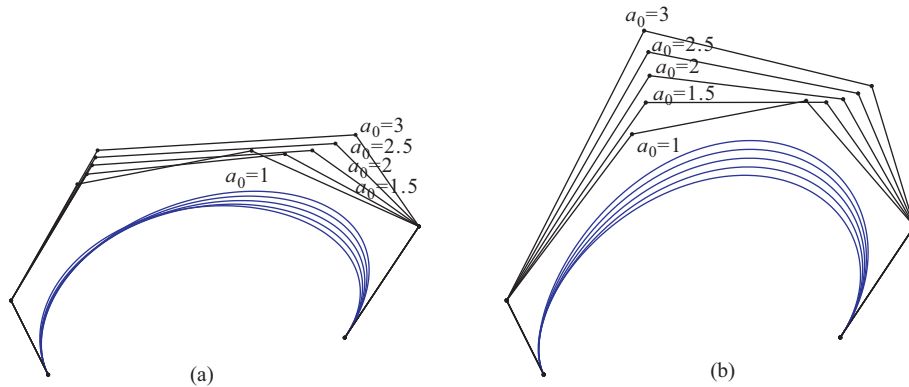


图 3 (网络版彩图) 参数  $a_0$  的选择可以用来调节构造的第一类五次 OR 曲线形状

Figure 3 (Color online) Selection of the parameter  $a_0$  can be used to adjust the shape of the resultant class I quintic OR curve

### 3.2 第二类五次 OR 曲线

对于第二类五次 OR 曲线, 将其导矢曲线的表达式 (5) 展开有

$$P'(t) = a_0 z_0 (1-t)^4 + (a_0 z_1 + a_1 z_0) (1-t)^3 t$$

**算法 1** Construct class I**Input:**

复数表示的两端控制顶点  $P_i, i = 0, 1, 4, 5$ ;  
一个实参数  $a_0$ .

**Output:**

- 复数表示的 4 组控制顶点  $P_2^{(i)}, P_3^{(i)}, i = 0, \dots, 3$ .
- 1: 计算  $A = \frac{5}{a_0} \Delta P_0, D = 5\Delta P_4$ ;
  - 2: 构造关于  $B$  和  $C$  的二元四次方程 (10);
  - 3: 构造关于  $B$  和  $C$  的二元一次方程 (9);
  - 4: 用数值求解方法求解 (9) 和 (10) 构成的非线性方程组, 求解得到  $B^{(i)}$  和  $C^{(i)}, i = 0, \dots, 3$ ;
  - 5: 代入 (8) 求得  $P_2^{(i)}, P_3^{(i)}, i = 0, \dots, 3$ .

$$\begin{aligned} &+ (a_1 z_1 + a_2 z_0)(1-t)^2 t^2 \\ &+ (a_2 z_1 + z_0)(1-t)t^3 \\ &+ z_1 t^4. \end{aligned}$$

通过与 (3) 比较系数得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} a_0 z_0 &= \Delta P_0, \\ \frac{1}{20} (a_0 z_1 + 3a_1 z_0) &= \Delta P_1, \\ \frac{1}{30} (3a_1 z_1 + 3a_2 z_0) &= \Delta P_2, \\ \frac{1}{20} (3a_2 z_1 + z_0) &= \Delta P_3, \\ \frac{1}{5} z_1 &= \Delta P_4. \end{aligned} \quad (11)$$

不难发现, 复数  $z_0$  和  $z_1$  确定了两端边的方向, 且控制多边形的每一条边都是它们的线性组合. 因此, 当给定  $a_0, P_i, i = 0, 1, 4, 5$  时, 由于已知  $z_0 = \frac{5\Delta P_0}{a_0}, z_1 = 5\Delta P_4$ , 可以得到一个关于  $a_1$  和  $a_2$  的二元一次复方程:

$$\frac{3z_0 + 2z_1}{20} a_1 + \frac{2z_0 + 3z_1}{20} a_2 + \frac{z_0 + a_0 z_1}{20} + P_1 - P_4 = 0. \quad (12)$$

分别考虑该方程的实部与虚部, 可以得到一个二元一次实方程组, 又因  $z_0 \neq kz_1, \forall k \in \mathbb{R}$ , 因此必然存在唯一解.

第二类五次 OR 曲线构造过程由算法 2 给出. 在图 4 中, 采用与图 2 相同的 Hermite 初值与实参数  $a_0$ , 得到了唯一的一条第二类五次 OR 曲线. 虽然  $a_0 > 0$ , 但图中的曲线段上出现了两个奇异点. 也就是说, 对于第二类五次 OR 曲线, 其奇异点的参数值分布在构造时不容易明确地指定, 从而可能会给实际应用带来不便.

## 4 结论

本文研究了一类非 PH 曲线的五次 OR 曲线的构造方法. 这类五次 OR 曲线首先被分为两类, 在给定  $C^1$  连续的 Hermite 初始条件以及一个实参数后, 这两类曲线的构造问题分别被转化为一个四次方程和一个二元一次方程组的求解问题. 因此, 本文给出的方法易于实现, 具有较强的可操作性. 虽然这一类五次 OR 曲线是非正则的曲线, 但是本文给出的方法可以有效地控制曲线段上出现奇异点的情



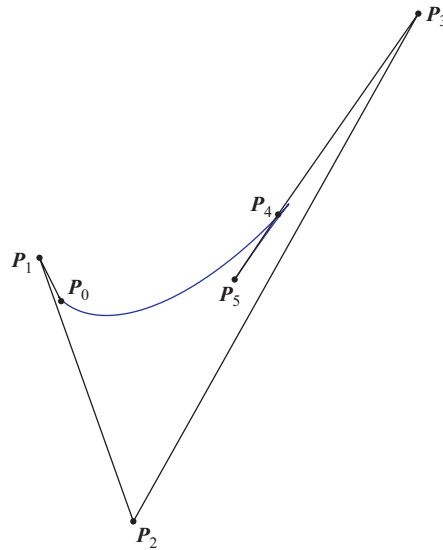


图 4 (网络版彩图) 第二类五次 OR 曲线  $C^1$  Hermite 插值示例. 当给定  $P_i, i = 0, 1, 4, 5$ , 以及实参数  $a_0$ , 有且仅有一条符合条件的第二类五次 OR 曲线

Figure 4 (Color online)  $C^1$  Hermite interpolation using class II quintic OR curves. Given  $P_i, i = 0, 1, 4, 5$ , and a real parameter  $a_0$ , there is a unique quintic OR curve meeting the condition

---

**算法 2** Construct class II

---

**Input:**

复数表示的两端控制顶点  $P_i, i = 0, 1, 4, 5$ ,  
一个实参数  $a_0$ .

**Output:**

复数表示的控制顶点  $P_2, P_3$ .

- 1: 计算  $z_0 = \frac{5\Delta P_0}{a_0}, z_1 = 5\Delta P_4$ ;
  - 2: 构造二元一次复方程 (12);
  - 3: 将方程 (12) 的实部和虚部分解, 得二元一次实方程组并求解  $a_1, a_2$ ;
  - 4: 代入 (11) 求得控制顶点  $P_2, P_3$ .
- 

况. 因此, 该类曲线在实际中仍然可以得到很好的应用. 同时, 在构造过程中, 实参数可以对构造的曲线进行调整, 有效地对曲线的形状进行控制, 曲线的变化也更加丰富. 对于第一类曲线, 该实参数的指定更是直接地确定了奇异点的参数值.

平面曲线的复表示方法为具有有理等距线的参数曲线的理论研究提供了极其有效的工具, 也是本文研究工作的基础. 本文提出的关于 OR 曲线的理论及方法也为今后对具有有理等距线的参数曲线相关理论研究提供了一些启发. 今后将进一步开展对 PH 曲线、OR 曲线、以及具有有理等距线的有理曲线的性质和构造方法的研究工作.

---

**参考文献**

- 1 Farin G, Hoschek J, Kim M S, et al. Handbook of Computer Aided Geometric Design. Amsterdam: Elsevier, 2002
- 2 Farouki R T, Neff C A. Analytic properties of plane offset curves. Comput Aided Geom Design, 1990, 7: 83–99
- 3 Pham B. Offset curves and surfaces: a brief survey. Comput Aided Design, 1992, 24: 223–229
- 4 Elber G, Lee I K, Kim M S. Comparing offset curve approximation methods. IEEE Comput Graph Appl, 1997, 17:

- 62–71
- 5 Maekawa T. An overview of offset curves and surfaces. *Comput Aided Design*, 1999, 31: 165–173
  - 6 Farouki R T, Manjunathaiah J, Nicholas D, et al. Variable-feedrate CNC interpolators for constant material removal rates along Pythagorean-hodograph curves. *Comput Aided Design*, 1998, 30: 631–640
  - 7 Farouki R T, Sakkalis T. Pythagorean hodographs. *IBM J Res Dev*, 1990, 34: 736–752
  - 8 Pottmann H. Rational curves and surfaces with rational offsets. *Comput Aided Geom Design*, 1995, 12: 175–192
  - 9 Farouki R T, Šír Z. Rational Pythagorean-hodograph space curves. *Comput Aided Geom Design*, 2011, 28: 75–88
  - 10 Moon H P. Minkowski Pythagorean hodographs. *Comput Aided Geom Design*, 1999, 16: 739–753
  - 11 Sakkalis T, Farouki R T. Pythagorean-hodograph curves in Euclidean spaces of dimension greater than 3. *J Comput Appl Math*, 2012, 236: 4375–4382
  - 12 Farouki R T, Neff C A. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph quintics. *Math Comput*, 1995, 64: 1589–1609
  - 13 Moon H P, Farouki R T, Choi H I. Construction and shape analysis of PH quintic Hermite interpolants. *Comput Aided Geom Design*, 2001, 18: 93–115
  - 14 Kosinka J, Jüttler B.  $G^1$  Hermite interpolation by Minkowski Pythagorean hodograph cubics. *Comput Aided Geom Design*, 2006, 23: 401–418
  - 15 Kong J H, Jeong S P, Lee S, et al.  $C^1$  Hermite interpolation with simple planar PH curves by speed reparametrization. *Comput Aided Geom Design*, 2008, 25: 214–229
  - 16 Byrtus M, Bastl B.  $G^1$  Hermite interpolation by PH cubics revisited. *Comput Aided Geom Design*, 2010, 27: 622–630
  - 17 Kong J H, Lee H C, Kim G I.  $C^1$  Hermite interpolation with PH curves by boundary data modification. *J Comput Appl Math*, 2013, 248: 47–60
  - 18 Farouki R T. Construction of  $G^2$  rounded corners with Pythagorean-hodograph curves. *Comput Aided Geom Design*, 2014, 31: 127–139
  - 19 Farouki R T. *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*. Berlin: Springer, 2008
  - 20 Farouki R T, Jüttler B, Manni C. Pythagorean-hodograph curves and related topics. *Comput Aided Geom Design*, 2008, 25: 4–5
  - 21 Kosinka J, Lávička M. Pythagorean hodograph curves: a survey of recent advances. *J Geom Graph*, 2014, 18: 23–43
  - 22 Lü W. Offset-rational parametric plane curves. *Comput Aided Geom Design*, 1995, 12: 601–616
  - 23 Farouki R T. The conformal map  $z \rightarrow z^2$  of the hodograph plane. *Comput Aided Geom Design*, 1994, 11: 363–390
  - 24 Choi H I, Lee D S, Moon H P. Clifford algebra, spin representation, and rational parameterization of curves and surfaces. *Adv Comput Math*, 2002, 17: 5–48
  - 25 Farouki R T, al-Kandari M, Sakkalis T. Hermite interpolation by rotation-invariant spatial Pythagorean-hodograph curves. *Adv Comput Math*, 2002, 17: 369–383
  - 26 Wang G Z, Fang L C. On control polygons of quartic Pythagorean-hodograph curves. *Comput Aided Geom Design*, 2009, 26: 1006–1015
  - 27 Yong J H, Zheng W. Geometric method for Hermite interpolation by a class of PH quintics. *J Comput Aided Design Comput Graph*, 2005, 17: 990–995 [雍俊海, 郑文. 一类五次 PH 曲线 Hermite 插值的几何方法. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2015, 17: 990–995]
  - 28 Pelosi F, Sampoli M L, Farouki R T, et al. A control polygon scheme for design of planar  $C^2$  PH quintic spline curves. *Comput Aided Geom Design*, 2007, 24: 28–52
  - 29 Choi H I, Farouki R T, Kwon S H, et al. Topological criterion for selection of quintic Pythagorean-hodograph Hermite interpolants. *Comput Aided Geom Design*, 2008, 25: 411–433
  - 30 Fang L C, Wang G Z.  $C^1$  Hermite interpolation using sextic PH curves. *Sci Sin Math*, 2014, 44: 799–804 [方林聪, 汪国昭. 六次 PH 曲线  $C^1$  Hermite 插值. *中国科学: 数学*, 2014, 44: 799–804]
  - 31 Jüttler B. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph curves of degree seven. *Math Comput*, 2001, 70: 1089–1111
  - 32 Zheng Z H, Wang G Z, Yang P. On control polygons of Pythagorean hodograph septic curves. *J Comput Appl Math*, 2016, 296: 212–227
  - 33 Lu X J, Zheng J M, Cai Y Y, et al. Geometric characteristics of a class of cubic curves with rational offsets. *Comput Aided Design*, 2015, 70: 36–45
  - 34 Farouki R T, Giannelli C, Sestini A. Identification and “reverse engineering” of Pythagorean-hodograph curves. *Comput Aided Geom Design*, 2015, 34: 21–36

## Construction of a class of quintic curves with rational offsets

Lincong FANG<sup>1\*</sup> & Guozhao WANG<sup>2</sup>

1. *School of Information, Zhejiang University of Finance & Economics, Hangzhou 310018, China;*

2. *School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China*

\* Corresponding author. E-mail: lincongfang@gmail.com

**Abstract** In this paper, a method for constructing a class of quintic curves with rational offsets is presented. Although this class of planar curves does not include PH curves, such curves are widely applied in CAD because they have rational offsets. A complex variate model is employed to deduce the proposed method. The quintic OR curves are first classified into two classes according to the different factorization of their hodographs, and are then discussed. With the given  $C^1$  Hermite data, the curves are determined by specifying a real parameter. This real parameter can be used to adjust the shape of the constructed curves, and affects the parameter values of the cusps.

**Keywords** Bézier curve, offset curve, quintic, continuous, Hermite interpolation



**Lincong FANG** was born in 1982. He received his Ph.D. degree in mathematics from Zhejiang University, Hangzhou, in 2009. He currently is a lecturer at Zhejiang University of Finance & Economics. His research interests include geometric design and computation, geometric modeling, and interval arithmetic.



**Guozhao WANG** was born in 1944. He is a professor at Zhejiang University. His research interests include computer aided geometric design and computer graphics.