



P3P 问题多解现象的普遍性

王波¹, 胡浩^{1,2}, 张彩霞^{1,3}, 许华荣^{1,4*}

1. 中国科学院自动化研究所, 北京 100190

2. 山东大学信息科学与工程学院, 济南 250100

3. 北方工业大学理学院, 北京 100144

4. 厦门理工学院计算机与信息工程学院, 厦门 361024

* 通信作者. E-mail: hrxu@xmut.edu.cn

收稿日期: 2016-08-18; 接受日期: 2016-11-24; 网络出版日期: 2017-02-13

国家自然科学基金 (批准号: 61273290, 61403373, 61503004) 资助项目

摘要 P3P 问题是一种重要的基于单幅图像的物体定位方法, 而多解性是 P3P 问题研究的一个重要方向. 本文从几何观点出发, 证明当摄像机光心与 3 个控制点之间的距离相对比较大时, 对应的 P3P 问题一般不可能存在唯一解, 即一般至少存在两个解可以同时满足 P3P 问题的所有三个约束条件. 本文的另一个贡献是将 P3P 问题中“空间三个南瓜面的相交问题”通过“南瓜面与控制点平面交线之间的相交性”进行判断, 给出了一种研究 P3P 问题多解现象的新思路和途径. 本文工作可望为 P3P 问题的研究和应用人员提供一些参考价值.

关键词 P3P 问题, 多解现象, 南瓜面, 视觉定位

1 引言

P3P 问题 (perspective-3-point problem) 是一种经典的基于单幅图像的视觉定位方法. Grunert^[1] 于 1841 年首次提出该问题, Fischler 和 Bolles^[2] 于 1981 年将该算法首次引入到 RANSAC 框架下的物体鲁棒定位中. 由于在 RANSAC 框架下, 计算代价随最小采样点集的个数呈指数增长, 而已知三组空间点与图像点之间的对应关系是能够得到有限个摄像机空间姿态所需的最少信息, 因此 P3P 问题在众多视觉定位问题中得到了广泛应用^[3~9].

任何具体的视觉定位问题都需要回答这样的基本问题: 该问题是否有唯一解, 如果解不唯一, 最多有多少个解, 从而避免遗漏真实的解或花费时间寻找不存在的解, 所以 P3P 问题多解性的研究一直是 P3P 问题研究的一个重要方向. 关于多解性一些经典的研究成果包括: 1981 年 Fischler 和 Bolles^[2] 给出了 P3P 问题有多解的几何特例. 1997 年, Su 等^[10] 应用 Wu-Ritt's 零点分解方法给出了 P3P 问题主要解分支和一些非退化分支, 然后他们又利用斯图姆 (Sturm) 序列给出了判定 P3P 问题

引用格式: 王波, 胡浩, 张彩霞, 等. P3P 问题多解现象的普遍性. 中国科学: 信息科学, 2017, 47: 482–491, doi: 10.1360/N112016-00198
Wang B, Hu H, Zhang C X, et al. Generality of the multi-solution phenomenon in the P3P problem (in Chinese). Sci Sin Inform, 2017, 47: 482–491, doi: 10.1360/N112016-00198

正解数目的充分和必要条件. Yang^[11] 给出了 P3P 问题在非退化条件下的一个部分解分类. 2003 年 Gao 等^[12] 再次利用 Wu-Ritt's 消元算法给出了多项式方程组完整的三角分解, 并且给出了完整的根的个数的代数判定条件. 1991 年 Wolfe^[13] 在“标准视图”的假设下, 在像平面上对于 P3P 的多解现象给出了一种直观的几何解释, 论证了通常最多存在两个解的猜测, 并指出当光心在过控制点形成的三角形的垂心且垂直于 3 个控制点确定的平面的直线时, 一定有 4 个解. 2005 年, Zhang 等^[14] 首次将该条件推广到 3 个垂平面上, 证明了当光心在过三角形三个垂线且与控制点平面垂直的平面上时, 一定有 4 个解, 并且这 4 个解两两具有特殊的关系: 一对是共边解, 一对是共点解. 2006 年, Zhang 等^[15] 还发现并证明了当光心位于“危险圆柱”上时, 一定有 3 个解, 其中一个为二重解. 2010 年, Sun 等^[16] 发现当光心在垂平面上且向危险圆柱方向不断靠近的过程中, 或者共边解或者共点解将慢慢靠近直至重合, 从而使得 P3P 问题的解数从 4 个变为 3 个. 近期 Rieck^[17,18] 系统分析了解在危险圆柱附近的分布情况, 并提出了新的求解算法来提高解的稳定性. 2015 年 Hu 等^[19] 证明了当摄像机光心位于 3 个“南瓜面”的邻域内时, 对应的 P3P 问题至少存在 2 个解, 且另一个解对应的摄像机光心一定在某个控制点的邻域内. 本文作者近期工作表明^[20], P3P 问题的共边解对和共点解对一般伴随出现.

本文从几何观点出发, 揭示了 P3P 问题存在多解的普遍性. 本文研究表明, 当摄像机光心与 3 个控制点之间的距离比较大时, 对应的 P3P 问题一般不可能存在唯一解, 即一般至少存在两个解可以同时满足 P3P 问题的所有 3 个约束方程. 由于在具体应用中受环境限制, 3 个控制点之间的距离一般不可能太大, 而一般相机与控制点之间的距离又不能太短, 所以在实际应用中, 多解现象实际上是“一种普遍现象”, 这一结果与“直观”相悖.

2 一些基础知识

2.1 P3P 问题的基本约束方程

如图 1 所示, 给定世界坐标系下坐标已知的 3 个控制点 A, B, C, 记 $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$; O 为摄像机光心, 且假定摄像机为已标定好的针孔成像模型. 则由 A, B, C 三点在摄像机上成像点的图像坐标可以求得 OA, OB, OC 三条投影射线两两之间的夹角: α, β, γ . 由余弦定理可以得到如下 3 个以 $s_1 = |OA|$, $s_2 = |OB|$, $s_3 = |OC|$ 为变量的二次约束方程 (1):

$$\left. \begin{aligned} s_1^2 + s_2^2 - 2\cos(\gamma)s_1s_2 &= c^2 \\ s_1^2 + s_3^2 - 2\cos(\beta)s_1s_3 &= b^2 \\ s_2^2 + s_3^2 - 2\cos(\alpha)s_2s_3 &= a^2 \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

式 (1) 称为 P3P 问题的约束方程. 所谓求解 P3P 问题, 就是指寻找满足式 (1) 且均为正数的三元数组 (s_1, s_2, s_3) 的过程. 所谓 P3P 问题的多解现象, 就是指存在均满足式 (1) 的多组正三元数组 (s_1, s_2, s_3) 的情况. 存在多少组不同的正三元数组, 就表明 P3P 问题有多少组不同的解.

这里需要说明的是, 摄像机的位置既可以用光心到 3 个控制点之间的距离 (s_1, s_2, s_3) 这种三元数组表示, 也可以用光心的坐标 $(x \ y \ z)$ 直接表示, 但这两种表示方法事实上存在一些差异. 很明显, 给定一组解 (s_1, s_2, s_3) 必有二个光心位置 $(x_1 \ y_1 \ z_1)$ 和 $(x_2 \ y_2 \ z_2)$ 能同时满足式 (1), 其中 $(x_1 \ y_1 \ z_1)$ 和 $(x_2 \ y_2 \ z_2)$ 关于控制点所在的平面镜像对称. 之所以文献中一般用 (s_1, s_2, s_3) 来表示光心位置, 是因为“摄像机只能看到其前面的物体, 不可能看到其后面的物体”, 所以一种暗含的假设是“控制点在摄像

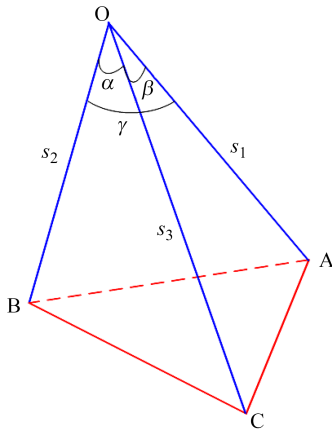


图 1 (网络版彩图) P3P 问题定义, 其中 A, B, C 为控制点, O 为摄像机光心

Figure 1 (Color online) The definition of the P3P problem: A, B, C are the 3 control points, O is the optical center

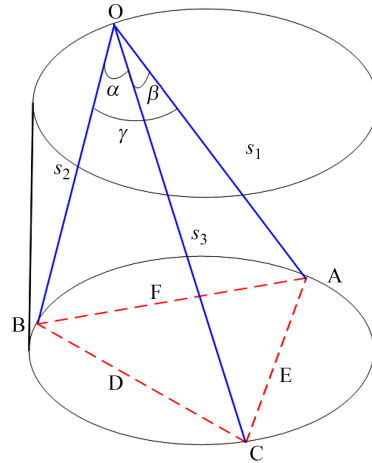


图 2 (网络版彩图) P3P 问题的危险圆柱

Figure 2 (Color online) The danger cylinder of the P3P problem

机前面”, 所以, 每组 (s_1, s_2, s_3) 对应一个 P3P 问题真正有意义的解, 或 P3P 问题的解, 而 “二个关于控制点平面镜像对称的光心位置” 仅对应一组真正的 P3P 问题的解. 所以, 当用 “光心坐标” 作为变量进行 P3P 问题的多解性研究时, 仅仅需要研究 “光心在控制点所在平面的单侧的分布即可”, 此时光心位置与 P3P 问题的解有一一对应关系, 是完全等价的.

2.2 危险圆柱

危险圆柱 (danger cylinder) 是 P3P 问题研究中的一个重要的特殊曲面. 如图 2 所示, 危险圆柱的定义为: 过由三个控制点构成的三角形 ABC 的外接圆, 且母线与 ABC 平面垂直的圆柱面. 当光心位于危险圆柱上时, P3P 问题的解不稳定, 即: 一个小的扰动会导致解的位置发生显著的变化, 这也是 “危险圆柱” 得名的由来.

2.3 “南瓜面”

如图 3 所示, MN 为圆 O 的弦. 弦 MN 将圆弧分成二部分. 一部分为圆弧 $\widehat{MPN}$, 对应的圆周角为 $\angle MPN$, 另一部分为圆弧 $\widehat{MQN}$, 对应的圆周角 $\angle MQN = \pi - \angle MPN$.

将圆弧 $\widehat{MPN}$ 绕弦 MN 旋转 360° , 可以得到 “南瓜面” $T_{MN}^{\angle MPN}$. 同理, 将圆弧 $\widehat{MQN}$ 绕弦 MN 旋转 360° , 可以得到 “南瓜面” $T_{MN}^{\angle MQN}$. 也就是说, 弦 MN 将圆弧分成两部分, 可以生成两个南瓜面 $T_{MN}^{\angle MPN}$ 和 $T_{MN}^{\angle MQN}$. 在后面的讨论中, “南瓜面” 的概念会经常用到.

如图 2 所示, 给定 3 个控制点 A, B, C, 三角形 ABC 的外接圆为圆 O. 则弦 AB 将外接圆弧分成两部分. 将这两部分圆弧分别绕 AB 旋转 360° , 可以得到一组南瓜面 $T_{AB}^{\angle C}$ 和 $T_{AB}^{\pi - \angle C}$. 同理, 将外接圆弧绕 AC 旋转 360° , 可以得到一组南瓜面 $T_{AC}^{\angle B}$ 和 $T_{AC}^{\pi - \angle B}$, 将外接圆弧绕 BC 旋转 360° , 可以得到一组南瓜面 $T_{BC}^{\angle A}$ 和 $T_{BC}^{\pi - \angle A}$. 图 4 为一个这样的南瓜面.

式 (1) 的几何意义是: 式 (1) 中的每个二次约束方程定义了一个 “南瓜面”, 所谓 P3P 问题的解, 即摄像机的光心位置, 就是这 3 个南瓜面的共同交点. 在控制平面的一侧 (上面或下面) 有多少个交

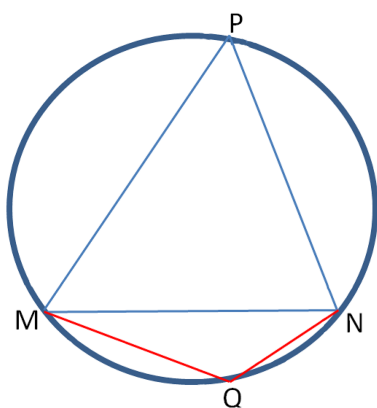


图 3 (网络版彩图) 弦 MN 将圆分成两段圆弧

Figure 3 (Color online) The chord MN separates the circle into two circular arcs

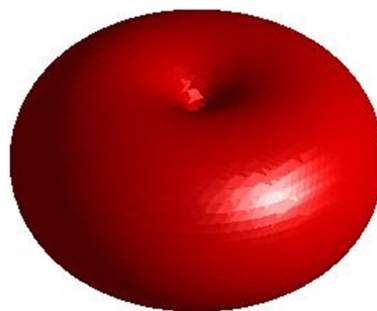


图 4 (网络版彩图) 圆弧绕某条弦旋转 360° 生成的一个南瓜面

Figure 4 (Color online) A pumpkin surface generated by rotating a circular arc around its corresponding chord

点, 就表示有 P3P 问题的多少个解.

3 主要结论

定理1 给定 3 个控制点 A, B, C, 当摄像机光心 O 位于所有 6 个南瓜面 $T_{AB}^{\angle C}$, $T_{AB}^{\pi-\angle C}$, $T_{AC}^{\angle B}$, $T_{AC}^{\pi-\angle B}$, $T_{BC}^{\angle A}$ 和 $T_{BC}^{\pi-\angle A}$ 外时, 对应的 P3P 问题一般至少存在 2 个解, 即一般不可能存在唯一解. 给出定理证明之前, 首先给出下面几条结论.

(1) 光心 O 位于所有 6 个南瓜面外, 根据式 (1) P3P 问题的定义以及上节 6 个南瓜面的定义, 其几何意义为

$$\left. \begin{aligned} \beta &< \min(\angle B, \pi - \angle B) \\ \alpha &< \min(\angle A, \pi - \angle A) \\ \gamma &< \min(\angle C, \pi - \angle C) \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

结论 (1) 很直观, 证明从略.

(2) 给定 2 个控制点, 当光心位于危险圆柱上时, 对应的 P3P 问题必有 4 个解, 其中一组为重解. 即对应的 P3P 问题必有 3 组不同的解.

Zhang 等^[15] 给出了结论 (2) 的证明.

(3) 给定 3 个控制点, 光心位于危险圆柱上时的充分必要条件是式 (1) 对应的 Jacobian 矩阵的秩为 2, 即

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \frac{\partial f_1}{\partial s_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \frac{\partial f_2}{\partial s_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial s_1} & \frac{\partial f_3}{\partial s_2} & \frac{\partial f_3}{\partial s_3} \end{pmatrix} = 2,$$

其中

$$f_1(s_1, s_2, s_3) = s_1^2 + s_2^2 - 2\cos(\gamma)s_1s_2 - c^2,$$

$$f_2(s_1, s_2, s_3) = s_1^2 + s_3^2 - 2\cos(\beta)s_1s_3 - b^2,$$

$$f_3(s_1, s_2, s_3) = s_2^2 + s_3^2 - 2\cos(\alpha)s_2s_3 - a^2.$$

Sun 等^[16]给出了结论 (3) 的证明.

结论 (3) 的几何意义是当光心位于危险圆柱面上时, 式 (1) 对应的 3 个南瓜面在光心处必有二个相切. 由充分必要条件知, 如果式 (1) 对应的两个南瓜面相切, 切点一定位于危险圆柱上.

(4) 第 2.3 小节定义的南瓜面除作为旋转轴的弦的二个端点为奇异点外 (不可导), 在其他点处处可导.

结论 (4) 可以很容易验证. 因为式 (1) 中每个二次曲面都是可导曲面.

定理 1 的证明 为了证明方便, 假定由 3 个控制点 A, B, C 构成的三角形为锐角三角形, 当三角形 ABC 为钝角或直角时, 可以同理获证.

由于假定光心 O 位于由 3 个控制点生成的 6 个南瓜面外, 且假定三角形 ABC 为锐角三角形, 根据结论 (1) 有

$$\left. \begin{array}{l} \beta < \angle B \\ \alpha < \angle A \\ \gamma < \angle C \end{array} \right\}, \quad (3)$$

则由式 (1) 定义的三个南瓜面 $T_{AC}^{\angle\beta}$, $T_{AB}^{\angle\gamma}$, $T_{BC}^{\angle\alpha}$ 与控制点平面的三条交线与三角形 ABC 一般有如图 5 所示的关系. 其他情况在附录 A 中说明.

其中红色曲线表示南瓜面 $T_{AC}^{\angle\beta}$ 与平面 ABC 的交线, 蓝色曲线表示南瓜面 $T_{BC}^{\angle\alpha}$ 与平面 ABC 的交线, 黑色曲线表示南瓜面 $T_{AB}^{\angle\gamma}$ 与平面 ABC 的交线. 由于 $\beta < \angle B$, 所以 B 点在红线内. 同理, 由于 $\gamma < \angle C$, $\alpha < \angle A$, 所以, C 点在黑线内, A 点在蓝线内.

从图 5 可以看出, 蓝线与红线交于 M, N, K, C 四点. 其中点 M, K 在黑线外, 所以 $\angle AMB < \gamma$, $\angle AKB < \gamma$, 而点 N 在黑线内, 所以 $\angle ANB > \gamma$ (因为根据南瓜面的定义, 黑线上的点与 AB 的夹角恒为圆周角 γ).

不失一般性, 假定 $\alpha < \beta$. 考察南瓜面 $T_{AC}^{\angle\beta}$ 和 $T_{BC}^{\angle\alpha}$ 的相交情况 (仅需要考察 ABC 平面上侧即可). 首先, 在平面 ABC, 红色曲线与蓝色曲线交于 M, N, K, C 四点. 由于南瓜面 $T_{AC}^{\angle\beta}$ 和 $T_{BC}^{\angle\alpha}$ 均为封闭曲面, 且 $T_{AC}^{\angle\beta}$ 除 A, C 二点外处处可导, $T_{BC}^{\angle\alpha}$ 除 B, C 二点外处处可导, 所以, $T_{AC}^{\angle\beta}$ 和 $T_{BC}^{\angle\alpha}$ 的相交情况只可能有以下二种情况.

(1) $T_{AC}^{\angle\beta}$ 和 $T_{BC}^{\angle\alpha}$ 有相切的情况. 根据结论 (2) 和 (3), 此时摄像机光心必然在危险圆柱上. 根据结论 (2), 此时对应的 P3P 问题有 3 组不同的解, 定理 1 成立.

(2) $T_{AC}^{\angle\beta}$ 和 $T_{BC}^{\angle\alpha}$ 不存在相切点, 由于 $\alpha < \beta$, 则 $T_{AC}^{\angle\beta}$ 和 $T_{BC}^{\angle\alpha}$ 的交线必然为二条空间连续的曲线. 其中第一段连续交线的二个端点为 N 和 K 点, 第二段连续交线的二个端点为 N 和 M 点 (注: C 点为孤点).

考察从 N 点到 K 点相交空间曲线上点与控制点 A 和 B 之间夹角的变化关系. 由于端点处 $\angle ANB > \gamma$, 但 $\angle AKB < \gamma$, 且 N 和 K 之间的交线为连续曲线, 所以, 根据连续曲线的性质, 在这段相交曲线上, 必然至少有一点, 如点 O, 则 $\angle AOB = \gamma$. 由于 $T_{AC}^{\angle\beta}$ 和 $T_{BC}^{\angle\alpha}$ 交线上的点与 A, C 二点之间的夹角恒等于 β , 与 B, C 二点的夹角恒等于 α , 则 O 点处有: $\angle AOB = \gamma$, $\angle BOC = \alpha$, $\angle AOC = \beta$, 则 O 点为 P3P 问题的一个解.

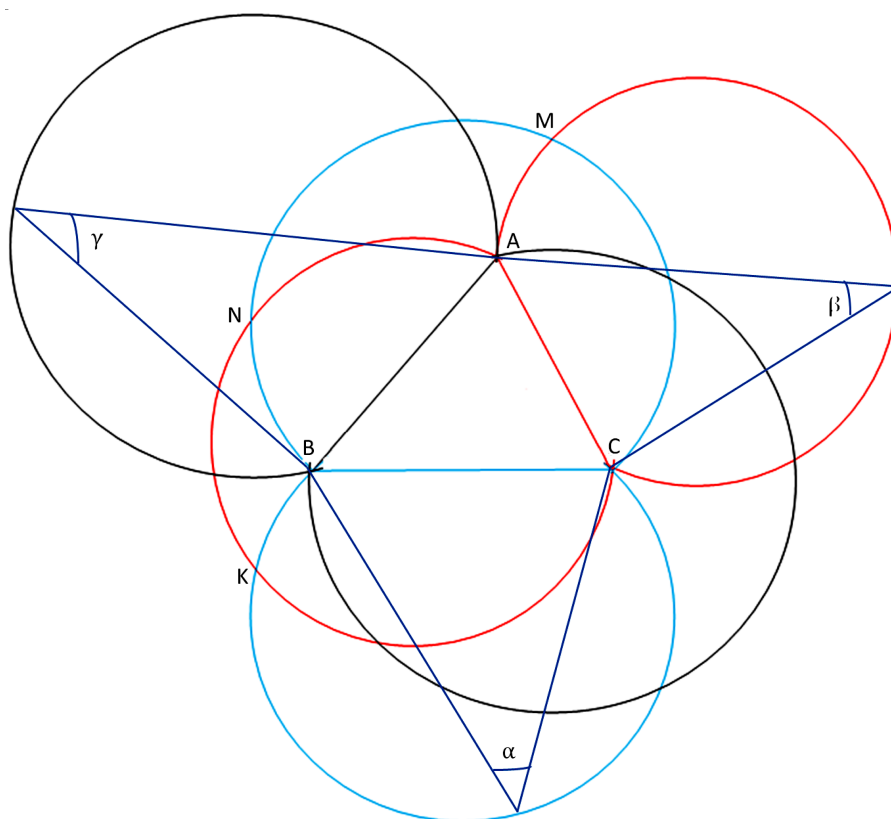


图 5 光心位于 6 个由控制点决定的南瓜面外且控制点三角形 ABC 为锐角三角形, 式 (1) 定义的 3 个南瓜面与控制平面的交线的一般形式

Figure 5 The general configuration of the intersecting curves of the 3 pumpkin surfaces defined by Eq. (1) with the control plane when the triangle ABC is an acute one and the optical center O is outside of all the 6 pumpkin surfaces defined by the 3 control points

考察从 N 点到 M 点相交曲线上点与控制点 A 和 B 之间夹角的变化关系, 同理可证在这段连续交线上, 必有另一点 O' , 使得 $\angle AO'B = \gamma$, $\angle BO'C = \alpha$, $\angle AO'C = \beta$, 则 O' 点为 P3P 问题的另一个解.

由上述 (1) 和 (2) 知, 对应的 P3P 问题至少有 2 个解, 定理 1 证毕.

关于定理 1, 我们有如下几点说明: (i) 定理 1 表明, 当光心位于所有 6 个南瓜面外时, 此时对应的 P3P 问题一般至少有 2 个解, 但也可能有 3 个解, 或 4 个解. 如 Zhang 等^[14] 证明, 当摄像机光心位于三角形 ABC 的三个垂面上时, 此时对应的 P3P 问题有 4 组不同的解; 当摄像机光心位于危险圆柱上时, 此时对应的 P3P 问题有 3 组不同的解^[15]. 因为在二段连续的交线上, 仅仅能保证每段“至少存在一个点 O , 此时 $\angle AOB = \angle \gamma$ ”, 但并不能排除存在满足这样约束的多个点的可能性. 如果存在多个这样的点, 则每个点均对应一个 P3P 问题的解, 此时 P3P 问题的解的个数多于 2. 由于 P3P 问题最多有 4 个解, 所以交线上满足约束 $\angle AOB = \angle \gamma$ 的点 O 的个数永远不会超过 4 个. 另外, 当光心位于所有 6 个南瓜面内部时, 并不意味着此时对应的 P3P 问题的解的个数一定小于或等于 2, 我们目前还无法证明这一点.

(ii) 定理 1 指出, 当光心位于所有 6 个南瓜面外时, 此时对应的 P3P 问题一般至少有 2 个解, 但我们并不能证明此时一定至少有 2 个解. 这主要是因为当光心在 6 个“南瓜面”外面时, 三个南瓜面 $T_{AC}^{\angle \beta}$, $T_{AB}^{\angle \gamma}$, $T_{BC}^{\angle \alpha}$ 与控制点平面的三条交线与三角形 ABC “一般”有如图 5 所示的关系, 但目前仍无法

严格证明此时一定有如图 5 所示的关系. 因为对如图 1 所示的以光心 O 为顶点的三棱锥, α, β, γ 三个张角之间的任意二个角之和应该大于第三个角, 即 P3P 问题中 α, β, γ 这三个角应该满足“三角不等式关系”. 但在图 5 所示的平面交线图, 还无法将 α, β, γ 三个角之间这种“三角不等式约束关系”表现出来. 所以, 目前仅仅能证明, 当光心位于所有 6 个南瓜面外时, 此时对应的 P3P 问题一般至少有 2 个解, 而无法严格证明此时一定至少有 2 个解. 但值得指出的是, 当给定一个具体 P3P 问题时, 此时 α, β, γ 为已知值, 则本文方法可以用来直观地判断该 P3P 问题是否有多解.

(iii) 我们进行了一百多万次模拟实验, 结果无一例外表明, 当光心位于所有 6 个南瓜面外时, 此时对应的 P3P 问题总是至少有 2 个解. 但任何模拟实验均无法“排除例外的产生”. 所以, 如何严格证明“一定至少有 2 个解”是下一步需要进一步研究的问题.

(iv) 定理 1 的证明过程表明, P3P 问题的多解性可以通过判断 $T_{AC}^{\angle\beta}, T_{AB}^{\angle\gamma}, T_{BC}^{\angle\alpha}$ 三个南瓜面与控制平面的交线之间的相交关系确定. 由于 $T_{AC}^{\angle\beta}, T_{AB}^{\angle\gamma}, T_{BC}^{\angle\alpha}$ 的交点就是 P3P 问题的解, 定理 1 的证明过程表明, 对 P3P 问题而言, “ $T_{AC}^{\angle\beta}, T_{AB}^{\angle\gamma}, T_{BC}^{\angle\alpha}$ 三个空间曲面的交点”, 在很大程度上可以通过分析这三个曲面与控制点平面之间的相交共面曲线来进行. 所以, 从这个意义上来说, 本文给出了判断 P3P 问题多解性的一种新思路和新途径. 但需要指出的是, “ $T_{AC}^{\angle\beta}, T_{AB}^{\angle\gamma}, T_{BC}^{\angle\alpha}$ 三个空间曲面的交点”可以完全刻画 P3P 问题解的个数和位置, 但本文分析相交共面曲线的途径, 很难给出对 P3P 问题解的完整刻画. 所以, 本文分析相交共面曲线的途径与分析三个南瓜面交点的途径不是完全等价的方法.

(v) 定理 1 表明, 当摄像机光心与控制点的距离比较远时, 如大于控制点三角形的外接圆直径时 (此时光心一定在 6 个南瓜面外), 对应的 P3P 问题一般不存在唯一解. 这一结果似乎与常识相悖 (因为一般来说, 具体应用中大多数视觉定位问题有唯一解). 由于在实际应用中, 受环境和成本限制, 3 个控制点之间的距离不可能太大, 而一般相机与控制点之间的距离又不能太短, 所以在实际应用中, 多解现象是“普遍的”, 需要应用者高度注意和重视, 从多解中剔除伪解, 进而确定真实解.

(vi) 定理 1 指出, 当光心位于所有 6 个南瓜面外时, 此时对应的 P3P 问题一般至少有 2 个解. 但目前我们并不知道, 在可能的多个解中, 其他“伪解”与“真解”之间可能存在的关系, 特别是它们之间的几何分布关系. 如果“伪解”与“真解”在空间中的位置分布确实有一定的“确定性关系”, 则探索这种关系将具有重要的实用价值.

4 结束语

本文将 P3P 问题中“空间南瓜面的相交问题”通过“南瓜面与控制点平面之间的共面交线”进行判断, 给出了一种新的分析 P3P 问题多解性的途径和方法. 同时, 本文结果表明, 当摄像机光心与控制点之间的距离相对比较远时, 对应的 P3P 问题一般不存在唯一解. 这一结果不仅揭示了 P3P 问题多解现象的普遍性, 而且在具体应用中具有一定的指导作用, 如: 要想得到唯一解, 摄像机的光心一般需要位于由 3 个控制点定义的 6 个南瓜面内部. 当相机与控制点平面之间的距离比较远时, 控制点之间的距离在情况允许下, 应尽量大一些, 从而避免产生伪解.

参考文献

- 1 Grunert J A. Das pothenotische problem in erweiterter gestalt nebst über seine anwendungen in der geodäsie. Grunerts Archivfür Mathematik und Physik, 1841, 1: 238–248
- 2 Fischler M A, Bolles R C. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automatic cartography. Graph Image Process, 1981, 24: 381–395

- 3 Ferraz L, Binefa X, Moreno-Noguer F. Very fast solution to the PnP problem with algebraic outlier rejection. In: Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Ohio, 2014. 501–508
- 4 Kneip L, Li H, Seo Y. UPnP: an optimal $O(n)$ solution to the absolute pose problem with universal applicability. In: Proceedings of IEEE European Conference on Computer Vision (ECCV), Zurich, 2014. 127–142
- 5 Kukulova Z, Bujnak M, Pajdla T. Real-time solution to the absolute pose problem with unknown radial distortion and focal length. In: Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), Sydney, 2013. 2816–2823
- 6 Muller M, Rassweiler M C, Klein J, et al. Mobile augmented reality for computer assisted percutaneous nephrolithotomy. Int J Comput Assisted Radiology Surgery, 2013, 8: 663–675
- 7 Urban S, Leitloff J, Hinz S. Improved wide-angle, fisheye and omnidirectional camera calibration. ISPRS J Photogramm Remote Sens, 2015, 108: 72–79
- 8 Zheng Y, Kuang Y, Sugimoto S, et al. Revisiting the PnP problem: a fast, general and optimal solution. In: Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), Sydney, 2013. 2344–2351
- 9 Urban S, Leitloff J, Hinz S. MLPNP—a real-time maximum likelihood solution to the perspective-N-point problem. arXiv:1607.08112
- 10 Su C, Xu Y Q, Li H, et al. Necessary and sufficient condition of positive root number of perspective-three-point problem. Chin J Comput, 1998, 21: 1084–1095
- 11 Yang L. A Simplified algorithm for solutions classification of the perspective-three-point problem. MM Research Preprints, 1998. 135–145
- 12 Gao X S, Hou X R, Tang J L, et al. Complete solution classification for the perspective-three-point problem. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell, 2003, 25: 930–943
- 13 Mathis D, Sklair C W, Magee M. The perspective view of three points. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell, 1991, 13: 66–73
- 14 Zhang C X, Hu Z Y. A general sufficient condition of four positive solutions of the P3P problem. J Comput Sci Tech, 2005, 20: 836–842
- 15 Zhang C X, Hu Z Y. Why is the danger cylinder dangerous in the P3P problem? Acta Autom Sin, 2006, 32: 504–511
- 16 Sun F M, Wang B. A note on the roots of distribution and stability of the PnP problem. Acta Autom Sin, 2010, 36: 1213–1219
- 17 Rieck M Q. An algorithm for finding repeated solutions to the general perspective three-point pose problem. J Math Imag Vis, 2012, 42: 92–100
- 18 Rieck M Q. A fundamentally new view of the perspective three-point pose problem. J Math Imag Vis, 2014, 48: 499–516
- 19 Hu L H, Wang B, Zhang J F. Singular points in the optical center distribution of P3P solutions. Math Problem Eng, 2015, 2015: 147397
- 20 Wang B, Zhang C X, Hu Z Y. Geometric Interpretation of the Multi-Solution Phenomenon in the P3P Problem. CASIA Technical Report: CASIA-NLPR-RV-2014-11-03. 2014

附录 A

图 A1 为当光心位于由三个控制点决定的六个南瓜面外部但控制点三角形 ABC 为钝角三角形时的情形 (角 C 为钝角, 3 种不同颜色表示的交线与图 5 相同), 从图 A1 可见, 此时这些南瓜面与控制平面交线之间的相交性质, 与图 5 所示没有区别. 即定理 1 当控制点三角形为钝角三角形时仍成立.

图 A2 为当光心位于由 3 个控制点决定的 6 个南瓜面内部且控制点三角形 ABC 为锐角三角形时的情形 ($\alpha < \angle A$, $\gamma < \angle C$ 但 $\beta > \angle B$). 从图 A2 可见, 此时这些南瓜面与控制平面交线之间的相交性质与图 5 所示发生了根本性变化, 此时证明定理 1 途径不再有效.

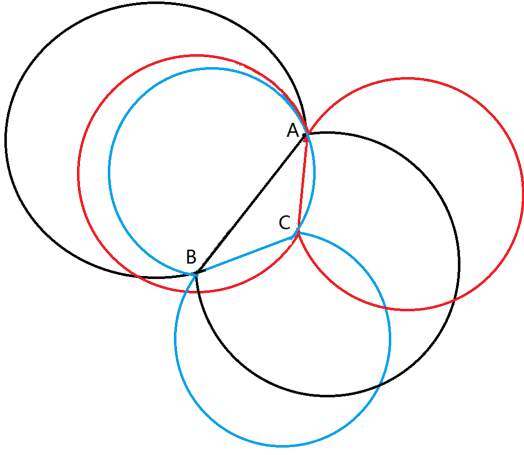


图 A1 (网络版彩图) 光心位于 6 个由控制点决定的南瓜面外, 但控制点三角形 ABC 为钝角三角形, 式 (1) 定义的三个南瓜面与控制平面的交线的一般形式

Figure A1 (Color online) The general configuration of the intersecting curves of the 3 pumpkin surfaces defined by Eq. (1) with the control plane when the triangle ABC is an obtuse one and the optical center O is outside of all the 6 pumpkin surfaces defined by the 3 control points

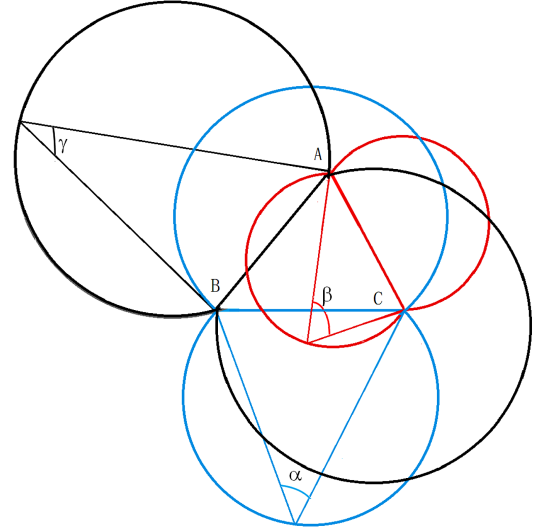


图 A2 (网络版彩图) 光心位于 6 个由控制点决定的南瓜面内部且控制点三角形为锐角三角形, 式 (1) 定义的三个南瓜面与控制平面的交线的一般形式

Figure A2 (Color online) The general configuration of the intersecting curves of the 3 pumpkin surfaces defined by Eq. (1) with the control plane when the triangle ABC is an acute one and the optical center O is inside of all the 6 pumpkin surfaces defined by the 3 control points

Generality of the multi-solution phenomenon in the P3P problem

Bo WANG¹, Hao HU^{1,2}, Caixia ZHANG^{1,3} & Huarong XU^{1,4*}

1. Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. School of Information Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250100, China;

3. Science College, North China University of Technology, Beijing 100144, China;

4. School of Computer Information Engineering, Xiamen University of Technology, Xiamen 361024, China

* Corresponding author. E-mail: hrxu@xmut.edu.cn

Abstract The P3P problem is a significant single-view-based pose estimation method, and its multi-solution phenomenon has been the focus of investigation since its inception. In this work, we demonstrate from a geometrical point of view that when the distance from the camera's optical center to the three control points is relatively large, the corresponding P3P problem cannot have a unique solution in general; alternatively, or it should have at least two solutions satisfying the three original constraints. A further contribution of this study is the finding that the intersection of the three 3D pumpkin surfaces in the P3P problem can be generally deduced from the intersection of the three 2D intersecting curves of the three pumpkin surfaces with the control point plane, which provides a new way to investigate the multi-solution phenomenon. Our results may be significant for both P3P theorists and practitioners.

Keywords P3P problem, multi-solution phenomenon, pumpkin surface, image-based pose



Bo WANG graduated from Nanjing University with a bachelor's degree in electronic engineering in 2007, and the Institute of Automation Research, China, with a Ph.D. degree majoring in computer vision in 2013. At present, he is an assistant researcher at the Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. His research interests lie mainly in the areas of camera calibration, visual positioning, and virtual and augmented reality.



Huarong XU graduated from the Physics Department of Minnan Normal University with a bachelor's degree in 1995, and the College of Physical Science and Technology of Xiamen University with a Ph.D. degree, majoring in computer vision. At present, he is a professor at the School of Computer Information Engineering, Xiamen University of Technology. His research interests lie mainly in the areas of computer vision, artificial intelligence, and data mining.

Huarong XU graduated from the Physics Department of Minnan Normal University with a bachelor's degree in 1995, and the College of Physical Science and Technology of Xiamen University with a Ph.D. degree, majoring in computer vision. At present, he is a professor at the School of Computer Information Engineering, Xiamen University of Technology. His research interests lie mainly in the areas of computer vision, artificial intelligence, and data