



移动通信中的信道参数估计 Cramér-Rao 下界研究

李溯南¹, 华惊宇^{1*}, 姜胜园¹, 周凯¹, 徐志江²

1. 浙江工业大学信息工程学院, 杭州 310023

2. 浙江省通信网技术应用研究重点实验室, 杭州 310023

* 通信作者. E-mail: eehjy@zjut.edu.cn

收稿日期: 2016-07-04; 接受日期: 2016-10-27; 网络出版日期: 2017-06-21

国家自然科学基金 (批准号: 61471322) 资助项目

摘要 在移动通信中, 信道增益噪声方差和 Doppler 频移等参数的估计具有重要意义. 然而移动台的相对运动使得传输信道变成时变信道, 这降低了参数估计的准确性. 因此本文研究一般时间选择性信道的参数估计方差界推导, 即有限样本 Cramér-Rao 下界 (CRLB), 推导时考虑 Doppler 扩展、方向性散射以及加性噪声的联合影响. 这些界对于评估相应信道参数估计器的性能极为有益. 为了处理信道功率谱密度 (power spectrum density, PSD) 边界的奇异性, 本文提出了一种近似谱密度方案, 解决了非近似方案无法适应 PSD 边界不可微的缺陷. 数值计算结果表明, 只要样本数满足一定的条件, 近似方案可以获得与非近似方案逼近的 CRLB 计算结果, 但是前者扩展了计算方法对于 Doppler 频移范围的适应性.

关键词 Cramér-Rao 下界, 时变信道, 参数估计, 功率谱密度, 移动通信

1 引言

下一代移动通信对于传输速率的要求有着极大增长^[1], 因此对于参数估计器的性能也有更高要求, 例如移动通信中对于信道参数的估计^[2]、Doppler 频移的估计^[3~8]、信噪比的估计^[3, 5, 9~12], 以及移动定位^[13]. Cramér-Rao 下界 (CRLB) 是关于参数无偏估计的方差下界, 可以用作实际参数估计的参照标准并指导估计器改进^[14, 15]. 同时考虑到当车辆移动速度较快时, 所导致的快速时变衰落会显著影响信道参数估计性能^[16], 因此有必要研究在时变衰落信道中参数估计的 CRLB. 进一步考虑到 Doppler 频移 (f_d) 与时变衰落速率有关^[17], 我们应该推导含有 Doppler 频移 (f_d) 的 CRLB 表达式.

一般而言, 在计算 Cramér-Rao 下界时需要用到协方差矩阵的逆, 并且样本越多, 协方差矩阵的奇异性也会随之增大. 因此, 研究较多的是加性 Gauss 白噪声信道中的渐进 Cramér-Rao 下界, 文献 [18,

引用格式: 李溯南, 华惊宇, 姜胜园, 等. 移动通信中的信道参数估计 Cramér-Rao 下界研究. 中国科学: 信息科学, 2017, 47: 904-914, doi: 10.1360/N112016-00163

Li S N, Hua J Y, Jiang S Y, et al. Cramér-Rao lower bound of the channel parameter estimation in mobile communications (in Chinese). Sci Sin Inform, 2017, 47: 904-914, doi: 10.1360/N112016-00163

19] 给出了在实值衰落信道情况下的近似结果. 此外, Gini 等^[20] 将这些结果扩展到了复值衰落信道中, 并且指出频率估计可以从其他参量中分离出来. 但是 Gini 假定在信道的功率谱密度边界不存在奇点, 因此他的研究不能用于常见的 Jakes 功率谱密度. 为了解决这个问题, 文献 [21] 提出了一种截断功率谱密度的近似方案, 但这样会使得被截断的功率谱密度信息完全损失.

上述 Cramér-Rao 下界的推导过程通常假设各向同性散射, 即到达角均匀分布. 然而, 文献 [4, 22] 指出在许多环境下遇到的散射并不是各向同性的, 这导致了在移动台接收到的信号到达角的概率密度函数并不是均匀分布的, 因此本文在研究中考虑广泛用于方向性散射建模的 vonMise 分布^[22]. 文中我们综合考虑加性噪声、方向性散射和时变衰落的影响, 研究 Doppler 频移估计、噪声功率估计和信道功率估计的联合 Cramér-Rao 下界. 在研究中我们首先推导不考虑边界奇异性的非近似 Cramér-Rao 下界, 而后提出一种新的功率谱密度近似方案来替代文献 [21] 中的截断方案, 并推导得到逼近效果更好的近似 CRLB. 本文的结果将有助于在快速时变信道中评估参数估计器性能.

本文结构如下, 第 2 节会介绍文中使用的信号模型, 第 3 节推导 Cramér-Rao 下界, 第 4 节进行 CRLB 数据结果的分析并用于评估一种 Doppler 频移估计算法, 第 5 节是结论与总结.

2 信号模型

一般而言, Doppler 频移等信道参数的估计应在信道系数估计之后进行^[3], 因此可以假设信道系数估计已经完成并且假设平坦衰落信道. 信道系数估计可以表示为

$$x(n) = a(n) + v(n), \quad (1)$$

其中, $x(n)$, $a(n)$ 和 $v(n)$ 分别代表时刻的信道系数估计, 实际的信道系数和加性 Gauss 白噪声 (方差为 σ_v^2). 需要注意的是, $a(n)$ 是一个与 $v(n)$ 独立的零均值复 Gauss 平稳过程. 此外 $a(n)$ 可以表示为^[20, 21]

$$a(n) = \sigma_a \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^M \alpha_m \exp(j\omega_d \cos(\theta_m) n + \varphi_m), \quad (2)$$

其中 ω_d 表示经过归一化后用角频率表示的 Doppler 频移, α_m 是确定的常数, θ_m 是第 m 个散射体反射波与移动方向的夹角, φ_m 是在 $(-\pi, \pi)$ 上均匀分布的独立同分布相位.

将 $a(n)$ 的 τ 间隔自相关函数 (ACF) 表示为 $R_a(\tau)$, 则根据式 (2) 易得 $R_a(\tau)$ 是一个正实数且 $\sigma_a^2 = R_a(0)$. 一般而言, 不同形式的 $R_a(\tau)$ 可以用来表示不同的信道时变衰落情况. 例如, Gauss 函数型与指数型的 $R_a(\tau)$ 分别可以用来表示电离层通信与 Doppler 雷达情况^[20], 而 Bessel 函数型可以用来表示陆地移动通信的情况^[21]. 前人研究表明, $R_a(\tau)$ 事实上也可以由到达角分布来确定, 一个典型的非均匀到达角分布就是 vonMise 分布, 其确定的 ACF 为^[22]

$$R_a(\tau) = \sigma_a^2 \frac{I_0 \left(\sqrt{\kappa^2 - 4\pi^2 f_m^2 \tau^2 + j4\pi\kappa \cos(\theta_p) f_m \tau} \right)}{I_0(\kappa)}, \quad (3)$$

其中 vonMise 概率密度函数为

$$p_\theta = \frac{\exp(\kappa \cos(\theta - \theta_p))}{2\pi I_0(\kappa)}, \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (4)$$

式 (3) 和 (4) 中的 f_m , $I_0(\cdot)$ 和 $J_0(\cdot)$ 分别表示归一化 Doppler 频移、零阶修正 Bessel 函数和零阶 Bessel 函数, κ 表示波束宽度, θ_p 表示平均散射方向与移动台移动方向的夹角. 当波束宽度为零的时候即为 Jakes 模型. 在研究中为了简化分析, 我们假设 κ 和 θ_p 都是非零和已知的.

根据上面的讨论, 可以推导出信道系数估计的自相关函数:

$$R_x(\tau) = R_a(\tau) + \sigma_v^2 \delta(\tau), \quad (5)$$

因此未知参数矢量为 $\theta = [w_d, \sigma_a^2, \sigma_v^2]$.

3 信道参数估计的 Cramér-Rao 下界

通过将样本矢量表示为 $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_N]$, 可以将有限采样 Fisher 信息矩阵的元素写作^[14]

$$(\mathbf{J})_{kl} = J_{\theta_k \theta_l} = 2\Re \left\{ \frac{\partial \mathbf{m}_x^H}{\partial \theta_k} \mathbf{R}_x^{-1} \frac{\partial \mathbf{m}_x}{\partial \theta_l} \right\} + \text{tr} \left\{ \mathbf{R}_x^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \theta_k} \mathbf{R}_x^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \theta_l} \right\}, \quad (6)$$

其中 θ_k 表示 θ 的第 k 个元素, $\Re(y)$ 是 y 的实部, 而 $\text{tr}(\cdot)$ 表示求矩阵的迹. 在式 (6) 中 $\mathbf{m}_x = E[\mathbf{x}] = 0$ 且有

$$\mathbf{R}_x = E\{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^H\} = \mathbf{R}_a + \sigma_v^2 \mathbf{I}, \quad (7)$$

式中 $(\cdot)^H$ 代表求矩阵的共轭转置, 而 \mathbf{I} 为 $N \times N$ 的单位矩阵. 在式 (7) 中, ACF 矩阵 \mathbf{R}_a 是通过式 $(\mathbf{R}_a)_{ij} = R_a(i-j)$ 构造出来的. 根据式 (6), 可以推导出 θ_k 的 Cramér-Rao 下界为^[14]

$$\text{CRLB}(\theta_k) = (\mathbf{J}^{-1})_{kk}. \quad (8)$$

由于要用到矩阵求逆, 因此大多时候难以用式 (8) 来计算 CRLB. 文献 [20] 指出如果相比于信道的相干时间, N 足够大, 使得 $\mathbf{R}_a \approx \sigma_a^2 \mathbf{W} \mathbf{S}_a \mathbf{W}$, 其中 \mathbf{W} 是归一化的离散 Fourier 变换矩阵, 则有 $\mathbf{W} \mathbf{W}^H = \mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}$ 以及 $\mathbf{S}_a = \text{diag}\{S_a(k/N)\}_{k=0}^{N-1}$. 这里的 $S_a(f)$ 表示了信道的功率谱密度 (power spectrum density, PSD), 可以由式 (3) 中的自相关函数作 Fourier 变换得到. 因而式 (7) 可以近似为

$$\mathbf{R}_x \approx \mathbf{W} \mathbf{\Lambda} \mathbf{W}^H, \quad (9)$$

式中 $\mathbf{\Lambda}$ 为对角矩阵可以表示为 $\mathbf{\Lambda} = \sigma_v^2 \mathbf{I} + \mathbf{S}_a$.

3.1 Fisher 信息矩阵的推导

由式 (7) 可以得到 $\frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \sigma_v^2} = \mathbf{I}$ 和 $\frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \sigma_a^2} = \frac{\partial \mathbf{R}_a}{\partial \sigma_a^2} = \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{S}_a}{\partial \sigma_a^2} \mathbf{W}^H$, 因此,

$$J_{\sigma_v^2 \sigma_v^2} = \text{tr}\{\mathbf{R}_x^{-2}\} = \text{tr}\{\mathbf{\Lambda}^{-2}\} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(S_a\left(\frac{k}{N}\right) + \sigma_v^2 \right)^{-2}, \quad (10)$$

$$J_{\sigma_a^2 \sigma_a^2} = \text{tr} \left\{ \mathbf{\Lambda}^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_a}{\partial \sigma_a^2} \mathbf{\Lambda}^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_a}{\partial \sigma_a^2} \right\} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\frac{\partial S_a(\frac{k}{N})}{\partial \sigma_a^2}}{S_a(\frac{k}{N}) + \sigma_v^2} \right)^2. \quad (11)$$

此外还有 $\frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \omega_d} = \frac{\partial \mathbf{R}_a}{\partial \omega_d} = \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{S}_a}{\partial \omega_d} \mathbf{W}^H$, 可以得到

$$J_{\omega_d \omega_d} = \sigma_a^4 \text{tr} \left\{ \mathbf{\Lambda}^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_a}{\partial \omega_d} \mathbf{\Lambda}^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_a}{\partial \omega_d} \right\} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\frac{\partial S_a(k/N)}{\partial \omega_d}}{S_a(k/N) + \sigma_v^2} \right)^2, \quad (12)$$

$$J_{\sigma_v^2 \sigma_a^2} = \text{tr} \left\{ \Lambda^{-2} \frac{\partial \mathbf{S}_a}{\partial \sigma_a^2} \right\} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(S_a(k/N) + \sigma_v^2)^{-2}} \frac{\partial S_a(k/N)}{\partial \sigma_a^2}, \quad (13)$$

$$J_{\omega_d \sigma_v^2} = \text{tr} \left\{ \Lambda^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_a}{\partial \omega_d} \Lambda^{-1} \right\} = \sum_{k=0}^{N-1} (S_a(k/N) + \sigma_v^2)^{-2} \frac{\partial}{\partial \omega_d} S_a \left(\frac{k}{N} \right), \quad (14)$$

$$J_{\omega_d \sigma_a^2} = \sigma_a^2 \text{tr} \left\{ \Lambda^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_a}{\partial \omega_d} \Lambda^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_a}{\partial \sigma_a^2} \right\} = \sum_{k=0}^{N-1} (S_a(k/N) + \sigma_v^2)^{-2} \frac{\partial S_a(k/N)}{\partial \sigma_a^2} \frac{\partial S_a(k/N)}{\partial \omega_d}. \quad (15)$$

3.2 功率谱密度的近似

从式 (10)~(15) 可以清楚地看到求 $S_a(f)$ 的偏导数是十分重要的. 然而 vonMise 分布导致的信道功率谱密度 (含 Jakes 功率谱密度) 在 f_m 处都是不可导的, 因此需要近似技术来提高计算的鲁棒性.

3.2.1 未近似的功率谱密度: $|f| < f_m$

根据自相关函数和功率谱密度的 Fourier 变换关系, 可以得到

$$S_a(f) = \frac{\sigma_a^2 \exp\left(\kappa \frac{f}{f_m} \cos \theta_p\right)}{\pi I_0(k) \sqrt{f_m^2 - f^2}} \cosh \left(\kappa \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_m}\right)^2} \sin \theta_p \right), \quad (16)$$

$$\frac{\partial S_a(f)}{\partial \sigma_a^2} = \frac{\exp\left(\kappa \frac{f}{f_m} \cos \theta_p\right)}{\pi I_0(k) \sqrt{f_m^2 - f^2}} \cosh F, \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_a(f)}{\partial \omega_d} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S_a(f)}{\partial f_m} = \frac{-\sigma_a^2 \exp\left(\kappa \frac{f}{f_m} \cos \theta_p\right)}{2\pi^2 I_0(\kappa)} \\ &\times \left(\frac{f_m \cosh(F)}{(f_m^2 - f^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\kappa f \cos \theta_p \cosh(F)}{f_m^2 \sqrt{f_m^2 - f^2}} - \frac{\kappa f^2 \sin \theta_p \sinh(F)}{f_m^2 (f_m^2 - f^2)} \right), \end{aligned} \quad (17b)$$

其中 $F = \kappa \sin \theta_p \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_m}\right)^2}$. 显然上述公式中 f 不能取为 f_m , 因此有必要研究下面的近似谱密度.

3.2.2 近似的功率谱密度: $|f| \leq f_m$

和参考文献 [21] 类似, 首先需要设置截止频率. 本文选择 $|f_{\max}| = f_m \sin \alpha$, 这里的 α 接近 $\pi/2$. 在文献 [21] 中, $|f_{\max}| = f_m(1-1/M)$ (M 是一个大整数), 本文的近似更为简单有效. 同时不同于文献 [21] 抛弃 f_{\max} 到 f_m 段谱密度的做法, 我们在 $S_a(f)$ 的正负 f_{\max} 画出两条切线, 表示为 $\text{Line}_{\pm f_{\max}}(f)$, 然后将 $S_a(\pm f_m)$ 替换为相对应的 $\text{Line}_{\pm f_{\max}}(f_m)$, 显然保留了更多的有效谱密度信息. 具体的推导过程极为繁琐, 本文不再赘述, 下面仅给出最终的结果.

令 $A = \kappa \sin \theta_p \cos \alpha$, $B = (-\tan \alpha \cosh A + \kappa \cos \alpha \cos \theta_p \cosh A + \kappa \sin \alpha \sin \theta_p \sinh A)$, $C = (\tan \alpha \cosh A + \kappa \cos \alpha \cos \theta_p \cosh A - \kappa \sin \alpha \sin \theta_p \sinh A)$, $U1 = u[f + f_m] - u[f + f_m \sin \alpha]$, $U2 = u[f - f_m \sin \alpha] - u[f - f_m]$, $U3 = (u[f + f_m \sin \alpha] - u[f - f_m \sin \alpha])$, 可以得到式 (18) 和 (19), 其中 $u[x]$ 和 $\delta(x)$ 分别表示阶跃函数和冲激函数,

$$\bar{S}_a(f) = \frac{\sigma_a^2 \exp\left(\kappa \frac{f}{f_m} \cos \theta_p\right)}{\pi I_0(\kappa) \sqrt{f_m^2 - f^2}} \cosh(F) U3 + \frac{\sigma_a^2 \exp(-\kappa \sin \alpha \cos \theta_p)}{\pi I_0(\kappa) f_m^2 \cos^2 \alpha} \times [B(f + f_m \sin \alpha) + f_m \cos \alpha \cosh A]$$

$$\times U1 + \frac{\sigma_a^2 \exp(\kappa \sin \alpha \cos \theta_p)}{\pi I_0(\kappa) f_m^2 \cos^2 \alpha} \times [C(f - f_m \sin \alpha) + f_m \cos \alpha \cosh A] \times U2, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{S}_a(f)}{\partial \omega_d} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S_a(f)}{\partial f_m} = \frac{-\sigma_a^2 \exp\left(\kappa \frac{f}{f_m} \cos \theta_p\right)}{2\pi^2 I_0(\kappa)} \left(\frac{f_m \cosh(F)}{(f_m^2 - f^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\kappa f \cos \theta_p \cosh(F)}{f_m^2 \sqrt{f_m^2 - f^2}} - \frac{\kappa f^2 \sin \theta_p \sinh(F)}{f_m^2 (f_m^2 - f^2)} \right) \\ &\times U3 - \frac{\sigma_a^2 \exp(-\kappa \sin \alpha \cos \theta_p)}{2\pi^2 I_0(\kappa) f_m^3 \cos^2 \alpha} \times [B(2f + f_m \sin \alpha) + f_m \cos \alpha \cosh A] \times U1 \\ &- \frac{\sigma_a^2 \exp(\kappa \sin \alpha \cos \theta_p)}{2\pi^2 I_0(\kappa) f_m^3 \cos^2 \alpha} \times [C(2f - f_m \sin \alpha) + f_m \cos \alpha \cosh A] \times U2 \\ &+ \frac{1}{2\pi} \bar{S}_a(f + f_m) \delta(f + f_m) + \bar{S}_a(f - f_m) \delta(f - f_m). \end{aligned} \quad (19)$$

通过式 (16)~(19) 可以计算 Fisher 信息矩阵, 而 Cramér-Rao 下界可以由式 (8) 得到. 因为详细的下界表达式非常冗长, 这里不再给出具体式子, 而第 4 节会通过数值计算给出 Cramér-Rao 下界具体数值.

4 计算结果与分析

本节会对比由未近似的功率谱密度和近似的功率谱密度得出的 CRLB, 到达角的分布遵从 vonMise 概率密度函数. 研究中的一些参数设定如下: $\alpha = 0.495\pi$, $\text{SNR} = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ dB; $f_m = 0.05$, $\kappa = 1$.

需要注意的是, 在未近似功率谱密度的情况下, 我们必须避免出现 $f_m = k_0/N$ 的情况 (k_0 为绝对值小于 N 的整数). 而对于近似功率谱密度, 因为我们所采取近似方法的鲁棒性, f_m 可以取任意小于 0.5 的正实数. 此外, 因为 κ 通常情况下小于 3.5^[4], 不失一般性本文将其为 1.

4.1 $\theta_p=0$ 时的计算结果

(1) 图 1 为 ω_d , σ_v^2 , σ_a^2 的 Cramér-Rao 下界与信噪比的关系, $N = 1024 \times 256$.

(2) 图 2 为 ω_d , σ_v^2 , σ_a^2 的 Cramér-Rao 下界与信噪比的关系, $N = 1024 \times 2$.

在图 1 和 2 的标注中 ‘approximation’ 代表近似功率谱密度而 ‘original’ 代表非近似功率谱密度. 此外只在图 1(a) 和 (c) 中看到了两条曲线之间的差异, 这些差异是由于在 $(-f_m, -f_m \sin \alpha) \cup (f_m \sin \alpha, f_m)$ 的范围内功率谱密度存在差异而导致的. 一般而言, 如果一个确定的整数 k_0 满足 $|k_0| < N$ 和 $k_0/N \in \{(-f_m, -f_m \sin \alpha) \cup (f_m \sin \alpha, f_m)\}$, 那么在非近似功率谱密度的情况下 Doppler 频移的 Cramér-Rao 下界与近似功率谱密度的情况下不同. 同时我们要指出不管是非近似功率谱密度还是近似功率谱密度 σ_v^2 的 Cramér-Rao 下界都是相同的. 从图 1 和 2 可以发现 ω_d , σ_a^2 和 σ_v^2 的 Cramér-Rao 下界都同时受到信噪比和样本大小的显著影响.

接下来, 展示什么情况下 Cramér-Rao 下界会不同. 先假设 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2M}$ 和 $x = -\frac{\pi}{2M}$, 然后通过 Taylor 级数公式 $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ 得到边界区域长度为

$$f_m(1 - \sin \alpha) = f_m \left(\frac{\pi^2}{8M^2} + O\left(\frac{1}{M^4}\right) \right) = \frac{f_m \pi^2}{8M^2} + O\left(\frac{1}{M^4}\right). \quad (20)$$

当采样间隔小于边界区域的长度时那必然存在至少一个 k_0 满足 $|k_0| < N$ 和 $k_0/N \in \{(-f_m, -f_m \sin \alpha) \cup (f_m \sin \alpha, f_m)\}$, 也即 $\frac{1}{N} < \frac{f_m \pi^2}{8M^2} \Rightarrow N > \frac{8}{\pi^2} \frac{M^2}{f_m}$. 本文设定 M 为 100, 则如果 $N > \frac{8 \times 10^4}{\pi^2 f_m} = \frac{8 \times 10^4}{0.05 \pi^2} =$

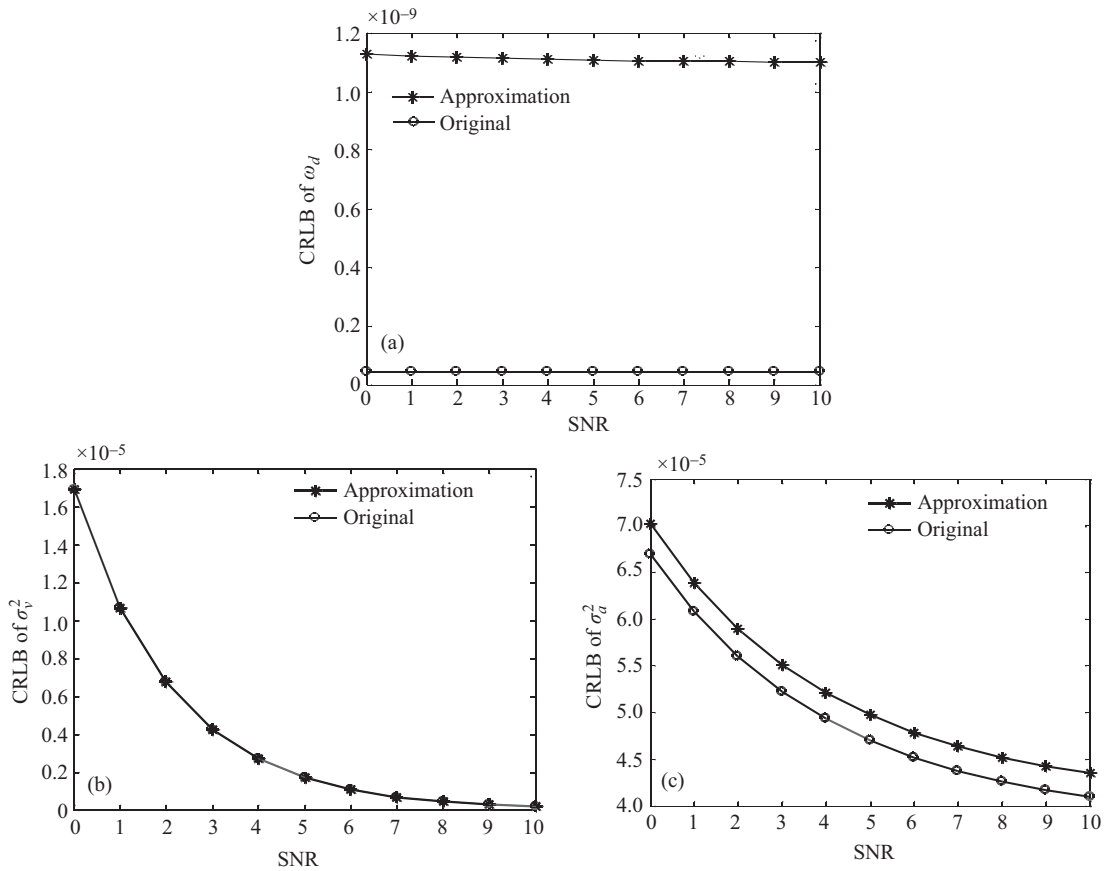


图 1 (a) ω_d , (b) σ_v^2 和 (c) σ_a^2 的 Cramér-Rao 下界与信噪比的关系, $N = 1024 \times 256$
 Figure 1 CRLB of (a) ω_d , (b) σ_v^2 and (c) σ_a^2 vs. SNR (dB). $N = 1024 \times 256$

158.32×1024, 那么使用非近似功率谱密度与使用近似功率谱密度情况下 Doppler 频移的 Cramér-Rao 下界存在着明显差异, 此时非近似功率谱密度的结果由于损失了更多的谱密度信息可靠性较差. 然而在实际应用中并不会使用如此大的样本数, 因此二者的 CRLB 计算不会有显著差距, 但是考虑到近似功率谱密度对 f_m 的取值更自由, 因而近似功率谱密度处理的表现要优于非近似功率谱密度处理.

如前所述, 一般通信中估计器使用的样本点数较小, 比如文献 [23] 采用 2000 个样本点作迭代 Doppler 估计, 在 SNR 为 0 dB 和 10 dB 时, 对应的归一化均方误差为 $2.8E-3$ 和 $1.8E-3$. 对比图 2(a), 我们发现对应的理论归一化均方误差数值 $CRLB/(0.05)^2$ 为 $1.27E-3$ 和 $1.13E-3$, 与文献 [23] 的仿真结果极为接近, 这表明文献 [23] 的方法性能已经逼近最小方差限.

4.2 $\theta_p = 0 : \frac{\pi}{8} : 2\pi$ 时的计算结果

- (1) 图 3 为 ω_d 的 Cramér-Rao 下界, $N = 1024 \times 256$.
- (2) 图 4 为 ω_d 的 Cramér-Rao 下界, $N = 1024 \times 2$.
- (3) 图 5 为 σ_v^2 的 Cramér-Rao 下界, $N = 1024 \times 256$.
- (4) 图 6 为 σ_v^2 的 Cramér-Rao 下界, $N = 1024 \times 2$.
- (5) 图 7 为 σ_a^2 的 Cramér-Rao 下界, $N = 1024 \times 256$.

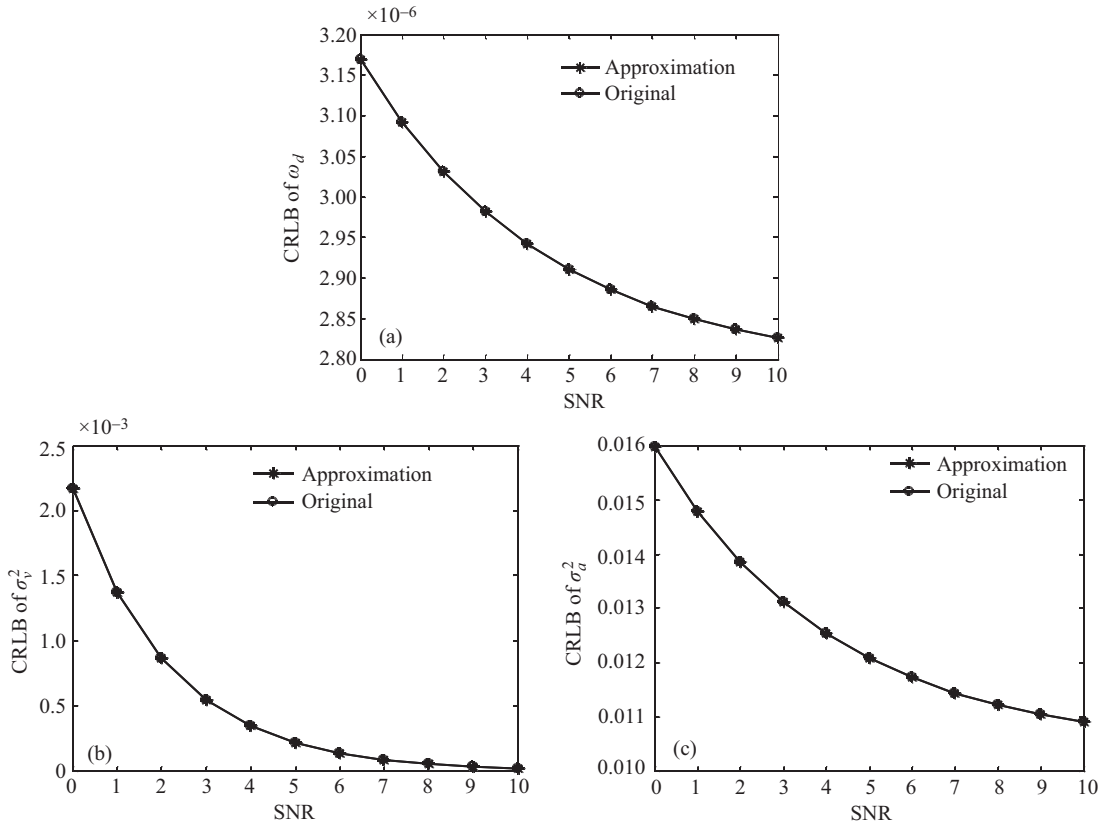


图 2 (a) ω_d , (b) σ_v^2 和 (c) σ_a^2 的 Cramér-Rao 下界与信噪比的关系, $N = 1024 \times 2$
 Figure 2 CRLB of (a) ω_d , (b) σ_v^2 and (c) σ_a^2 vs. SNR (dB). $N = 1024 \times 2$

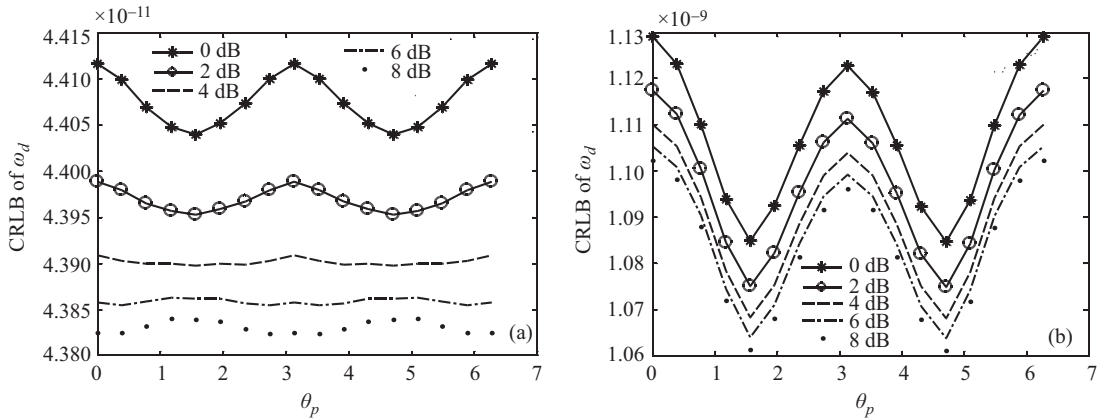


图 3 在 (a) 非近似功率谱密度和 (b) 近似功率谱密度情况下 ω_d 的 Cramér-Rao 下界与 θ_p 的关系, $N = 1024 \times 256$

Figure 3 CRLB of ω_d vs. θ_p : (a) the original PSD; (b) the approximating PSD. $N = 1024 \times 256$

(6) 图 8 为 σ_a^2 的 Cramér-Rao 下界, $N = 1024 \times 2$.

与图 1 和 2 类似, 可以从图 3 和 4 中得出结论, 当样本数 N 较小时近似功率谱密度与非近似功

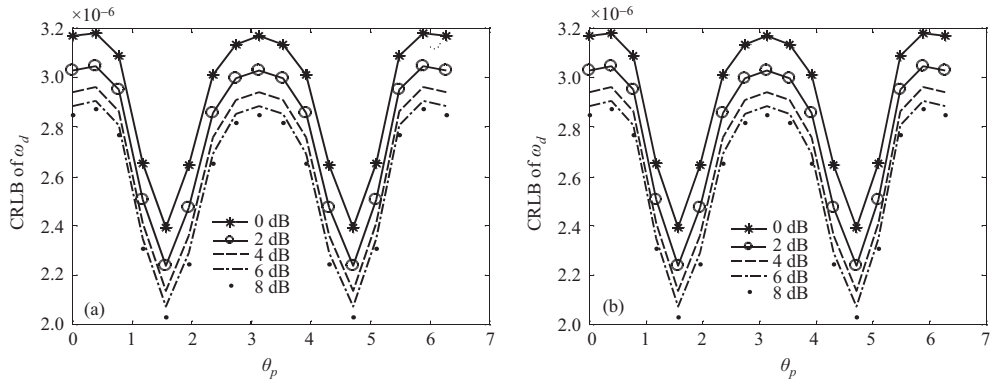


图 4 在 (a) 非近似功率谱密度和 (b) 近似功率谱密度情况下 ω_d 的 Cramér-Rao 下界与 θ_p 的关系, $N = 1024 \times 2$
 Figure 4 CRLB of ω_d vs. θ_p : (a) the original PSD; (b) the approximating PSD. $N = 1024 \times 2$

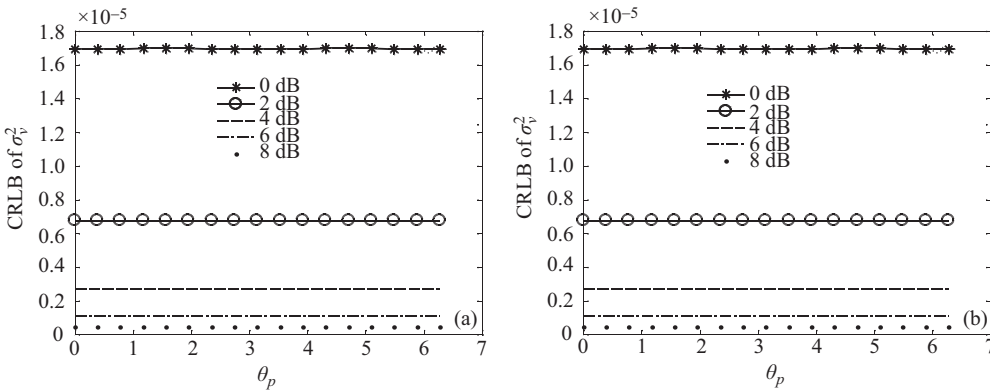


图 5 在 (a) 非近似功率谱密度和 (b) 近似功率谱密度情况下 σ_v^2 的 Cramér-Rao 下界与 θ_p 的关系, $N = 1024 \times 256$
 Figure 5 CRLB of σ_v^2 vs. θ_p : (a) the original PSD; (b) the approximating PSD. $N = 1024 \times 256$

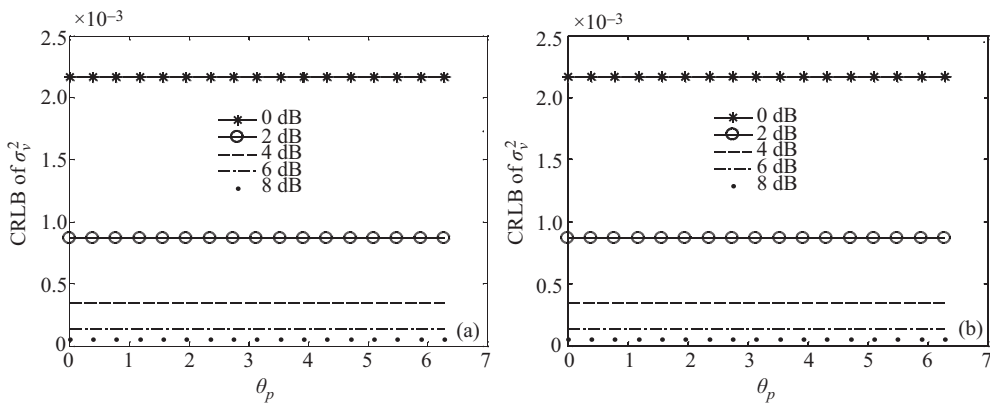


图 6 在 (a) 非近似功率谱密度和 (b) 近似功率谱密度情况下 σ_v^2 的 Cramér-Rao 下界与 θ_p 的关系, $N = 1024 \times 2$
 Figure 6 CRLB of σ_v^2 vs. θ_p : (a) the original PSD; (b) the approximating PSD. $N = 1024 \times 2$

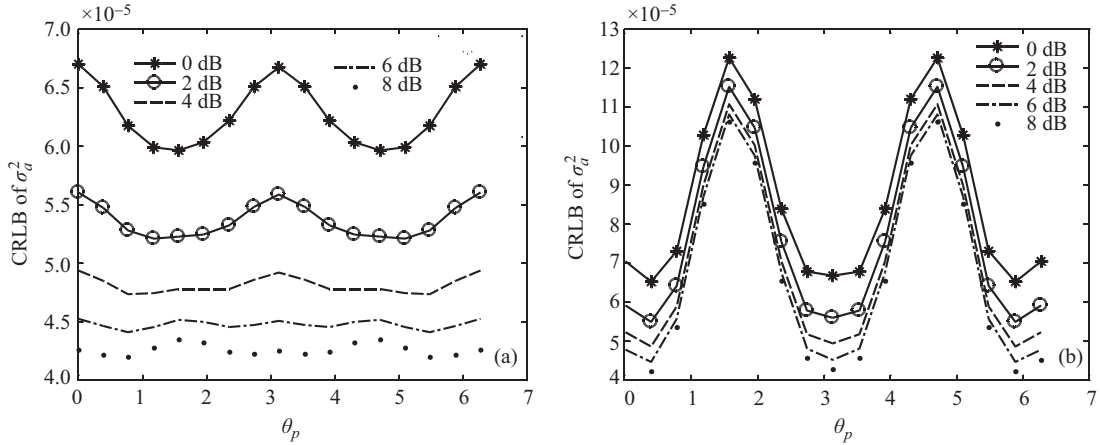


图 7 在 (a) 非近似功率谱密度和 (b) 近似功率谱密度情况下 σ_a^2 的 Cramér-Rao 下界与 θ_p 的关系, $N = 1024 \times 256$

Figure 7 CRLB of σ_a^2 vs. θ_p : (a) the original PSD; (b) the approximating PSD. $N = 1024 \times 256$

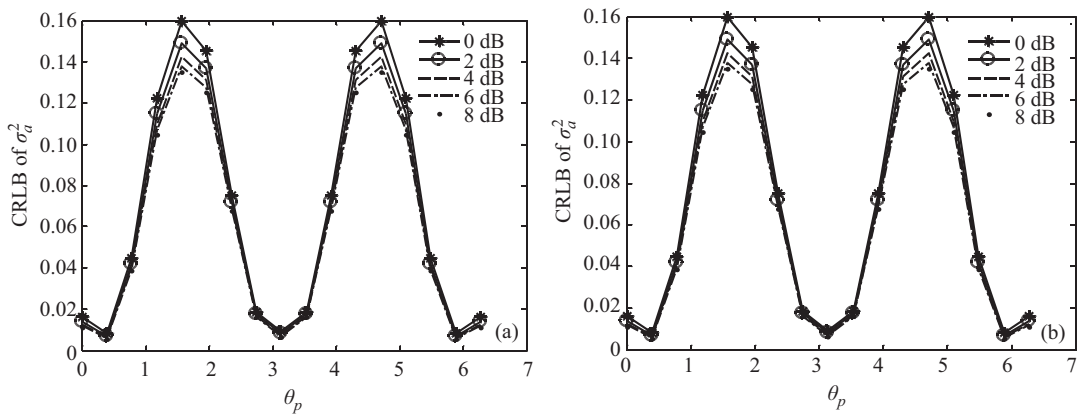


图 8 在 (a) 非近似功率谱密度和 (b) 近似功率谱密度情况下 σ_a^2 的 Cramér-Rao 下界与 θ_p 的关系, $N = 1024 \times 2$

Figure 8 CRLB of σ_a^2 vs. θ_p : (a) the original PSD; (b) the approximating PSD. $N = 1024 \times 2$

率谱密度所得到的 ω_d 的 Cramér-Rao 下界几乎相同. 而当 $N > \frac{8}{\pi^2} \frac{M^2}{f_m}$ 时, 随着频率分辨率增加使得至少有一个可分辨频率网格点落入到 $(-f_m, -f_m \sin \alpha) \cup (f_m \sin \alpha, f_m)$ 的范围内, 从而非近似功率谱密度与近似功率谱密度得到的 Cramér-Rao 下界有了显著差异, 非近似功率谱密度处理的结果可靠性较差. 此外, 从图 3 和 4 中可以发现 ω_d 的 Cramér-Rao 下界峰值随着信噪比的增加而下降, 同时曲线像一个关于 θ_p 的正弦函数一样变化.

从图 5 和 6 发现近似功率谱密度对计算 σ_v^2 的 Cramér-Rao 下界只有很小的影响, 这也符合图 1 和 2 反映的规律, 此外我们还发现 θ_p 不会影响到 σ_v^2 的 Cramér-Rao 下界计算.

从图 7 和 8 可以得出如果样本数较小, 那么近似功率谱密度与非近似功率谱密度所算出的 σ_a^2 的 Cramér-Rao 下界的差距较小, 而当 $N > \frac{8}{\pi^2} \frac{M^2}{f_m}$ 时, 差距会较大, 这也符合前面已经发现的规律. 我们还发现 Cramér-Rao 下界的变化类似于关于 θ_p 的正弦曲线, 而 Cramér-Rao 下界曲线的峰值随着信噪比的增加而下降.

5 结论

本文考虑了时变信道到达角的非均匀分布,然后推导了 Doppler 频移、噪声功率与信道功率的联合 Cramér-Rao 下界. 为了确保 Fisher 信息矩阵计算的鲁棒性,提出了一种近似功率谱密度的方法. 而计算的结果表明,在通常的采样数下,近似功率谱密度可以得到与非近似功率谱一致的 Cramér-Rao 下界,同时近似功率谱密度还进一步扩展了计算中的 Doppler 频移取值范围,从而适用于更广泛的环境. 本文的研究有助于信道参数估计器的评估与设计,与文献 [23] 中的 Doppler 频移估计性能进行比较,结果表明 CRLB 与仿真均方误差极为接近,证实文献 [23] 中的方法是一种性能优异的方法.

参考文献

- 1 Wang D M, Zhang Y, Wei H, et al. An overview of transmission theory and techniques of large-scale antenna systems for 5G wireless communications. *Sci Sin Inform*, 2016, 46: 3–21 [王东明, 张余, 魏浩, 等. 面向 5G 的大规模天线无线传输理论与技术. *中国科学: 信息科学*, 2016, 46: 3–21]
- 2 Hijazi H, Ros L. Polynomial estimation of time-varying multipath gains with intercarrier interference mitigation in OFDM systems. *IEEE Trans Veh Tech*, 2009, 58: 140–151
- 3 Hua J Y, Meng L M, Xu X J, et al. Novel scheme for joint estimation of SNR, Doppler, and carrier frequency offset in double-selective wireless channels. *IEEE Trans Veh Tech*, 2009, 58: 1204–1217
- 4 Tepedelenlioglu C, Giannakis G B. On velocity estimation and correlation properties of narrow-band mobile communication channels. *IEEE Trans Veh Tech*, 2001, 50: 1039–1052
- 5 Hua J Y, Meng L M, Li G, et al. Joint estimation of channel parameters for very low signal-to-noise ratio environment in mobile radio propagations. *Radio Sci*, 2010, 45: RS4010
- 6 Sampath A, Holtzman J. Estimation of maximum Doppler frequency for handoff decisions. In: *Proceedings of the 43rd IEEE Vehicular Technology Conference, Secaucus*, 1993. 859–862
- 7 Hua J Y, Sheng B, You X H. The phase probability distribution of general clark model and its application in Doppler shift estimation. *IEEE Antenna Wirel Propag Lett*, 2005, 4: 373–377
- 8 Hua J Y, You X H, Sheng B, et al. A fast convergent scheme for the Doppler shift estimation in mobile communication systems. In: *Proceedings of the 9th International Symposium on Computers and Communications, Cairo*, 2004. 668–671
- 9 Beaulieu N C, Chen Y. Maximum likelihood estimation of local average SNR in Ricean fading channels. *IEEE Commun Lett*, 2005, 9: 219–221
- 10 Chen Y, Beaulieu N C. Estimation of Ricean K parameter and local average SNR from noisy correlated channel samples. *IEEE Trans Wirel Commun*, 2007, 6: 640–648
- 11 Hua J Y, Meng L M, Xu Z J, et al. An adaptive signal-to-noise ratio estimator in mobile communication channels. *Digit Signal Process*, 2010, 30: 692–698
- 12 Xu Z J, Wang K, Hua J Y, et al. Blind SNR estimation with empirical characteristic function derivative in high-order modulation system. In: *Proceedings of International Conference on Communications, Circuits and Systems, Xiamen*, 2008. 242–245
- 13 Zhang W L, Yin Q Y, Han W, et al. Radio frequency interference localization method based on Doppler effect in wireless sensor networks. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2009, 39: 909–917 [张渭乐, 殷勤业, 韩玮, 等. 基于 Doppler 效应的无线传感网络射频干涉定位方法. *中国科学: 信息科学*, 2009, 39: 909–917]
- 14 Kay S M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1993. 27–82
- 15 Steendam H, Moeneclaey M. Low-SNR limit of the Cramér-Rao bound for estimating the time delay of a PSK, QAM, or PAM waveform. *IEEE Commun Lett*, 2001, 5: 31–33
- 16 Zhou G T, Giannakis G B. Harmonics in Gaussian multiplicative and additive noise: Cramer-Rao bounds. *IEEE Trans Signal Process*, 1995, 43: 1217–1231
- 17 Jakes W C. *Microwave Mobile Communications*. New York: IEEE Press, 1974. 11–78
- 18 Francos J M, Friedlander B. Bounds for estimation of multicomponent signals with random amplitude and deterministic

- phase. *IEEE Trans Signal Process*, 1995, 43: 1161–1172
- 19 Ghogho M, Nandi A, Swami A. Cramér-Rao bounds and maximum likelihood estimation for random amplitude phase-modulated signals. *IEEE Trans Signal Process*, 1999, 47: 2905–2916
 - 20 Gini F, Luise M, Reggiannini R. Cramér-Rao bounds in the parametric estimation of fading radio transmission channels. *IEEE Trans Commun*, 1998, 46: 1390–1398
 - 21 Hua J, Yang X, You X. Cramér-Rao bounds of the frequency estimation in the time selective radio channels with Doppler spread. *J Electron*, 2006, 23: 165–172
 - 22 Abdi A, Barger H A, Kaveh M. A parametric model for the distribution of the angle of arrival and the associated correlation function and power spectrum at the mobile station. *IEEE Trans Veh Tech*, 2002, 51: 425–434
 - 23 Hua J, Yuan D, Li G, et al. Accurate estimation of Doppler shift in mobile communications with high vehicle speed. *Int J Commun Syst*, 2014, 27: 3515–3525

Cramér-Rao lower bound of the channel parameter estimation in mobile communications

Sunan LI¹, Jingyu HUA^{1*}, Shengyuan JIANG¹, Kai ZHOU¹ & Zhijiang XU²

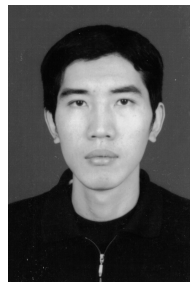
1. *College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China;*
 2. *Zhejiang Provincial Key Laboratory of Communication Networks and Applications, Hangzhou 310023, China*
- * Corresponding author. E-mail: eehjy@zjut.edu.cn

Abstract Estimations of channel gain, noise variance, and Doppler shift are of great importance in mobile communications. However, the relative motion of the mobile transceiver results in time-varying channels and, therefore, degrades the accuracy of channel parameter estimators. Thus, this paper attempts to characterize such degradations in a general time-selective channel environment, where we derive finite-sample Cramér-Rao lower bounds (CRLB) by assessing the joint effects of Doppler shift (mobile speed), direction of propagation, and additive white noise. These bounds will provide insights into the potential for the estimation of the aforementioned channel parameters. Furthermore, an approximation scheme is proposed in order to tackle the boundary singularity of the channel power spectrum density (PSD). Numerical computations demonstrate that the approximated method produces similar results to the non-approximated method, so long as the sample number satisfies a certain condition. Additionally, the approximated method effectively extends the applicable Doppler range of the non-approximated method.

Keywords Cramér-Rao lower bound, time-varying channels, parameter estimation, power spectrum density, mobile communications



Sunan LI was born in Anhui province, China in 1994. He received a B.S. degree from the Zhejiang University of Technology, Hangzhou in 2015. He is currently pursuing his M.P. degree at the Zhejiang University of Technology. His main research interest is wireless localization.



Jingyu HUA received a B.S. degree in electronic engineering from the South China University of Technology in 1999, and received his Ph.D. degree in radio engineering from Southeast University in 2006. Since 2006, he joined the Zhejiang University of Technology as an assistant professor, and is now a regular professor. His research interests include channel modeling, wireless localization, and digital filtering in mobile communications.