



# 基于 K-L 散度和散度均值的改进矩阵 CFAR 检测器

赵兴刚\*, 王首勇

空军预警学院三系重点实验室, 武汉 430019

\* 通信作者. E-mail: 565484636@qq.com

收稿日期: 2016-07-03; 接受日期: 2016-09-30; 网络出版日期: 2016-12-16

国家自然科学基金 (批准号: 61179014, 61302193) 资助项目

**摘要** 传统雷达中一般是通过 FFT 处理接 CFAR (constant false alarm rate) 来实现目标检测的, 该方法面临以下问题: (1) 当数据长度较短时, FFT 多普勒分辨率较低, 会出现多普勒跨越损失; (2) 在杂波背景下, 杂波谱展宽会使得杂波能量分散到目标所在位置; (3) 对于频域扩展目标, 单频率通道检测会损失较多目标回波能量. 本文分别利用 K-L (Kullback-Leibler) 散度和散度均值替代基本矩阵 CFAR 检测器中的测地线距离和黎曼均值, 提出了一种改进的矩阵 CFAR 检测器, 较好地克服了以上三个问题, 并相比基本矩阵 CFAR 检测器具有更优的检测和恒虚警性能, 减小了计算量. 最后通过仿真实验进行了性能分析验证, 取得了较好效果.

**关键词** 恒虚警率检测, 信息几何, 测地线距离, K-L 散度, 黎曼均值, 散度均值

## 1 引言

在传统 PD (pulse Doppler) 体制雷达中, 通常是采用 MTD (moving target detection) 技术 (由 FFT 处理实现) 接 CFAR (constant false alarm rate) 检测器的方法来实现目标检测<sup>[1]</sup>. 一般情况下, 该方法具有较好的检测性能. 但随着战场环境的复杂多变以及高新技术武器的发展应用, 对雷达系统提出了更高的处理要求: 一是要在复杂杂波背景下能保持良好的恒虚警特性; 二是对高隐身、超机动及非对称打击目标要有更短的反应时间和更快的处理速度. 然而传统的 MTD+CFAR 检测技术还不能满足这些新的处理要求, 尤其是在非均匀或强杂波背景下, 传统 CFAR 检测的恒虚警性能是较差的<sup>[2]</sup>. 另外, 为了针对隐身直升机、攻击无人机、低空巡航导弹等目标的致命打击, 尤其是对于多功能和多任务雷达, 传统方法是通过使用较短的脉冲序列 (一般为 8 个) 来减少时间预算, 以获取更快的处理速度<sup>[3]</sup>. 然而对于较少的 CPI (coherent pulse interval) 脉冲数, FFT 处理会面临以下问题: (1) 多普勒分辨率下降, 会出现较严重的多普勒跨越损失<sup>[4]</sup>; (2) 在地、海杂波等背景下, 杂波谱展宽, 会散布到

**引用格式:** 赵兴刚, 王首勇. 基于 K-L 散度和散度均值的改进矩阵 CFAR 检测器. 中国科学: 信息科学, 2017, 47: 247-259, doi: 10.1360/N112016-00105  
Zhao X G, Wang S Y. Improved matrix CFAR detector based on K-L divergence and divergence mean (in Chinese). Sci Sin Inform, 2017, 47: 247-259, doi: 10.1360/N112016-00105

目标所在的多普勒滤波器中, 致使目标检测性能下降; (3) 面对一些频域扩展的特殊目标, 单频率通道检测会损失较多目标回波能量<sup>[5]</sup>, 检测效果较差.

针对以上问题, 亟需一种新的目标检测方法来改善雷达在复杂战场环境下的探测性能. 信息几何是近年来刚发展起来的新兴学科, 已在信息理论、神经网络和统计推断等多个领域得到广泛应用<sup>[6~8]</sup>. 根据信息几何理论, 一个 Hermitian 正定矩阵空间可以构成一个矩阵流形<sup>[9]</sup>, 则雷达回波数据的相关矩阵就对应了矩阵流形上的点, 因此可以利用流形上两点之间的距离来衡量两个相关矩阵间的差异, 并进而可根据不同的距离求出流形上两点或多个点不同形式的矩阵均值. 类比于常规 FFT+CFAR 检测方法, Barbaresco 等<sup>[3]</sup> 提出利用检测单元回波相关矩阵与参考单元相关矩阵黎曼均值之间的测地线距离作为检测量进行检测, 称为矩阵 CFAR 检测器, 但由于测地线距离的信息积累性能有限, 且黎曼均值需要迭代计算, 计算量较大, 因而本文利用信息积累性能更优的 K-L (Kullback-Leibler) 散度代替测地线距离和相应的散度均值代替黎曼均值, 取得了更优的检测和恒虚警性能, 并大大减小了计算量, 很好地克服了传统 PD 雷达 FFT+CFAR 检测中多普勒处理在杂波背景和短脉冲序列条件下所面临的多普勒分辨率低、能量泄露和杂波谱污染等问题.

## 2 流形上两矩阵间的距离

设雷达中某个距离单元观测到的复信号矢量为  $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(n-1)]^T$ ,  $n$  为 CPI 长度, 假设  $\mathbf{x}$  服从零均值复高斯矢量分布  $\mathcal{N}(0, \mathbf{R})$ ,  $\mathbf{R}$  为  $\mathbf{x}$  的相关矩阵, 其分布表达式为

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^n |\mathbf{R}|} \exp(\mathbf{x}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}), \quad (1)$$

式中  $|\cdot|$  代表矩阵的行列式. 考虑由相关矩阵  $\mathbf{R} \in H(n)$  参数化的概率分布函数族  $S = \{p(\mathbf{x}|\mathbf{R})|\mathbf{R} \in H(n)\}$ , 其中  $H(n)$  为  $n \times n$  维 Hermitian 正定矩阵空间, 则根据信息几何理论, 在一定的拓扑和微分结构下  $S$  可以构成一个以  $\mathbf{R}$  为自然坐标的流形, 并称之为统计流形<sup>[10]</sup>, 由于流形  $S$  的坐标  $\mathbf{R}$  为相关矩阵, 则又可以称  $S$  为矩阵流形.

零均值高斯矢量分布属于指数分布族的一种, 由文献<sup>[11]</sup>可知, 指数分布族流形具有对偶结构, 即流形具有两个相互对偶的坐标系统, 且二者之间可以由势函数的勒让德变换相互转化. 指数分布族具有如下的表达式<sup>[11]</sup>:

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = \exp\{C(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\theta}^T F(\mathbf{x}) - \psi(\boldsymbol{\theta})\},$$

式中,  $C(\mathbf{x})$  为关于  $\mathbf{x}$  的多项式,  $F(\mathbf{x})$  为自然参数  $\boldsymbol{\theta}$  的充分统计量,  $\psi(\boldsymbol{\theta})$  称为分布的势函数, 对应于上式, 零均值复高斯分布  $\mathcal{N}(0, \mathbf{R})$  的势函数为<sup>[12]</sup>

$$\psi(\mathbf{R}) = -\log(|\mathbf{R}|). \quad (2)$$

设自然坐标  $\mathbf{R}$  的对偶坐标系统为  $\mathbf{R}^\omega$ , 流形  $S$  在对偶坐标下的势函数为  $\phi(\mathbf{R}^\omega)$ , 则自然坐标  $\mathbf{R}$  与对偶坐标  $\mathbf{R}^\omega$  就有如下的勒让德转化关系<sup>[12]</sup>:

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \nabla \phi(\mathbf{R}^\omega) = \nabla \phi(\nabla \psi(\mathbf{R})), \\ \mathbf{R}^\omega = \nabla \psi(\mathbf{R}), \end{cases} \quad (3)$$

式中  $\nabla$  代表梯度算符. 令  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  为流形  $S$  上的任意两点, 其对偶的坐标分别为  $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1^\omega)$  和  $(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_2^\omega)$ , 则从  $\mathbf{R}_1$  到  $\mathbf{R}_2$  的 Bregman 散度定义为<sup>[12]</sup>

$$D(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \psi(\mathbf{R}_1) + \phi(\mathbf{R}_2^\omega) - \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2^\omega. \quad (4)$$

将式 (3) 代入式 (4), 可将 Bregman 散度仅由自然坐标表示为

$$D(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \psi(\mathbf{R}_1) + \psi(\mathbf{R}_2) - \nabla\psi(\mathbf{R}_2)(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2). \quad (5)$$

再根据式 (2), 将零均值复高斯分布的势函数代入式 (5), 就可以得到流形上  $\mathbf{R}_1$  到  $\mathbf{R}_2$  的 K-L 散度为

$$D(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \text{tr}(\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{R}_1 - I) - \log(|\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{R}_1|). \quad (6)$$

散度可以作为流形上两个矩阵间差异性的一种度量, 对于 K-L 散度, 还具有信息单调性, 即散度值会随着两个矩阵信息差异性的变大而增大. 反之亦然. 因而可以把散度看做流形上的一种距离, 但它不满足对称性和三角不等式, 因而又称之为伪距离. 对于流形  $S$  上的一点  $\mathbf{R}$ , 给定一个微小增量  $d\mathbf{R}$ , 则可由  $D(\mathbf{R}, \mathbf{R} + d\mathbf{R})$  推导出流形上的黎曼度规为<sup>[13]</sup>

$$G(\mathbf{R}) = [g_{ij}(\mathbf{R})] = [E(\partial_i \ln p(\mathbf{x}|\mathbf{R}) \partial_j \ln p(\mathbf{x}|\mathbf{R}))].$$

上式恰为分布函数的 Fisher 信息矩阵, 由上式可进一步得到流形  $S$  上相邻两点  $p(\mathbf{x}|\mathbf{R})$  和  $p(\mathbf{x}|\mathbf{R} + d\mathbf{R})$  之间的微分距离  $ds^2$ <sup>[14]</sup>:

$$ds^2 = d\mathbf{R}^H G(\mathbf{R}) d\mathbf{R} = 2D(\mathbf{R}, \mathbf{R} + d\mathbf{R}). \quad (7)$$

根据黎曼度规可唯一得到流形上与度规相适配的黎曼联络, 进而对于流形上给定的两点  $\mathbf{R}_1$  和  $\mathbf{R}_2$ , 就可求解出两点间的一条测地线  $\mathbf{R}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , 并有  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}(1) = \mathbf{R}_2$ . 将微分距离即线元长度  $ds^2$  沿  $\mathbf{R}(t)$  积分, 就可得到  $\mathbf{R}_1$  和  $\mathbf{R}_2$  之间的测地线距离为<sup>[14]</sup>

$$d(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \left\| \log \left( \mathbf{R}_1^{-1/2} \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1^{-1/2} \right) \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \log^2(\lambda_k)}, \quad (8)$$

式中  $\|\cdot\|$  代表弗洛宾尼斯 (Frobenius) 范数, 且  $\|\mathbf{A}\| = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$ ,  $\text{tr}$  为矩阵的迹.  $\lambda_k$  为矩阵  $\mathbf{R}_1^{-1/2} \mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_1^{-1/2}$  的第  $k$  个特征值, 测地线距离满足距离定义的对称性和三角不等式.

### 3 矩阵均值

实际上, 对于  $N$  个矩阵  $\mathbf{R}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), 所有类型的矩阵均值  $\bar{\mathbf{R}}$  都可以归结为使得以下目标函数取得最小值, 即

$$f(\mathbf{R}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N J^2(\mathbf{R}_k, \mathbf{R}). \quad (9)$$

差别就在于式 (9) 中距离函数  $J(\cdot, \cdot)$  定义的不同, 例如矩阵的算术均值就是将其定义为欧式距离, 类似的还有矩阵的调和均值. 同样, 将  $J(\cdot, \cdot)$  由测地线距离代替就可得到矩阵的黎曼均值, 由 K-L 散度代替就可得到散度均值.

#### 3.1 黎曼均值

如上所述, 黎曼均值  $\bar{\mathbf{R}}_r$  是使得目标函数

$$f_r(\mathbf{R}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N d^2(\mathbf{R}_k, \mathbf{R})$$

取最小值时所对应的矩阵. 文献 [15] 利用梯度下降算法给出了  $\bar{\mathbf{R}}_r$  的迭代计算方法, 算法的迭代计算表达式为 [15]

$$\bar{\mathbf{R}}_r^{i+1} = (\bar{\mathbf{R}}_r^i)^{1/2} \exp \left( \frac{\tau}{N} \sum_{k=1}^N \log((\bar{\mathbf{R}}_r^i)^{-1/2} \mathbf{R}_k (\bar{\mathbf{R}}_r^i)^{-1/2}) \right) (\bar{\mathbf{R}}_r^i)^{1/2}, \quad 0 \leq \tau \leq 1. \quad (10)$$

根据上式, 选择迭代的初始值  $\bar{\mathbf{R}}_r^0$  和步长  $\tau$ , 就可以对矩阵的黎曼均值进行迭代运算.

### 3.2 散度均值

散度均值是使得以下目标函数取得最小值:

$$f_d(\mathbf{R}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_k). \quad (11)$$

根据式 (6), 可求得  $D(\mathbf{R}, \mathbf{R}_k)$  在 Hermitian 正定矩阵空间  $H(n)$  中沿  $\mathbf{X}$  方向的导数为

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} D(\mathbf{R} + t\mathbf{X}, \mathbf{R}_k) \right|_{t=0} &= \text{tr} \left( \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{X} - (\mathbf{R} + t\mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}_k \mathbf{X} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \text{tr} (\mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{X} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_k \mathbf{X}). \end{aligned}$$

所以, 根据式 (11), 可求得  $f_d(\mathbf{R})$  的梯度为

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{tr} (\text{tr} (\mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{X} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_k \mathbf{X})).$$

上式为一个线性方程, 不需要进行迭代计算. 令上式为零, 可以直接求得  $N$  个矩阵  $\mathbf{R}_k (k = 1, 2, \dots, N)$  基于 K-L 散度的矩阵均值为

$$\bar{\mathbf{R}}_d = \left( \sum_{k=1}^N \mathbf{R}_k \right) \left( \sum_{k=1}^N \mathbf{R}_k^{-1} \right)^{-1}. \quad (12)$$

第 2 节已经提到, 散度不具有对称性, 因而如果将式 (11) 中的散度函数  $D(\mathbf{R}, \mathbf{R}_k)$  替换为  $D(\mathbf{R}_k, \mathbf{R})$ , 推导得出的散度均值不同于式 (12), 通常将式 (12) 称为散度左均值, 而由  $D(\mathbf{R}_k, \mathbf{R})$  推导出的均值称为散度右均值. 为了消除这种不同, 我们将式 (6) 所示的 K-L 散度重新定义, 使其具有对称性, 即

$$\begin{aligned} D_s(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) &= \frac{1}{2} (D(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) + D(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1)) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} (\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{R}_1 - 2I), \end{aligned} \quad (13)$$

就有  $D_s(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = D_s(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1)$ , 再以  $D_s(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$  为距离函数, 按照推导式 (12) 相同的步骤就可以得到散度对称均值为

$$\bar{\mathbf{R}}_s = \left( \sum_{k=1}^N \mathbf{R}_k^{-1} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^N \mathbf{R}_k \right)^{1/2}. \quad (14)$$

$N$  个矩阵  $\mathbf{R}_k (k = 1, 2, \dots, N)$  的算术均值为  $\bar{\mathbf{R}}_a = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{R}_k$ , 调和均值为  $\bar{\mathbf{R}}_h = \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{R}_k^{-1} \right)^{-1}$ , 通过等价变换, 式 (14) 又可以写成如下形式

$$\bar{\mathbf{R}}_s = \bar{\mathbf{R}}_a^{1/2} \left( \bar{\mathbf{R}}_a^{-1/2} \bar{\mathbf{R}}_h \bar{\mathbf{R}}_a^{-1/2} \right)^{1/2} \bar{\mathbf{R}}_a^{1/2}. \quad (15)$$

可以看到上式正好与两个矩阵的黎曼均值吻合, 则可得出结论, 即  $N$  个矩阵  $\mathbf{R}_k (k = 1, 2, \dots, N)$  的散度对称均值为其算术均值  $\bar{\mathbf{R}}_a$  和调和均值  $\bar{\mathbf{R}}_h$  的黎曼均值.

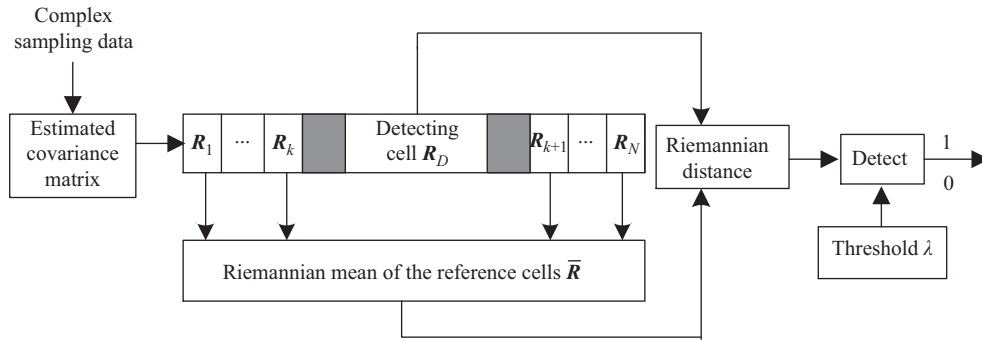


图 1 矩阵 CFAR 检测器  
Figure 1 Matrix CFAR detector

#### 4 基于 K-L 散度和散度均值的改进矩阵 CFAR 检测器

前面已经分析到, 在复杂背景下以及面临高新技术武器时, 传统 CFAR 检测的恒虚警性能较差, 为了获取更快的处理速度, 使用较短的脉冲序列又会面临多普勒分辨率下降、能量泄露、杂波谱污染等问题. Barbaresco 等<sup>[3]</sup> 基于信息几何理论, 提出了一种更加有效和稳健的矩阵 CFAR 检测器. 其主要思想是: 首先根据雷达观测数据计算参考单元和检测单元的相关矩阵, 然后将这些矩阵统一看做矩阵流形上的点, 进而用检测单元相关矩阵与参考单元相关矩阵黎曼均值之间的测地线距离作为检测量与门限比较, 实现目标检测. 其处理流程如图 1 所示.

由于相关矩阵包含了回波的所有信息, 因而直接用矩阵进行检测就避免了常规 CFAR 中 CPI 脉冲数较少时 FFT 的性能损失; 在恒虚警特性方面, 矩阵均值是利用了流形上的内在结构对均值进行估计, 受杂波环境影响更小, 具有较稳健的恒虚警特性. Barbaresco 提出的矩阵 CFAR 检测器利用的是测地线距离和黎曼均值, 实际上在具体距离和矩阵均值的选择上, 第 2 和第 3 节分别给出了两种距离和矩阵均值, 在此就可以给出 4 种不同形式的矩阵 CFAR 检测器, 即

- (1) 矩阵 CFAR1: 测地线距离 + 黎曼均值

$$T = d(\mathbf{R}_D, \bar{\mathbf{R}}_r) = \left\| \log \left( \mathbf{R}_D^{-1/2} \bar{\mathbf{R}}_r \mathbf{R}_D^{-1/2} \right) \right\| > \lambda. \quad (16)$$

- (2) 矩阵 CFAR2: 测地线距离 + 散度均值

$$T = d(\mathbf{R}_D, \bar{\mathbf{R}}_d) = \left\| \log \left( \mathbf{R}_D^{-1/2} \bar{\mathbf{R}}_d \mathbf{R}_D^{-1/2} \right) \right\| > \lambda. \quad (17)$$

- (3) 矩阵 CFAR3: K-L 散度 + 黎曼均值

$$T = D(\mathbf{R}_D, \bar{\mathbf{R}}_r) = \text{tr}(\bar{\mathbf{R}}_r^{-1} \mathbf{R}_D - I) - \log(|\bar{\mathbf{R}}_r^{-1} \mathbf{R}_D|) > \lambda. \quad (18)$$

- (4) 矩阵 CFAR4: K-L 散度 + 散度均值

$$T = D(\mathbf{R}_D, \bar{\mathbf{R}}_d) = \text{tr}(\bar{\mathbf{R}}_d^{-1} \mathbf{R}_D - I) - \log(|\bar{\mathbf{R}}_d^{-1} \mathbf{R}_D|) > \lambda. \quad (19)$$

矩阵 CFAR1 即为 Barbaresco 提出的基本矩阵 CFAR 检测器, 根据其实现思想, 式 (17)~(19) 所示的三种检测器都可以实现对目标的检测, 但区别在于两种距离信息积累性能和两种矩阵均值估计性能的不同. 实际上, 从信息积累的角度看, K-L 散度比测地线距离具有更优的信息积累性能, 相应的散

度均值在均值估计性能上也要优于黎曼均值. 且从式 (15) 看, 散度均值也不需要如式 (10) 所示的黎曼均值进行迭代计算, 可以大大减小计算量, 因而矩阵 CFAR4 是以上四种检测器中性能最优的, 我们将在后面的仿真中进行具体深入的比较分析.

常规 CFAR 的恒虚警特性是根据分布类型从理论上严格推导而来的, 而以上定义的矩阵 CFAR 检测器只是给出了检测策略, 没有对恒虚警特性进行理论分析. 下面以式 (16) 为例, 分析矩阵 CFAR 的恒虚警特性. 在流形上参考单元的相关矩阵可以看做流形上的一个粒子群, 矩阵 CFAR 是通过比较  $\mathbf{R}_D$  与粒子群中心点之间距离来实现检测的. 在没有目标时, 根据矩阵流形上的广义正态律, 包括  $\mathbf{R}_D$  在内的所有点都服从一个广义正态分布  $\mathcal{N}(\bar{\mathbf{R}}, \Lambda)$ , 其分布表达式为<sup>[16]</sup>

$$q(\mathbf{R}|\bar{\mathbf{R}}, \Lambda) = \frac{1 + O(\sigma^3) + \varepsilon\left(\frac{\sigma}{\xi}\right)}{\sqrt{(2\pi)^{m(m+1)/2} |\Lambda|}} \exp\left\{-\frac{\beta^T \gamma \beta}{2}\right\}, \quad (20)$$

式中  $O(\cdot)$  为同阶无穷小, 标准差  $\sigma = \sqrt{\text{tr}(\Lambda)}$ ,  $\xi$  为  $\bar{\mathbf{R}}$  处的单射半径,  $\varepsilon$  满足  $\lim_{0+} x^{-\omega} \varepsilon(x) = 0, \forall \omega > 0$ , 中心矩阵  $\gamma = \Lambda^{-1} - \mathfrak{R}/3 + O(\sigma) + \varepsilon\left(\frac{\sigma}{\xi}\right)$ ,  $\mathfrak{R}$  为矩阵流形上  $\bar{\mathbf{R}}$  处的里奇 (Ricci) 曲率<sup>[14]</sup>,  $m$  为流形的维度. 式 (16) 所示的检测器可以等价于

$$T' = \mathbf{R}_D - \bar{\mathbf{R}}_r > \lambda'. \quad (21)$$

因为  $\mathbf{R}_D \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{R}}, \Lambda)$ , 类比于一般的高斯分布, 可以将  $\mathbf{R}_D$  转化为广义的标准正态分布, 即有  $\frac{\mathbf{R}_D - \bar{\mathbf{R}}}{\sqrt{\Lambda}} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$ , 则此时检测器为

$$T'' = \frac{\mathbf{R}_D - \bar{\mathbf{R}}}{\sqrt{\Lambda}} > \lambda''.$$

通过估计杂波功率  $\sqrt{\Lambda}$ , 式 (21) 是可以保持恒虚警特性的, 且有  $\lambda' = \sqrt{\Lambda} \lambda''$ , 而式 (20) 中的矩阵均值就等价于杂波功率的估计, 因而矩阵 CFAR 检测器是具有恒虚警特性的. 门限  $\lambda''$  可以根据给定的虚警概率  $P_F$ , 由广义标准正态分布的表达式积分得

$$P_F = \int_{\lambda''}^{\infty} \frac{1 + O(\sigma^3) + \varepsilon\left(\frac{\sigma}{\xi}\right)}{\sqrt{(2\pi)^{m(m+1)/2} |\mathbf{I}|}} \exp\left\{-\frac{\beta^T \gamma \beta}{2}\right\} d\mathbf{R}. \quad (22)$$

同样类比于一般的正态分布, 上式中的门限  $\lambda''$  可以通过右尾函数求得, 进而就可以得到  $\lambda'$ , 最终根据式 (8) 就可以得到检测器 (16) 中门限  $\lambda$  的解析表达式.

上述分析是以矩阵 CFAR1 为例分析了其恒虚警特性, 实际上不同的矩阵均值只是决定了如式 (20) 所示的不同广义正态分布, 而不同的距离又都可以等价地转化为式 (21) 所示的检测统计量, 因而可以得出结论, 上述四种检测器都是具有恒虚警特性的, 并且其 CFAR 特性的差异直接取决于均值的估计性能. 需要说明的是, 由于式 (22) 的积分值求解比较复杂, 门限的具体解析值并不容易得到, 本文在此只是从理论上分析矩阵 CFAR 的恒虚警特性, 并说明检测门限有其满足恒虚警特性的理论值, 而这正是矩阵 CFAR 检测器成立的理论基础, 具有重要意义.

## 5 仿真分析

第 4 节给出了四种形式的矩阵 CFAR 检测器, 为验证矩阵 CFAR4 为其中最优的检测器, 本节首先对两种距离的信息积累性能从两个角度进行了分析; 其次对两种矩阵均值算法的收敛速度和估计精

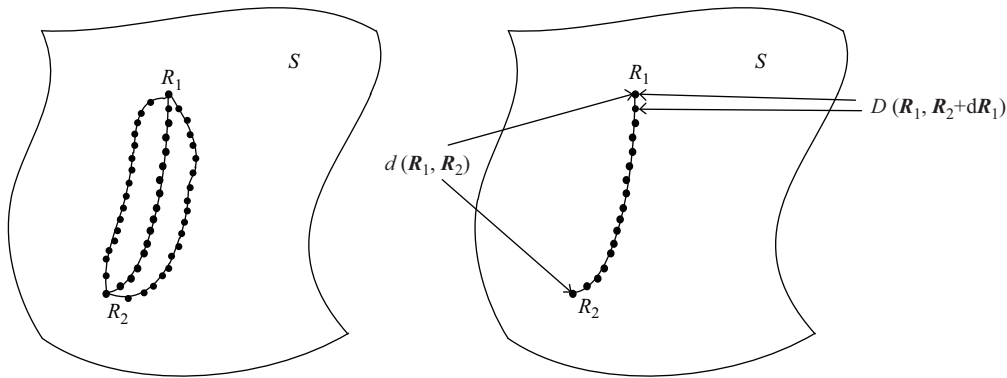


图 2 流形上测地线和 K-L 散度示意图

Figure 2 Schematic diagram of geodesic and K-L divergence on the manifold

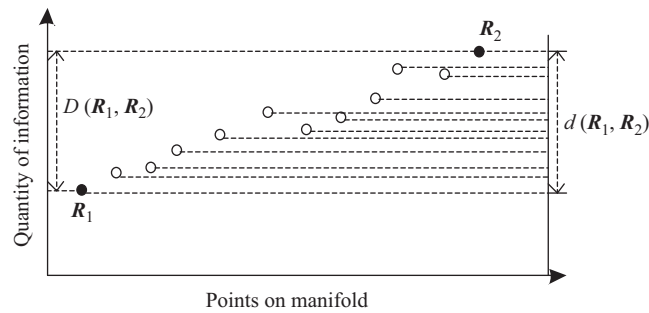


图 3 K-L 散度与测地线距离信息变化示意图

Figure 3 Schematic diagram of the information changing of K-L divergence and geodesic distance

度进行了仿真比较; 第三, 设置四种不同场景, 对四种矩阵 CFAR 检测器以及传统的 MTD + CFAR 技术的检测性能进行了对比; 第四, 分析了不同方法的计算复杂度.

### 5.1 测地线距离和 K-L 散度的信息积累性能比较

矩阵流形上的 K-L 散度和测地线距离都可以作为两矩阵间差异性的度量, 但二者所体现的差异又是不同的. 连接两点之间的曲线有多种选择, 如图 2 所示, 测地线是其中使得积分距离最小的一条, 也就是说测地线距离是与路径相关的, 而不是直接反应两个端点本身的差别. 而 K-L 散度与路径无关, 无论选择哪一条曲线, 两点之间散度恒定, 它反应了两点本身存在的差异.

同时, 二者又可以通过式 (7) 建立联系, 即当流形上两点接近时, 测地线距离与散度具有等价关系, 而当两点较远时, 此时测地线距离可看做是将测地线进行无限切割后, 将得到的无数微小线段两端点间的散度求和得到, 如图 2 所示. 从信息变化的角度看, 即散度体现的是两个矩阵信息量本质差别, 而测地线距离是给出了由一个矩阵以最快速度变化到另一个矩阵所经历过程中的信息变化大小, 如图 3 所示. 所以散度体现的是结果的差异, 测地线距离体现的是过程的差异, 如果将其用于信号检测中, 我们需要知道的只是两个矩阵本质信息量的差异, 而不需要知道两个矩阵之间变化的过程, 从这个角度讲, 散度更适用于目标检测.

我们还可以从另外一个角度对二者进行比较, 由文献 [14] 可知雷达二元检测中的对数似然比检测与基于 K-L 散度的距离检测器具有等价关系, 而如果将距离检测器中的 K-L 散度用测地线距离替换,

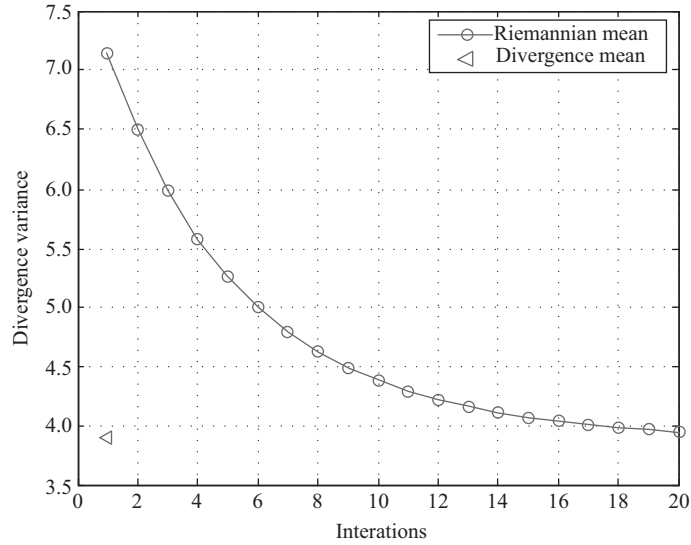


图 4 均值估计算法性能曲线

Figure 4 Performance curve of mean estimation algorithm

可得基于测地线距离的距离检测器为

$$T_g(x) = \left\| \log \left( \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{R}_v \mathbf{R}^{-1/2} \right) \right\| - \left\| \log \left( \mathbf{R}^{-1/2} (\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_v) \mathbf{R}^{-1/2} \right) \right\| > \lambda. \quad (23)$$

由于 KDD 与似然比检测完全等价, 在给定虚警概率的前提下, 具有最优检测性能, 而 GDD 与似然比检测不等价, 性能要差于 KDD 和似然比检测. 在距离检测器中, 距离本质上代表了一种信息积累的方式, 由检测性能的比较可以得出, K-L 散度比测地线距离具有更好的积累性能.

### 5.2 两种矩阵均值方法的估计性能比较

矩阵均值的估计性能直接决定了矩阵 CFAR 检测器的 CFAR 特性, 判断一个均值估计精度的高低一般由方差来衡量. 由 5.1 小节分析可知, K-L 散度比测地线距离具有更好的信息积累性能, 因而我们基于散度定义一种散度方差来衡量两种矩阵均值估计性能, 即黎曼均值迭代计算方法中第  $i$  时刻的散度方差  $\Sigma_i$  可由下式得到:

$$\Sigma_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D^2(\mathbf{R}_k, \bar{\mathbf{R}}_r^i), \quad (24)$$

式中  $\bar{\mathbf{R}}_r^i$  为经过  $i$  次迭代得到的黎曼均值, 散度均值的散度方差直接将  $\bar{\mathbf{R}}_r^i$  替换为  $\bar{\mathbf{R}}_d$  即可. 采用式 (24) 所示的散度方差作为均值估计性能指标, 方差越小, 说明均值估计越准确, 图 4 给出了脉冲长度为 8, 参考单元个数为 16 时两种算法的估计性能.

从中可以看出, 散度均值只需一次简单计算就可以得到结果, 黎曼均值经过约 20 次迭代后, 二者趋于相等, 因而相比而言, 散度均值在估计精度和运算量方面都优于黎曼均值. 且在黎曼均值的迭代计算中, 我们利用矩阵的算术均值作为初始值, 即图 4 中曲线左端的第 1 点, 即可代表常规 CFAR 处理中的杂波功率估计性能, 从中可以看出其性能是较差的, 进而其 CFAR 特性也要差于矩阵 CFAR 检测器.



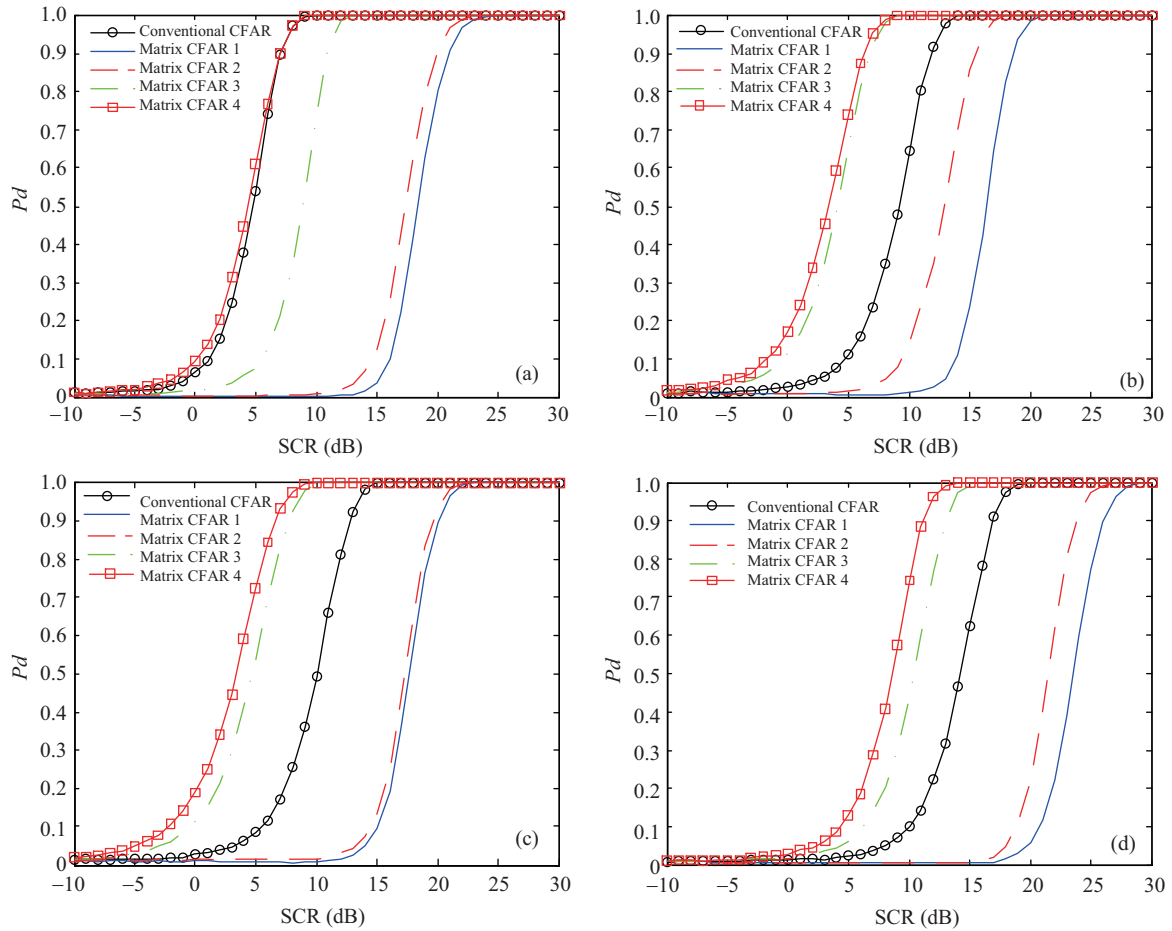


图 5 (网络版彩图) 检测性能曲线

Figure 5 (Color online) Detection performance curve. (a) Scene 1; (b) scene 2; (c) scene 3; (d) scene 4

### 5.3 四种矩阵 CFAR 检测器的检测性能比较

利用 SIRP 法仿真产生  $K$  杂波来模拟复杂杂波背景, 令脉冲重复频率  $f_r = 1000$  Hz, 脉冲序列长度  $n = 8$ , 参考单元数  $N = 16$ , 虚警概率  $P_f = 10^{-3}$ , 蒙特卡洛次数为  $10^5$  次. 针对第 1 节分析的常规 FFT + CFAR 面临的问题, 设置四种仿真场景, 即场景 1: 不存在杂波谱展宽和能量泄露; 场景 2: 只存在能量泄露; 场景 3: 只存在杂波谱展宽; 场景 4: 杂波谱展宽和能量泄露都存在. 四种场景的设置可以通过调节杂波谱宽度和  $f_d$  实现. 场景 1 和 2 中, 设置  $K$  杂波功率谱 3 dB 带宽为 40 Hz, 场景 3 和 4 对应为 80 Hz, 能量泄露的影响是由多普勒滤波器组和目标多普勒频率共同决定的, 因  $f_r = 1000$  Hz, 滤波器个数为 8, 则令场景 1 和 3 中  $f_d = 142.86$  Hz, 场景 2 和 4 中  $f_d = 214.29$  Hz. 然后利用 FFT + CFAR 和四种矩阵 CFAR 检测器分别对每一种场景下的仿真目标信号进行检测, 信杂比范围设置为  $[-10$  dB, 30 dB], 得检测性能曲线如图 5 所示.

从图 5 可以看出, 场景 1 中, 由于没有杂波谱展宽和能量泄露的影响, FFT 能使目标信号能量有效积累, 且目标所在的多普勒滤波器中杂波能量微弱, 此时 FFT + CFAR 的性能是较好的; 场景 2 中, 受到了能量泄露的影响, 即  $f_d$  在两个多普勒滤波器之间, 此时常规 CFAR 中检测量对应的多普勒滤

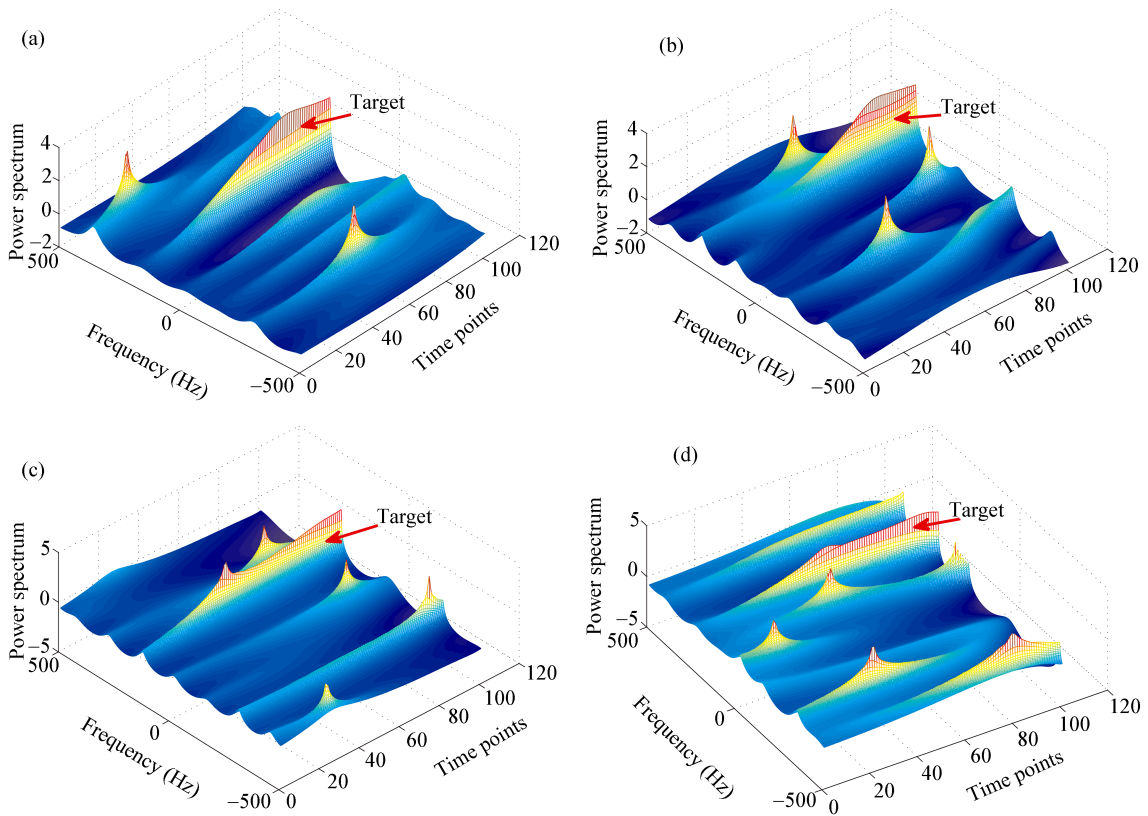


图 6 (网络版彩图) 测地线所反映出的功率谱变化图

Figure 6 (Color online) Power spectrum changing diagram reflected by the geodesic. (a) Scene 1; (b) scene 2; (c) scene 3; (d) scene 4

波器只积累了一部分信号能量, 因而检测性能下降; 场景 3 中, 杂波谱展宽, 即目标信号所在的多普勒滤波器也散布了一部分杂波能量, 使得检测性能下降; 场景 4 中两种影响都有, 因而检测性能是最差的. 而对于四种矩阵 CFAR 检测器, 矩阵 CFAR1 和 CFAR2 的性能在四种情况下都较差, 验证了测地线距离不适用于检测, 矩阵 CFAR3 和 CFAR4 在四种场景下性能都优于常规 CFAR, 且矩阵 CFAR4 优于矩阵 CFAR3, 因而基于 K-L 散度和散度均值的矩阵 CFAR 检测器是最佳的.

矩阵 CFAR 利用矩阵流形内在结构估计矩阵均值, 因而它们的另一优势是稳健的恒虚警特性, 即在不同的背景下检测性能变化的程度相对较小, 通过图 5 可以得到常规 CFAR 和四种矩阵 CFAR 在场景 1 (最优) 和场景 4 (最差) 中  $P_d = 0.6$  时的信噪比差距分别为 9.8, 4.1, 3.5, 2.3, 1.8 dB. 从该数据可看出, 常规 CFAR 的检测性能在不同场景下的波动程度要更大, 因而其 CFAR 特性较差, 而对于四种矩阵 CFAR 检测器, 矩阵 CFAR1 和矩阵 CFAR2 检测所用距离类型相同, 均值不同, 矩阵 CFAR2 对应的是散度均值, 性能波动要小于矩阵 CFAR1; 矩阵 CFAR3 和矩阵 CFAR4 距离类型相同, 均值不同, 矩阵 CFAR4 对应的是散度均值, 性能波动最小. 因而综合以上分析, 无论从检测性能还是 CFAR 特性来看, 矩阵 CFAR4 都是最优的.

对应以上四种场景, 取信杂比为 5 dB, 将测地线的时间区间  $t \in [0, 1]$  以间隔 0.01 取点, 即可求出测地线上  $\bar{\mathbf{R}}_s$  和  $\mathbf{R}_D$  之间 100 个相关矩阵, 再根据 Yule-Walker 方程求出这 100 个相关矩阵所对应的 AR 功率谱, 就可得到  $\bar{\mathbf{R}}$  和  $\mathbf{R}_D$  之间测地线所反映出的功率谱变化过程如图 6 所示.

表 1 计算量对比

Table 1 Comparison of calculated amount

Detector	Calculated amount
FFT + CFAR	$O(2Nn + 3n)$
Matrix CFAR1	$O\{n^2(N+1) + 2[(n+n^2)n! + n^2] + N(n+n^2)n! + 3n^2\}$
Matrix CFAR2	$O\{n^2(N+1) + 2[(n+n^2)n! + n^2] + N(n+n^2)n! + 3n^2\}$
Matrix CFAR3	$O\{n^2(N+1) + 2[(n+n^2)n! + 2n^2] + 2n_s N[(n+n^2)n! + 3n^2]\}$
Matrix CFAR4	$O\{n^2(N+1) + 2[(n+n^2)n! + 2n^2] + N(n+n^2)n! + 3n^2\}$

表 2 Matlab 运行时间

Table 2 Run time of matlab

Detector	FFT + CFAR	Matrix CFAR1	Matrix CFAR2	Matrix CFAR3	Matrix CFAR4
Run time (s)	0.2374	1.9507	0.4312	1.8564	0.3271

从图 6 中可以看出,在四种场景下的时频图像中,目标多普勒频率所在位置都显现出一条比较明显的由低到高的脊线,这说明在  $R_s$  和  $R_D$  之间的测地线上,目标能量是逐渐增加的,且由于是二者之间的最短路径,测地线反映出了二者之间最快的信息变化过程.杂波谱展宽和能量泄露的影响反映在图 6 的时频图像中,即在场景 2, 3, 4 中会出现较多的尖峰,尖峰的高度甚至会超过目标位置的脊线,但它不具有持续性,分布较为散乱,则可以根据图像特征较为明显的分辨出目标.这说明虽然测地线距离的信息积累性能相比于 K-L 散度较差,但测地线具有其特殊的物理含义和应用方法,对于分析信息变化和拓宽流形上几何量在目标检测中的应用都具有重要意义.

#### 5.4 计算量分析

现对上述四种检测器以及传统 FFT + CFAR 检测方法的计算量进行分析比较.以一次乘法或加法作为一个单位运算量,传统 FFT + CFAR 检测方法的运算量主要分为两部分,一部分为 FFT 处理,另一部分为单元平均处理;矩阵 CFAR 的运算量则主要分为三部分,首先是相关矩阵的估计,第二是矩阵均值的计算,最后是距离的计算.FFT + CFAR 方法不涉及矩阵运算,计算量可较容易求得,矩阵 CFAR 中涉及矩阵求逆和乘法,可相应换算为单位运算量之和,表 1 给出了 5 种方法的具体计算量表达式,其中  $n$  为脉冲长度, $N$  为参考单元个数, $n_s$  为迭代次数.

从表 1 中可以看出,与 FFT + CFAR 方法相比,四种矩阵 CFAR 检测器的计算量都要大于 FFT + CFAR 方法,其中占较大比重的主要是矩阵求逆和黎曼均值的迭代计算,而散度均值不需要迭代计算,可以大大减小计算量.另外在短脉冲条件下,矩阵维数较低,求逆运算与 FFT 处理的计算量差距也不会太大,因而本文方法在计算量方面应是可行的.

按照 5.3 小节中的参数设置,用 Matlab 对 5 种方法分别运行 20 次,给出具体的运行时间如表 2 所示.从表 2 中可看出,FFT + CFAR 运行时间最短,矩阵 CFAR1 和矩阵 CFAR3 采用的是黎曼矩阵均值,运行时间最长,约为 FFT + CFAR 方法的 10 倍左右,矩阵 CFAR4 的运行时间略长于 FFT + CFAR 方法,基本可满足要求.

## 6 小结

矩阵 CFAR 是信息几何理论在雷达目标检测中的一项重要应用, 本文通过对检测性能和恒虚警特性的理论分析和仿真比较, 确定了基于 K-L 散度和散度均值的最优矩阵 CFAR 检测器, 取得了较好的效果. 除此之外, 我们还分析了测地线的物理意义, 找到了其在目标检测中的应用方法, 即可以根据两矩阵间的测地线给出谱图, 通过分析图像特征来判断目标的存在.

## 参考文献

- 1 He Y, Jian T, Su F, et al. CFAR assessment of covariance matrix estimators for non-Gaussian clutter. *Sci Sin Inform*, 2011, 41: 90–99 [何友, 简涛, 苏峰, 等. 非高斯杂波相关矩阵估计方法及 CFAR 特性分析. *中国科学: 信息科学*, 2011, 41: 90–99]
- 2 Guan J, Huang Y, He Y. A CFAR detector for MIMO array based on adaptive pulse compression-Capon filter. *Sci Sin Inform*, 2011, 41: 1268–1282 [关键, 黄勇, 何友. 基于自适应脉冲压缩-Capon 滤波器的 MIMO 阵列雷达 CFAR 检测器. *中国科学: 信息科学*, 2011, 41: 1268–1282]
- 3 Barbaresco F, Ruiz M. Radar detection for non-stationary Doppler signal in one burst based on information geometry: distance between paths on covariance matrices manifold. In: *Proceedings of European Radar Conference, Paris, 2015*. 41–44
- 4 Marc A, Barbaresco F. Riemannian medians and means with applications to radar signal processing. *IEEE J Sel Top Signal Proc*, 2013, 7: 595–604
- 5 Bao F, Liu J S, Zhu R, et al. Control method for aircraft wake vortex based on Rayleigh-Ludwig instability. *J Beijing Univ Aeron Astron*, 2015, 41: 1381–1387 [鲍峰, 刘锦生, 朱睿, 等. 基于涡系相交不稳定性的飞机尾流控制方法. *北京航空航天大学学报*, 2015, 41: 1381–1387]
- 6 Amari S. Information geometry of positive measures and positive-definite matrices: decomposable dually flat structure. *Entropy*, 2014, 16: 2131–2145
- 7 Zhao X G, Wang S Y. Information geometry method to radar target detection. *Signal Proc*, 2015, 31: 631–637 [赵兴刚, 王首勇. 雷达目标检测的信息几何方法. *信号处理*, 2015, 31: 631–637]
- 8 Zhao X G, Wang S Y. Radar target distance detection method based on SIRP clutter. *J Huazhong Univ Sci Technol*, 2015, 43: 79–83 [赵兴刚, 王首勇. 基于 SIRP 杂波的雷达目标距离检测方法. *华中科技大学学报*, 2015, 43: 79–83]
- 9 Amari S, Nagaoka H. *Methods of Information Geometry*. New York: Oxford University Press, 2000
- 10 Sun H F, Peng L Y, Zhang Z N. Information geometry and its applications. *Adv Math*, 2011, 40: 257–269 [孙华飞, 彭林玉, 张真宁. 信息几何及其应用. *数学进展*, 2011, 40: 257–269]
- 11 Amari S. Information geometry on hierarchy of probability distributions. *IEEE Trans Inform Theory*, 2001, 47: 1701–1711
- 12 Zeineb C, Maher M. Means of Hermitian positive-definite matrices based on the log-determinant  $\alpha$ -divergence function. *Linear Algebra Appl*, 2012, 436: 1872–1889
- 13 Yang Z. Principal whitened gradient for information geometry. *Neural Netw*, 2008, 21: 232–240
- 14 Li X, Cheng Y Q, Wang H Q, et al. *Information Geometry Methods to Radar Signal Processing*. Beijing: Science Press, 2014 [黎湘, 程永强, 王宏强, 等. 雷达信号处理的信息几何方法. 北京: 科学出版社, 2014]
- 15 Moakher M. A differential geometric approach to the geometric mean of symmetric positive-definite matrices. *SIAM J Matrix Anal A*, 2005, 26: 735–747
- 16 Lenglet M, Rousson R. Statistics on the manifold of multivariate normal distributions: theory and application to diffusion tensor MRI processing. *J Math Imaging Vis*, 2006, 25: 423–444

## Improved matrix CFAR detector based on K-L divergence and divergence mean

Xinggang ZHAO\* & Shouyong WANG

*Air Force Early Warning Academy, Wuhan 430019, China*

\*Corresponding author. E-mail: 565484636@qq.com

**Abstract** The target detection of traditional radar, which is usually realized by fast Fourier transforms (FFT) associated with a constant false alarm rate detector, faces the following problems: (1) The Doppler resolution of the FFT is low when the measurement length is short, resulting in Doppler bestriding loss. (2) The broadening of the spectrum causes the clutter energy to disperse toward the target. (3) To the target extended in frequency domain, the single channel detection will lose much energy of the target measures. An improved matrix CFAR detector is proposed, which uses the Kullback-Leibler divergence and divergence mean to replace the geodesic distance and Riemannian mean to overcome the three above-mentioned problems. Its CFAR performance and detection are better than that of the basic matrix CFAR detector; the calculated amount is simultaneously reduced. Finally, the performance of the improved matrix CFAR detector is analyzed by simulation experiments. The results indicate a good performance.

**Keywords** constant false alarm rate detection, information geometry, geodesic distance, Kullback-Leibler divergence, Riemannian mean, divergence mean



**Xinggang ZHAO** was born in 1988. He received his M.S. degree from the Air Force Early Warning Academy, Wuhan, in 2010. Currently, he is a Ph.D. candidate at the Air Force Early Warning Academy. His research interests include information geometry and radar signal processing.