



基于对数累积量的重尾分布脉冲干扰参数估计及性能分析

王亢¹, 贡毅^{2*}, 徐志江^{3,4}, 卢为党^{3,4}, 华惊宇^{3,4}

1. 浙江警察学院计算机与信息技术系, 杭州 310053

2. 南方科技大学电子与电气工程系, 深圳 518055

3. 浙江工业大学信息工程学院, 杭州 310023

4. 浙江省通信网技术应用研究重点实验室, 杭州 310023

* 通信作者. E-mail: gong.y@sustc.edu.cn

收稿日期: 2016-03-22; 接受日期: 2016-04-06; 网络出版日期: 2016-11-01

国家自然科学基金 - 浙江两化融合联合基金 (批准号: U1509219) 和国家自然科学基金 (批准号: 61471322, 61402416) 资助项目

摘要 在无线通信网络中存在用对称 α 稳定分布来建模的脉冲重尾干扰. 而在信号检测、信道译码、无线网络中断概率及误码率分析等应用场景, 需要预先知道干扰的概率密度函数. 本文利用重尾干扰复信号包络的对数累积量, 给出了特征指数和分散系数的估计算法, 并具体推导出了参数估计变量的概率分布, 该分布可用于定量分析估计的可靠性. 除此之外, 在实际系统中, 接收端不仅有复对称 α 稳定分布描述的重尾脉冲干扰, 还包括与之相互独立的复 Gauss 噪声, 称之为双变量混合噪声. 本文提出了用单变量的复对称 α 稳定分布模型来近似双变量混合噪声的方法. 通过仿真和数值计算, 验证了这种近似是合理的. 再者, 在此基础上, 本文给出了混合噪声参数与几何功率信噪比之间的关系. 因此, 在合理的近似下, 对数累积量的估计算法及性能分析在双变量混合噪声下仍然有效.

关键词 对数累积量, 重尾 Rayleigh 分布, 对称 α 稳定, 特征指数, 分散系数

1 引言

随着无线频谱空间复用的增加, 共路干扰正成为干扰的主要来源, 可能会导致无线收发通信性能的严重恶化. 在一些室内和室外无线通信环境中, 可以观察到干扰源具有脉冲特性, 而不完全是 Gauss 噪声. 干扰的统计模型, 是分析无线网络中断概率、最佳信号检测、误码率分析, 以及设计干扰感知 (interference-aware) 收发机等方面的有力工具, 是研究 5G 移动通信^[1]、大规模 MIMO 技术^[2] 中信道估计与检测技术的基础. 因此, 建立符合实际情况的干扰模型是非常重要的. Ilow 等^[3] 讨论了在多路接入无线通信系统中的干扰模型, 理论分析表明, 在干扰源相互独立、个数众多、信号强度随距

引用格式: 王亢, 贡毅, 徐志江, 等. 基于对数累积量的重尾分布脉冲干扰参数估计及性能分析. 中国科学: 信息科学, 2017, 47: 221-234, doi: 10.1360/N112016-00058

Wang K, Gong Y, Xu Z J, et al. Parameter estimator based on the log-cumulant and its performance analysis for heavy-tailed-distributed impulsive interference (in Chinese). Sci Sin Inform, 2017, 47: 221-234, doi: 10.1360/N112016-00058

离的负数幂衰落和干扰源服从 Poisson 分布的假设条件下, 那么系统干扰噪声可认为是服从球对称的 α 稳定分布 (SaS). Hughes^[4] 考虑了 CDMA 通信系统中, 用户共享一定带宽的同一频段, 由于扩频码不是完全正交的, 因此某一接收机上的信号除了期望信号之外, 也包括了其他活跃用户发射的多用户干扰, 而多用户干扰是限制 CDMA 网络性能的一个重要因素. 如果发射机在时间和空间上是服从 Poisson 分布的, 信号强度随距离按幂次律衰落、相位随机旋转, 那么所有发射机的干扰信号之和服从脉冲的、SaS 随机过程. Gulati 等^[5] 研究了不同的网络拓扑结构、全区域/环状区域内、接收机有/无保护带等各种干扰源空间 Poisson/Poisson-Poisson 分族分布条件下的共路干扰统计特性, 指出全区域 Poisson 分布, 例如传感网、Ad hoc 网, 干扰的统计模型为 SaS 分布. 蜂窝小区中的基站密度分布呈现出强重尾特性, 同样的情况也出现在宽带网络和蜂窝网络中的业务流量中, 用 α 稳定分布比 Poisson 分布更符合实际^[6,7]. 除无线通信领域, 在医学生物检测上, 理论分析和实测数据统计表明, 来自皮肤组织、乳腺组织等人体组织的超声波反向散射回波信号, 收敛于非 Gauss 的 SaS 分布^[8]; Chen 等^[9] 指出 SaS 分布模型非常贴切高分辨率图像中的重尾分布, 此模型作为先验知识, 用于图像重构过程中的最大后验估计.

除了 Cauchy ($\alpha = 1$) 和 Gauss ($\alpha = 2$) 分布之外, SaS 分布概率密度函数 (PDF) 的闭合解析式是不存在的, 导致系统性能分析比较困难. Niranjayan 等^[10] 证明了特征指数 $1 < \alpha \leq 2$ 的 SaS 噪声条件下, 最佳线性 Rake 接收是最大比合并 (MRC), 并推导了信噪比及相应的 BER. 令人感兴趣的是, 当 $\alpha < 1$ 时, 最佳线性接收机反而是选择性合并^[11]. Rajan 等^[12] 研究了 SaS 噪声环境下, MRC、线性匹配滤波、检测后合并、最大似然比、渐进最优等各种合并算法下 BPSK 调制的分集性能和相应的 BER. Sureka 等^[13] 假定信道的混合干扰 (disturbance) 是加性白 Gauss 噪声 (AWGN) 与 SaS 干扰叠加之和, 其精确的闭合 PDF 表达式是不存在的, 因此很难实现最佳接收机的设计. 然而, Sureka 等提出了一个近似的、闭合解析式的 PDF 表达式, 并推导出了次最佳接收机结构与 BER 性能. Yang 等^[14] 采用几何功率, 提出了映射机制 (mapping mechanism), 推导出了 SaS 噪声条件下的 M 进制误比特率 (BER)/ 误符号率 (SER) 表达式. Chen 等^[15] 提出了 SaS 分布概率密度函数的 3 种近似表达式, 基于此, 提出了新的检测器. Mohhammadreza 等^[16] 提出了一种基于 SaS 分布的参数已知前提下, 重尾 Rayleigh 分布的混合近似算法. 事实上, 所有这些文献工作的前提条件是 SaS 分布的参数是已知的. 因此, 分析通信系统的 BER/SER、信号最佳检测、中断容量等性能指标的一个前提是, 需要得到建模为 SaS 分布的干扰/噪声的 PDF 参数.

本文假定通信系统采用了 M 进制调制, 在同相和正交上都有干扰信号, 也即干扰噪声是服从复 SaS 分布统计模型的前提下, 采用对数累积量理论, 对模型的参数进行估计, 理论和仿真相结合, 给出了参数估计器的性能. 本文的主要贡献有: (1) 采用对数累积量理论, 推导得到复 SaS 分布包络的 1 至 4 阶对数累积量表达式, 基于此, 给出了复 SaS 分布的参数估计方法; (2) 分析了估计算法的性能, 给出了其近似 PDF 表达式; (3) 考虑实际的通信系统, 其接收端不仅存在重尾脉冲 SaS 干扰, 也存在与之相互独立的加性白 Gauss 噪声 (AWGN), 也即接收端的总噪声是这两者之和. 本文提出了总噪声可近似等效为单变量的 SaS 噪声这一假设, 并通过仿真和数值计算验证此假设是合理的. 因此, 基于对数累积量的估计算法、以及相应的性能分析仍然有效.

本文的组织如下: 第 2 节介绍了 SaS 分布和重尾 Rayleigh 分布, 以及基于分数阶的参数估计算法, 指出该估计算法存在的问题. 为了克服该算法的缺点, 在第 3 节中, 给出了基于对数累积量理论的估计算法, 并采用理论分析结合仿真验证的方法, 给出了估计参数的概率密度函数, 表明它们均近似收敛与正态分布. 而在实际环境中, 接收端必然包括 Gauss 噪声, 因此在第 4 节中, 通过仿真验证和数值计算比较, 相互独立的复 Gauss 噪声和复 SaS 噪声之和, 可以近似为单一的复 SaS 噪声, 这表明估

计算法仍然有效. 最后, 在第 5 节作了总结.

2 理论背景

本节简单介绍了对称 α 稳定分布, 复对称 α 稳定分布的包络为重尾 Rayleigh 分布, 以及估计重尾 Rayleigh 分布参数的对数累积量.

2.1 对称 α 稳定分布

S α S 分布除了 Cauchy 分布和 Gauss 分布之外, 其概率密度函数不存在闭合的解析表达式, 常用特征函数来表示^[17]

$$\phi(t) = E[izt] = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha) = \exp(-\gamma |t|^\alpha), \quad (1)$$

式中 $E[\cdot]$ 表示期望运算. 参数 $\alpha \in (0, 2]$ 称为特征函数 (characteristic exponent), 它决定了该分布脉冲特性的程度. α 越小, 所对应分布的拖尾越厚, 脉冲特性越显著; 反之, 则拖尾越薄, 脉冲性减弱. 当 $\alpha < 2$ 时, 拖尾以 $-(\alpha + 1)$ 次幂代数衰减; 当 $\alpha = 2$ 时, 则为 Gauss 分布, 以指数衰减. 参数 $\sigma > 0$ 称为分散系数 (dispersion), $\gamma = \sigma^\alpha$ 称为尺度 (scale) 系数, 它们均表示相对于均值的分散程度的度量. γ 类似于 Gauss 分布中的方差 σ_g^2 , 当 $\alpha = 2$ 时, $\gamma = \frac{1}{2}\sigma_g^2$ ^[17]. 如果一个随机变量 X 服从 S α S 分布, 本文记为 $X \sim \mathcal{S}(\alpha, \sigma)$.

2.2 重尾 Rayleigh 分布

假定接收到的复信号是各向同性的 (isotropic) $\mathbf{h} = h_I + ih_Q$, 其同相分量 h_I 和正交分量 h_Q 都服从 S α S 分布, 也即, $h_I, h_Q \sim \mathcal{S}(\alpha, \sigma)$, 同时, h_I, h_Q 也服从联合 S α S 分布. 本文称 \mathbf{h} 为复对称 α 稳定 (CS α S) 分布, 记为 $\mathbf{h} \sim \mathcal{CS}(\alpha, \sigma)$, 其特征函数为^[3, 18]

$$\phi(t_1, t_2) = \exp(-\gamma |\mathbf{t}|^\alpha), \quad (2)$$

其中 t_1, t_2 构成矢量 \mathbf{t} , $|\mathbf{t}| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$, $\gamma = \sigma^\alpha$. 记复信号的包络 $h \triangleq \sqrt{h_I^2 + h_Q^2}$, 相应地, 其 PDF 为特征函数, 也即式 (2) 的 Fourier 变换, Kuruoğlu 等^[18] 给出了具体的推导过程, 其表达式为

$$f_{\alpha, \gamma}(h) = h \int_0^\infty \omega \exp(-\gamma \omega^\alpha) J_0(h\omega) d\omega, \quad h > 0, \quad (3)$$

其中 $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-ix \cos \theta) d\theta$ 为第一类 0 阶 Bessel 函数. 式 (3) 称为重尾 Rayleigh 分布或 α -Rayleigh 分布, 只有当 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$ 时, $f_{\alpha, \gamma}(h)$ 才存在闭合的解析表达式, 也即

$$f_{1, \gamma}(h) = \frac{h\gamma}{(h^2 + \gamma^2)^{3/2}}, \quad f_{2, \gamma}(h) = \frac{h}{2\gamma} e^{-\frac{h^2}{4\gamma}}. \quad (4)$$

对重尾 Rayleigh 分布的参数 α, γ 估计, Kuruoğlu 等^[18] 提出了基于分数矩的估计算法. 首先推导出了复信号包络 h 的 p 阶矩

$$E[h^p] = \int_0^\infty h^p f_{\alpha, \gamma}(h) dh = \frac{2^p \Gamma(1 + \frac{p}{2}) \gamma^{p/\alpha} \Gamma(1 - \frac{p}{\alpha})}{\Gamma(1 - \frac{p}{2})}, \quad p < \alpha. \quad (5)$$

Gamma 函数 $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$. 在此基础上, 得到参数 α, γ 的估计算法

$$\frac{E[h^{2p}]}{E[h^p]^2} = \frac{\alpha\Gamma(p+1)\Gamma^2(-p/2)\Gamma(-2p/\alpha)}{2\Gamma(-p)\Gamma^2(p/2+1)\Gamma(-p/\alpha)}, \quad (6a)$$

$$\gamma = \left(\frac{\Gamma(p/2)}{2^{p+1}\Gamma(1+p/2)} \frac{\alpha}{\Gamma(-p/\alpha)} \right)^{\alpha/p}. \quad (6b)$$

该文献同时指出, 这个估计算法的缺点是式 (5) 高度的非线性, 因此不存在一个闭合解. 进一步, Sun 等^[19,20] 对 p 的取值对估计性能的影响作了仿真, 指出参数 α, γ 估计性能依赖于参数 p 的取值.

2.3 对数累积量理论

Pastor 指出, 对数累积量 (log-cumulants) 的参数估计方法具有更低的估计方差^[21]. 再者, 当干扰是 α 稳定分布的、重尾的, 则对数累积量是一种更加快速且准确的参数估计方法. 因此, 本文采用对数累积量理论, 在第 3 节中给出了重尾 Rayleigh 分布的参数估计算法. 通过理论结合仿真的方法, 分析了参数估计的性能, 给出了估计值的概率密度函数. $\log h$ 的 k 阶原点矩可由包络 h 的 p 阶矩的 k 次求导得到,

$$m_{k,h} = E[(\log h)^k] = E \left[\lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^k}{dp^k} h^p \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^k}{dp^k} E[h^p] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^k}{dp^k} \frac{2^p \Gamma(1 + \frac{p}{2}) \gamma^{p/\alpha} \Gamma(1 - \frac{p}{\alpha})}{\Gamma(1 - \frac{p}{2})}. \quad (7)$$

结合原点矩与累积量的关系, 经过计算、推导、整理后得到 $\log h$ 的 1 至 4 阶累积量矩, 分别为

$$C_{1,h} = E[\log h] = (\alpha^{-1} - 1) C_e + \log \sigma + \log 2, \quad (8a)$$

$$C_{2,h} = E[(\log h - C_{1,h})^2] = \psi^{(1)}(1) \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\pi^2}{6\alpha^2}, \quad (8b)$$

$$C_{3,h} = E[(\log h - C_{1,h})^3] = \psi^{(2)}(1) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\alpha^3} \right) \simeq -2.4041 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\alpha^3} \right), \quad (8c)$$

$$C_{4,h} = E[(\log h - C_{1,h})^4] = \frac{3\pi^4}{20\alpha^4}. \quad (8d)$$

这里 $C_e = -\psi(1) \simeq 0.577216$ 是 Euler 常数; Gamma 函数对数的导数 $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ 称为双 Gamma 函数, 而 $\psi^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} \psi(z)$ 为双 Gamma 函数的 n 次导数. 文献 [20,22] 等仅给出了式 (8a) 和 (8b) 的表达式, 而在第 3 节评估估计器性能时, 需要用到式 (8d), 本文按照式 (7) 推导得到式 (8c) 和 (8d), 在此一并列出了前 4 阶累积量.

对复信号 \mathbf{h} 的同相分量 h_I 和正交分量 h_Q , 由各向同性知, 它们都服从 $\mathcal{S}(\alpha, \sigma)$ 分布. 类似地, 相应的对数累积量为^[23]

$$C_{1,h_I} = C_{1,h_Q} = E[\log |h_I|] = (\alpha^{-1} - 1) C_e + \log \sigma, \quad (9a)$$

$$C_{2,h_I} = C_{2,h_Q} = E[(\log |h_I| - C_{1,h_I})^2] = \frac{\pi^2}{6\alpha^2} + \frac{\pi^2}{12}. \quad (9b)$$

3 估计算法及性能分析

3.1 估计算法

由包络的 N 个相互独立同分布的样本 $\vec{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_N\}$, 得到 $\log h$ 的 k 阶累积量估计值 $\widehat{C}_{k,h}$ [21]:

$$\widehat{C}_{1,h} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log h_n, \quad \widehat{C}_{k,h} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\log h_n - \widehat{C}_{1,h} \right)^k, \quad k \geq 2. \quad (10)$$

式 (9) 对应的估计值为

$$\widehat{C}_{1,h_i} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log |h_{n,i}|, \quad \widehat{C}_{2,h_i} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\log |h_{n,i}| - \widehat{C}_{1,h_i} \right)^2, \quad i \in \{I, Q\}. \quad (11)$$

从式 (8) 中 $C_{k,h}$ ($k \geq 2$) 的表达式可以看出, $C_{k,h}$ 与参数 α 之间存在一个非常简单的关系式. 因此, 对特征指数 α 的估计, 先按照式 (10) 计算 $C_{k,h}$ 的估计值 $\widehat{C}_{k,h}$, 然后得到 α 的估计值 $\hat{\alpha}$. 通常矩的阶数越高, 那么估计的误差就越大, 因此本文取二阶累积量 $\widehat{C}_{2,h}$ 来估计 $\hat{\alpha}$. 由式 (8b), 容易得到特征指数 α 的估计为 [20, 21]

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\vec{h}) = \left(\frac{6}{\pi^2} \widehat{C}_{2,h} \right)^{-1/2}, \quad \hat{\alpha} \in (0, 2]. \quad (12)$$

在已得到 $\hat{\alpha}$ 的条件下, 计算 $\log h$ 的均值 $\widehat{C}_{1,h}$, 用 $\hat{\alpha}$ 替代 α , 代入式 (8a), 得到 σ 的估计 $\hat{\sigma}$ (或 $\hat{\gamma}$), 其表达式为 [20, 21]

$$\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_1(\vec{h}) = \exp \left(C_e - \log 2 + \widehat{C}_{1,h} - C_e \hat{\alpha}^{-1} \right). \quad (13)$$

令随机变量 $\widehat{C}_{1,h} \triangleq \frac{1}{2} \left(\widehat{C}_{1,h_I} + \widehat{C}_{1,h_Q} \right)$, 替换式 (9a) 中的 \widehat{C}_{1,h_I} , 可得到 σ 的另一种估计方法, 其表达式为

$$\hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_2(\vec{h}) = \exp \left(C_e + \widehat{C}_{1,h} - C_e \hat{\alpha}^{-1} \right). \quad (14)$$

本文提出的这种 σ 估计方法, 在一定条件下估计性能比前一种方法更好. 下面来分析比较这两种估计方法.

在 $\hat{\alpha}$ 已给定的条件下, 比较式 (13) 和 (14) 这两种分散系数估计方法, 可以看出, $\hat{\sigma}$ 的估计取决于 $\widehat{C}_{1,h}$ 或 $\widehat{C}_{1,h}$ 的准确性. $\widehat{C}_{1,h}$ 是一个随机变量, 由式 (8) 和 (10) 可知, 其均值和方差分别为

$$\mu_{\widehat{C}_{1,h}} = C_{1,h}, \quad \sigma_{\widehat{C}_{1,h}}^2 = \frac{1}{N} C_{2,h} = \frac{\pi^2}{6N} \frac{1}{\alpha^2}. \quad (15)$$

$\widehat{C}_{1,h}$ 也是一个随机变量, 由式 (9) 和 (11) 得到其均值和方差分别为

$$\mu_{\widehat{C}_{1,h}} = C_{1,h_I} = C_{1,h} - \log 2, \quad \sigma_{\widehat{C}_{1,h}}^2 = \frac{1}{2N} C_{2,h_I} = \frac{\pi^2}{6N} \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1}{4} \right). \quad (16)$$

比较式 (15) 和 (16), 当特征指数 $0 < \alpha \leq \sqrt{2}$ 时, $\sigma_{\widehat{C}_{1,h}}^2 < \sigma_{\widehat{C}_{1,h}}^2$, 表明 $\hat{\sigma}_2$ 的估计方法具有更小的方差; 反之, 当 $\sqrt{2} < \alpha \leq 2$ 时, $\hat{\sigma}_1$ 的估计性能更好些.

3.2 特征指数估计的概率密度函数

参数 α , σ 估计的准确与否, 决定了概率密度函数的表达式是否准确, 这影响到后续的诸如信道迭代译码、信号最佳检测、无线网络中断概率分析等应用. 寻找哪些参数与 α , σ 估计器有关系, 需要推导式 (12) 的 $\hat{\alpha}(\vec{h})$ 和式 (13) (或 (14)) 的 $\hat{\sigma}(\vec{h})$ 的概率密度函数 (PDF) 的表达式. 从式 (8a), (8b) 和 (10) 可看出, 直接从式 (3) 出发, 来推导参数 α , σ 估计器的精确的、闭合的概率密度函数解析表达式是非常困难的. 据我们所知, 还没有一篇文献在这方面作过研究. 因此, 本文通过理论推导和仿真验证相结合的方法, 来推导 PDF 的近似表达式.

令随机变量 $X \triangleq \log h - E[\log h]$, 则由式 (8) 可得到

$$E[X] = 0, \quad E[X^2] = \frac{\pi^2}{6\alpha^2}, \quad E[X^4] = \frac{3\pi^4}{20\alpha^4}, \quad D[X^2] = E[X^4] - E[X^2]^2 = \frac{11\pi^4}{90\alpha^4}, \quad (17)$$

式中 $D[\cdot]$ 表示方差运算. 随机变量 X 的峰度 $\frac{E[X^4]}{E[X^2]^2} = 5.4 > 3$, 表明 X 不服从 Gauss 分布. 信号包络的 N 个相互独立同分布的样本 $\vec{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_N\}$, 那么经过 $x_n \triangleq \log h_n - \widehat{C}_{1,h}$ 变换后, 得到 $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. 尽管随机变量 X^2 不服从正态分布, 但由于其方差有限, 根据中心极限定理, 当样本个数 N 足够大时, $Y \triangleq \frac{6}{\pi^2} \widehat{C}_{2,h} = \frac{6}{N\pi^2} \sum_{n=1}^N x_n^2$ 收敛于正态分布, 也即 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, 式中

$$\mu_Y = E \left[\frac{6}{N\pi^2} \sum_{n=1}^N x_n^2 \right] = \frac{6}{\pi^2} E[X^2] = \alpha^{-2}, \quad (18a)$$

$$\sigma_Y^2 = \left(\frac{6}{\pi^2} \right)^2 \frac{1}{N} D[X^2] = \frac{22}{5N\alpha^4}. \quad (18b)$$

由概率论可知, 对服从 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分布的随机变量而言, 99.73% 的概率落在区间 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 内, 称之为 “3 σ ” 准则. 仿真表明, $\hat{\alpha}(\vec{h})$ 近似服从正态分布, 也即 $\hat{\alpha}(\vec{h}) \sim \mathcal{N}(\mu_{\hat{\alpha}}, \sigma_{\hat{\alpha}}^2)$. 因此, 随机变量 Y 的 “3 σ ” 区间为 $[\mu_Y - 3\sigma_Y, \mu_Y + 3\sigma_Y]$, 根据式 (12) 中 $\hat{\alpha}$ 和 Y (或 $\widehat{C}_{2,h}$) 之间的关系, 那么 $\hat{\alpha}$ 的 “3 σ ” 区间为 $[\mu_{\hat{\alpha}} - 3\sigma_{\hat{\alpha}}, \mu_{\hat{\alpha}} + 3\sigma_{\hat{\alpha}}]$, 其中

$$\mu_{\hat{\alpha}} = \mu_Y^{-1/2} = \alpha, \quad (19a)$$

$$\sigma_{\hat{\alpha}} = \frac{1}{6} \left((\mu_Y - 3\sigma_Y)^{-1/2} - (\mu_Y + 3\sigma_Y)^{-1/2} \right) = \frac{\alpha}{6} \left(\left(1 - 3\sqrt{\frac{22}{5N}} \right)^{-1/2} - \left(1 + 3\sqrt{\frac{22}{5N}} \right)^{-1/2} \right). \quad (19b)$$

当样本数 N 足够大时, 则 $\sigma_{\hat{\alpha}} \simeq \alpha \sqrt{\frac{11}{10N}}$.

本文通过 MATLAB 仿真来验证上述特征指数估计的概率密度函数的理论分析, α 稳定分布随机数生成的代码参见网站 [24]. 图 1 是特征指数 $\alpha = 0.5, 1.0, 1.5$ 、样本数 $N = 10^3$ 、分散系数 $\sigma = 0.3, 1.0, 3.0$ 时, 特征指数估计 $\hat{\alpha}$ 的理论和仿真 PDF 比较图. 其中仿真曲线采用 MATLAB 函数 `ksdensity()` 绘制, 理论曲线是由式 (19) 给出的正态分布. 从图中可看出, 在脉冲性从非常强 ($\alpha = 0.5$) 到较温和 ($\alpha = 1.5$)、分散系数从小 ($\sigma = 0.3$) 到大 ($\sigma = 3.0$) 的各种场景下, 理论和仿真比较吻合. 从式 (19) 可看出, $\hat{\alpha}$ 是无偏估计, 且估计的标准差与 α 、 $N^{-1/2}$ 均成正比, 在样本数一定的情况下, 特征指数越小则估计可靠性越高, 这与图 1 也是一致的.

3.3 分散系数估计的概率密度函数

这里以式 (13) 的估计方法为例, 来推导分散系数 $\hat{\sigma}$ (或尺度系数 $\hat{\gamma}$) 估计的近似概率密度函数表达式. 由 $\log(\cdot)$ 函数的单调性可知, $\{\log h_n, n = 1, \dots, N\}$ 是相互独立同分布的. 为了求 $\hat{\sigma}$ 的 PDF, 从

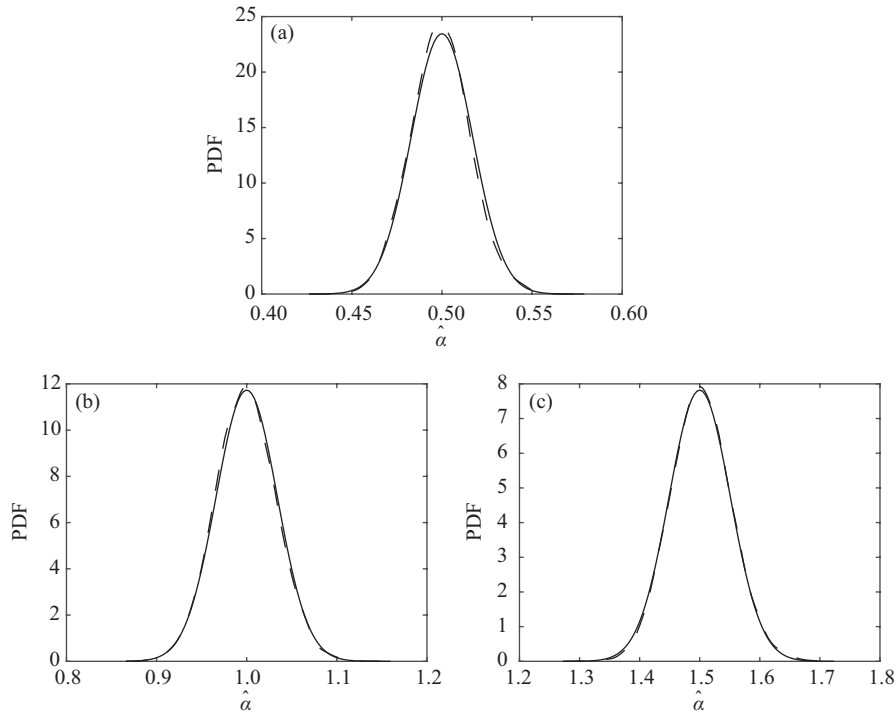


图 1 样本数 $N = 10^3$ 时, 特征指数估计 $\hat{\alpha}$ 的理论 (实线) 和仿真 (虚线) 概率密度函数比较

Figure 1 Comparison of the theoretical PDF (marked by solid line) and the simulated PDF (marked by dotted line) of the estimated characteristic exponent $\hat{\alpha}$, where the number of samples $N = 10^3$. (a) $\alpha = 0.5, \sigma = 0.3$; (b) $\alpha = 1.0, \sigma = 1$; (c) $\alpha = 1.5, \sigma = 3$

式 (13) 可得到

$$\log \hat{\sigma} = C_e - \log 2 + \widehat{C}_{1,h} - C_e / \hat{\alpha}. \tag{20}$$

可以看出, $\log \hat{\sigma}$ 由随机变量 $\widehat{C}_{1,h}$ 和 $\hat{\alpha}^{-1}$ 决定. 由式 (8) 表明, $\log h$ 的均值为 $C_{1,h}$ 、方差为 $C_{2,h}$. 因为方差是有限的, 应用中心极限定理知, 式 (10) 中 $\widehat{C}_{1,h}$ 收敛于正态分布, 其均值和标准差为

$$\mu_{\widehat{C}_{1,h}} = C_{1,h}, \quad \sigma_{\widehat{C}_{1,h}} = \sqrt{\frac{C_{2,h}}{N}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6\alpha^2 N}}. \tag{21}$$

由式 (18) 知 Y 的“ 3σ ”取值区间为 $[\alpha^{-2}(1 - 3\sqrt{\frac{22}{5N}}), \alpha^{-2}(1 + 3\sqrt{\frac{22}{5N}})]$, 再由式 (12) 得到 $\hat{\alpha}^{-1} = Y^{1/2}$. 由于 $\sqrt{(\cdot)}$ 函数的单调性, 因此 $\hat{\alpha}^{-1}$ 的“ 3σ ”取值区间为 $[\alpha^{-1}\sqrt{1 - 3\sqrt{\frac{22}{5N}}}, \alpha^{-1}\sqrt{1 + 3\sqrt{\frac{22}{5N}}}]$. 图 2 是样本数 $N = 10^3$ 时对 $\hat{\alpha}^{-1}$ 进行了仿真, 并利用 MATLAB 的 normplot() 函数验证了 $\hat{\alpha}^{-1}$ 近似收敛于正态分布. 因此, $\hat{\alpha}^{-1}$ 的均值和标准差分别为

$$\mu_{\hat{\alpha}^{-1}} = \alpha^{-1}, \quad \sigma_{\hat{\alpha}^{-1}} = \frac{\alpha^{-1}}{6} \left(\sqrt{1 + 3\sqrt{\frac{22}{5N}}} - \sqrt{1 - 3\sqrt{\frac{22}{5N}}} \right) \simeq \alpha^{-1} \sqrt{\frac{11}{10N}}. \tag{22}$$

令 $\widehat{C}_{1,h}$ 与 $\hat{\alpha}^{-1}$ 之间的相关系数为 ρ , 代入式 (20), 得到 $\log \hat{\sigma}$ 的均值和方差分别为

$$\mu_{\log \hat{\sigma}} = C_e - \log 2 + C_{1,h} - C_e \alpha^{-1} = \log \sigma, \tag{23a}$$

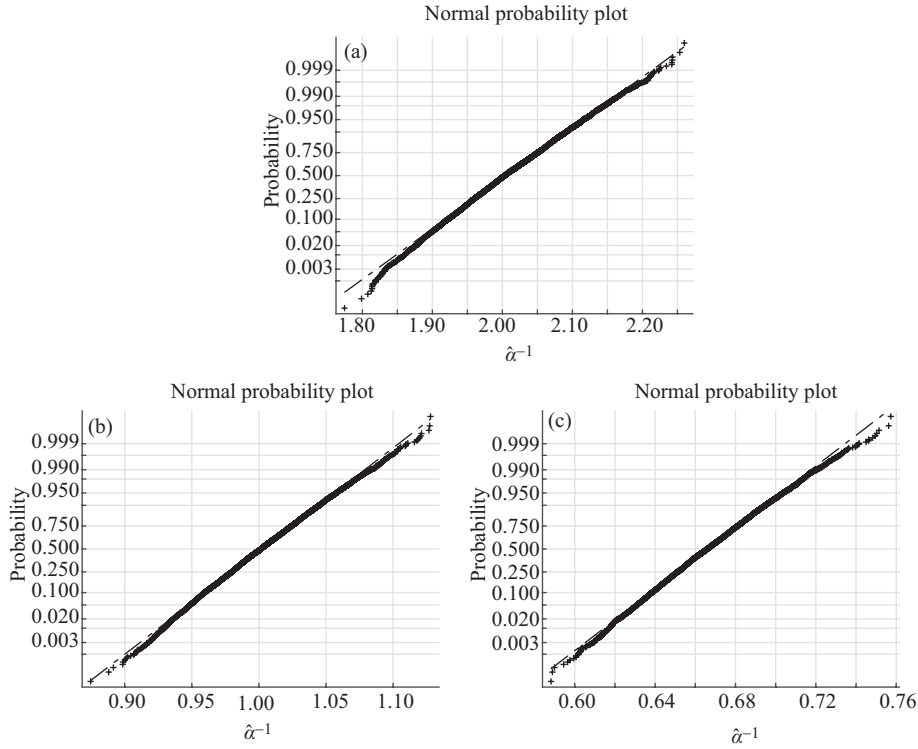


图 2 样本数 $N = 10^3$ 时, 特征指数估计的倒数 $\hat{\alpha}^{-1}$ 近似服从正态分布

Figure 2 The reciprocal of the estimated characteristic exponent $\hat{\alpha}$ is approximated to the normal distribution, where the number of samples $N = 10^3$. (a) $\alpha = 0.5$; (b) $\alpha = 1.0$; (c) $\alpha = 1.5$

$$\sigma_{\log \hat{\sigma}}^2 = \sigma_{\hat{C}_{1,h}}^2 + C_e^2 \sigma_{\hat{\alpha}^{-1}}^2 - 2\rho \sigma_{\hat{C}_{1,h}} C_e \sigma_{\hat{\alpha}^{-1}} \simeq \frac{1}{\alpha^2 N} \left(\frac{\pi^2}{6} + 1.1 C_e^2 - 2\rho C_e \sqrt{\frac{11\pi^2}{60}} \right). \quad (23b)$$

相关系数 ρ 也是一个随机变量, 但通过取不同的 α, σ 和 N 值, 作了大量的仿真. 对给定的 α 和 σ , 每次试验的样本数是 N , 每 10^3 次试验计算一次相关系数, 共经过 10^6 次试验, 得到 10^3 个相关系数, 求其平均值和标准差, 也为表 1 中的每一个相关系数的平均值和标准差 (括号内数据). 发现当 $\alpha \in [0.5, 1.9]$ 时, ρ 基本上不依赖于 σ 和 N , 仅与 α 相关, 且 $\rho \in (-0.4, 0.4)$. 因此,

$$\frac{1.8}{\alpha^2 N} < \sigma_{\log \hat{\sigma}}^2 < \frac{2.2}{\alpha^2 N}. \quad (24)$$

当 N 足够大时, $\log \hat{\sigma}$ 估计的标准差 $\sigma_{\log \hat{\sigma}} \ll 1$, 使得 $\hat{\sigma}$ 的标准差为

$$\sigma_{\hat{\sigma}} = \sigma (e^{\sigma_{\log \hat{\sigma}}} - 1) \simeq \sigma \sigma_{\log \hat{\sigma}} \simeq \sqrt{\frac{2\sigma^2}{N\alpha^2}}. \quad (25)$$

仿真表明, $\hat{\sigma}$ 仍然近似服从 Gauss 分布, 也即 $\hat{\sigma} \sim \mathcal{N}(\sigma, \frac{2\sigma^2}{N\alpha^2})$.

本文通过 MATLAB 仿真来验证上述分散系统估计的概率密度函数的理论分析. 图 3 是特征指数 $\alpha = 0.5, 1.0, 1.5$ 、样本数 $N = 10^3$ 时, 分散系统估计 $\hat{\sigma}$ 的理论和仿真 PDF 比较图. 其中仿真曲线采用 MATLAB 函数 `ksdensity()` 绘制, 理论曲线是由式 (25) 给出的正态分布. 从图中可看出, 在脉冲性非常强 ($\alpha = 0.5$) 时, 仿真的估计方差小于理论值, 这是因为式 (23b) 中的相关系数 $\rho \neq 0$, 导致理论与仿真有一点差别.

表 1 $\widehat{C}_{1,h}$ 与 $\hat{\alpha}^{-1}$ 之间的相关系数 ρ
Table 1 Correlation coefficient between $\widehat{C}_{1,h}$ and $\hat{\alpha}^{-1}$

| α | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 1.1 | 1.3 | 1.5 | 1.7 | 1.9 | |
|------------|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $N = 10^2$ | 0.3 | 0.383 | 0.335 | 0.268 | 0.180 | 0.074 | -0.052 | -0.194 | -0.356 |
| | | (0.0268) | (0.0278) | (0.0300) | (0.0303) | (0.0325) | (0.0317) | (0.0303) | (0.0288) |
| | 1 | 0.383 | 0.335 | 0.268 | 0.180 | 0.073 | -0.053 | -0.198 | -0.358 |
| | | (0.0264) | (0.0283) | (0.0280) | (0.0311) | (0.0320) | (0.0310) | (0.0310) | (0.0290) |
| | 3 | 0.382 | 0.335 | 0.270 | 0.179 | 0.072 | -0.052 | -0.197 | -0.361 |
| | | (.02680) | (0.0272) | (0.0288) | (0.0313) | (0.0323) | (0.0313) | (0.0304) | (0.0282) |
| $N = 10^3$ | 0.3 | 0.379 | 0.334 | 0.266 | 0.182 | 0.074 | -0.052 | -0.195 | -0.35 |
| | | (0.0266) | (0.0277) | (0.0289) | (0.0301) | (0.0300) | (0.0322) | (0.0310) | (0.0281) |
| | 1 | 0.380 | 0.333 | 0.266 | 0.180 | 0.074 | -0.053 | -0.194 | -0.356 |
| | | (0.0277) | (0.0294) | (0.0274) | (0.0293) | (0.0309) | (0.0322) | (0.0310) | (0.0279) |
| | 3 | 0.381 | 0.333 | 0.267 | 0.180 | 0.074 | -0.051 | -0.194 | -0.357 |
| | | (0.0270) | (0.0283) | (0.0296) | (0.0288) | (0.0313) | (0.0314) | (0.0317) | (0.0271) |

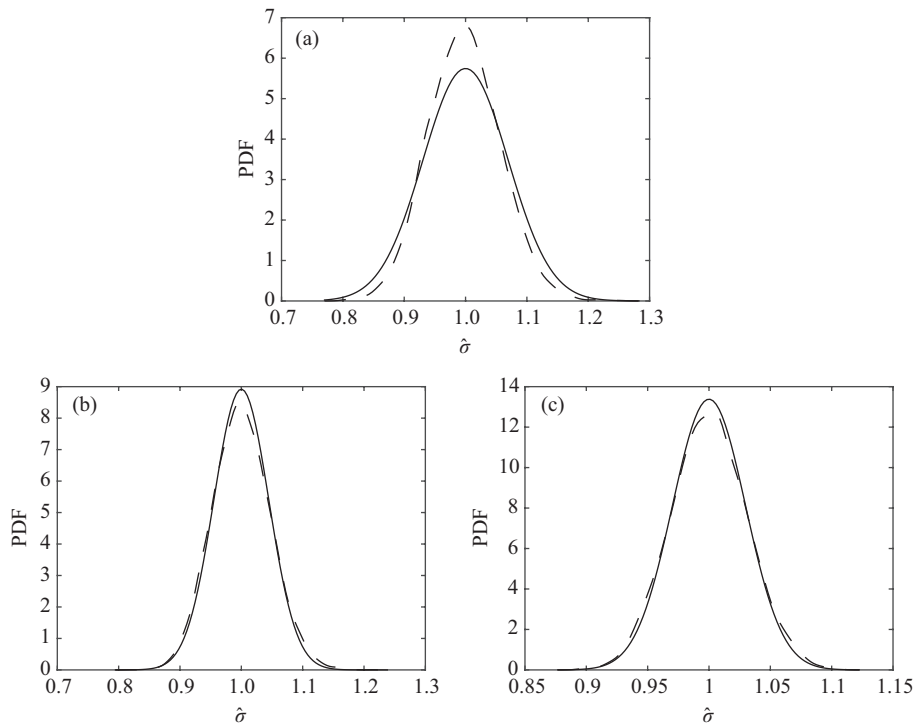


图 3 样本数 $N = 10^3$ 时, 分散系统的估计 $\hat{\sigma}$ 的理论 (实线) 与仿真 (虚线) 概率密度函数比较

Figure 3 Comparison of the theoretical PDF (marked by solid line) and the simulated PDF (marked by dotted line) of the estimated dispersion $\hat{\sigma}$, where the number of samples $N = 10^3$. (a) $\alpha = 0.5$; (b) $\alpha = 1.0$; (c) $\alpha = 1.5$

4 混合噪声下的估计方法

在实际的通信系统中, 接收机除了干扰外, 必然存在热噪声, 热噪声通常用 Gauss 分布来描述. 因此, 本节假定混合噪声是由复加性白 Gauss 噪声 \mathcal{CN} 和复对称 α 稳定分布干扰 $\mathcal{CS}\alpha\mathcal{S}$ 叠加的, 并且两者是相互独立的, 因为它们的来源是独立的. 混合噪声

$$R = S + W, \quad (26)$$

这里 $S \sim \mathcal{CS}(\alpha, \sigma_\alpha)$, $W \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_g^2)$, 记 $R \sim \mathcal{CGS}(\alpha, \sigma_\alpha, \sigma_g)$. 除了 $\alpha = 2$ 之外, 混合噪声的概率密度函数没有闭合解析式, 其特征函数为

$$\phi(t_1, t_2) = \exp(-\gamma_\alpha |t|^\alpha - \gamma_g |t|^2), \quad (27)$$

这里 $|t| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$, $\gamma_\alpha = \sigma_\alpha^\alpha$, $\gamma_g = \frac{1}{2}\sigma_g^2$. 把式 (27) 替换式 (2), 再结合式 (3), 得到混合噪声复信号包络 $r = |R|$ 的 PDF 为

$$f_{\alpha, \sigma_\alpha, \sigma_g}(r) = r \int_0^\infty \omega \exp(-\gamma_\alpha \omega^\alpha - \gamma_g \omega^2) J_0(\omega r) d\omega. \quad (28)$$

由于 $\mathcal{S}\alpha\mathcal{S}$ 不存在二阶矩, 因此传统意义上的功率也就没有定义了. Gonzalez 等^[25] 提出了集合功率的概率, 对服从 $\mathcal{S}(\alpha, \sigma_\alpha)$ 分布和 $\mathcal{N}(0, \sigma_g^2)$ 分布的随机变量, 其几何功率分别为

$$S_\alpha = \sigma_\alpha C_g^{\frac{1}{\alpha}-1}, \quad S_g = \frac{\sigma_g}{\sqrt{2C_g}}, \quad (29)$$

其中 $C_g = \exp(C_e) \approx 1.78$, 称为 Euler 常数的指数. 本文定义 $\mathcal{CS}\alpha\mathcal{S}$ 和 \mathcal{CN} 的几何功率信噪比 (GSNR) η 为

$$\eta = 10 \lg \frac{S_\alpha^2}{S_g^2} = 10 \lg \left(2C_g^{\frac{2}{\alpha}-1} \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_g^2} \right). \quad (30)$$

令 $\omega_1 \triangleq \omega \sigma_\alpha$, 式 (28) 可改写为

$$f_{\alpha, \sigma_\alpha, \sigma_g}(r) = \frac{1}{\sigma_\alpha} \frac{r}{\sigma_\alpha} \int_0^\infty \omega_1 \exp\left(-\omega_1^\alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_g}{\sigma_\alpha}\right)^2 \omega_1^2\right) J_0\left(\omega_1 \frac{r}{\sigma_\alpha}\right) d\omega_1 = \frac{1}{\sigma_\alpha} f_{\alpha, 1, \frac{\sigma_g}{\sigma_\alpha}}\left(\frac{r}{\sigma_\alpha}\right). \quad (31)$$

结合式 (30) 和 (31) 可看出, 当特征指数 α 和几何功率信噪比 η 给定时, $\sigma_\alpha \neq 1$ 的 $\mathcal{CGS}\alpha\mathcal{S}$ 的概率密度函数 $f_{\alpha, \sigma_\alpha, \sigma_g}(r)$, 可以由 $\sigma_\alpha = 1$ 的 $\mathcal{CGS}\alpha\mathcal{S}$ 的概率密度函数 $f_{\alpha, 1, \frac{\sigma_g}{\sigma_\alpha}}(r)$ 经过简单的伸缩变换就可以得到. 因此, 本文以 $\sigma_\alpha = 1$ 为例, 认为双变量的 $\mathcal{CGS}\alpha\mathcal{S}$ 可近似为单变量的 $\mathcal{CS}\alpha\mathcal{S}$, 也即

$$f_{\alpha, 1, \sigma_g}(r) = r \int_0^\infty \omega e^{-\omega^\alpha - \frac{1}{2}\sigma_g^2 \omega^2} J_0(\omega r) d\omega \approx r \int_0^\infty \omega e^{-(\sigma_m \omega)^{\alpha_m}} J_0(\omega r) d\omega = f_{\alpha_m, \sigma_m}(r). \quad (32)$$

为了检验这种近似假设的合理性, 本文通过 MATLAB 仿真来验证, α 稳定分布随机数生成的代码参见网站^[24]. 在 MATLAB 仿真中, 采用第 3 章的参数估计算法, 每次试验的样本数为 10^4 , 每一种场景进行了 10^3 次实验, 得到如表 2 所示的参数估计以及估计的标准差, 以及图 4 和 5 直观化的近似效果. 注意到图中的横坐标取值范围, 随机变量以大于 99% 的概率取值在这个范围内. 因此, 从图 4 可以看出, 几何信噪比 GSNR 从 -6 dB 到 10 dB, 近似的效果是非常好的. 如图 5 所示, 当 $\alpha = 1$ 且 GSNR 较小时, 则存在较大的误差. 然而, Nassar 等^[26] 指出, 笔记本无线网卡组成的局域网, 其干扰的特征指数 $\alpha = 1.43$.

表 2 不同特征指数和几何功率信噪比 (dB) 的条件下, 双变量的 $CGS\alpha S$ 近似为单变量的 $CS\alpha S$, 其参数估计的均值以及估计的标准差

Table 2 The average and standard deviation parameters of the approximated $CGS\alpha S$ with various characteristic exponent α and GSNR (dB)

| GSNR (dB) | -6 | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 15 | 20 |
|-----------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha = 1.0, \sigma_\alpha = 1$ | | | | | | | | | | | |
| α_m | 1.3880 (0.0190) | 1.3263 (0.0186) | 1.2695 (0.0168) | 1.2153 (0.0156) | 1.1706 (0.01484) | 1.1300 (0.0140) | 1.0966 (0.0126) | 1.0687 (0.0119) | 1.0477 (0.0118) | 1.0163 (0.0108) | 1.0034 (0.0104) |
| σ_m | 3.1683 (0.0311) | 2.6451 (0.0268) | 2.2367 (0.0217) | 1.9188 (0.0196) | 1.6761 (0.0171) | 1.4890 (0.0166) | 1.3482 (0.0139) | 1.2435 (0.0140) | 1.1673 (0.0126) | 1.0604 (0.0121) | 1.0195 (0.0115) |
| $\alpha = 1.5, \sigma_\alpha = 1$ | | | | | | | | | | | |
| α_m | 1.8238 (0.0199) | 1.7800 (0.0196) | 1.7333 (0.0192) | 1.6848 (0.0184) | 1.6412 (0.0183) | 1.6042 (0.0165) | 1.5735 (0.0169) | 1.5500 (0.0163) | 1.5334 (0.0155) | 1.5106 (0.0158) | 1.5023 (0.0152) |
| σ_m | 2.5318 (0.0235) | 2.1203 (0.0197) | 1.8071 (0.0167) | 1.5679 (0.0150) | 1.3950 (0.0135) | 1.2690 (0.0124) | 1.1800 (0.0118) | 1.1181 (0.0111) | 1.0771 (0.0105) | 1.0254 (0.0102) | 1.0078 (0.0100) |
| $\alpha = 1.8, \sigma_\alpha = 1$ | | | | | | | | | | | |
| α_m | 1.9497 (0.0209) | 1.9322 (0.0246) | 1.9127 (0.0211) | 1.8906 (0.0196) | 1.8706 (0.0185) | 1.8517 (0.0208) | 1.8354 (0.0195) | 1.8247 (0.0194) | 1.8160 (0.0192) | 1.8058 (0.0191) | 1.8007 (0.0189) |
| σ_m | 2.3294 (0.0220) | 1.9546 (0.0186) | 1.6728 (0.0163) | 1.4650 (0.0142) | 1.3151 (0.0120) | 1.2100 (0.0121) | 1.1375 (0.0107) | 1.0889 (0.0106) | 1.0572 (0.0104) | 1.0191 (0.0102) | 1.0064 (0.0097) |

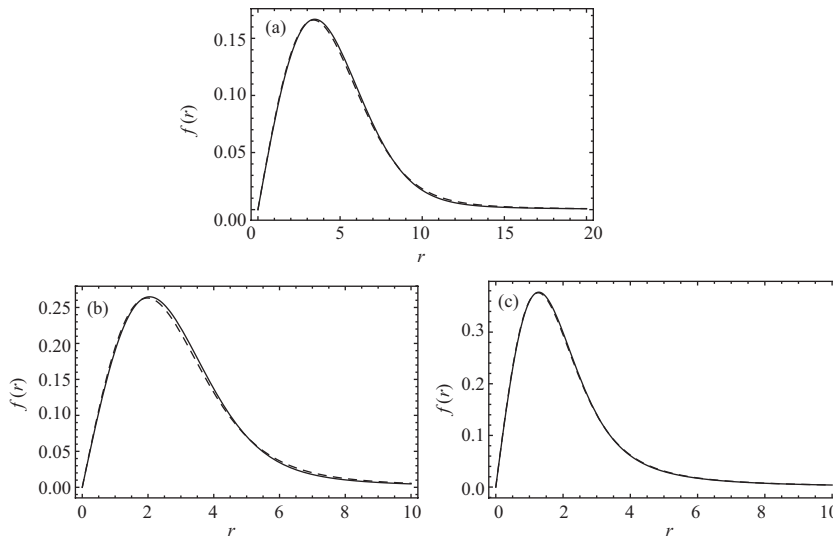


图 4 特征指数 $\alpha = 1.5$ 、分散系数 $\sigma_\alpha = 1$, 在不同几何信噪比下的概率密度函数的近似效果. 图中实线是真实的 PDF, 虚线是近似的 PDF. 实线是式 (32) 的等式左边、虚线是等式右边的表达式, 通过 Mathematica 软件数值积分得到的, 参数 α_m, σ_α 可从表 2 查找到

Figure 4 Comparison of the true PDF (marked by solid line) and the approximated PDF (marked by dotted line) by numerical integral of (32) using Mathematica software with various GSNR η , where $\alpha = 1.5$ and $\sigma_\alpha = 1$. (a) $\eta = -6$ dB; (b) $\eta = 0$ dB; (c) $\eta = 10$ dB

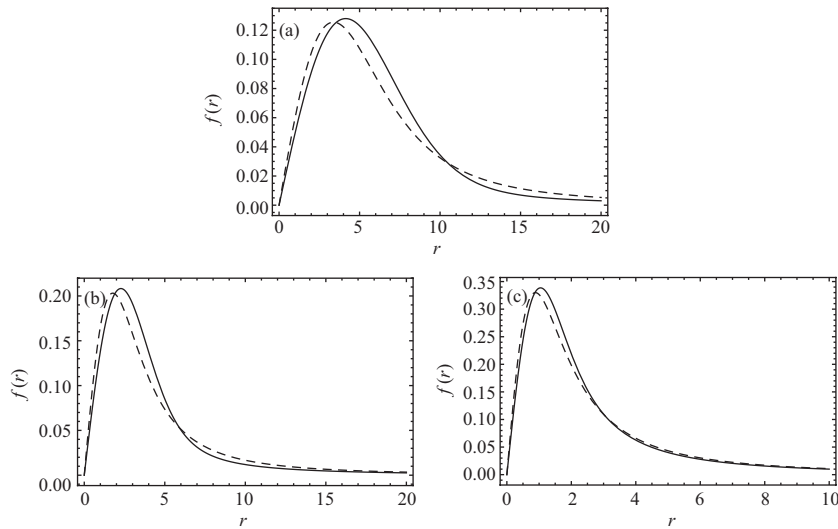


图 5 特征指数 $\alpha = 1.0$ 、分散系数 $\sigma_\alpha = 1$, 在不同几何信噪比下的概率密度函数的近似效果. 图中实线是真实的 PDF, 虚线是近似的 PDF. 实线是式 (32) 的等式左边、虚线是等式右边的表达式, 通过 Mathematica 软件数值积分得到的, 参数 α_m, σ_α 可从表 2 查找到

Figure 5 Comparison of the true PDF (marked by solid line) and the approximated PDF (marked by dotted line) by numerical integral of (32) using Mathematica software with various GSNR η , where $\alpha = 1.0$ and $\sigma_\alpha = 1$. (a) $\eta = -6$ dB; (b) $\eta = 0$ dB; (c) $\eta = 10$ dB

5 结论

本文利用计算复杂度较低、估计方差较小的对数累积量的方法, 给出了建模为复对称 α 稳定分布的脉冲噪声参数估计算法, 参数估计是信号检测、信道译码等应用的前提. 通过理论分析和仿真验证相结合的方法, 给出了特征指数和分散系数估计的概率密度函数, 可用于分析估计的置信度. 此外, 通过仿真和数值计算验证的方法, 表明了双变量的混合噪声可近似为单变量噪声, 因此, 给出的估计算法和性能分析仍然有效.

参考文献

- 1 You X H, Pan Z W, Gao X Q, et al. The 5G mobile communication: the development trends and its emerging key techniques. *Sci Sin Inform*, 2014, 44: 551–563 [尤肖虎, 潘志文, 高西奇, 等. 5G 移动通信发展趋势与若干关键技术. *中国科学: 信息科学*, 2014, 44: 551–563]
- 2 Zhang Z S, Wang X, Zhang C Y, et al. Massive MIMO technology and challenges. *Sci Sin Inform*, 2015, 45: 1095–1110 [张中山, 王兴, 张成勇, 等. 大规模 MIMO 关键技术及应用. *中国科学: 信息科学*, 2015, 45: 1095–1110]
- 3 Ilow J, Hatzinakos D. Analytic alpha-stable noise modeling in a Poisson field of interferers or scatters. *IEEE Trans Signal Process*, 1998, 46: 1601–1611
- 4 Hughes B L. Alpha-stable models of multiuser interference. In: *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory*, Sorrento, 2000. 383–383
- 5 Gulati K, Evans B L, Andrews J G, et al. Statistics of co-channel interference in a field of Poisson and Poisson-Poisson clustered interferers. *IEEE Trans Signal Process*, 2010, 58: 6207–6222
- 6 Zhou Y F, Li R P, Zhao Z F, et al. On the α -stable distribution of base stations in cellular networks. *IEEE Commun Lett*, 2015, 19: 1750–1753
- 7 Li R P, Zhao Y F, Qi C, et al. Understanding the traffic nature of mobile instantaneous messaging in cellular networks: a revisiting to α -stable models. *IEEE J Mag*, 2015, 3: 1416–1422

- 8 Pereyra M, Dobigeon N, Batatia H, et al. Labeling skin tissues in ultrasound images using a generalized Rayleigh mixture model. In: Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Prague, 2011. 729–723
- 9 Chen J, Nunez-Yanez J L, Achim A. Bayesian video super-resolution with heavy-tailed prior models. *IEEE Trans Circ Syst Video Tech*, 2014, 24: 905–914
- 10 Niranjayan S, Beaulieu N C. The BER optimal linear rake receiver for signal detection in symmetric alpha-stable noise. *IEEE Trans Commun*, 2009, 57: 3585–3588
- 11 Niranjayan S, Beaulieu N C. BER optimal linear combiner for signal detection in symmetric alpha-stable noise: small values of alpha. *IEEE Trans Wirel Commun*, 2010, 9: 886–890
- 12 Rajan A, Tepedelenlioglu C. Diversity combining over rayleigh fading channels with symmetric alpha-stable noise. *IEEE Trans Wirel Commun*, 2010, 9: 2968–2976
- 13 Sureka G, Kiasaleh K. Sub-optimum receiver architecture for AWGN channel with symmetric alpha-stable interference. *IEEE Trans Commun*, 2013, 61: 1926–1935
- 14 Yang F, Zhang X. BER and SER analyses for M-ary modulation schemes under symmetric alpha-stable noise. In: Proceedings of IEEE Global Communications Conference on Wireless Communication Symposium, Austin, 2014. 3983–3988
- 15 Chen Y F, Chen J M. Novel S α S PDF approximations and their applications in wireless signal detection. *IEEE Trans Wirel Commun*, 2015, 14: 1080–1091
- 16 Mohammadreza H B, Hamidreza A. A new alpha and gamma based mixture approximation for heavy-tailed Rayleigh distribution. In: Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Brisbane, 2015. 3711–3715
- 17 Nikias C L, Shao M. *Signal Processing With Alpha-Stable Distributions and Applications*. Hoboken: John Wiley & Sons, 1995. 13–14
- 18 Kuruoglu E E, Zerubia J. Modeling SAR images with a generalization of the Rayleigh distribution. *IEEE Trans Image Process*, 2004, 13: 527–533
- 19 Sun Z G, Hang C Z. Estimate of distribution for SAR image based on the generalized Rayleigh distribution. In: Proceedings of the World Congress on Intelligent Control and Automation, Dalian, 2006. 9547–9551
- 20 Sun Z G, Han C Z. Heavy-tailed Rayleigh distribution: a new tool for the modeling of SAR amplitude images. In: Proceedings of International Geoscience and Remote Sensing Symposium, Boston, 2006. 1253–1256
- 21 Pastor G, Mora-Jimenez I, Caamano A J, et al. Log-cumulant matching approximation of heavy-tailed-distributed aggregate interference. In: Proceedings of IEEE International Conference Communications, London, 2015. 4811–4815
- 22 Liu T, Cui H G, Mao T, et al. Modeling multilook polarimetric SAR images with heavy-tailed Rayleigh distribution and novel estimation based on matrix log-cumulants. *Sci China Inf Sci*, 2013, 56: 062306
- 23 Kuruoğlu E E. Density parameter estimation of skewed α -stable distributions. *IEEE Trans Signal Process*, 2001, 49: 2192–2201
- 24 Veillette M. Matlab code alpha-stable distributions. <http://math.bu.edu/people/mveillette/html/alphastablepub.html>
- 25 Gonzalez J G, Paredes J L, Arce G R. Zero-order statistics: a mathematical framework for the processing and characterization of very impulsive signals. *IEEE Trans Signal Process*, 2006, 50: 3839–3851
- 26 Nassar M, Gulati K, Sujeeth A, et al. Mitigating near-field interference in laptop embedded wireless transceivers. In: Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Nevada, 2008. 1405–1408

Parameter estimator based on the log-cumulant and its performance analysis for heavy-tailed-distributed impulsive interference

Kang WANG¹, Yi GONG^{2*}, Zhijiang XU^{3,4}, Weidang LU^{3,4} & Jingyu HUA^{3,4}

1. Department of Computer and Information Technology, Zhejiang Police College, Hangzhou 310053, China;
2. Department of Electrical and Electronic Engineering, South University of Science and Technology of China, Shenzhen 518055, China;

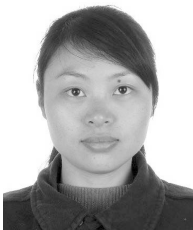
3. *College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China;*

4. *Zhejiang Provincial Key Laboratory of Communication Networks and Applications, Hangzhou 310023, China*

*Corresponding author. E-mail: gong.y@sustc.edu.cn

Abstract The impulsive interference in many wireless communication networks can be modeled as a symmetric α -stable distribution noise. The probability density function of the interference needs to be obtained in advance in signal detection, channel decoding, wireless network outage probability, and bit error rate analysis application scenarios. The method of log-cumulant is used to estimate the characteristic exponent and dispersion of the interference. Furthermore, the probability distribution of the estimated parameters is derived in detail, which can be used for quantitative analysis to evaluate the estimation reliability. In addition, the noise in the receiver of the actual system is bivariate mixture noise including the independent Gaussian noise and S α S interference. We suggest that the bivariate noise can be approximated from its univariate counterpart. We prove that this type of approximation is reasonable by means of simulation and numerical calculation. The relationship between the parameters of the mixture noise and the geometric power signal-to-noise ratio are provided in this paper based on this assumption. The estimator based on the log-cumulant and performance analysis is therefore still valid in the bivariate noise environment.

Keywords log-cumulant, heavy-tailed Rayleigh distribution, symmetric α -stable, characteristic exponent, dispersion



Kang WANG was born in 1978. She received her B.S. and M.S. degrees in Information and Communication Engineering from Xi'an Jiaotong University, Xi'an, in 2001 and 2004, respectively. She was a lecturer in the Department of Computer and Information Technology at the Zhejiang Police College, Hangzhou, in 2006. She was promoted to associate professor in 2013.

Her main research interests include wireless communication theory, signal detection, and physical layer security for wireless systems.



Yi GONG received his Ph.D. degree in electrical engineering from the Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, in 2002. He then joined the Hong Kong Applied Science and Technology Research Institute as a member of the professional staff. He is now a professor at the Southern University of Science and Technology in Shenzhen, China. Prior to his current appointment, he was employed at the

Nanyang Technological University, Singapore, with which he still has active collaborations. His research interests include cognitive radio, full-duplex communications, wireless energy harvesting, and physical layer security for wireless systems.